F 2557 F 2557+ 18-20. nr. 1965.
R
118 1576

1
TOMUL 18
1 9 6 5

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

1965 OKT 29

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÂNE

Comitetul de redacție

Acad. **E. CARAFOLI** — *redactor responsabil,*

Acad. **D. DUMITRESCU** — *redactor responsabil adjunct,*

Prof. **I. ANTON,** membru corespondent al Academiei R.P.R.,

Prof. **GH. MANEA,** membru corespondent al Academiei R.P.R.,

Prof. **CR. MATEESCU,** membru corespondent al Academiei R.P.R.,

Ing. **N. PATRAULEA,** membru corespondent al Academiei R.P.R.,

Prof. **N. TIPEI,** membru corespondent al Academiei R.P.R.,

Prof. **R. VOINEA,** membru corespondent al Academiei R.P.R.,

Conf. **RADU C. BOGDAN,** *secretar de redacție.*

Pentru a vă asigura colecția completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pe anul 1965.

În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.

Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134—135 sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei.

EA RPR

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Redacția: **București,**

str. C. Mille 15, tel. 17.34.09

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 18, nr. 1 1965

SUMAR

STUDII Pag.

D. MANGERON şi L. E. KRIVOŞEIN, Noi metode de calcul numeric al soluţiilor diferitelor sisteme integrodiferenţiale interesînd mecanica aplicată. II. Sisteme integrodiferenţiale ordinare polilocale 3

RADU PRIŞCU, Solicitări termice exterioare la barajele arcuite 35

DECEBAL ANASTASESCU şi ION MUNTEANU, Efectul variaţiei de temperatură şi al deplasării reazemelor în calculul cadrelor spaţiale 59

I. APPELTAUER şi E. CUTEANU, Contribuţie la problema rezemării intermediare a barelor cu pereţi subţiri 77

V. PETCU, Calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat, rezemate pe trei laturi, solicitate de încărcări uniform distribuite 91

L. LIBRESCU, Asupra teoriei învelitorilor şi plăcilor elastice anizotrope 117

I. SZÉKELY, Angrenaj cilindro-conic cu contact liniar 135

LEON LIVOVSCHI, Automate finite cu elemente mecanice 147

GH. VASILCA, OLGA BIŢĂ şi I. DINCĂ, Aspecte de uzură şi rodaj la unele structuri eutectice de aluminiu 159

W. SZABLEWSKI, Scurgerile turbulente în dîra surselor termice şi de difuziune . . . 173

J. FÖRSTE, Mişcarea staţionară a jetului laminar al unui lichid vîscos incompresibil dintr-un orificiu circular într-un semispaţiu la numere Reynolds mici 193

G. MANOLESCU, Asupra stabilităţii meniscurilor separînd două faze imiscibile, în tuburi cilindrice, verticale în condiţii „statice" 201

RECENZII 211

PUBLICAŢII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 217

St. cerc. mec. apl. Tom. 18 Nr. 1 p. 1—218 Bucureşti 1965

1989

F 2557

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtár
Folyóiratleltár
254 | 1966

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

NOI METODE DE CALCUL NUMERIC AL SOLUȚIILOR DIFERITELOR SISTEME INTEGRODIFERENȚIALE INTERESÎND MECANICA APLICATĂ

II. SISTEME INTEGRODIFERENȚIALE ORDINARE POLILOCALE [1]

de D. MANGERON [2] și L. E. KRIVOȘEIN [3]

518; 621, 01

Autorii, continuîndu-și seria de studii consacrată calculului numeric al soluțiilor diferitelor sisteme integrodiferențiale interesînd mecanica aplicată [1—8], expun, după o introducere referitoare la problema de existență, unicitate și stabilitate a soluțiilor sistemelor integrodiferențiale polilocale (1.1), (1.2), unele noi metode de calcul numeric relative la determinarea soluțiilor sistemelor liniare și neliniare de forma (1.1), (1.2); (1.1), (1.34); (1.34), (2.68) ș.a. Printre metodele elaborate citățm : analiza polinominală cu ajutorul polinoamelor lui Kantorovič și Bernstein, metoda derivării în raport cu parametru. Rezultatele expuse se bazează pe unele lucrări ale autorilor inserate în dările de seamă ale unor academii de științe [11], [12], [19], [20], [21], [33].

§ 1. INTRODUCERE

Vasta gamă de schematizări matematice sub formă de sisteme integrodiferențiale, reprezentînd cele mai variate fenomene fizice și tehnice, s-a extins foarte rapid în ultimii ani, cuprinzînd domenii mereu noi. Astfel, curînd după elaborarea de către acad. Elie Carafoli a teoriei jeturilor late-

[1]) Publicată în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **10**, *1* (1965) (în lb. engleză).

[2]) Institutul politehnic Iași.

[3]) Academia de Științe din R.S.S. Kirghizia, U.R.S.S.

rale lichide [1], R. Bellman şi colaboratori obţin, în cadrul dinamicii gazelor rarefiate, ecuaţia [2]

$$u\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} = \tau\left[-f_1 + \frac{2\mathrm{e}^{-c^2}}{\pi^{3/2}} v \iiint_{\dots} f_1 v \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\right],$$

în care f_1 este distribuţia de viteză perturbată a gazului rarefiat, supusă la anumite condiţii de contur, N. N. Bogoliubov, M. Born, H. S. Green, J. G. Kirkwood şi J. Yvon ajung, în cadrul studiului proceselor evolutive, la ecuaţii integrodiferenţiale neliniare, strîns legate de ecuaţiile lui L. Boltzmann, numite astăzi ecuaţiile B. B. G.K.Y. [3], iar Th. Vogel, studiind soluţiile periodice ale sistemelor ereditare [4] ajunge la ecuaţii integrodiferenţiale de ordinul al doilea, pe care le interpretează ca fiind sisteme dinamice cu ereditate, ş.a.

Recentele congrese, ale căror lucrări nu au fost folosite în prima parte a acestui studiu, ca, de exemplu, Congresul internaţional al matematicienilor de la Stockholm [5], Congresul unional de mecanică teoretică şi aplicată [6] şi al VIII-lea Congres indian de mecanică teoretică şi aplicată [7], au scos în evidenţă o mulţime de probleme de contur care se referă la ecuaţii integrodiferenţiale şi răspund, în limita abstractizărilor făcute, la fenomene de magneto-fluido-dinamică şi fizica plasmei (H. Grad [5, p. 560—583]), la probleme de stabilitate a mişcărilor periodice (J. Moser [5, p. 584—586]), la medii grele, prevăzute cu orificii circulare şi necirculare (D. I. Şerman [6, p. 405—467]), la deformaţii elastoplastice, curgere lentă şi relaxare (B. R. Seth [7, p. 1—3]) ş.a. La acestea se adaugă, de exemplu, diferite schematizări matematice sub formă de sisteme integrodiferenţiale obţinute de G.N. Savin [8] ca rezultat al unui larg şir de încercări îndrăzneţe făcute asupra unor cabluri de ascensoare în funcţiune la unele mine din R.S.S. Ucraineană, serii de ecuaţii integrofuncţionale obţinute prin aplicarea unei noi tehnici variaţionale în studiul problemelor de contur polivibrante (D. Mangeron [9], [10]) ş.a.

Într-un număr de lucrări anterioare ale autorilor [11]—[16] s-au studiat probleme de existenţă, de unicitate şi de aproximare a soluţiilor problemelor de contur bilocale şi integrale pentru unele clase de ecuaţii integrodiferenţiale cu derivate ordinare. În această lucrare, care constituie o continuare a lucrării [17], se construiesc, prin metode de calcul numeric, în vederea studiilor interesînd mecanica aplicată, soluţii ale diferitelor probleme de contur polilocale relative la ecuaţii integrodiferenţiale (1.2) (1.34). În rezolvarea problemelor propuse se utilizează pe scară largă metoda ecuaţiilor integrale, la care se ajunge cu ajutorul unor transformări integrale convenabil elaborate. Pentru a se păstra unitatea expunerii şi independenţa necesară urmăririi acestui studiu, în § 1 se expun unele probleme relative la existenţă, unicitate şi stabilitate a soluţiilor problemelor polilocale şi de condiţii iniţiale relative la ecuaţii integrodiferenţiale liniare şi neliniare cu derivate ordinare. În § 2, consacrat determinării cu aproximaţie a soluţiilor problemelor puse, se dă un şir de noi formule de cvadratură, ce se pot adăuga cu succes la vastul arsenal de formule de cubatură şi cvadratură, elaborat sub conducerea tov. acad. Tiberiu

Popoviciu şi D. V. Ionescu la Institutul de calcul al filialei Cluj a Academiei R.P.R. [18]. După expunerea formulelor de evaluări de erori comise se adînceşte metoda polinomială, elaborată de autori în [19], [20] prin stabilirea aproximaţiilor polinomiale cu ajutorul polinoamelor lui L. V. Kantorovič (formula (2.81)), făcîndu-se apoi şi un studiu comparativ cu seria de rezultate ce se obţin în această ordine de idei prin utilizarea puternicului aparat de investigaţie constituit din polinoamele lui S. N. Bernstein [21]. Trebuie menţionat faptul că metodele liniarizării şi derivării în raport cu parametru, folosite în rezolvarea problemelor neliniare, pot fi utilizate aşa cum se va vedea în [22], şi în studiul problemelor de contur relative la ecuaţii integrodiferenţiale neliniare cu derivate parţiale.

§ 1. EXISTENŢĂ ŞI UNICITATE A SOLUŢIILOR PROBLEMELOR DE CONTUR POLILOCALE INTEGRODIFERENŢIALE

1. Să construim în domeniul $g = \{a \leqslant x \leqslant b;\ \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2\}$ o soluţie de n ori continuu derivabilă a problemei de contur polilocale

$$T_j[y] \equiv \sum_{i=0}^{n-1} [a_{ij} y^{(i)}(a) + b_{ij} y^{(i)}(b)] - \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=0}^{\nu} c_{ijk} y^{(i)}(x_k) = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

referitoare la ecuaţia integrodiferenţială liniară

$$L[y, \lambda] = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{i=0}^{m} K_i(x, t)\, y^{(i)}(t)\, dt, \tag{1.2}$$

în care a_{ij}, b_{ij}, c_{pjk}, a, b $(i = 0,1, \ldots, n-1;\ p = 0, 1, \ldots, n-2;$ $k = 1, 2, \ldots, \nu;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ sînt numere date,

$$L[y, \lambda] \equiv y^{(n)}(x) - \lambda \sum_{i=2}^{n} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x);$$

$a_i(x)$, $K_j(x, t)$, $f(x)$ $(i=2, 3, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m)$, $n \geqslant m$, sînt funcţii continue date pentru toţi $(x, t) \in [a, b]$; λ este un parametru şi $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_\nu < b$.

Introducînd funcţia

$$\varphi(x) = \sum_{i=2}^{n} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x) + \int_a^b \sum_{i=0}^{m} K_i(x, t)\, y^{(i)}(t)\, dt \tag{1.3}$$

şi folosind funcţia lui Green $G(x, s)$ relativă la problema de contur [4])

$$y^{(n)}(x) = 0;\ R_j[y] \equiv \sum_{i=0}^{n-1} [a_{ij} y^{(i)}(a) + b_{ij} y^{(i)}(b)] = 0 \ (j=1, 2, \ldots, n), \tag{1.4}$$

[4]) Rezultatele la care se face apel aici constituie extinderi la sisteme diferenţiale liniare de ordin oarecare a rezultatelor elaborate de M. Picone [23] în teza sa de agregaţie, devenită repede clasică. Calculul funcţiilor lui Green pentru sisteme diferenţiale liniare cu derivate parţiale totale, constituind într-un anume sens o generalizare a rezultatelor obţinute de M. Picone la spaţii cu mai multe dimensiuni, se găseşte într-o serie de lucrări datorite lui D. Mangeron [24].

se obţine

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i\, y_i(x) + \int_a^b G(x, s)\,[f(s) + \lambda\varphi(s)]\,ds, \tag{1.5}$$

unde prin $r_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ s-au notat constante necunoscute. Ţinînd seama de faptul că funcţia (1.5) satisface ecuaţia (1.2) oricare ar fi valorile constantelor $r_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$, ne propunem să determinăm aceste constante impunînd funcţiei (1.5) condiţiile de contur (1.1)

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\, T_j[y_i] = -\,T_j\left[\int_a^b G(x, s)\,\{f(s) + \lambda\varphi(s)\}\,ds\right] \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.6}$$

În ipoteza că inegalitatea $\det \|T_j[y_i]\| \neq 0$ este îndeplinită, din (1.6) se deduce

$$r_i = \rho_i + \lambda\int_a^b \sigma_i(s)\,\varphi(s)\,ds \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.7}$$

în care prin $\rho_i, \sigma_i(s)\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ s-au notat mărimi cunoscute. În consecinţă (1.5), ţinînd seama de (1.7), devine

$$y(x) = \psi(x) + \lambda\int_a^b M(x, s)\,\varphi(s)\,ds, \tag{1.8}$$

$\psi(x)$ fiind

$$\psi(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \rho_i\, y_i(x) + \int_a^b G(x, s) f(s)\,ds\,;\quad M[x, s] \equiv G(x, s) + \sum_{i=1}^{n} y^i(x), \sigma_i(s).$$

Substituind în (1.3) $y^{(n-i)}(x)$ şi $y^{(i)}(t)$, prin expresiile lor ce se deduc din (1.8), se obţine următoarea ecuaţie integrală :

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = F(x), \tag{1.9}$$

în care prin $K(x, s)$ şi $F(x)$ s-au notat funcţii continue cunoscute pentru toţi x, $s \in [a, b]$. Rezultatele de mai sus permit să se enunţe următoarele teoreme :

TEOREMA 1. *Dacă parametrul* λ *nu este o valoare caracteristică a nucleului* $K(x, s)$, *atunci problema de contur* (1.1), (1.2) *posedă o soluţie unică de forma*

$$y(x) = \psi(x) + \lambda\int_a^b M(x, s)\,h(s, \lambda)\,ds, \tag{1.10}$$

$h(x, \lambda)$ *fiind o soluţie continuă a ecuaţiei integrale* (1.9). *Dacă* λ *este o valoare caracteristică de rang* r *a nucleului* $K(x, s)$ *şi dacă* $\alpha_i(x)(i = 1, 2, \ldots, r)$ *sînt funcţiile caracteristice corespunzătoare valorii caracteristice relative la*

nucleul $K(s, x)$, soluția problemei propuse poate fi reprezentată sub forma (1.8) *atunci și numai atunci cînd au loc egalitățile*

$$\int_a^b \alpha_i(x) F(x)\,dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{1.11}$$

Din ultima ipoteză avem

$$y(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b M(x, s)\left[\beta_0(s, \lambda) + \sum_{i=1}^{r} c_i \beta_i(s)\right] ds, \tag{1.12}$$

în care $\beta_i(x)\,(i = 1, 2, \ldots, r)$ sînt funcții caracteristice corespunzătoare valorii caracteristice λ a nucleului $K(x, s)$, iar $\beta_0(x, \lambda)$ este o soluție particulară arbitrară a ecuației (1.9).

O b s e r v a ț i i . *a*) Teorema 1 rămîne valabilă și atunci cînd funcțiile $K_i(x, s)$ posedă proprietatea

$$K_i(x, s) \equiv \begin{cases} K_{i0}(x, s) \not\equiv 0, & a \leqslant s \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & a \leqslant x \leqslant s \leqslant b. \end{cases} \tag{1.13}$$

b) Dacă pentru toți $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ este satisfăcută inegalitatea

$$|\lambda| < 1 : \max_{[a,b]} \int_a^b |K(x, s)|\,ds, \tag{1.14}$$

problema (1.1), (1.2) posedă o soluție unică de n ori continuu derivabilă pentru toți $x \in [a, b]$ și care poate fi reprezentată sub forma (1.10).

c) Dacă $c_{ijk} = 0\,(i = 0, 1, \ldots, n-2;\ j = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, \nu)$, atunci rezultă că în (1.5) $r_j = 0\ (j = 1, 2, \ldots, n)$.

2. Să studiem acum problema stabilității relativă la sistemul integrodiferențial polilocal (1.1), (1.2). Presupunem că coeficienții cunoscuți care figurează în (1.1), (1.2) au suferit niște perturbații de pe urma cărora se ajunge la sistemul

$$T_{j1}[z] \equiv \sum_{i=0}^{n-1} [a_{ji}, z^{(i)}(a) + b_{ji1} z^{(i)}(b)] - \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{k=1}^{\nu} c_{iik_1} z^{(i)}(x_k) = 0, \tag{1.15}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$L_1[z, \lambda] = f_1(x) + \lambda \int_a^b \sum_{i=0}^{m} K_{i1}(x, t)\, z^{(i)}(t)\,dt. \tag{1.16}$$

Folosind aceeași metodă care s-a utilizat la construcția ecuațiilor integrale (1.8), (1.9), se obține sistemul de ecuații

$$z(x) = \psi_1(x) + \lambda \int_a^b M_b(x, s)\, \varphi_1(s)\,ds, \tag{1.17}$$

$$\varphi_1(x) - \lambda \int_a^b K_b(x, s)\, \varphi_1(s)\,ds = F_1(x). \tag{1.18}$$

Să evaluăm ordinul de vecinătate a funcţiilor $y = y(x)$ şi $z = z(x)$ pentru toţi $x \in [a, b]$. Vom presupune în acest scop că λ nu este o valoare caracteristică a nucleelor $K(x, s)$ şi $K_b(x, s)$. Atunci

$$\varphi(x) - \varphi_1(x) = F(x) - F_1(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\,[\varphi(s) - \varphi_1(s)]\,ds +$$

$$+ \lambda \int_a^b [K(x, s) - K_b(x, s)]\,\varphi_1(s)\,ds,$$

$$\varphi(x) - \varphi_1(x) = \Delta(x, \lambda) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda)\,\Delta(s, \lambda)\,ds \equiv \mu(x, s), \qquad (1.19)$$

în care prin $R(x, s, \lambda)$ s-a notat nucleul rezolvant al nucleului $K(x, s)$ şi

$$\Delta(x, \lambda) \equiv F(x) - F_1(x) + \lambda \int_a^b [K(x, s) - K_b(x, s)]\,\varphi_1(s)\,ds.$$

$$|y(x) - z(x)| \leqslant |\psi(x) - \psi_1(x)| + |\lambda| \int_a^b [|M(x, s)|\,|\varphi(s) - \varphi_1(s)| +$$

$$+ |M(x, s) - M_b(x, s)|\,|\varphi_1(s)|]ds = |\psi(x) - \psi_1(x)| +$$

$$+ \int_a^b |\lambda\,[M(x, s) - M_b(x, s)]\,\varphi_1(s)|\,ds + \int_a^b |\lambda\,M(x, s)\,\mu(s, \lambda)|\,ds.$$

În consecinţă, dacă

$$|\psi(x) - \psi_1(x)| < \varepsilon : 3\,;\ |M(x, s) - M_b(x, s)| < \varepsilon : \left[3 \max_g \int_a^b |\lambda\,\varphi_1(s)|\,ds\right];$$

$$|\mu(x, \lambda)| < \varepsilon : \left[3 \max_g \int_a^b |\lambda\,M(x, s)|\,ds\right] \quad (x, \lambda) \in g = \{a \leqslant x \leqslant b\,;\ \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2\}, \qquad (1.20)$$

atunci rezultă

$$|y(x) - z(x)| < \varepsilon, \qquad x \in [a, b]$$

şi, prin urmare, se poate enunţa :

TEOREMA 2. *În ipoteza că problemele integrodiferenţiale polilocale* (1.1.), (1.2) *şi* (1.15), (1.16) *posedă în domeniul g soluţii unice de n ori continuu derivabile (în raport cu x) condiţiile* (1.20) *asigură pentru segmentul* $[a, b]$, $\lambda \in [\lambda_1\ \lambda_2]$ *mărginirea deviaţiei între funcţia* $z(x)$ *şi funcţia* $y(x)$ *printr-un* $\varepsilon > 0$ *fixat dinainte.*

În cazul cînd nu se cunoaşte evaluarea mărimii $|\mu(x, \lambda)|$, se poate folosi, în loc de formula (1.19), expresia

$$\varphi(x) - \varphi_1(x) = F(x) - F_1(x) + \lambda \int_a^b [K(x, s) - K_b(x, s)] \varphi(s)\, ds +$$

$$+ \lambda \int_a^b R_1(x, t, \lambda) \left\{ F(t) - F_1(t) + \lambda \int_a^b [K(t, s) - K_b(t, s) \varphi(s)\, ds \right\} dt \equiv$$

$$\equiv F_2(x, \lambda) + \lambda \int_a^b M_1(x, t, \lambda)\, \varphi(t),\, dt, \qquad (1.21)$$

în care prin $R_1(x, t, \lambda)$ s-a notat nucleul rezolvant al nucleului $K_b(x, t)$. Presupunînd îndeplinită inegalitatea

$$l = 1 - \max_g \int_a^b |\lambda M_1(x, s, \lambda)|\, ds > 0, \qquad (1.22)$$

din (1.21) se deduce

$$\max_{[a, b]} |\varphi(x)| \leqslant \max_g |\varphi_1(x) - F_2(x, \lambda)| : l = l_1. \qquad (1.23)$$

Prin urmare, rezultă

$$|\varphi(x) - \varphi_1(x)| \leqslant |F_2(x, \lambda) + l_1 \int_a^b |\lambda M_1(x, s, \lambda)|\, ds \equiv S(x, \lambda);$$

$$|y(x) - z(x)| \leqslant |\psi(x) - \psi_1(x) + \lambda \int_a^b [M(x, s) - M_b(x_1 s)] \varphi_1(s)\, ds +$$

$$+ \int_a^b |\lambda M(x, s)|\, S(s, \lambda)\, ds. \qquad (1.24)$$

În consecinţă, dacă

$$\max_g |\psi(x) - \psi_1(x) + \lambda \int_a^b [M(x, s) - M_b(x, s)] \varphi_1(s)\, ds| < \varepsilon : 2, \qquad (1.25)$$

$$\max_g \int_a^b |\lambda M(x, s)|\, S(s, \lambda)\, ds < \varepsilon : 2, \qquad (1.26)$$

atunci

$$|y(x) - z(x)| < \varepsilon, \qquad x \in [a, b].$$

Cele de mai sus, permit enunţarea următoarei teoreme:

TEOREMA 3. *Pentru ca problema* (1.1.), (1.2) *să posede o soluţie stabilă în raport cu mici oscilaţii ale mărimilor cunoscute care figurează în* (1.1), (1.2), *ajunge ca să fie îndeplinite inegalităţile* (1.22), (1.25), (1.26).

În ipoteza că inegalitatea (1.22) *nu este îndeplinită, din* (1.21) *se obţine*

$$\varphi(x) = F_3(x, \lambda, \varphi) + \lambda \int_a^b M_2(x, t, \lambda)\, \varphi(t)\, dt, \tag{1.27}$$

unde

$$F_3(x, \lambda, \varphi) \equiv \varphi_1(x) + F_2(x, \lambda) + \lambda \int_a^b M_3(x, t, \lambda)\, \varphi(t)\, dt,$$

$$M_2(x, t, \lambda) + M_3(x, t, \lambda) \equiv M_1(x, t, \lambda).$$

Să alegem nucleul $M_2(x, t, \lambda)$ în aşa fel ca nucleul său rezolvant $R_2(x, t, \lambda)$ să fie cunoscut. Atunci rezultă

$$\varphi(x) = F_3(x, \lambda, \varphi) + \lambda \int_a^b R_2(x, t, \lambda)\, F_3(t, \lambda, \varphi)\, dt = F_4(x, \lambda) +$$

$$+ \int_a^b M_4(x, t, \lambda)\, \varphi(t)\, dt. \tag{1.28}$$

Dacă

$$l_2 = 1 - \max_g \int_a^b |\lambda\, M_4(x, t, \lambda)|\, dt > 0, \tag{1.29}$$

se obţine

$$|\varphi(x) - \varphi_1(x)| \leqslant |F_3(x, \lambda)| + l_3 \int_a^b |\lambda\, M_1(x, s, \lambda)|\, ds \equiv \Delta_1(x, \lambda)$$

şi, prin urmare, avem

$$|y(x) - z(x)| \leqslant \left| \psi(x) - \psi_1(x) + \lambda \int_a^b [M(x, s) - M_b(x, s)]\, \varphi_1(s)\, ds \right| +$$

$$+ \int_a^b |\lambda\, M(x, s)|\, \Delta_1(s, \lambda)\, ds \qquad x, \lambda \in g.$$

O reprezentare similară se poate obţine dacă se ia ca punct de plecare nucleul $M_4(x, t, \lambda)$.

O b s e r v a ţ i e. Cu prilejul construcţiei sistemului de ecuaţii integrale de forma (1.8), (1.9), putem să folosim şi funcţia lui Green $G(x, s, \lambda)$ relativă la problema de contur

$$L_1[y, \lambda] \equiv y^{(n)}(x) - \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, y^{(n-i)}(x) = 0, \quad R_j[y] = 0,$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.30}$$

în care $c_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt funcţii continue cunoscute pentru toţi $x \in [a, b]$. Să notăm în acest scop

$$\varphi(x) \equiv \sum_{i=2}^{n} [a_i(x) - c_i(x)] y^{(n-i)}(x) + \int_a^b \sum_{i=0}^{m} K_i(x, t) y^{(i)}(t)\, dt. \quad (1.31)$$

Rezultă apoi

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i(\lambda)\, y_i(x, \lambda) + \int_a^b G(x, s, \lambda)\, [f(s) + \lambda \varphi(s)]\, ds, \quad (1.32)$$

în care prin $y_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ s-a notat un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei $L_1[y, \lambda] = 0$.
Presupunem că mărimile

$$r_i(\lambda) = \varepsilon_i(\lambda) + \lambda \int_a^b g_i(s, \lambda)\, \varphi(s)\, ds \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (1.33)$$

au fost determinate din sistemul de ecuaţii

$$\sum_{i=1}^{n} r_i(\lambda)\, T_j[y_i(x, \lambda)] = -\int_a^b T_j[G][f(x) + \lambda \varphi(s)]\, ds \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Atunci, înlocuind (1.33) în (1.32) şi rezultatul obţinut în (1.31), se ajunge la următorul sistem de ecuaţii integrale :

$$y(x) = \Phi_1(x, \lambda) + \lambda \int_a^b G_1(x, s, \lambda)\, \varphi(s)\, ds,$$

$$\varphi(x) = \Phi_2(x, \lambda) + \lambda \int_a^b G_2(x, s, \lambda)\, \varphi(s)\, ds,$$

unde $\Phi_i(x, \lambda)$, $G_i(x, s, \lambda)$ $(i = 1, 2)$ sînt funcţii continue cunoscute pentru toţi x, $\lambda \in g$. Sistemul obţinut poate fi luat ca bază de plecare pentru analiza comportării soluţiei problemei (1.1), (1.2), precum şi pentru aproximarea acestei soluţii.

3. Să considerăm acum problema de contur integrodiferenţială polilocală (1.1) neliniară

$$L[y, \lambda] = f(x) + \lambda \int_a^b D(x, t) f_1[t, y(t)]\, dt, \quad (1.34)$$

$f_1[t, y(t)]$ fiind o funcţie neliniară de $y(t)$.
Introducem o funcţie auxiliară

$$\varphi_1(x) \equiv \sum_{i=2}^{n} a_i(x)\, y^{(n-i)}(x). \quad (1.35)$$

Atunci

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i y_i(x) + \int_a^b G(x, s)\, [f(s) + \lambda \varphi_1(s) + \lambda \int_a^b D(s, t) f_1[t, y, (t)]\, dt]\, ds, \quad (1.36)$$

şi pentru determinarea constantelor $r_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ dispunem de sistemul de ecuaţii

$$\sum_{i=1}^{n} r_i T_j [y_i] = - T_j \left\{ \int_a^b G(x, s) [f(s) + \lambda \varphi_1(s) + \right.$$
$$\left. + \lambda \int_a^b D(s, t) f_1 [t, y(t)] \, dt] \, ds \right\}, \tag{1.37}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Dacă inegalitatea $\det \| T_j [y_i] \| \neq 0$ este îndeplinită, din (1.37) se obţine

$$r_i = \rho_i + \lambda \int_a^b \gamma_i(s) \left\{ \varphi_1(s) + \int_a^b D(s, t) f_1 [t, y(t)] \, dt \right\} ds, \tag{1.38}$$

în care prin ρ_i, $\gamma_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ s-au notat mărimi cunoscute. În consecinţă, ecuaţia (1.36), ţinînd seama de (1.38), ia forma

$$y(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b \{N_1(x, s) \varphi_1(s) + N_2(x, s) f_1 [s, y(s)]\} \, ds, \tag{1.39}$$

unde $\psi_i(x)$, $N_1(x, s)$, $N_2(x, s)$ pentru $x, s \in [a, b]$ sînt funcţii cunoscute. Substituind (1.39) în (1.35), se obţine următoarea ecuaţie:

$$\varphi_1(x) - \lambda \int_a^b N(x, s) \varphi_1(s) \, ds = \Phi(x) + \lambda \int_a^b N_3(x, t) f_1 [t, y(t)] \, dt, \tag{1.40}$$

în care $N(x, s)$, $N_3(x, t)$, $\Phi(x)$ sînt funcţii continue cunoscute pentru toţi $x, s, t \in [a, b]$. Prin urmare, dacă λ nu este o valoare caracteristică a nucleului $N(x, s)$, din (1.40) se obţine

$$\varphi_1(x) = \Phi(x) + \lambda \int_a^b N_3(x, s) f_1 [t, y(t)] \, dt + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) \times$$
$$\times \left\{ \Phi(s) + \lambda \int_a^b N_3(s, t) f_1 [t, y(t)] \, dt \right\} ds \equiv \Phi_1(x, \lambda) + \tag{1.41}$$
$$+ \lambda \int_a^b N_4(x, t, \lambda) f_1 [t, y(t)] dt,$$

în care prin $R(x, s, \lambda)$ s-a notat nucleul rezolvant al nucleului $N(x, s)$. Ecuaţia (1.39), ca urmare a acestui fapt, ia forma unei ecuaţii integrale neliniare de tipul lui Hammerstein [25]:

$$y(x) = \psi_2(x, \lambda) + \lambda \int_a^b N_5(x, t, \lambda) f_1 [t, y(t)] \, dt. \tag{1.42}$$

Soluţia ecuaţiei integrale (1.42) poate fi uneori găsită [26] dacă se ţine seama de faptul că unele soluţii ale ecuaţiei funcţionale

$$v(x) = \psi_2(x, \lambda) + \lambda f_1 [x, v(x)] \int_a^b N_5(t, x, \lambda) \, dt \tag{1.43}$$

sînt totodată soluții și ale ecuației (1.42). În acest caz, funcția

$$\psi_2(x, \lambda) + \lambda \int_a^b N_5(x, t, \lambda) f_1[t, v(t)]\, dt \tag{1.44}$$

rezultă a fi soluția problemei (1.1), (1.34)[5]).

Dacă $v = v(x, \lambda)$ nu este o soluție a ecuației (1.42), însă funcția $f_1[x, u(x)]$ satisface în domeniul D condiția lui Lipschitz cu coeficient $\rho(x)$

$$|f_1[x, u_2(x)] - f_1[x, u_1(x)]| \leqslant \rho(x) |u_2(x) - u_1(x)| \tag{1.45}$$

și dacă în domeniul g este satisfăcută inegalitatea

$$l_4 = 1 - \max_g \int_a^b |\lambda N_5(x, t, \lambda)| \rho(t)\, dt > 0, \tag{1.46}$$

atunci succesiunea

$$\{z_{1c}(x)\}_1^\infty \equiv \left\{ \psi_2(x, \lambda) + \lambda \int_a^b N_5(x, t, \lambda) f_1[t, z_{c-1}(t)]\, dt \right\}_1^\infty \tag{1.47}$$

este absolut și uniform convergentă pentru toți $x, \lambda \in g$ către soluția problemei (1.1), (1.34). Are loc următoarea teoremă :

TEOREMA 4. *Dacă* :

1) λ *nu este o valoare caracteristică relativă la nucleul* $N(x, s)$ *și dacă nucleul rezolvant al acestui nucleu este cunoscut* ;

2) *funcția* $f_1(x, y)$ *satisface în domeniul* D *condiția lui Lipschitz* (1.45) *cu coeficient* $\rho(x)$;

3) *are loc în domeniul* g *inegalitatea* (1.46), *atunci problema* (1.1), (1.34) *posedă o soluție unică de n ori continuu derivabilă, care poate fi construită prin metoda aproximațiilor succesive a lui Picard* [6]).

Observație. Dacă λ nu este o valoarea caracteristică de rang r a nucleului $N(x, s)$, putem să ne folosim pentru construirea ecuației de forma (1.40) de funcția lui Green a problemei (1.30), cu condiția însă ca λ să nu fie o valoare proprie a nucleului atașat funcției $\varphi_1(x)$.

Îndeplinirea inegalităților (1.45), (1.46) este suficientă pentru a se asigura stabilitatea soluției problemei (1.1), (1.34) în raport cu mici perturbații ale funcțiilor $\psi_2(x, \lambda)$ și $N_5(x, t, \lambda)$. În adevăr, pentru a fundamenta afirmația de mai sus, să considerăm în loc de ecuația (1.42) ecuația

$$z(x) = \psi_3(x, \lambda) + \lambda \int_a^b N_6(x, t, \lambda) f_1[t, z(t)]\, dt \tag{1.48}$$

---

[5]) Dacă $v = v(x, \lambda)$ posedă derivate continue în raport cu x în domeniul g pînă la ordinul n, nu mai este nevoie să fie construită funcția (1.44), întrucît în acest caz $v = v(x, \lambda)$ rezultă a fi soluția problemei (1.1), (1.34).

[6]) Condiția de lipschitzianitate pentru funcția $f_1(x, y)$ poate fi ușor generalizată dacă se ține seama de unele rezultate obținute de A. Rosenblatt [27] în legătură cu unele lucrări ale lui D. Mangeron [28].

şi să presupunem că avem posibilitatea să evaluăm mărimea $|f_1[x, z(x)]|$ pentru $x, z \in D$. Rezultă atunci

$$|y(x) - z(x)| \leqslant |\psi_2(x,\lambda) - \psi_3(x,\lambda) + \lambda \int_a^b [N_5(x,t,\lambda) - N_6(x,t,\lambda)] \times$$

$$\times f_1[t, z(t)]\,dt| + \int_a^b |\lambda N_5(x,t,\lambda)[y(t) - z(t)]|\,\rho(t)\,dt.$$

Din ultima expresie găsită rezultă

$$\max_{[a,b]} |y(x) - z(x)| \leqslant \max_{g} |\psi_2(x,\lambda) - \psi_3(x,\lambda) +$$

$$+ \lambda \int_a^b [N_5(x,t,\lambda) - N_6(x,t,\lambda)] f_1[t, z(t)]\,dt| : l_4.$$

Presupunem că

$$\max_{g} |\psi_2(x,\lambda) - \psi_3(x,\lambda)| \leqslant \delta_1, \quad \max_{D} |f_1[x, z(x)]| \leqslant \delta_2,$$

$$\max_{g} \int_a^b |\lambda [N_5(x,t,\lambda) - N_6(x,t,\lambda)]|\,dt \leqslant \delta_3. \tag{1.49}$$

Prin urmare, ajunge să se indice pentru orice $\varepsilon > 0$ numerele $\delta_1 < \varepsilon l_4 : 2$ şi $\delta_3 < \varepsilon l_4 : (2\,\delta_2)$, pentru ca să fie îndeplinită inegalitatea

$$|y(x) - z(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a, b],$$

care asigură stabilitatea dorită.

Presupunem acum că funcţia $f_1[t, y(t)]$ este aceea care este supusă la mici [7]) perturbaţii şi fie $z_1(x)$ soluţia ecuaţiei integrale

$$z_1(x) = \psi_2(x,\lambda) + \lambda \int_a^b N_5(x,t,\lambda) f_2[t, z_1(t)]\,dt. \tag{1.50}$$

Din (1.42) şi (1.50) se obţine

$$|y(x) - z_1(x)| \leqslant \int_a^b |\lambda N_5(x,t,\lambda)\{f_1[t, y, (t)] - f_2[t, z_1(t)]\}|dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \{|\lambda N_5(x,t,\lambda)[y(t) - z_1(t)]|\,\rho(t) + |\lambda N_5(x,t,\lambda)[f_1[t, z_1(t)] -$$

$$- f_2[t, z_1(t)]]|\}\,dt,$$

$$\max_{[a,b]} |y(x)| - z_1(x)| \leqslant \max_{g} \int_a^b |\lambda N_5(x,t,\lambda)\{f_1[t, z_1(t) -$$

$$- f_2[t, z_1(t)]\}|\,dt : l_4 \leqslant r\,\delta : l_4,$$

---

[7]) Mici în sensul că

$$|f_1[x, z_1(x)] - f_2[x, z_1(x)] < \delta, \quad x, z_1(x) \in D.$$

în care s-a notat $r = \max_{\sigma} \int_a^b |\lambda N_5(x,t,\lambda)|\,dt$. Prin urmare, dacă $\delta < \varepsilon l_4 : r$, rezultă că $|y(x) - z_1(x)| < \varepsilon$, $x \in [a,b]$. Are loc următoarea teoremă:

TEOREMA 5. *Dacă*: 1) *problema* (1.1), (1.34) *posedă o soluție unică mărginită de n ori continuu derivabilă pentru toți* $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, $x \in [a,b]$; 2) *funcția* $f_1[x, y(x)]$ *satisface în domeniul D condiția lui Lipschitz cu coeficient* $\rho(x)$ *și* 3) *este satisfăcută inegalitatea* (1.46), *atunci funcția* $y = y(x)$, *este stabilă față de mici perturbații ale funcțiilor* $\psi_2(x, \lambda)$ *și* $N_5(x, t, \lambda)$.

Cele de mai sus mai conduc la

TEOREMA 6. *Dacă*: *condițiile* 1) — 3) *din teorema precedentă sînt îndeplinite și dacă în domeniul D are loc inegalitatea* (1.49), *atunci soluția problemei* (1.1), (1.34) *este stabilă în domeniul* $D_1 = \{D, \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2\}$ *față de mici perturbații ale funcției* $f_1[x, y(x)]$.

O b s e r v a ț i e. Mersul raționamentelor de mai sus poate fi aplicat și pentru rezolvarea problemei polilocale

$$\sum_{i=0}^{n-1} [a_{ij}, y^{(i)}(a) - \sum_{k=1}^{\nu} c_{ijk}\, y^{(i)}(x_k) + b_{ij}\, y^{(i)}(b)] = 0 \quad (j=1,2,\ldots,n), \tag{1.51}$$

relativă la ecuația integrodiferențială (1.2) sau (1.34). În acest caz însă funcțiile $M(x, t)$, $K(x, t)$, $N(x, t)$, $N_3(x, t)$, vor avea discontinuități de specia întîi de-a lungul liniei $x = t$.

4. Să indicăm acum o altă cale de analiză a problemei (1.1), (1.2). Vom căuta în acest scop să găsim soluția problemei propuse sub forma

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) + \int_a^x H(x,t)\, h(t)\, dt, \tag{1.52}$$

în care $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sînt constante deocamdată necunoscute, $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ este un sistem de funcții liniar independent și de n ori continuu derivabil pentru toți $x \in [a, b]$, $H(x, t)$ este o funcție dată arbitrar de n ori continuu derivabilă (în raport cu x) de tipul lui Cauchy

$$\left.\frac{\partial^i H(x,t)}{\partial x^i}\right|_{t=x} \equiv \begin{cases} 0, & i = 0, 1, \ldots, n-2, \\ a(x) \neq 0, & i = n-1;\ x \in [a,b], \end{cases} \tag{1.53}$$

iar $h(x)$ este o nouă funcție necunoscută.

Substituind (1.52) în (1.2), se obține următoarea ecuație integrală:

$$h(x) - \lambda \int_a^b P_1(x,t)\, h(t)\, dt = f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x,\lambda) + \lambda \int_a^b P_2(x,t)\, h(t)\, dt, \tag{1.54}$$

unde $P_1(x, t)$, $P_2(x, t)$, $f_i(x, \lambda)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ sînt funcții cunoscute. Introducînd nucleul unificator $P(x, t)$, să transcriem (1.54) sub forma

$$h(x) - \lambda \int_a^b P(x,t)\, h(t)\, dt = f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x,\lambda). \tag{1.55}$$

Din (1.55) rezultă că, dacă λ nu este o valoare caracteristică a nucleului $P(x, t)$, atunci

$$h(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x, \lambda) + \lambda \int_a^b R_0(x, t, \lambda)[f_0(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t, \lambda)]\,dt \equiv \beta_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} c_i \beta_i(x, \lambda), \tag{1.56}$$

în care prin $R_0(x, t, \lambda)$ s-a notat nucleul rezolvant al nucleului $P(x, t)$. Substituind în (1.52) funcția $h(x)$ prin valoarea sa dată prin (1.56), se obține

$$y(x) = z_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} c_i z_i(x, \lambda), \tag{1.57}$$

$z_i(x, \lambda)$ $(i = 0,1, \ldots, n)$ fiind funcții cunoscute de n ori continuu derivabile, $x \in [a, b]$, $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Funcția (1.57) satisface ecuația integrodiferențială (1.2), oricare ar fi valorile constantelor c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Ținînd seama în (1.1) de expresia funcției $y(x)$, dată prin (1.57), se obține următorul sistem algebric:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_{ij}(\lambda) = \delta_j(\lambda) \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.58}$$

în care prin $\alpha_{ij}(\lambda)$, $\delta_j(\lambda)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ s-au notat mărimi cunoscute. Dacă $\det \| \alpha_{ij}(\lambda) \| \neq 0$, din (1.58) se obține $c_i = r_{i0}(\lambda)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Prin urmare.

$$y(x) = z_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} r_{i0}(\lambda) z_i(x, \lambda) \tag{1.59}$$

este soluția problemei (1.1), (1.2).

Dacă $\det \| \alpha_{ij}(\lambda) \| = 0$ și

1) $p_1 = \operatorname{rang} \| \alpha_{ij}(\lambda) \| \neq \operatorname{rang} \| \alpha_{ij}(\lambda), \delta_j(\lambda) \| = p_2$, soluția problemei (1.1), (1.2) nu poate fi pusă sub forma (1.52);

2) $p_1 = p_2 = p$. Soluția problemei (1.1), (1.2) poate fi pusă în corespondență cu acest din urmă caz sub forma (1.52), însă această soluție nu mai este univocă, λ fiind o valoare caracteristică a problemei considerate. Din (1.58) se obține acum

$$c_i = \xi_i(\lambda) + \sum_{r=1}^{k} \xi_{ir}(\lambda) c_{p+r} (k = n - 2;\ i = 1, 2, \ldots, k). \tag{1.60}$$

Din (1.52), ținînd seama de (1.60), rezultă

$$y(x) = \sigma_0(x, \lambda) + \sum_{r=1}^{k} c_{p+r} \sigma_r(x, \lambda), \tag{1.61}$$

c_{p+r} $(r = 1, 2, \ldots, k)$ fiind constante arbitrare.

Fie λ o valoare caracteristică de rang s a nucleului $P(x, t)$. Solubilitatea sau nu a ecuației (1.55) depinde în acest caz de faptul dacă sînt sau nu sînt îndeplinite condițiile de ortogonalitate între ansamblul de funcții caracteristice $m_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ relative la nucleul $P(t, x)$ și termenul liber din ecuația (1.55), și anume

$$\int_a^b m_i(x)\,[f_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x, \lambda)]\,dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{1.62}$$

Presupunem că egalitățile (1.62), au loc și că $n \geqslant s$. Din (1.62), rezultă

$$c_k = d_k(\lambda) + \sum_{i=1}^{n-s} c_{s+i}\, d_{ki}(\lambda) \qquad (k = 1, 2, \ldots, s). \tag{1.63}$$

Din (1.63), ținînd seama de (1.55), se obține

$$\begin{aligned} h(x) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x, \lambda) + \lambda \int_a^b R_0(x, t, \lambda)\,[f_0(t) + \\ + \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t, \lambda)]\,dt + \sum_{i=1}^{s} q_i h_i(x, \lambda) \equiv B_0(x, \lambda) + \\ + \sum_{i=1}^{k} c_{s+i} B_i(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{s} q_i h_i(x, \lambda), \quad k = n - s, \end{aligned} \tag{1.64}$$

unde $R_0(x, t, \lambda)$, $h_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, sînt, respectiv, nucleul rezolvant și funcțiile caracteristice ale nucleului $P(x, t)$ corespunzătoare valorii caracteristice λ considerate. În urma substituirii expresiei funcției $h(x)$ date prin (1.64) în ecuația (1.52), se obține

$$\begin{aligned} y(x) = A_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{s} c_{s+i} A_{s+i}(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{s} q_i H_i(x, \lambda) \equiv \\ \equiv A_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(x, \lambda)\, d_i, \end{aligned} \tag{1.65}$$

notîndu-se aici

$$d_i = \begin{cases} q_i, & i = 1, 2, \ldots, s, \\ c_{s+i}, & i = s+1, s+2, \ldots, k; \end{cases} \qquad \varepsilon_i(x, \lambda) \equiv \begin{cases} H_i(x, \lambda), & i = 1, 2, \ldots, s, \\ A_{s+i}(x, \lambda), & i = 1, 2, \ldots, k. \end{cases}$$

Ținînd seama de (1.65), sistemul de ecuații (1.1), ia forma

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}(\lambda)\, d_i = \varepsilon_j(\lambda) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.66}$$

mărimile $\delta_{ij}(\lambda)$, $\varepsilon_j(\lambda)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ fiind cunoscute. În consecință, dacă $\det \| \delta_{ij}(\lambda) \| \neq 0$, rezultă că constantele d_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se determină în mod univoc din sistemul de ecuații (1.66). Fie $d_i = \theta_i(\lambda)$ $(i =$

MUSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR BUDAPEST 1815

$= 1, 2, \ldots, n$) soluţia acestui din urmă sistem. Rezultă că soluţia sistemului integrodiferenţial polilocal (1.1), (1.2) este dată prin

$$y(x) = A_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} \theta_i(\lambda)\, \varepsilon_i(x, \lambda). \tag{1.67}$$

Dacă $\det \| \delta_{ij}(\lambda) \| = 0$ şi $r_1 = \operatorname{rang} \| \delta_{ij}(\lambda) \| \neq \operatorname{rang} \| \delta_{ij}(\lambda), \varepsilon_j(\lambda) \| = r_2$, soluţia problemei (1.1), (1.2) nu poate fi pusă sub forma (1.52). Dacă, dimpotrivă, $r_1 = r_2 = r$, atunci din (1.66) se obţine

$$d_i = \omega_i(\lambda) + \sum_{p=1}^{k} \omega_{ip}(\lambda)\, d_{k+p}, \quad k = n - r, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.68}$$

Prin urmare,

$$y(x) = A_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{r} \left[\omega_i(\lambda) + \sum_{p=1}^{k} \omega_{ip}(\lambda)\, d_{r+p} \right] \varepsilon_i(x, \lambda) + \\ + \sum_{i=r+1}^{n} d_i \varepsilon_i(x, \lambda) = A(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{k} d_{r+i}\, \sigma_i(x, \lambda), \tag{1.69}$$

în care prin d_{r+i} $(i = 1, 2, \ldots, k)$ s-au notat constante arbitrare.

Presupunem acum că funcţiile $K_i(x, t)$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ posedă proprietatea (1.13). Substituind (1.52) în (1.2), se obţine următoarea ecuaţie integrală de tip Volterra:

$$h(x) - \lambda \int_a^x \Gamma(x, t)\, h(t)\, dt = f_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x, \lambda), \tag{1.70}$$

unde $\Gamma(x, t)$, $f_0(x)$, $f_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt funcţii continue cunoscute, definite în domeniul $a \leqslant x, t \leqslant b$; $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$. Deoarece ecuaţia (1.70) posedă pentru orice λ finit o soluţie continuă, pe care o vom transcrie sub forma

$$h(x) = s_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} c_i s_i(x, \lambda), \tag{1.71}$$

rezultă, în urma înlocuirii în (1.52) a funcţiei $h(x)$ prin expresia sa dată prin (1.71),

$$y(x) = \pi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} c_i \pi_i(x, \lambda), \tag{1.72}$$

în care $\pi_i(x, \lambda)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ sînt funcţii cunoscute de n ori continuu derivabile în raport cu variabila $x \in [a, b]$. Prin urmare, dacă inegalitatea $\det \| T_j [\pi_i(x, \lambda)] \| \neq 0$ este îndeplinită, λ nu este o valoare caracteristică a problemei considerate. În consecinţă, constantele c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se determină în mod univoc din sistemul de condiţii de contur

$$c_i = c_i(\lambda) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

şi

$$y(x) = \pi_0(x, \lambda) + \sum_{i=1}^{n} c_i(\lambda)\, \pi_i(x, \lambda).$$

Dacă $r_1 = \text{rang}\,||\,T_j\,[\pi_i(x,\,\lambda)]\,|| \neq \text{rang}\,||\,T_j\,[\pi_i(x,\,\lambda);\,T_j\,[\pi_0(x,\,\lambda)]|| = r_2$, soluția problemei considerate nu poate fi pusă sub forma (1.52). Dacă, dimpotrivă, $r_1 = r_2 = p$, soluția aceleiași probleme poate fi pusă sub forma (1.52), însă această soluție conține $n-p$ constante arbitrare.

§ 2. REZOLVAREA CU APROXIMAȚIE A PROBLEMELOR POLILOCALE INTEGRODIFERENȚIALE (1.1), (1.2); (1.1), (1.34); (1.34), (2.68)

1. Presupunem că problema polilocală integrodiferențială liniară (1.1), (1.2) este redusă la sistemul de ecuații integrale (1.8), (1.9). Ca urmare a acestui fapt, dacă $\overline{\varphi}\,(x,\,\lambda)$ este o soluție aproximativă a ecuației (1.9), soluția aproximativă $\overline{y}(x)$ a ecuației (1.2) relativă la condițiile polilocale (1.1), se exprimă sub forma

$$\overline{y}\,(x) = \psi\,(x) + \lambda\int_a^b M\,(x,\,s)\,\overline{\varphi}\,(s,\,\lambda)\,ds. \tag{2.1}$$

Deoarece funcția $\overline{\varphi}\,(x,\,\lambda)$ poate fi construită efectiv pe mai multe căi, în cele ce urmează vom elabora unele dintr-însele.

2. Să reprezentăm partea integrală din (1.9) sub forma

$$\int_a^b K(x,\,s)\,\varphi(s)\,ds = \sum_{i=1}^{k}\varphi\,(\tau_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x,s)ds + \rho(x);\ \tau_i \in [x_{i-1}, x_i]. \tag{2.2}$$

Atunci

$$\varphi\,(x) - \lambda\sum_{i=1}^{k}\varphi\,(\tau_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} K\,(x,s)ds = F(x) + \lambda\rho\,(x). \tag{2.3}$$

Introducînd notațiile

$$\varphi_i = \varphi(\tau_i);\ K_{ij} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x_j,\,s)\,ds;\ \rho_i = \rho\,(x_i), \tag{2.4}$$

se obține, dacă se au în vedere (2.4), următorul sistem de ecuații algebrice:

$$\varphi_j - \lambda\sum_{i=1}^{1k} K_{ij}\varphi_i = f_j + \lambda\rho_i \qquad (j = 1,\,2,\,\ldots,\,k). \tag{2.5}$$

Prin urmare, dacă

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 1-\lambda K_{11} & -\lambda K_{21}\ldots-\lambda K_{k1} \\ -\lambda K_{12} & 1-\lambda K_{22}\ldots-\lambda K_{k2} \\ & \ldots\ldots\ldots \\ -\lambda K_{1k} & -\lambda K_{2k} \quad 1-\lambda K_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.6}$$

din (2.5) rezultă

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{k}(F_j + \lambda\rho_j)\Delta_{ij}\,(\lambda) : \Delta(\lambda), \tag{2.7}$$

în care $\Delta_{ij}(\lambda)$ sînt numere cunoscute. Să alegem drept soluţie aproximativă a problemei (1.1), (1.2) funcţia

$$\overline{y}_k(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b M(x, s)\, \overline{\varphi}_k(s)\, ds, \tag{2.8}$$

unde s-a notat cu

$$\overline{\varphi}_k(x) = F(x) + \lambda \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x, s)\, ds \sum_{j=1}^{k} \Delta_{ij}(\lambda) F_j : \Delta(\lambda). \tag{2.9}$$

Presupunînd îndeplinită inegalitatea (1.14), avem

$$|y(x) - \overline{y}_k(x)| \leqslant \sigma \int_a^b |\lambda M(x,s)|\, ds \qquad x,\ \lambda \in g, \tag{2.10}$$

în care

$$\sigma \geqslant \max_g |\alpha_k(x, \lambda)| : (1 - \delta);\ \delta = \max_g \int_a^b |\lambda K(x, s)|\, ds,$$

iar $\alpha_k(x, \lambda)$ este decalajul ce se obţine ca urmare a substituirii expresiei (2.9) în (1.9).

O altă cale de evaluare a erorii comise se găseşte urmînd întrucîtva ordinea de idei expusă în lucrarea [29]. Din (2.2) se obţine

$$|\rho(x)| = \left|\sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x,s)\,[\rho(s) - \varphi(\tau_i)]\,ds\right| = \left|\sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x,s)\,ds \int_a^b [K(s, t) -\right.$$

$$\left. - K(\tau_i t)]\,\varphi(t)\,(dt)\right| = \left|\int_a^b \varphi(t)\,dt \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} K(x, s)\,[K(s,t) - K(\tau_i, t)]\,ds\right| \equiv$$

$$\equiv \left|\int_a^b T(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt\right|. \tag{2.11}$$

Introducem următoarele notaţii:

$$H_1 = \max_{[a,b]} |\varphi(x)|;\ H_2 = \max_{[a,b]} |\rho(x)|,$$

şi fie

$$H_1 \leqslant \max_{[a,b]} |\overline{\varphi}_k(x)| + H_2 |\lambda| \left[1 + \sum_{i=1}^{k} \max_{[a,b]} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |K(x,\ s)|\, ds \times\right.$$

$$\left. \times \sum_{j=1}^{k} |\Delta_{ij}(\lambda) : \Delta(\lambda)|\right] \equiv H_3 + (\lambda) H_2 d(\lambda).$$

Atunci din (2.11) rezultă

$$H_2 \leqslant [H_3 + |\lambda| H_2 d(\lambda)] \max_{[a,b]} \int_a^b |T(x, t)|\, dt \equiv [H_3 + |\lambda| H_2 d(\lambda)]c.$$

Prin urmare, dacă

$$l_5 = 1 - |\lambda|\, d(\lambda)\, c > 0,\ \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]. \tag{2.12}$$

se obține

$$H_2 \leqslant c\, H_3 : l_5. \tag{2.13}$$

În consecință,

$$\varphi(x) - \bar{\varphi}_k(x) \leqslant |\lambda| H_3 \left[1 + \sum_{i=1}^{l} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |K(x,s)|\, ds \sum_{i=1}^{k} |\Delta_{ij}(\lambda) : \Delta(\lambda)|\right] c : l_5 \equiv$$

$$\equiv |\lambda|\, \sigma(x, \lambda),$$

$$|y(x) - \bar{y}_k(x)| \leqslant |\lambda|^2 \int_a^b |M(x,s)|\, \sigma(s,\lambda)\, ds \qquad x, \lambda \in g. \tag{2.14}$$

Observație. În loc de formula (2.2) se pot folosi următoarele reprezentări:

$$\text{a)} \int_a^b K(x,s)\, \varphi |s|\, ds = \sum_{i=1}^{k} K(x, \tau_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(s)\, ds + \rho(x); \tag{2.15}$$

$$\text{b)} \int_a^b K(x,s)\, \varphi(s)\, ds = \sum_{i=1}^{k} \left[\varphi(\tau_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} K_a(x,s)\, ds + \right.$$

$$\left. + K_b(x, \tau_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(s)\, ds \right] + \rho(x), \tag{2.16}$$

în care s-a pus

$$K(x,t) \equiv K_a(x,t) + K_b(x,t), \qquad x, t \in [a, b].$$

3. Să construim acum soluții aproximative ale problemelor polilocale integrodiferențiale considerate prin metode polinomiale.

a) Să folosim faptul că, dacă o funcție $\varphi(x)$ este definită și continuă sau fragmentar continuă în intervalul [0,1], are loc egalitatea

$$\lim_{r \to \infty} K_r(x) = \varphi(x), \tag{2.17}$$

în care

$$K_r(x) \equiv (r+1) \sum_{i=0}^{r} T_{ri}(x)\, \varphi(i, r) \tag{2.18}$$

este polinomul lui L. V. Kantorovič [30], iar $T_{ri}(x) = C_r^i x^i (1-x)^{r-i}$ și

$$\varphi(i, r) = \int_{i:(r+1)}^{(i+1):(r+1)} \varphi(s)\, ds. \tag{2.19}$$

Prin urmare, $K_r(x) \approx \varphi(x)$, $x \in [0, 1]$. Presupunem, în corespondență cu problema considerată (1.1), (1.2), că $a = 0$, $b = 1$. Atunci, substituind (2.18) în (1.9), se obține decalajul

$$(r+1) \sum_{i=0}^{r} \varphi(i,r) C_r^i [x^i (1-x)^{r-i} - \lambda \int_0^1 K(x,s) s^i (1-s)^{r-i}\, ds] - F(x) \equiv$$

$$\equiv \xi_r [x, \lambda, \varphi(0, r), \varphi(1, r), \ldots, \varphi(r, r)],$$

care poate fi transcris sub formă mai compactă

$$\sum_{i=0}^{r} \eta_{ij}(x, \lambda, r)\, \varphi(i, r) - F(x) \equiv \xi_r[x, \lambda, \varphi(0,r), \varphi(1,r), \ldots, \varphi(r,r)]. \tag{2.20}$$

Coeficienţii necunoscuţi $\varphi(i, r)$ pot fi determinaţi din condiţia de oscilaţie a decalajului $\xi_r[x, \lambda, \varphi(0, r), \varphi(1, r), \ldots, \varphi(r, r)]$ pentru fiecare din segmentele parţiale $[s:(r+1), (s+1):(r+1)]$:

$$\int_{s:(r+1)}^{(s+1):(r+1)} \xi_r[x, \lambda, \varphi(0, r), \varphi(1, r), \ldots, \varphi(r, r)]\, dx = 0 \quad (s=0,1,\ldots,r). \tag{2.21}$$

Substituind în (2.21) funcţia $\xi_r[x, \lambda, \varphi(0, r), \varphi(1, r), \ldots, \varphi(r,r)]$ prin primul membru al expresiei date prin (2.20), se obţine următorul sistem de ecuaţii algebrice:

$$\sum_{i=0}^{r} d_{is}(\lambda)\, \varphi(i, r) = l_s \quad (s = 0, 1, \ldots, r). \tag{2.22}$$

Prin urmare, dacă $\det \| d_{is}(\lambda) \| \neq 0$, din (2.22) se obţine

$$\varphi(i, r) = \delta_{ir}(\lambda) \qquad (i = 0, 1, \ldots, r). \tag{2.23}$$

În consecinţă, se poate lua drept soluţie aproximativă a problemei polilocale integrodiferenţiale (1.1), (1.2) funcţia

$$y_r(x,\lambda) = \psi(x) + \lambda \int_0^1 M(x,s) \sum_{i=0}^{r} T_{ri}(s)\ \delta_{ir}(\lambda) ds (r+1). \tag{2.24}$$

Dacă în domeniul g are loc inegalitatea (1.14)

$$l = 1 - \max_g \int_0^1 |\lambda K(x, s)|\, ds > 0, \tag{2.25}$$

atunci

$$|y_r(x, \lambda) - y(x)| \leqslant p_r \int_0^1 |\lambda M(x, s)|\, ds, \qquad x, \lambda \in g, \tag{2.26}$$

în care s-a notat

$$p_r = \max_g |\xi_r[x, \lambda, \varphi(0, r), \varphi(1, r), \ldots, \varphi(r, r)] : l.$$

O b s e r v a ţ i e. Constantele $\varphi(i, r)$ pot fi determinate şi în modul următor. Din (1.9) avem

$$\int_{s:(r+1)}^{(s+1):(r+1)} \varphi(x)\, dx - \lambda \int_0^1 \varphi(t) dt \int_{s:(r+1)}^{(s+1):(r+1)} K(x,t) dx = \int_{s:(r+1)}^{(s+1):(r+1)} F(x) dx,$$

$$(s=0, 1, \ldots, r),$$

sau

$$\varphi(s, r) - \lambda \int_0^1 \alpha_s(t)\, \varphi(t) dt = F_s \quad (s = 0, 1, \ldots, r). \tag{2.27}$$

Înlocuind în (2.27) funcţia $\varphi(t)$ prin valoarea sa aproximativă dată prin (2.18), se obţine, păstrîndu-se notaţiile folosite mai sus,

$$\varphi(s,r) - \lambda \sum_{i=0}^{r} \gamma_i(s,\lambda)\varphi(i,r) \approx F_s \qquad (s = 0, 1, \ldots, r). \tag{2.28}$$

Dacă determinantul acestui din urmă sistem este diferit de zero, găsim dintr-însul

$$\varphi(i,r) = q_{ir}(\lambda) \qquad (i = 0, 1, \ldots, r). \tag{2.29}$$

În consecinţă, soluţia aproximativă a problemei (1.1), (1.2) are forma

$$\overline{y}_r(x,\lambda) = \psi(x) + \lambda(r+1)\int_0^1 M(x,t) \sum_{i=0}^{r} T_{ri}(t) q_{ir}(\lambda)\,dt. \tag{2.30}$$

b) Să rezolvăm acum problema (1.1), (1.2) cu ajutorul polinoamelor lui L. V. Kantorovič fără a mai folosi sistemul de ecuaţii integrale (1.8), (1.9). În acest scop vom ţine seama de următoarele egalităţi aproximative :

$$K_{n+p}^{(i)}(x) \approx y^{(i)}(x) \qquad (i=0, 1, \ldots, n).$$

Presupunînd că formele $\sum_{i=0}^{n-1} T_j[x^i (1-x)^{n+p-i}]$ sînt liniar independente, expresiile $y(n,r), y(n+1,r), \ldots, y(n+p,r)$ pot fi găsite ţinîndu-se seama de condiţiile polilocale (1.1). Fie

$$y(i, n+p) = \sum_{j=0}^{n+p} \delta_{jir}(x)\, y(n+j, n+p) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{2.31}$$

atare expresii, în care s-a notat

$$y(i, n+p) = \int_{i:(n+p)}^{(i+1):(n+p)} y(x)\,dx.$$

În consecinţă, introducînd (2.31) în

$$K_{n+p}(x) = \sum_{i=n}^{n+p} T_{n+p,i}(x)\, y(i, n+p), \tag{2.32}$$

se obţine

$$K_{n+p}(x) = \sum_{i=n}^{n+p} \omega_{i,n+p}(x)\, y(i, n+p), \tag{2.33}$$

în care prin $\omega_{i,n+p}(x)$ $(i = n, n+1, \ldots, n+p)$ s-au notat polinoame cunoscute. Rezultă că polinomul (2.33) satisface condiţiile polilocale (1.1). Substituind (2.33) în (1.2), se obţine decalajul

$$\sum_{i=1}^{n+p} \Omega_{in+p}(x,\lambda)\, y(i, n+p) - f(x) \equiv r_{n+p}[x, \lambda, y(n, n+p), y(n+1, n+p), \ldots, y(n+p, n+p)]. \tag{2.34}$$

Constantele $y(i, n+p)$ $(i = n, n+1, \ldots, n+p)$ se găsesc din condiţia

$$\sum_{i=n}^{n+p} y(i, n+p) \int_{s:(n+p)}^{(s+1):(n+p)} \Omega_{in+p}(x,\lambda)\,dx = \int_{s:(n+p)}^{(s+1):(n+p)} f(x)dx \quad (s=n, n+1, \ldots, n+p) \tag{2.35}$$

sau pot fi obţinute şi pe alte căi. Fie

$$y(i, n+p) = \zeta_i(\lambda) \qquad (i = n, n+1, \ldots, n+p) \tag{2.36}$$

soluţia sistemului (2.35). Funcţia

$$K_{n+p}(x) = \sum_{i=n}^{n+p} \zeta_i(\lambda)\, \omega_{in+p}(x) \tag{2.37}$$

se ia atunci drept soluţie aproximativă a problemei considerate, iar evaluarea mărimii $|K_{n+p}(x) - y(x)|$ poate fi făcută, dacă are loc inegalitatea (2.25), în acelaşi mod ca şi (2.26).

c) Avantajul folosirii pentru analiza polinomială a problemei considerate a polinoamelor lui L. V. Kantorovič este vădită atunci cînd se aplică pentru aproximarea soluţiei ecuaţiei (1.9) formula (2.15). În acest caz avem

$$\overline{\varphi}(x) - \lambda \sum_{i=1}^{r} K(x, \tau_i)\, \varphi(i, r) = F(x) \qquad (a=0, b=1), \tag{2.38}$$

în care

$$\overline{\varphi}(i, r) = \int_{i:(r+1)}^{(i+1):(r+1)} \overline{\varphi}(x)\,dx.$$

Integrînd (2.38) între limitele $\alpha = s:(r+1)$ şi $\beta = (s+1):(r+1)$ şi punînd

$$\int_{\alpha}^{\beta} K(x, \tau_i)\,dx = K_{si}, \quad \int_{\alpha}^{\beta} F(x)\,dx = F_s,$$

se obţine

$$\overline{\varphi}(s, r) - \lambda \sum_{i=1}^{r} K_{si}\, \overline{\varphi}(i, r) = F_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, r). \tag{2.39}$$

Prin urmare, dacă determinantul $\Delta(\lambda)$ al sistemului (2.39) este diferit de zero, din (2.39) se obţine

$$\overline{\varphi}(i, r) = q_i(\lambda) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{2.40}$$

Valorile (2.40) pot fi utilizate acum pentru construirea funcţiilor $\overline{\varphi}(x)$, $\overline{K}_r(x)$ după cum urmează:

$$\overline{\varphi}(x) = F(x) + \lambda \sum_{i=1}^{r} K(x, \tau_i)\, q_i(\lambda), \tag{2.41}$$

$$\overline{K}_r(x) = (r+1) \sum_{i=0}^{r} T_{ri}(x)\, q_i(\lambda). \tag{2.42}$$

În consecinţă, rezultă drept soluţii aproximative ale problemei (1.1), (1.2) :

$$y_1(x,\lambda) = \psi(x) + \lambda\int_0^1 M(x,t)\left[F(t) + \lambda\sum_{i=1}^{r} K(t,\tau_i)\,q_i(\lambda)\right]\mathrm{d}t \qquad (2.43)$$

sau

$$y_2(x,\lambda) = \psi(x) + \lambda(r+1)\int_0^1 M(x,t)\sum_{i=0}^{r} T_{ri}(t)\,q_i(\lambda)\,\mathrm{d}t. \qquad (2.44)$$

d) Să construim acum aproximări polinomiale pentru soluţia problemei (1.1), (1.2) luînd ca punct de plecare formula

$$y(x) = \psi(x) + \lambda\int_0^1 M(x,s)\left[\sum_{i=2}^{n} a_i(s)y^{(n-i)}(s) + \int_0^1\sum_{i=0}^{m} K_i(s,t)\,y^{(i)}(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s. \qquad (2.45)$$

Să integrăm în acest scop (2.45) între limitele $j:(r+1)$ şi $(j+1):(r+1)$ şi să înlocuim în membrul al doilea al acestei relaţii $y^{(n-i)}(s)$ şi $y^{(i)}(t)$ prin derivatele corespunzătoare ale polinomului lui V. L. Kantorovič :

$$K_r(x) = (r+1)\sum_{i=0}^{r} T_{ri}(x)\,y(i,r), \qquad (2.46)$$

în care s-a pus

$$y(i,r) = \int_{i:(r+1)}^{(i+1):(r+1)} y(x)\,\mathrm{d}x.$$

Se obţine, în consecinţă,

$$\overline{y}(j,r) - \lambda\sum_{i=0}^{r}\pi_{ij}\,\overline{y}(i,r) = v_j \quad (j=0,1,\ldots,r). \qquad (2.47)$$

Presupunînd că determinantul sistemului (2.47) este diferit de zero, rezultă, prin aplicarea nemijlocită a formulelor lui Cramer, $\overline{y}(i,r) = g_{ir}(\lambda)(i=0,1,\ldots,r)$, în care $g_{ir}(\lambda)$ sînt mărimi cunoscute. Soluţia aproximativă a problemei considerate rezultă dată prin funcţia

$$\overline{y}_r(x,\lambda) = \psi(x) + \lambda(r+1)\sum_{\nu=0}^{r} g_{\nu r}(\lambda)\int_0^1 M(x,s)\left[\sum_{i=2}^{n} a_i(s)\,T_{r\nu}^{(n-1)}(s) + \right.$$

$$\left. + \int_0^1\sum_{i=0}^{m} K_i(s,t)\,T_{r\nu}^{(i)}(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}s.$$

Dacă este îndeplinită inegalitatea (2.25), decalajul dintre funcţia $\overline{y}_r(x,\lambda)$ şi $y(x)$ pentru toţi x, $\lambda \in g$ poate fi evaluat în acelaşi mod ca şi pentru (2.26).

e) Dacă se ştie că problema (1.1), (1.34) posedă o soluţie unică, se pot construi efectiv aproximări pentru (1.1), (1.34) dacă se foloseşte ordinea de idei a lui Ş. E. Mikeladze [31] şi se utilizează, aşa cum au făcut autorii acestui studiu cu prilejul rezolvării unei alte serii de probleme de contur integrodiferenţiale, polinoamele lui S. N. Bernstein [32].

Pornim în acest scop de la ecuaţia (1.39) ($a = 0$, $b = 1$)

$$y(x) = \psi(x) + \lambda \int_0^1 \left\{ N_1(x,t) \sum_{i=2}^{n} a_i(t)\, y^{(n-i)}(t) + N_2(x,t) f_1[t, y(t)] \right\} dt \quad (2.48)$$

şi folosim formulele

$$B_r(x) = \sum_{i=0}^{r} T_{ri}(x)\, y(i:r) \approx y(x), \quad (2.49)$$

$$\sum_{i=0} T_{ri}(x) f_1[i:r,\ y(i:r)] \approx f_1[x, y(x)]. \quad (2.50)$$

Punînd în (2.48) $x = j:r$ şi aplicînd formulele (2.39), (2.50), se obţine

$$y_j - \lambda \sum_{i=0}^{r} [\alpha_{ij} y_i + \beta_{ij} f_1[i:r, y_i]] = f_j \qquad (j = 0, 1, \ldots, r), \quad (2.51)$$

unde s-a pus $y_s = y(s:r)$, $f_j = f(j:r)$, iar α_{ij} şi β_{ij} sînt coeficienţi cunoscuţi. Dacă

$$y_i = \Delta_i(r, \lambda) \qquad (i = 0, 1, \ldots, r) \quad (2.52)$$

este o soluţie (exactă sau aproximativă) a sistemului (2.51), atunci pentru o soluţia aproximativă a problemei propuse se ia funcţia

$$\overline{y}(x) = \psi(x) + \lambda \int_0^1 \left\{ N_1(x,t) \sum_{i=2}^{n} a_i(t) \sum_{j=0}^{r} T_{rj}^{(n-i)}(t)\, \Delta_j(r, \lambda) + \right.$$

$$\left. + N_2(x,t) f_1\left[t, \sum_{i=0}^{r} T_{ri}(t)\, \Delta_i(r, \lambda) \right] \right\} dt. \quad (2.53)$$

f) O altă cale de rezolvare a ecuaţiei (2.48) prin metoda polinomială constă în următoarele. Presupunem că problema (1.1), (1.2) posedă o soluţie unică şi domeniul de variaţie a variabilelor este $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$. Aproximînd funcţia $f_1[x\ y(x)]$ cu ajutorul polinoamelor lui S. N. Bernstein (pentru alte aplicaţii ale acestor polinoame vezi, de exemplu, lucrarea autorilor [33])

$$\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{p} T_{ri}(x)\, T_{pj}(y) f_1\left(\frac{i}{r}, \frac{j}{p}\right) \approx f_1[x, y(x)], \quad (2.54)$$

se obţine în locul ecuaţiei (2.48) expresia

$$z(x) = \psi(x) + \lambda \int_0^1 \left\{ N_1(x,t) \sum_{i=2}^{n} a_i(t)\, z^{(n-i)}(t) + \right.$$

$$\left. + N_2(x,t) \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{p} T_{ri}(t)\, T_{pj}[z(t)] f_{1ij} \right\} dt, \quad (2.55)$$

în care s-a notat $f_{1ij} = f_1\left[\frac{i}{r}, \frac{j}{p}\right]$. Soluţia ecuaţiei (2.55) astfel obţinute poate

fi construită folosind metoda indicată în [34]. Din ecuaţia (2.55) se obţine

$$\varphi_1(x) = P[\psi(x)] + \lambda \int_0^1 \{P_x[N_1(x,t)]\varphi_1(t) + P_x[N_2(x,t)]N(t,z)\}\,dt, \quad (2.56)$$

$\varphi_1(x)$ fiind

$$\varphi_1(x) = P[z(x)] \equiv \sum_{i=2}^{n} a_i(x) z^{(n-i)}(x), A(t,z) \equiv \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{p} T_{ri}(t)\, T_{pj}[z(t)] f_{1ij}.$$

Funcţia $\varphi_1(x)$ se determină prin metoda cvadraturilor mecanice

$$\varphi_1(x) \approx \eta(x,\lambda) + \lambda \int_0^1 D(x,t,\lambda) A(t,\bar{z})\,dt. \quad (2.57)$$

Substituind în (2.55) valoarea funcţiei $\varphi_1(x)$ date prin (2.57), se obţine

$$z_1(x) = \psi_3(x,\lambda) + \lambda \int_0^1 D_2(x,t,\lambda) A(t,z_1)\,dt. \quad (2.58)$$

Dacă pentru ecuaţia integrală (2.58) este îndeplinit principiul reprezentărilor condensate, exprimat sub forma devenită clasică de S. Banach [36], funcţia $z_1(x)$ poate fi construită prin metoda aproximaţiilor succesive a lui Picard.

g) Să indicăm acum o altă cale de aproximare a funcţiei $z_1(x)$. Vom folosi în acest scop metoda derivării în raport cu un parametru, sub forma indicată în [37]. Din ecuaţia (2.58) se obţine

$$z_2(x) = \psi_3(x,\lambda) + \lambda \sum_{i=1}^{k} C_i D(x, x_i, \lambda) A[x_i, z_{2i}], \quad (2.59)$$

în care prin $C_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ s-au notat coeficienţi din formulă de cvadratură aleasă[8]) şi $z_{2i} = z_2(x_i)$.

Să introducem în ecuaţia (2.59) un parametru α în modul următor:

$$z_2(x,\alpha) = \psi_3(x,\lambda) + [(d-\alpha)\lambda : \alpha] \sum_{i=1}^{k} C_i D(x, x_i, \lambda) A[x_i, x_{2i}(\alpha)], \quad (2.60)$$

$d > 0$ fiind un număr. Pentru $\alpha = d$ avem

$$z_{20}(x,d) = \varphi_3(x,\lambda).$$

Să punem în (2.60) $x = x_j$ şi să derivăm sistemul obţinut în raport cu α. Se obţine

$$\frac{dz_{2j}(\alpha)}{d\alpha} = \lambda \sum_{i=1}^{k} C_i D(x_j, x_i, \lambda) \left\{ \frac{\partial A[x_i, z_{2i}(\alpha)]}{\partial z_{2i}} \frac{dz_{2i}(\alpha)}{d\alpha} \frac{d-\alpha}{d} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{d} A[x_i, z_{2i}(\alpha)] \right\}. \quad (2.61)$$

---

[8]) Metoda integrală sau metoda ecuaţiilor integrale, în care se face apel la variate formule de cubatură sau cvadratură alese, a fost expusă de D. Mangeron cu variate aplicaţii la mecanica tehnică neliniară a vibraţiilor în [38] şi folosită de alţi autori în [39], [40].

Presupunem că din (2.61) s-a găsit

$$\frac{dz_{2j}(\alpha)}{d\alpha} = S_j[\lambda, \alpha, z_{21}, \ldots, z_{2k}] \, (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{2.62}$$

şi să impunem ca soluţia acestui sistem să satisfacă condiţiile

$$z_{2j}(d) = \psi_3(x_j, \lambda) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{2.63}$$

Atunci, dacă $z_{2j}(\alpha) = \theta_j(\alpha, \lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ este o soluţie (exactă sau aproximativă) a problemei (2.62), (2.63) (aici este vorba de soluţie analitică) [9]), se ia drept soluţie aproximativă a problemei considerate funcţia

$$z_3(x, \lambda) = \psi_3(x, \lambda) + \lambda \sum_{i=1}^{k} C_i D(x, x_i, \lambda) A[x_i, \theta_i(0, \lambda)]. \tag{2.64}$$

Presupunînd îndeplinite inegalităţile,

1) funcţia $f_1[t, y(t)]$ satisface în D condiţia lui Lipschitz cu coeficient $\gamma(t)$; au loc inegalităţile

$$2) \quad l_3 = 1 - \max_g \int_0^1 |\lambda P_x[N_1(x,t)]| \, dt > 0$$

şi

$$3) \quad l_4 = 1 - \max_g |\lambda| \int_0^1 \left\{ |N_1(x,t)| \max_g \int_0^1 |\lambda P_t[N_1(t,\tau)]| \gamma(\tau) \, d\tau + \right.$$

$$\left. + |N_2(x,t)| \gamma(t) \right\} dt > 0,$$

evaluarea erorii comise este dată prin

$$\max_g |y(x) - z_3(x,\lambda)| \leqslant \left\{ \max_g |\alpha(x,t) + \right.$$

$$\left. + \max_g \left[|P[\alpha(x,\lambda)]| \int_0^1 |\lambda N_1(x,t)| \, dt \right] : l_3 \right\} : l_4. \tag{2.65}$$

O b s e r v a ţ i i . *a*) Funcţia $\varphi_1(x)$ care figurează în (2.56) este uşor să fie aproximată cu ajutorul polinoamelor lui S. N. Bernstein. Ajunge să ne folosim de [33].

b) Dacă funcţia $\varphi_1(x)$ nu este introdusă, atunci, presupunînd în (2.55) $x = j : p$, se ia în loc de $z^{(n-i)}(t)$, valoarea aproximativă a acestei funcţii :

$$\sum_{r=0}^{p} T_{pr}^{(n-1)}(t) \, z(r : p).$$

[9]) În cadrul preocupărilor legate de determinarea soluţiilor neanalitice a diferitelor sisteme integrodiferenţiale este interesant să se ţină seama de o serie de lucrări datorite regretatului acad. C. Popovici [41].

Se obţine, în consecinţă, un sistem de ecuaţii algebrice pentru $z(r:p)$, care poate fi rezolvat prin metoda derivării în raport cu parametru, folosită mai sus.

c) Dacă se utilizează polinoamele lui L. V. Kantorovič, se obţine în locul ecuaţiei (2.55) relaţia

$$\bar{z}(x) = \psi(x) + \lambda \int_0^1 \Big\{ N_1(x,t) \sum_{i=2}^{n} a_i(t)(r+1) \sum_{k=0}^{r} T_{rk}^{(n-1)}(t)\, \bar{z}(r,k) + \\ + N_2(x,t)(r+1)(p+ \\ + 1) \sum_{i=0}^{p} \sum_{k=0}^{r} T_{pi}(t)\, T_{rk}[\bar{z}(t)] \int_{i:(p+1)}^{(i+1):(p+1)} \int_{k:(r+1)}^{(k+1):(r+1)} f_1(t,\bar{z})\, dt\, d\bar{z} \Big\} dt. \quad (2.66)$$

Integrînd (2.66) între limitele $l:(r+1)$ şi $(l+1):(r+1)$ şi înlocuind în $T_{rk}[\bar{z}(t)]$ funcţia $\bar{z}(t)$ pe baza relaţiei (2.18), se parvine la un sistem de ecuaţii ce poate fi transcris sub forma

$$Z(r,l) - \lambda V_l[z(r,k)] = g_l \qquad (l = 0, 1, \ldots, r). \quad (2.67)$$

Şi acest din urmă sistem (2.67) poate fi rezolvat prin metoda derivării în raport cu parametru, analog cu ceea ce s-a făcut pentru sistemul (2.59).

h) Presupunem că funcţia $D(x,t)$ posedă proprietatea (1.13) şi se cere a se rezolva ecuaţia (1.34), cu condiţii suplimentare,

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_{ij}\, y^{(i)}(a) = l_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \quad (2.68)$$

Pentru rezolvarea acestei probleme vom folosi metoda liniarizării. Reprezentăm în acest scop funcţia $f_1[x, y(x)]$ sub forma

$$f_1[x,y(x)] = f_1(x,y_0) + \frac{\partial f(x,y_0)}{\partial y_0}[y(x) - y_0] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f_1(x,\bar{y})}{\partial \bar{y}^2}[y(x) - y_0]^2, \quad (2.69)$$

în care $y_0 = y(a)$. Folosind transformarea (1.52), se determină constantele $c_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ ţinîndu-se seama de condiţiile (2.68), iar în dezvoltarea (2.69) oprindu-ne la termenul al doilea. Atunci substituirea (1.52) în ecuaţia

$$L[z,\lambda] = f(x) + \lambda \int_a^x D_0(x,t) \frac{\partial f_1(t,y_0)}{\partial y_0}[z(t) - y_0]\, dt \quad (2.70)$$

ne conduce la ecuaţia integrală

$$h(x) - \lambda \int_a^x S(x,t)\, h(t)\, dt = f(x,\lambda), \quad (2.71)$$

unde $S(x,t)$, $f(x,\lambda)$ sînt funcţii continue cunoscute în domeniul $(x,t,\lambda) \in g$.

Din (2.71) se obţine $h(x) = \sigma(x, \lambda)$. În consecinţă, soluţia aproximativă a problemei noastre este dată prin

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) + \int_a^x H(x, t)\sigma(t, \lambda)\, dt. \tag{2.72}$$

i) Să evaluăm acum diferenţa $y(x) - z(x)$. Fie

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x) + \int_a^x H(x,t)\Phi(t)\, dt \tag{2.73}$$

soluţia exactă a problemei (2.68), (1.34). Substituind (2.73) în (1.34) şi ţinînd seama de (2.69), se parvine la ecuaţia

$$\Phi(x) - \lambda \int_a^x S(x,t)\Phi(t)\, dt = f(x,\lambda) + \lambda \int_a^x H_1(x,t) \frac{\partial^2 f_1(t,\overline{y})}{\partial \overline{y}^2} [y(t) - y_0]^2\, dt. \tag{2.74}$$

Din (2.74) şi (2.71) se obţine

$$\Phi(x) - h(x) = \lambda \int_a^x H_1(x,t) \frac{\partial^2 f_1(t,\overline{y})}{\partial \overline{y}^2} [y(t) - y_0]^2\, dt +$$

$$+ \lambda \int_a^x R(x,\tau,\lambda)\, d\tau \int_a^\tau H_1(\tau,t)\, [y(t) - y_0]^2 \frac{\partial^2 f_1(t,\overline{y})}{\partial \overline{y}^2}\, dt \equiv$$

$$\equiv \lambda \int_a^x H_2(x,t,\lambda) \frac{\partial^2 f_1(t,\overline{y})}{\partial \overline{y}^2} [y(t) - y_0]^2\, dt, \tag{2.75}$$

în care prin $R(x, \tau, \lambda)$ s-a notat nucleul rezolvant al nucleului $S(x, \tau)$. În consecinţă, se poate scrie

$$y(x) - z(x) = \lambda \int_a^x H(x,\tau)\, d\tau \int_a^\tau H_2(\tau,t,\lambda) \frac{\partial^2 f_1(t,\overline{y})}{\partial \overline{y}^2} [y(t) - y_0]^2\, dt \equiv$$

$$\equiv \lambda \int_a^x H_3(x,t,\lambda) \frac{\partial^2 f_1(t,\overline{y})}{\partial \overline{y}^2} [y(t) - y_0]^2\, dt. \tag{2.76}$$

Fie că $\max_D \left| \frac{\partial^2 f_1(x,y)}{\partial y^2} \right| \leqslant L_2$, în care L_2 este o constantă cunoscută. Atunci din (2.76) se obţine $\max_{[a,b]} |y(x) - z(x)| \leqslant L_3$, L_3 fiind o constantă dată. Prin urmare,

$$|y(x) - z(x)| \leqslant L_2 \int_a^x |\lambda H_3(x,t,\lambda)| [L_3^2 + 2L_3 |z(t) - y_0| + |z(t) -$$

$$- y_0|^2]\, dt,\ x,\ \lambda \in g. \tag{2.77}$$

j) Se poate rezolva într-un mod analog şi problema de contur (1.1) relativă la ecuaţia integrodiferenţială (1.34), dacă $y(c) = y_0$ este un număr cunoscut şi $c \in [a, b]$. Dacă y_0 nu se cunoaşte, valoarea sa trebuie să fie determinată cu aproximaţie.

k) Să indicăm în acest punct unele metode de aproximare polinomială a problemei polilocale integrodiferenţiale (1.1), (1.2) diferite de aproximare polinomială prin polinoamele lui L. V. Kantorovič şi S. N. Bernstein.

Vom folosi, utilizînd unele idei ale lucrărilor [42], [43], metoda lui P. L. Cebîşev. Fie

$$\varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i h_i(x,\lambda) \tag{2.78}$$

o soluţie aproximativă a ecuaţiei (1.9), în care prin $h_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ s-a notat un sistem de funcţii date liniar independente pentru toţi $x \in [a, b]$, $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, iar prin p_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ s-au notat coeficienţi deocamdată necunoscuţi. Atunci

$$\varphi_k(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\,\varphi_k(s)\,ds - F(x) \equiv \sum_{i=1}^{k} p_i \theta_i(x,\lambda) - F(x) = r(x,\lambda,p_i). \tag{2.79}$$

Presupunînd că funcţia $\sum_{i=1}^{k} p_i \theta_i(x,\lambda)$ posedă în (a, b) un număr de zerouri

ce nu întrece k, ne propunem să determinăm coeficienţii p_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ în aşa fel ca funcţia $r(x, \lambda, p_i)$ să se abată cît mai puţin de zero. Pretindem în acest scop să fie satisfăcută aşa-numita alternanţă a lui Cebîşev. Atunci

$$r(x_j,\lambda,p_i) = (-1)^j \varepsilon (j = 1, 2, \ldots, k+1); \quad \frac{\partial r(x_j,\lambda,p_i)}{\partial x_j} = 0 \tag{2.80}$$

$$(j = 2, 3, \ldots, k), \qquad x_1 = a, \quad x_{k+1} = b,$$

în care prin ε s-a notat eroarea celei mai bune aproximaţii. Sistemul (2.80) conţine $2(n+1)$ ecuaţii cu acelaşi număr de necunoscute. Dacă determinantul acestui sistem este diferit de zero, se determină toate necunoscutele din sistemul considerat şi obţinem prin relaţia

$$y_k(x,\lambda) = \psi(x) + \lambda \int_a^b M(x,t) \sum_{i=1}^{k} p_i(\lambda)\, h_i(t,\lambda)\, dt, \tag{2.81}$$

o soluţie aproximativă a problemei propuse.
Evaluarea erorii comise este dată în acest caz prin

$$|y(x) - y_k(x,\lambda)| \leqslant \varepsilon \int_a^b |\lambda M(x,t)|\, dt \qquad x, \lambda \in g. \tag{2.82}$$

l) Să folosim, în fine, metoda decalajului integral minim. În acest caz coeficienţii $p_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ se determină din condiţia de minimizare a funcţionalei pătratice [10])

$$J = \int_a^b r^2 (x, \lambda, p_i)\, dx. \tag{2.83}$$

Presupunem că $p_i = p_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ realizează minimul funcţionalei considerate. Atunci

$$y_k (x, \lambda) = \psi (x) + \lambda \int_a^b M (x, t) \sum_{i=1}^{k} p_i (\lambda)\, h_i(t, \lambda)\, dt \tag{2.84}$$

este soluţia aproximativă a problemei (1.1), (1.2). Dacă este îndeplinită relaţia (1.14), atunci

$$|y (x) - y_k (x, \lambda)| \leqslant (1 - \delta) \int_a^b |\lambda M (x, s)|\, ds \quad x \lambda \in g$$

(vezi (2.10)).

Trebuie subliniat, încheind, pe lîngă ceea ce s-a spus în introducere, că şi celelalte metode elaborate mai sus şi nu numai aceea a liniarizării şi derivării în raport cu un parametru au fost [47] şi vor fi utilizate într-una din lucrările viitoare la rezolvarea altor probleme de contur.

Primită la redacţie la 30 martie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Elie Carafoli, *Consideraţii teoretice asupra jeturilor fluide laterale.* St. cerc. mec. apl. **XIII**, *5*, 1962, 1061–1072.
2. J. Aroesty, R. Bellman, R. Kalaba, S. Ueno, *Invariant imbedding and rarefied gas dynamics.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **50**, 1963, 222–226.
3. R. Jancel, Th. Kahan, *Électrodynamique des Plasmas.* I. *Processus physiques et Méthodes mathématiques.* Dunod, Paris, 1963, p. 98 şi urm.
4. Th. Vogel, *Solutions périodiques des systèmes héréditaires.* Proc. Vibrat. Probl. Polish Acad. Sci., **3**, *1*, 1962, 3–21.
5. — *Proc. Intern. Congress of Mathematicians,* Institut Mittag-Leffler, Djursholm, Stockholm, 1962.
6. — *Труды всесоюзного Съезда по теоретической и прикладной Механике.* Изд. Акад. Наук СССР, М.-Л. 1962.
7. — *The Eight Congress on theoretical and applied Mechanics.* University of Delhi, Part II, Abstracts, 1963, Delhi.
8. Г.Н. Савин и сотр., *Динамика нити.* Акад. Наук УССР, Киев, 1963.
9. D. Mangeron, *On the new variational techniques concerning a class of boundary value problems.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n. **VIII (XII)**, *1–2*, 1962, 47–52.
10. — *On the Bellman's equations related to problems of higher order with total derivatives.* J. Mat. Anal. a Mech. (in print).
11. D. Mangeron, L. E. Krivochéine, *Sur quelques problèmes d'approximation relatifs à une nouvelle classe d'équations intégro-différentielles.* Bull. Acad. Polonaise des Sci., Sci. Math., **IX**, *10*, 1961, 707–712.
12. D. Mangeron, L. E., Krivošein, *The polynomial method in the approximate determination of the solution of the boundary value problems linear integro-differential equations.* Acta. Math. Sinica, **12**, *2*, 1962, 175–178 şi Chinese Math., **3**, 1963, 190–193.

[10]) Folosirea unor noi tehnici variaţionale în sensul optimizării proceselor (R. Bellman, L. Pontrjagin [44], [45]) conduce şi aici la interesante ecuaţii funcţionale [46].

13. D. MANGERON, L. E. KRIVOŞEIN, *Qualitative study of a class of boundary value problems for integro-differential equations and approximate determination of their solutions.* Acta Math. Sinica, **13**, *1*, 1963, 63—67.
14. Д. МАНЖЕРОН, Л.Е. КРИВОШЕИН, *Приближенное решение некоторых линейных интегро-дифференциальных уравнений.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n. **VI (X)**, *1—2*, 1960, 17—28.
15. Д. МАНЖЕРОН, Л.Е. КРИВОШЕИН, *Приближенное решение краевых задач для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **VI (X)**, *3—4*, 1960, 21—30.
16. Л. Е. КРИВОШЕИН, *Приложенные методы решения обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений.* Акад. Наук. Кирг. ССР, Фрунзе, 1962.
17. D. MANGERON, L. E. KRIVOŞEIN, *Noi metode de calcul numeric al soluţiilor diferitelor sisteme integrodiferenţiale interesînd Mecanica aplicată.* I. Studii şi cerc. Mecanică aplicată (sub tipar).
18. — *Colocviul de aproximarea funcţiilor cu aplicaţii la calculul numeric.* Acad. R.P.R., filiala Cluj, Institutul de Calcul, 15—19.XI.1963.
19. — *Approximation par les polynomes de Bernstein des solutions de certains problèmes à la frontière pour les équations intégro-différentielles.* C. R. Acad.Sci., Paris, **254**, *21*, 1962, 3624—3626.
20. — *Recherches des solutions des équations intégro-différentielles par la méthode polynomiale.* C. R. Acad. Bulgare Sci., **15**, *4*, 1962, 345—348.
21. — *Méthode polynomiale d'approximation des solutions des équations intégro-différentielles d'ordre supérieur.* Bull. de la Classe des Sci. Acad. R. Belgique, *5*-e série **XLVIII**, *9*, 1962, 870—874.
22. — *Estensione di alcuni metodi di studio all'analisi delle soluzioni di certi classi di problemi integrodifferenziali non lineari a derivate parziali.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (in stampa).
23. M. PICONE, *Problemi al contorno per le equazioni differenziali ordinarie.* Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa, 1909, 11.
24. D. MANGERON, *Sur les noyaux associés à certains problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.* Mathematica, Cluj, **XIV**, 31—35, 1938.
25. A. HAMMERSTEIN, *Über eine Integralgleichung.* Acta Math., 1930, **54**, 117—176.
26. Ф.С. ХАДЖИМУЛЛАЕВ, *К теории нелинейных интегральных уравнений с переменным верхним пределом.* Научн. тр. Ташкентского ун-та, 1962, в. 208, 170—178.
27. A. ROSENBLATT, *Sur l'application de la méthode des approximations successives de M. Picard à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles à caracteristiques réelles et multiples.* C. R. Acad. Sci., Paris, **197**, 1933, 1278—1280.
28. D. MANGERON, *Sopra un problema al contorno non lineare ...* Rend. Accad. Naz. dei Lincei, s. 6, **XVI**, 1932, 5—10.
29. МЫСОВСКИХ И. П., *Об оценке ошибки возникающей при решении интегральных уравнений способом механических квадратур.* Вестн. ЛГУ, сер, матем-механ., астрон., 1956, № 19, в. 66—72.
30. Л.В. КОНТОРОВИЧ, *Об одном полиномиальном методе.* ДАН СССР ,А, 1936, 563—556; 595—600.
31. Ш.Е. МИКЕЛАДЗЕ, *Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью многочленов.* Тр. Тбилиского матем. инс-та им. Размадзе, 1959, *26*, 263—284.
32. С.Н. БЕРНШТЕЙН, *К задаче теории вероятностей.* Соч., т. 1, Изд. АН СССР, М., 1952, 105—106.
33. D. MANGERON, L. E. KRIVOŞEIN. *Studiul ecuaţiilor integrodiferenţiale prin metoda polinomială.* Studii şi cerc. de mat., Acad. R.P.R., filiala Cluj, Inst. de Calcul, **XII**, *2*, 1961, 281—296.
34. Д. МАНЖЕРОН, Л. Е. КРИВОШЕИН, *Многочленный метод в решении задач по интегро-дифференциальным уравнениям. 1. Применение полиномов С. Н. Бернштейна.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **VII (XI)**, *3—4*, 1961, 27—42.
35. С.Д. СОБОЛЕВ, *Об одном приеме вычисления коэффициентов для формул механических квадратур.* ДАН СССР, 1963, 150, *6*, 1238—1241.
36. S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires.* PTN, Warszawa, 1932.

37. Н.Я. Лященко, *Метод дифференцирования по параметру в решении некоторых интегральных уравнений*. Доп. АН УССР, *9*, 1139—1144.
38. Д.М. Манжерон, *Метод интегральных уравнений в нелинейной механике*. Тр. международного симпозиума по нелинейным колебаниям, 1, Киев, АН УССР, 1963, 437—350.
39. Stefania Ruscior, *Sul metodo integrale nello studio di alcuni problemi integro-differenziali*. Rend. Accad. Naz. dei Lincei, s. 8, **XXXV**, *6*, 1963.
40. F. S. Rossi, *Sul metodo di Mangeron nello studio di alcuni problemi non lineari*. Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **IX (XIII)**, *3—4*, 1963.
41. V. Volterra, J. Perès, *Théorie générale des fonctionnelles*, *I*, Gauthier-Villars, Paris, 1936. „Quelques résultats de M. C. Popovici".
42. Д.Г. Гребенюк, *Об одном способе приближения решений интегральных уравнений Фредгольма*. Тр. ин-та матем, и мех. АН Узб ССР, 1955, в *15*, 107—110.
43. Л.Е. Кривошеин, *К приближенному решению некоторых интегро-дифференциальных уравнений*. Уч. зап. физ.-матем. ф-та Кирг ГУ, 1957, *4*, ч-2, 39—68
44. R. Bellman, S. Dreyfus, *Applied Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, 1962.
45. Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. *Математическая теория оптимальных процессов*, Физматгиз, М., 1961.
46. D. Mangeron, *O nouă clasă de probleme de contur în lumina teoriei proceselor optimale*. Comunic. Acad. R.P.R., **XIII**, *12*, 1963, 1023—1030.
47. F. G. Mazzella, *Su alcuni problemi di Mangeron-Krivošein concernenti una classe di equazioni integro-differenziali*. Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **IX (XIII)**, *3—4*, 1963.

SOLICITĂRI TERMICE EXTERIOARE LA BARAJELE ARCUITE[1])

de RADU PRIŞCU[2])

539.3

În această lucrare se studiază starea termică a unui baraj arcuit sub efectul variaţiilor de temperatură ale aerului atmosferic şi ale apei din lac.

Pe baza măsurătorilor efectuate la două baraje din ţara noastră se definesc parametrii oscilaţiilor cosinusoidale ale temperaturii apei din lac.

Se integrează ecuaţia conducţiei în cazul cel mai general şi se determină expresiile temperaturii medii şi ale diferenţei de temperatură corespunzătoare unei repartiţii liniare într-o secţiune dată. Se examinează comparativ efectul defazării dintre oscilaţiile de temperatură din amonte şi din aval.

A. INTRODUCERE

Pentru determinarea eforturilor şi deformaţiilor provocate de variaţiile de temperatură ale mediului exterior în corpul unui baraj arcuit, este necesar a se cunoaşte starea sa termică în orice secţiune şi la orice moment. Dimensiunile transversale ale unei asemenea structuri fiind reduse în comparaţie cu lungimea şi înălţimea sa, problema constă în studiul unui perete de grosime variabilă supus la cele două feţe, amonte şi aval, la variaţii de temperatură de un tip oarecare.

În ce priveşte aceste variaţii, deosebim două situaţii caracteristice pentru arcele componente ale unui baraj :

— lac gol şi deci arce solicitate la faţa exterioară şi interioară de aceleaşi variaţii ale temperaturii aerului atmosferic ;

— lac plin şi deci arce solicitate la faţa exterioară de variaţia temperaturii apei, iar la faţa interioară de variaţia temperaturii aerului.

---

[1]) Publicată în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée" **10**, *1* (1965) (în lb. franceză).

[2]) Institutul de construcţii, Bucureşti.

Variația temperaturii aerului în cursul unui an este în general cunoscută. În toate țările constructoare de baraje, măsurători zilnice, efectuate în diferite amplasamente și timp de mai mulți ani, au arătat că temperatura aerului oscilează în jurul mediei anuale după o lege ușor asimilabilă cu o sinusoidă sau cosinusoidă.

Variația temperaturii apei din lacul de acumulare este mai puțin cunoscută. Măsurători intermitente efectuate în cîteva lacuri indică unele cifre și susțin că variația temperaturii apei este tot de tip sinusoidal. Ele nu precizează însă parametrii acestor oscilații, care, spre deosebire de cei ai oscilațiilor din aer, sînt variabili cu adîncimea sub nivelul apei. În cele ce urmează se prezintă unele aspecte noi ale acestei probleme, bazate pe măsurătorile făcute în două lacuri de acumulare din țara noastră.

Dacă pentru o secțiune oarecare din baraj se cunosc solicitările termice exterioare de tip sinusoidal, distribuția temperaturilor la o anumită dată poate fi determinată cu ajutorul ecuației conducției, dedusă de Fourier. Această ecuație va fi integrată mai departe pentru cazul cel mai general, ținîndu-se seama nu numai de faptul că oscilațiile temperaturii din lac au valori medii anuale și amplitudini diferite față de cele din aer, ci și de faptul că acestea sînt defazate între ele. Se vor determina apoi valorile maxime ale temperaturii medii și ale diferenței de temperatură amonte-aval, corespunzătoare unei repartiții liniare echivalente într-o secțiune dată.

B. DETERMINAREA VARIAȚIILOR DE TEMPERATURĂ EXTERIOARE

Variațiile de temperatură ale aerului din diverse regiuni ale țării noastre sînt cunoscute. În publicația *Clima Republicii Populare Romîne* [1], pe baza prelucrării cifrelor pe o perioadă de 60 de ani (1896—1955), s-au întocmit planșe care reprezintă repartiția temperaturii aerului în medii anuale, precum și în luna cea mai friguroasă (ianuarie) și în luna cea mai călduroasă (iulie). Tot aici se prezintă repartiția amplitudinilor medii anuale, diferite în regiunile situate de o parte și de alta a lanțului Carpaților.

Pentru a evidenția variația sinusoidală a temperaturilor aerului s-au prezentat într-o lucrare anterioară [2] cifrele măsurate în patru amplasamente de baraje în arc din țara noastră. În figurile 2, 3 și 6 din această lucrare sînt date alte înregistrări anuale, efectuate la barajele Izvorul Muntelui — Bicaz și Negovanu — Sadu.

Din materialele citate, pentru regiunea carpatică care ne interesează din punctul de vedere al construcției de baraje, rezultă că :

— temperaturile medii anuale variază între 10 și 4°C ;

— amplitudinile lunare sînt de ordinul a $\pm$ (10 $\div$ 15)°C.

La elaborarea unui proiect de baraj mai important, aceste indicații vor putea fi precizate printr-un studiu special asupra regimului termic din amplasament, bazat pe măsurători sistematice efectuate pe o perioadă cît mai lungă.

Dacă variațiile de temperatură lunare ale aerului din atmosferă pot fi cunoscute prin măsurători directe sau pot fi apreciate destul de exact, nu același lucru se poate spune despre variațiile temperaturii din lacul de acumulare.

Regimul termic al lacurilor artificiale este un fenomen complex, influențat de numeroși factori [3]. Dintre aceștia joacă un rol important poziția geografică, condițiile climatice, morfologia cuvetei și modul de exploatare a lacului. Schimbul de căldură din masa de apă are ca surse principale radiația solară, căldura iradiată de atmosferă, căldura adusă de apa afluenților, căldura iradiată de malurile și fundul lacului, căldura

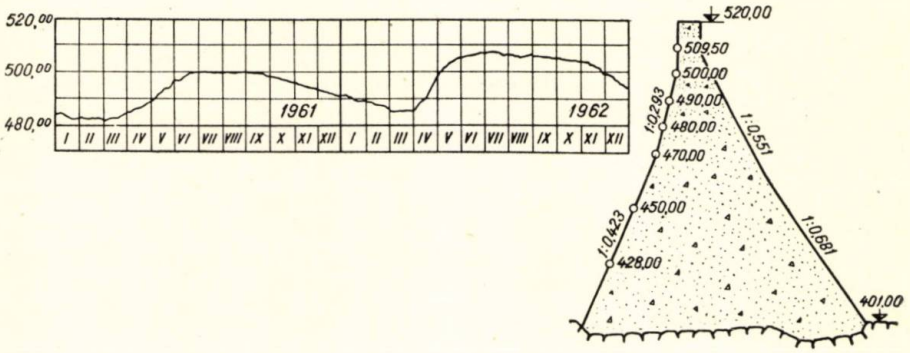


Fig. 1. — Barajul Izvorul Muntelui. Variația nivelului în lac și poziția termometrelor la paramentul amonte.

provenită din precipitații. Transmisia căldurii se face prin mișcarea de convecție liberă sau impusă prin valuri și curenți provocați de vînt.

În vederea cunoașterii regimului termic al apei din vecinătatea paramentului amonte al barajelor de acumulare din țara noastră, în cursul anilor 1961 și 1962 s-au efectuat de către organe ale M.M.E.E. măsurători sistematice la barajele Izvorul Muntelui — Bicaz ($H = 127$ m) și Negovanu — Sadu ($H = 62$ m).

La barajul Izvorul Muntelui, măsurătorile s-au făcut cu șapte teletermetre fixe, situate la fața amonte a unui bloc central (blocul 13). Primele cinci aparate au fost instalate la 10 m echidistanță în adîncime, începînd de la o cotă situată cu 10 m sub coronament, penultimul aparat la 20 m distanță, iar ultimul la 22 m (fig. 1). Citirile s-au făcut la intervale de 2—3 zile în cursul anului 1961 și de două ori pe lună în cursul anului 1962.

Deoarece nivelul în lacul de acumulare a variat în acești doi ani (fig. 1), cifrele obținute au fost prelucrate de autor astfel încît să se poată reprezenta variația temperaturilor la 5, 10, 20, 30, 40, 50 și 60 m sub oglinda apei. În figurile 2 și 3 sînt trasate aceste variații, ca și cele care au avut loc în aer în 1961 și 1962. Cu linii întrerupte sînt trasate cosinusoidele care înlocuiesc variațiile de temperatură lunare.

În figura 4 sînt reprezentate variațiile temperaturilor medii lunare ale apei în funcție de adîncime pentru anii 1961 și 1962. Acestea au fost

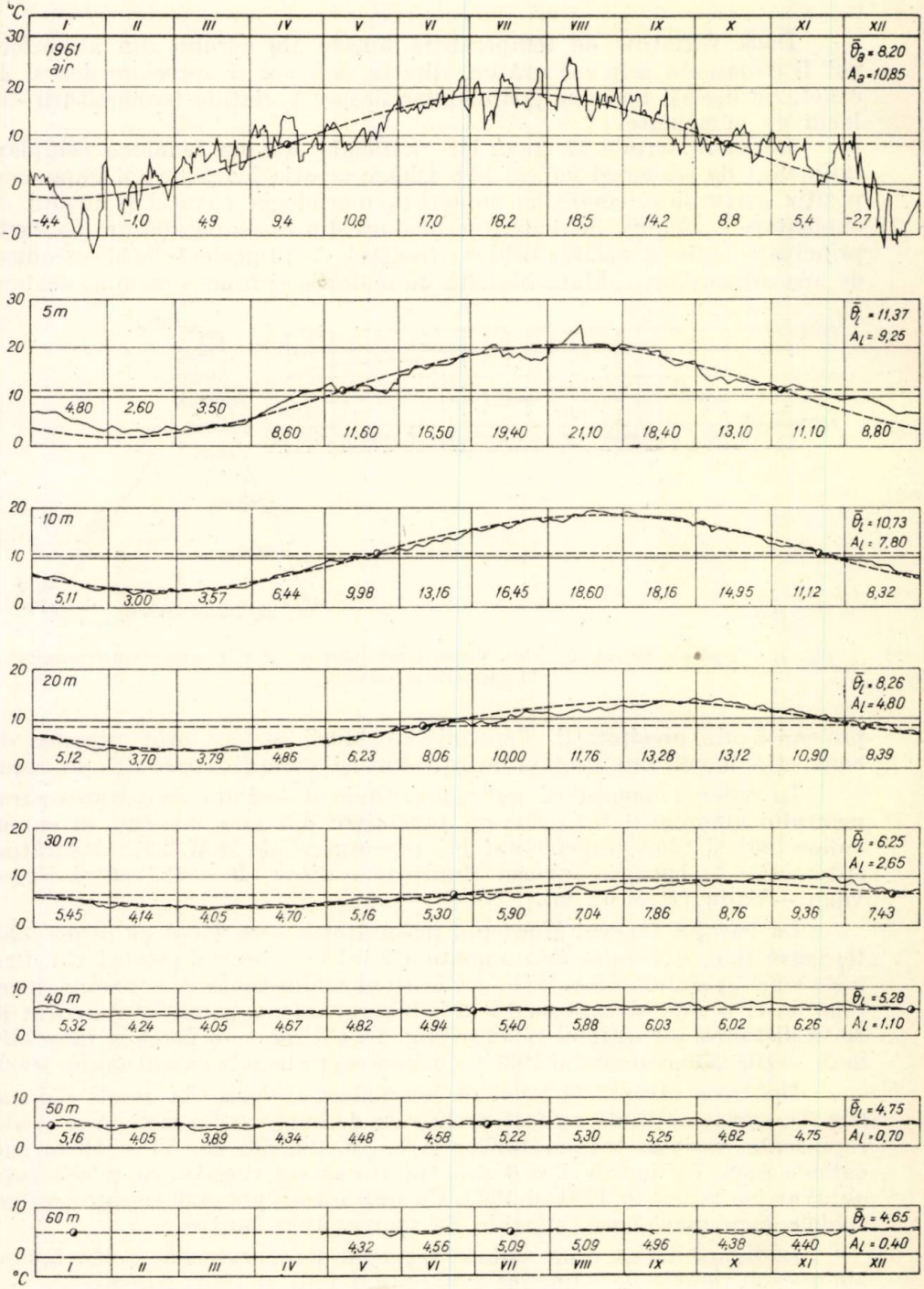


Fig. 2. — Barajul Izvorul Muntelui. Variația temperaturii în aer și în lac, la diferite adîncimi, în 1961.

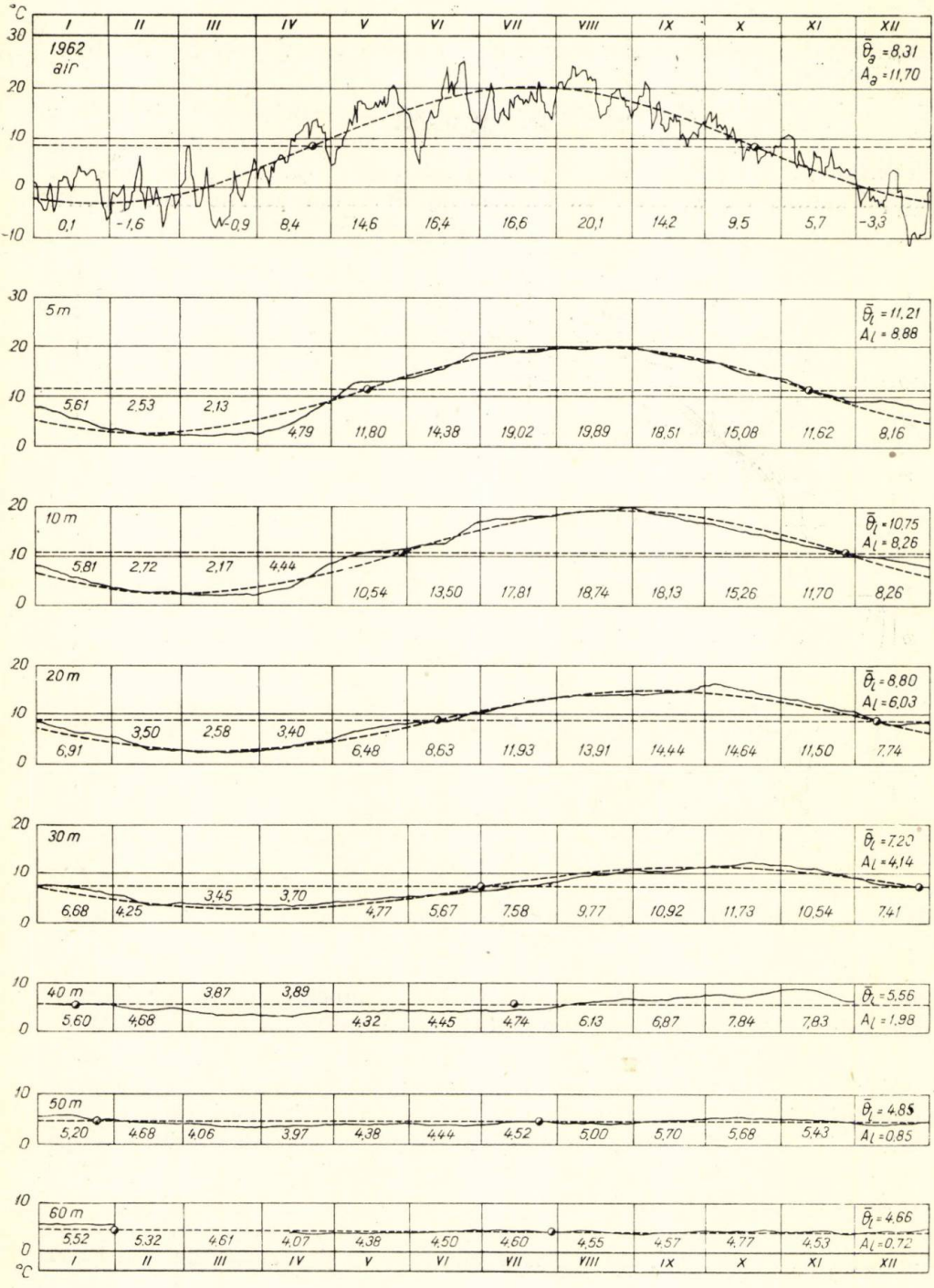


Fig. 3. — Barajul Izvorul Muntelui. Variația temperaturii în aer și în lac, la diferite adîncimi, în 1962.

deduse prin planimetrarea diagramelor trasate la scară mare din figurile 2 şi 3.

Pe marginea acestor reprezentări se pot face următoarele constatări :

— la diferite adîncimi sub nivelul apei, variaţiile anuale ale temperaturilor pot fi înlocuite cu suficientă exactitate cu variaţii cosinusoidale ; amplitudinile lor descresc cu adîncimea, devenind practic nule pentru

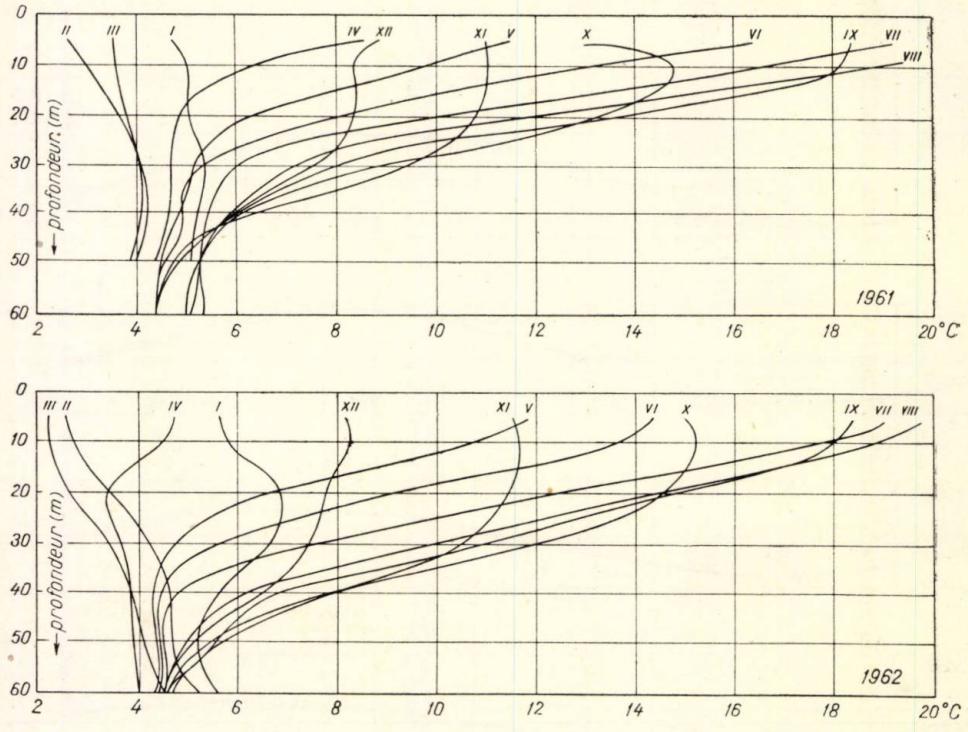


Fig. 4. — Barajul Izvorul Muntelui. Variaţiile temperaturilor medii lunare ale apei în anii 1961 şi 1962.

adîncimi mai mari ca 60 m ; faţă de variaţia temperaturii din aer apar diferenţe de fază, cu atît mai pronunţate cu cît adîncimea este mai mare ;

— repartiţia temperaturilor medii lunare în adîncime prezintă o stratificaţie directă în cea mai mare parte din timp ; în lunile ianuarie, februarie şi martie, stratificaţia este de tip invers, iar perioadele decembrie — ianuarie şi martie—aprilie sînt perioade de homotermie ; după cum este cunoscut, fenomenul termic dominant care provoacă aceste variaţii este acela de convecţie ;

— de la adîncimea de aproximativ 60 m în jos, temperatura în lac se menţine constantă ; ea măsoară circa 4,5°C şi corespunde densităţii maxime a apei.

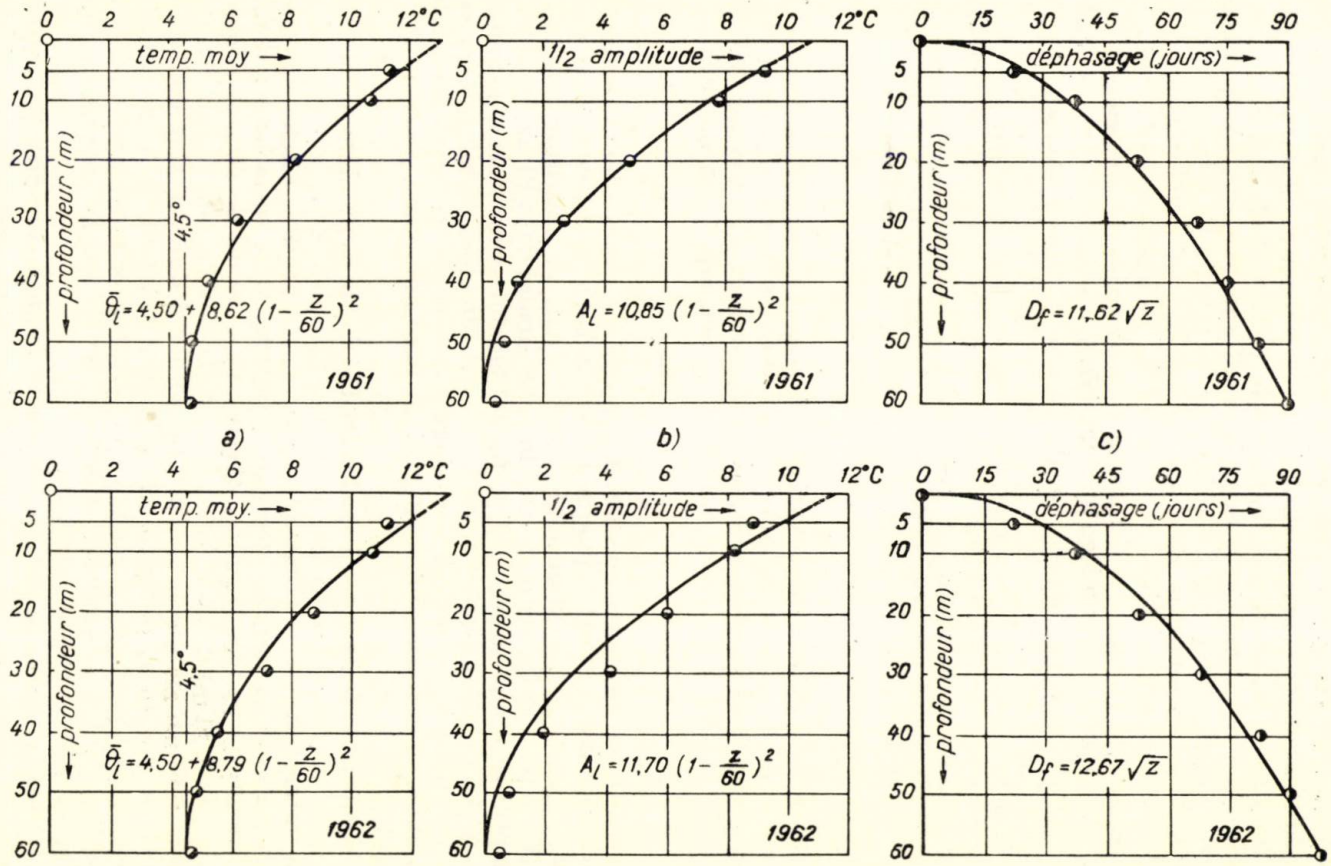


Fig. 5. — Barajul Izvorul Muntelui :

a — variația temperaturilor medii anuale în lac; *b* — variația amplitudinilor; *c* — variația defazajelor.

În scopul cunoașterii variației în funcție de adîncime a temperaturii medii anuale $\bar{\theta}_l$, a amplitudinii A_l și a diferenței de fază D_f, s-au prelucrat în continuare datele reprezentate în figurile 2, 3 și 4.

S-au calculat astfel temperaturile medii anuale care apar la diverse adîncimi în anii 1961 și 1962. Din figurile 5*a* rezultă că cifrele se înscriu de-a lungul unei ramuri de parabolă cu vîrful situat la 60 m sub nivelul apei. În zona de salt termic, care se manifestă pe o adîncime de circa 5 m de la suprafață, fenomenele termice au un caracter foarte complex și dificil de exprimat printr-o lege matematică. Ca urmare, distribuția parabolică se va considera valabilă începînd de la această adîncime în jos. Observăm că parabola se poate trasa admițînd la suprafață o temperatură medie fictivă de circa 1,6 ori temperatura medie anuală din aer.

La rîndul lor, amplitudinile variațiilor de temperatură se grupează tot pe o ramură de parabolă cu vîrful situat la 60 m sub nivelul apei. Din figurile 5*b* rezultă că parabola se poate trasa punînd condiția ca la suprafața apei amplitudinea să fie egală cu aceea din aer. Ca și în cazul precedent, distribuția parabolică se va considera valabilă începînd de sub zona de salt termic.

Diferențele de fază între variațiile temperaturilor din aer și din apă cresc cu adîncimea, repartizîndu-se după o ramură de parabolă cu vîrful la suprafața apei. Din figurile 5*c*, întocmite pe baza diagramelor din figurile 2 și 3, rezultă că la adîncimea de 60 m defazajul este de ordinul a 90—100 de zile.

La barajul Negovanu, măsurătorile de temperaturi s-au efectuat de două-trei ori pe lună, imediat în amonte de baraj, dintr-o barcă. În cursul anilor 1961 și 1962, adîncimea apei din lac a variat între 20 și 45 m. Cifrele obținute indică în general aceleași tipuri de stratificație termică, repartizate pe aceleași perioade ca și în cazul lacului de la Bicaz. De relevat este faptul că temperatura apei pe fundul lacului se menține constantă și egală cu 4,5°C, chiar pentru situații în care adîncimea totală a apei este de 20 m. Acest lucru rezultă din diagramele trasate în figura 6*a* pentru lunile iulie—noiembrie 1962, interval în care adîncimea apei a variat puțin în jurul a 20 m.

Temperatura apei din lacurile artificiale de acumulare a fost studiată și la unele amenajări din R. S. Cehoslovacă. Este remarcabilă lucrarea întocmită de A. Bratránek [4], care, printre altele, prezintă numeroase sondaje termice efectuate la diverse date în lacurile : Blanici (H = 20 m) de pe rîul Husince, Zbečna (H = 30 m) de pe rîul Kličavě, Vranov (H = 40 m) de pe rîul Dyji și Vir (H = 60 m) de pe rîul Svratce. Profilele termice ale acestor lacuri, de adîncimi diferite, sînt similare cu cele deduse pentru acumulările de la Izvorul Muntelui și Negovanu. Ele confirmă repartiția de tip parabolic a temperaturilor medii anuale, precum și existența unei temperaturi constante de 4—5°C în regiunea de fund a lacurilor mai adînci de circa 20 m.

Influența puternică pe care o exercită factorii climatici, și în special temperatura aerului, asupra stării termice a apei din lacurile artificiale rezultă și din măsurătorile efectuate la unele baraje din Portugalia [5].

În această țară, temperatura medie anuală a aerului este mai ridicată decît în regiunea Europei centrale, iar temperatura zilnică are valori deasupra lui 0°C în anii normali. Ca urmare, temperatura apei din lacurile de acumulare este mai ridicată, are variații mai reduse în adîncime și nu atinge în regiunea fundului cele 4—5°C înregistrate în lacurile din țările cu climat continental temperat.

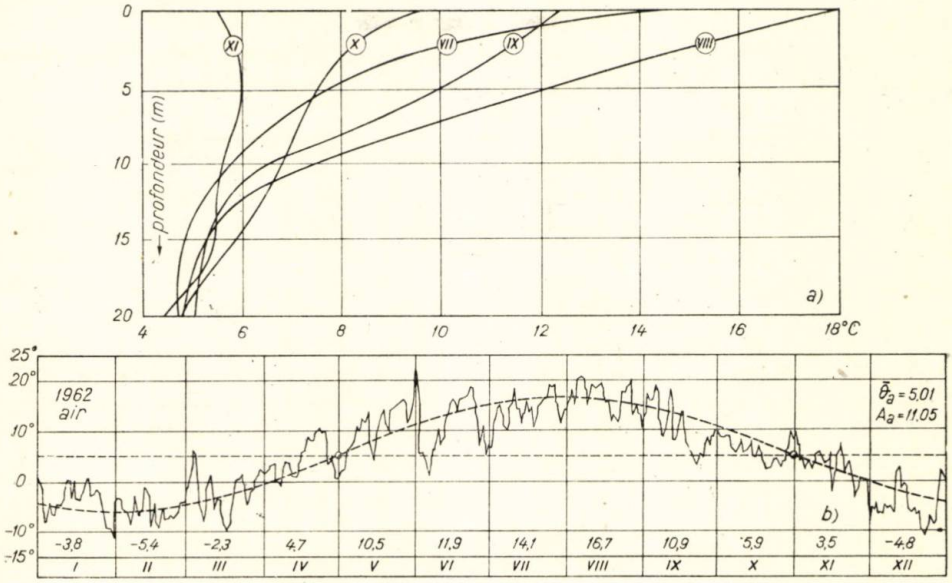


Fig. 6. — Barajul Negovanu :
a — variațiile temperaturilor medii lunare; *b* — variația temperaturii în aer în 1962.

Ținînd seama de rezultatele măsurătorilor efectuate în lacurile din țara noastră, din R. S. Cehoslovacă [4] și chiar din Elveția [6], vom defini analitic elementele caracteristice ale variațiilor de temperatură din aceste lacuri, cu adîncimea mai mare de 20 m, după cum urmează.

PENTRU LACURI CU ADÎNCIMEA PÎNĂ LA 60 M

Temperatura medie anuală $\bar{\theta}_l$ la o cotă z sub nivelul apei are expresia (fig. 7*a*)

$$\bar{\theta}_l = 4{,}50 + (k\,\bar{\theta}_a - 4{,}50)\left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 \qquad \begin{matrix} 20\,\text{m} \leqslant H \leqslant 60\,\text{m} \\ 5\,\text{m} \leqslant z \leqslant H, \end{matrix} \tag{1}$$

care rezultă din condițiile ca pentru $z = 0$ să fie $\bar{\theta}_l = k\,\bar{\theta}_a$ (k poate fi luat egal cu 1,6) și pentru $z = H$ să fie $\theta_l = 4{,}5$°C. Adîncimea H, pentru care $\bar{\theta}_l = 4{,}5$°C, este identică în acest caz cu adîncimea lacului.

Amplitudinea A_l a oscilațiilor de temperatură lunare la o cotă z sub nivelul apei are expresia (fig. 7*b*)

$$A_l = A_a\left(1 - \frac{z}{H}\right)^2 \qquad \begin{matrix} 20\,\text{m} \leqslant H \leqslant 60\,\text{m} \\ 5\,\text{m} \leqslant z \leqslant H, \end{matrix} \tag{2}$$

care rezultă din condițiile ca pentru $z = 0$ să fie $A_l = A_a$ și pentru $z = H$ să fie $A_l = 0$.

Defazajul D_f, în zile, al oscilațiilor de temperatură din lac față de cele din aer, la o cotă z sub nivelul apei, are expresia (fig. 7*c*)

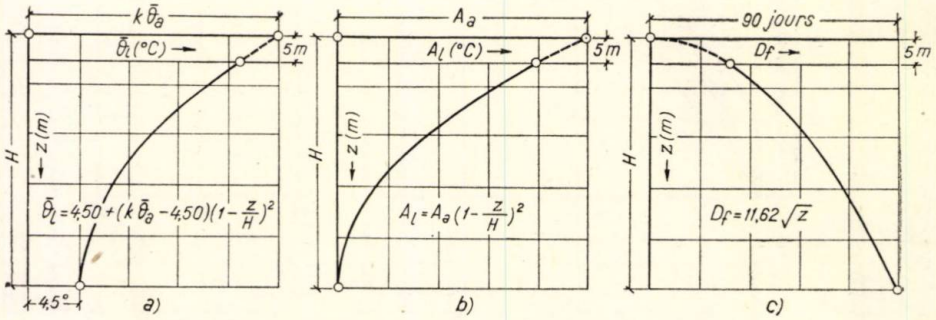


Fig. 7. — Definirea oscilațiilor de temperatură dintr-un lac : *a* – temperatura medie anuală ; *b* – amplitudinea ; *c* – defazajul.

$$D_f = 11{,}62\ \sqrt{z}, \tag{3}$$

care rezultă din condiția ca pentru $z = 0$ să avem $D_f = 0$ și respectiv pentru $z = 60$ m, $D_f = 90$ de zile.

PENTRU LACURI CU ADÎNCIMEA MAI MARE DE 60 M

Temperatura medie $\bar{\theta}_l$ are expresia (1), dată mai sus, pînă la adîncimea de 60 m. De la această adîncime în jos, temperatura apei este constantă și egală cu 4,5°C.

Amplitudinea A_l și *defazajul* D_f sînt nule, o dată ce temperatura apei este constantă.

Expresiile și cifrele caracteristice date mai sus se bazează pe o serie de măsurători destul de numeroase, efectuate în țara noastră sau în alte țări cu climat continental temperat. Ele se referă la lacuri cu adîncimea mai mare de 20 m. După cum s-a arătat, fenomenul analizat pe cale statistică este foarte complex și, din această cauză, dificil de exprimat analitic. Este sigur că alte cercetări care se vor face în viitor vor aduce noi elemente care să permită o definire și mai precisă a factorilor termici care interesează calculul barajelor. Ne gîndim în special la grosimea stratului de salt de suprafață, la adîncimea critică de unde începînd temperatura

se menţine constantă, la condiţiile de margine, la influenţa modului de exploatare a lacului asupra regimului termic etc. Pînă atunci, formulele date în această lucrare pot înlocui indicaţiile arbitrare existente în literatură şi pot constitui un material de bază posibil a fi îmbunătăţit.

C. INTEGRAREA ECUAŢIEI CONDUCŢIEI

În cazul unui perete de beton de grosime L, de lungime şi de înălţime foarte mari în raport cu aceasta, variaţia în timp a temperaturii θ într-un punct de abscisă x (fig. 8) este dată de ecuaţia conducţiei, scrisă de Fourier sub forma monodimensională :

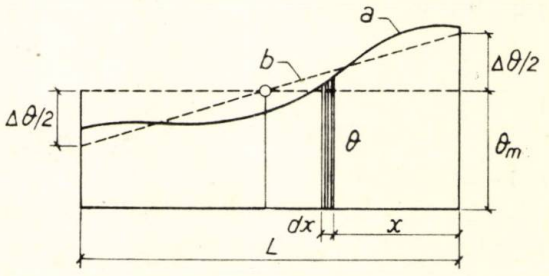


Fig. 8. — Repartiţia temperaturilor într-o secţiune de grosime L :
a — reală ; b — liniară-echivalentă.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{k}{c\gamma_b} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \tag{4}$$

în care

θ = temperatura în grade-centrigrade,
t = timpul în ore,
x = coordonata curentă în metri,
c = căldura specifică a betonului (kcal/kg°C),

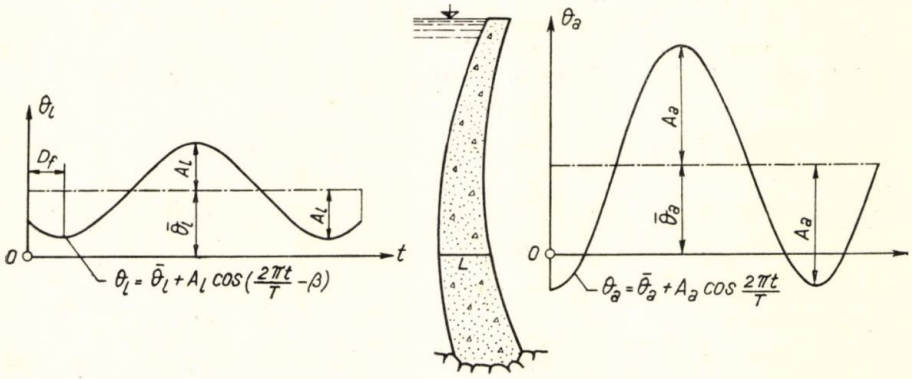


Fig. 9. — Secţiunea unui baraj supusă variaţiilor cosinusoidale de temperatură din aer şi din lac.

k = coeficientul de conductibilitate al betonului (kcal/mh°C),
γ_b = greutatea specifică a betonului (kg/m³),
$a = \dfrac{k}{c\gamma_b}$ = coeficientul de difuzibilitate al betonului (m²/h).

Se admite că secțiunea considerată este solicitată la cele două paramente de variații de temperatură lunare cosinusoidale, de amplitudini diferite, în jurul unor valori medii anuale diferite și defazate între ele (fig. 9), de forma

$$\text{(în aer)} \qquad \theta_a = \bar{\theta}_a + A_a \cos \frac{2\pi t}{T}, \tag{5}$$

$$\text{(în lac)} \qquad \theta_l = \bar{\theta}_l + A_l \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \beta\right), \tag{6}$$

unde se notează

θ_a, θ_l = temperatura în aer, respectiv în lac, la timpul t,
$\bar{\theta}_a$, $\bar{\theta}_l$ = temperatura medie anuală în aer, respectiv în lac,
A_a, A_l = amplitudinile oscilațiilor din aer, respectiv din lac,
T = perioada unei oscilații anuale (8 760 de ore),
$\beta = 2\pi \dfrac{D_f}{T}$ = defazajul (radiani), în care D_f se introduce în ore,
$\mu = \sqrt{\dfrac{\pi c\, \gamma_b}{k\, T}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{a\, T}}\ (\mathrm{m}^{-1})$.

Ținînd seama de condițiile la limită (5) și (6), soluția ecuației (4) este

$$\theta(x, t) = f_1(x) \cos \frac{2\pi t}{T} + \varphi_1(x) \sin \frac{2\pi t}{T} + f_2(x) \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \beta\right) + \varphi_2(x) \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \beta\right) + K_1 + K_2\, x, \tag{7}$$

unde

$$f_1(x) = A_1 \cos \mu x \operatorname{ch} \mu x + B_1 \cos \mu x \operatorname{sh} \mu x + C_1 \sin \mu x \operatorname{ch} \mu x + D_1 \sin \mu x \operatorname{sh} \mu x$$

$$\varphi_1(x) = -A_1 \sin \mu x \operatorname{sh} \mu x - B_1 \sin \mu x \operatorname{ch} \mu x + C_1 \cos \mu x \operatorname{sh} \mu x + D_1 \cos \mu x \operatorname{ch} \mu x$$

$$f_2(x) = A_2 \cos \mu x \operatorname{ch} \mu x + B_2 \cos \mu x \operatorname{sh} \mu x + C_2 \sin \mu x \operatorname{ch} \mu x + D_2 \sin \mu x \operatorname{sh} \mu x$$

$$\varphi_2(x) = -A_2 \sin \mu x \operatorname{sh} \mu x - B_2 \sin \mu x \operatorname{ch} \mu x + C_2 \cos \mu x \operatorname{sh} \mu x + D_2 \cos \mu x \operatorname{ch} \mu x$$

și

$$A_1 = A_a \qquad A_2 = 0$$

$$B_1 = -A_a \frac{\operatorname{sh} \mu L \operatorname{ch} \mu L}{\operatorname{ch}^2 \mu L - \cos^2 \mu L} \qquad B_2 = A_l \frac{\cos \mu L \operatorname{sh} \mu L}{\operatorname{ch}^2 \mu L - \cos^2 \mu L}$$

$$C_1 = -A_a \frac{\sin \mu L \cos \mu L}{\operatorname{ch}^2 \mu L - \cos^2 \mu L} \qquad C_2 = A_l \frac{\sin \mu L \operatorname{ch} \mu L}{\operatorname{ch}^2 \mu L - \cos^2 \mu L}$$

$$D_1 = 0 \qquad D_2 = 0$$

$$K_1 = \bar{\theta}_a \qquad \text{și} \qquad K_2 = \frac{\bar{\theta}_l - \bar{\theta}_a}{L}.$$

Se constată că, dacă în soluția generală (7) se face $\beta = 0$ (oscilații fără defazaj) și $\bar{\theta}_a = \theta_l$ (oscilații în jurul aceleiași temperaturi medii anuale, dar de amplitudini A_a și A_l diferite), regăsim soluția determinată de M. Ritter [7] în 1944.

Cu ajutorul relației (7) se poate determina repartiția temperaturilor în orice secțiune de grosime L la un timp t, ales arbitrar. Dar, pentru ușurința calculelor statice, diagrama reală de repartiție, de o formă oarecare, poate fi înlocuită cu o diagramă echivalentă liniară, ca în figura 8. Pentru ca efectele celor două moduri de repartiție asupra deformației unui arc să fie identice, este necesar ca cele două diagrame să aibă aceeași suprafață și aceeași poziție a centrului de greutate față de axul secțiunii. Astfel, o diagramă liniară admisă în mod curent în calculele statice este constituită din :

— o temperatură medie θ_m, uniform repartizată pe grosimea L, și
— o diferență de temperatură $\Delta\theta$ între extremitățile amonte și aval, polar simetrică în raport cu centrul secțiunii.

D. DETERMINAREA TEMPERATURII UNIFORME θ_m

Temperatura medie corespunzătoare unui timp oarecare t se poate defini sub forma

$$\theta_m = \frac{1}{L}\int_0^L \theta \, dx. \tag{8}$$

Referindu-ne la expresia lui θ (7), observăm că pentru rezolvarea integralei de mai sus trebuie integrate în raport cu x funcțiile $f_1(x)$, $\varphi_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_2(x)$, K_1 și $K_2 x$. După transformări se obțin următoarele rezultate :

$$\int_0^L f_1(x)\,dx = \frac{A_a(\operatorname{sh}\mu L + \sin\mu L)}{2\mu(\operatorname{ch}\mu L + \cos\mu L)}; \quad \int_0^L \varphi_1(x)\,dx = \frac{A_a(\operatorname{sh}\mu L - \sin\mu L)}{2\mu(\operatorname{ch}\mu L + \cos\mu L)};$$

$$\int_0^L f_2(x)\,dx = \frac{A_l(\operatorname{sh}\mu L + \sin\mu L)}{2\mu(\operatorname{ch}\mu L + \cos\mu L)}; \quad \int_0^L \varphi_2(x)\,dx = \frac{A_l(\operatorname{sh}\mu L - \sin\mu L)}{2\mu(\operatorname{ch}\mu L + \cos\mu L)};$$

$$\int_0^L K_1\,dx = \bar{\theta}_a L; \qquad \int_0^L K_2\, x\,dx = \frac{1}{2}(\bar{\theta}_l - \bar{\theta}_a)L.$$

Introducînd aceste expresii în (8), se obține :

$$\theta_m = \frac{1}{2\mu L(\operatorname{ch}\mu L + \cos\mu L)}\left\{(\operatorname{sh}\mu L + \sin\mu L)\left[A_a\cos\frac{2\pi t}{T} + A_l\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \beta\right)\right] + (\operatorname{sh}\mu L - \sin\mu L)\left[A_a\sin\frac{2\pi t}{T} + A_l\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \beta\right)\right]\right\} + \frac{1}{2}(\bar{\theta}_a + \bar{\theta}_l). \tag{9}$$

În cazul în care diferența de fază este nulă ($\beta = 0$), expresia (9) devine

$$\theta_m = \frac{A_a + A_l}{2\,\mu L(\operatorname{ch}\mu L + \cos\mu L)}\left[(\operatorname{sh}\mu L + \sin\mu L)\cos\frac{2\pi t}{T} + \right. \tag{10}$$

$$\left. + (\operatorname{sh}\mu L - \sin\mu L)\sin\frac{2\pi t}{T}\right] + \frac{1}{2}(\bar{\theta}_a + \bar{\theta}_l).$$

Timpul t_m pentru care valoarea lui θ_m este maximă sau minimă se determină anulînd derivata expresiei (9) în raport cu timpul. Se obțin pe această cale expresiile liniilor trigonometrice :

$$\sin\frac{2\pi t}{T} =$$

$$= \frac{A_a(\operatorname{sh}\mu L - \sin\mu L) + A_l\sin\beta\,(\operatorname{sh}\mu L + \sin\mu L) + A_l\cos\beta\,(\operatorname{sh}\mu L - \sin\mu L)}{\sqrt{2\,(\operatorname{sh}^2\mu L + \sin^2\mu L)(A_a^2 + A_l^2 + 2\,A_a\,A_l\cos\beta)}},$$

$$\cos\frac{2\pi t}{T} =$$

$$= \frac{A_a(\operatorname{sh}\mu L + \sin\mu L) + A_l\cos\beta\,(\operatorname{sh}\mu L + \sin\mu L) - A_l\sin\beta\,(\operatorname{sh}\mu L - \sin\mu L)}{\sqrt{2\,(\operatorname{sh}^2\mu L + \sin^2\mu L)(A_a^2 + A_l^2 + 2\,A_a\,A_l\cos\beta)}},$$

$$\sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \beta\right) =$$

$$= \frac{A_l(\operatorname{sh}\mu L - \sin\mu L) - A_a\sin\beta\,(\operatorname{sh}\mu L + \sin\mu L) + A_a\cos\beta(\operatorname{sh}\mu L - \sin\mu L)}{\sqrt{2\,(\operatorname{sh}^2\mu L + \sin^2\mu L)(A_a^2 + A_l^2 + 2A_a\,A_l\cos\beta)}},$$

$$\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \beta\right) =$$

$$= \frac{A_l(\operatorname{sh}\mu L + \sin\mu L) + A_a\cos\beta\,(\operatorname{sh}\mu L + \sin\mu L) + A_a\sin\beta(\operatorname{sh}\mu L - \sin\mu L)}{\sqrt{2\,(\operatorname{sh}^2\mu L + \sin^2\mu L)\,(A_a^2 + A_l^2 + 2\,A_a\,A_l\cos\beta)}}.$$

Introducînd aceste expresii în (9), se obține valoarea maximă, respectiv minimă a lui θ_m, care după transformări ia forma

$$\theta_m = \pm\frac{\sqrt{A_a^2 + A_l^2 + 2\,A_a\,A_l\cos\beta}}{2\,\mu L}\sqrt{2\frac{\operatorname{ch}\mu L - \cos\mu L}{\operatorname{ch}\mu L + \cos\mu L}} + \frac{\bar{\theta}_a + \bar{\theta}_l}{2}. \tag{11}$$

Particularizînd expresia (11) pentru cazul $\beta = 0$, expresia temperaturii medii devine

$$\theta_m = \pm\frac{A_a + A_l}{2\,\mu L}\sqrt{2\,\frac{\operatorname{ch}\mu L - \cos\mu L}{\operatorname{ch}\mu L + \cos\mu L}} + \frac{\bar{\theta}_a + \bar{\theta}_l}{2}, \tag{12}$$

sau, notînd

$$\frac{1}{\mu L}\sqrt{2\frac{\operatorname{ch}\mu L-\cos\mu L}{\operatorname{ch}\mu L+\cos\mu L}}=C_m,$$

$$\theta_m=\pm\frac{A_a+A_l}{2}C_m+\frac{\bar{\theta}_a+\bar{\theta}_l}{2}. \tag{13}$$

Expresia (12) este identică cu aceea dedusă de autor într-o lucrare anterioară [8], în care nu s-a ţinut seama de efectul defazajului. La aceeaşi soluţie au ajuns şi autorii elveţieni A. Stucky şi M. Derron în remarcabila lor lucrare despre problemele termice ale barajelor rezervoare [6].

În legătură cu expresiile (11), (12) şi (13) sînt de făcut următoarele observaţii:

— primul termen reprezintă influenţa oscilaţiilor de temperatură propriu-zise asupra valorii temperaturii medii dintr-o secţiune oarecare, iar cel de-al doilea reprezintă influenţa temperaturilor medii exterioare în jurul cărora se produc oscilaţiile;

— în cazul oscilaţiilor nedefazate ($\beta = 0$), coeficientul C_m este funcţie numai de grosimea secţiunii L şi de μ; valoarea sa subunitară şi descrescătoare în funcţie de grosimea L (vezi tabelele 1, 2, 3) indică gradul de amortizare al variaţiilor de temperatură exterioare în corpul barajului;

— cu formulele deduse se poate determina valoarea temperaturii medii, maxime sau minime care apare într-o secţiune dată a unui baraj; temperatura care se va lua în considerare la calculul static va rezulta din diferenţa dintre temperatura calculată cu una din aceste formule şi temperatura de închidere a rosturilor de contracţie.

F. DETERMINAREA DIFERENŢEI DE TEMPERATURĂ $\Delta\theta$

Diferenţa de temperatură dintre capetele amonte şi aval, aşa cum a fost definită mai înainte, se determină punînd condiţia ca diagrama de repartiţie liniară să aibă acelaşi moment static faţă de centrul secţiunii ca diagrama reală. Referindu-ne la figura 8, această condiţie se exprimă sub forma

$$\frac{1}{12}L^2\Delta\theta=\int_0^L\theta\left(\frac{L}{2}-x\right)\mathrm{d}x,$$

din care rezultă

$$\Delta\theta=\frac{12}{L^2}\int_0^L\theta\left(\frac{L}{2}-x\right)\mathrm{d}x. \tag{14}$$

Se observă că expresia (14) poate fi scrisă şi sub forma

$$\Delta\theta=6\,\theta_m-\frac{12}{L^2}\int_0^L\theta x\,\mathrm{d}x. \tag{15}$$

Expresia lui θ_m se cunoaște din (9), astfel încît rămîne de rezolvat integrala $\int_0^L \theta x \, dx$. În acest scop se integrează funcțiile $xf_1(x)$, $x\varphi_1(x)$, $xf_2(x)$, $x\varphi_2(x)$, $K_1 x$, $K_2 x^2$. După calcule și transformări se obține:

$$\int_0^L x f_1(x)\,dx = \frac{A_a L(\sin \mu L \operatorname{ch} \mu L - \cos \mu L \operatorname{sh} \mu L)}{2\mu(\operatorname{ch}^2 \mu L - \cos^2 \mu L)},$$

$$\int_0^L x\varphi_1(x)\,dx = \frac{-A_a L(\sin \mu L \operatorname{ch} \mu L + \cos \mu L \operatorname{sh} \mu L)}{2\mu(\operatorname{ch}^2 \mu L - \cos^2 \mu L)} + \frac{A_a}{2\mu^2},$$

$$\int_0^L x f_2(x)\,dx = \frac{A_l L(\operatorname{sh} \mu L \operatorname{ch} \mu L - \sin \mu L \cos \mu L)}{2\mu(\operatorname{ch}^2 \mu L - \cos^2 \mu L)},$$

$$\int_0^L x\varphi_2(x)\,dx = \frac{A_l L(sh\, \mu L \operatorname{ch} \mu L + \sin \mu L \cos \mu L)}{2\mu(\operatorname{ch}^2 \mu L - \cos^2 \mu L)} - \frac{A_l}{2\mu^2},$$

$$\int_0^L K_1 x\,dx = \bar{\theta}_a \frac{L^2}{2}, \qquad \int_0^L K_2 x^2\,dx = (\theta_l - \bar{\theta}_a)\frac{L^2}{3}.$$

Introducînd aceste expresii în (15) și ținînd seama și de (9), rezultă după transformări:

$$\Delta\theta = \frac{3}{\mu L}\left\{\frac{\operatorname{sh} \mu L - \sin \mu L}{\operatorname{ch} \mu L - \cos \mu L}\left[A_a \cos\frac{2\pi t}{T} - A_l \cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \beta\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\operatorname{sh} \mu L + \sin \mu L}{\operatorname{ch} \mu L - \cos \mu L} - \frac{2}{\mu L}\right)\left[A_a \sin\frac{2\pi t}{T} - A_l \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \beta\right)\right]\right\} + \bar{\theta}_a - \bar{\theta}_l. \tag{16}$$

Particularizînd expresia (16) pentru $\beta = 0$, oscilații fără defazaj, rezultă

$$\Delta\theta = \frac{3(A_a - A_l)}{\mu L}\left[\frac{\operatorname{sh} \mu L - \sin \mu L}{\operatorname{ch} \mu L - \cos \mu L}\cos\frac{2\pi t}{T} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\operatorname{sh} \mu L + \sin \mu L}{\operatorname{ch} \mu L - \cos \mu L} - \frac{2}{\mu L}\right)\sin\frac{2\pi t}{T}\right] + \bar{\theta}_a - \bar{\theta}_l. \tag{17}$$

Pentru a deduce expresia lui $\Delta\theta$, care corespunde timpului t_m, pentru care θ_m este maxim, respectiv minim, se înlocuiesc în (16) liniile trigonometrice determinate mai înainte. Astfel se obține

$$\Delta\theta = \pm \frac{6}{\mu L \sqrt{2(\operatorname{ch}^2 \mu L - \cos^2 \mu L)(A_a^2 + A_l^2 + 2A_a A_l \cos\beta)}} \cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{(A_a^2 - A_l^2)(\operatorname{sh}^2 \mu L - \sin^2 \mu L) + 4A_a A_l \sin\beta \operatorname{sh} \mu L \sin \mu L}{\operatorname{ch} \mu L - \cos \mu L} - \right. \tag{18}$$

$$\left. - \frac{1}{\mu L}[(A_a^2 - A_l^2)(\operatorname{sh} \mu L - \sin \mu L) + 2A_a A_l \sin\beta(\operatorname{sh} \mu L + \sin \mu L)]\right\} + \bar{\theta}_a - \bar{\theta}_l.$$

Particularizînd expresia (18) pentru $\beta = 0$, oscilații fără defazaj, rezultă

$$\Delta\theta = \pm \frac{6(A_a - A_l)}{\mu L} \frac{\operatorname{sh} \mu L - \sin \mu L}{\sqrt{2(\operatorname{ch}^2 \mu L - \cos^2 \mu L)}} \left(\frac{\operatorname{sh} \mu L + \sin \mu L}{\operatorname{ch} \mu L - \cos \mu L} - \frac{1}{\mu L} \right) + \bar{\theta}_a - \bar{\theta}_l, \tag{19}$$

sau, notînd

$$\frac{6}{\mu L} \frac{\operatorname{sh} \mu L - \sin \mu L}{\sqrt{2(\operatorname{ch}^2 \mu L - \cos^2 \mu L)}} \left(\frac{\operatorname{sh} \mu L + \sin \mu L}{\operatorname{ch} \mu L - \cos \mu L} - \frac{1}{\mu L} \right) = C_\Delta,$$

$$\Delta\theta = \pm (A_a - A_l) C_\Delta + \theta_a - \bar{\theta}_l. \tag{20}$$

Expresia (19), corespunzătoare situației în care defazajul este nul, a fost dedusă și în lucrarea anterioară citată [8]. Ea nu mai poate fi regăsită în lucrarea lui A. Stucky și M. Derron, care au dedus timpul pentru care $\Delta\theta$ (17) este maxim și expresia lui $\Delta\theta$ corespunzătoare. Or, momentele la care θ_m și $\Delta\theta$ sînt maxime sînt decalate între ele și deci combinarea celor două valori pentru calcul nu corespunde realității. Cel mult se poate determina valoarea lui θ_m corespunzătoare timpului la care $\Delta\theta$ este maxim. Dar, după cum s-a arătat în lucrarea [8], coeficienții de reducere ce trebuie aplicați în cele două ipoteze sînt destul de apropiați și, în consecință, calculele se pot efectua după formulele deduse mai înainte.

În legătură cu expresiile (18), (19) și (20) sînt de făcut următoarele observații :

— ca și în cazul lui θ_m, primul termen din aceste formule reprezintă influența oscilațiilor de temperatură propriu-zise asupra valorii diferenței de temperatură dintr-o secțiune oarecare, iar cel de-al doilea reprezintă influența temperaturilor medii exterioare în jurul cărora se produc oscilațiile ;

— în cazul oscilațiilor nedefazate ($\beta = 0$), coeficientul C_Δ este funcție numai de grosimea secțiunii L și de μ ; valoarea sa subunitară și descrescătoare în funcție de grosimea L (vezi tabelele 1, 2, 3) indică același fenomen de amortizare al variațiilor de temperatură exterioare în corpul barajului ;

— valorile lui $\Delta\theta$, determinate cu formulele deduse mai sus, pot intra direct în calculele statice, fără a mai suporta vreo corectură.

F. COEFICIENȚI ȘI DIAGRAME DE CALCUL

În vederea calculelor practice, pentru cei doi coeficienți de reducere C_m (13) și C_Δ (20) s-au efectuat o serie de calcule numerice, ale căror rezultate se dau în tabelele 1, 2 și 3 și în diagramele din figura 10. Cifrele sînt utile pentru cazurile în care nu există un defazaj între oscilațiile de temperatură din amonte și din aval (lac gol spre exemplu) sau pur și simplu

cînd acest defazaj se neglijează. Calculele s-au efectuat pentru trei valori ale coeficientului de difuzibilitate al betonului: $a = 0{,}0025$ m²/h și $\mu = 0{,}3786$ m^{-1}, $a = 0{,}0040$ m²/h și $\mu = 0{,}2994$ m^{-1}, $a = 0{,}0055$ m²/h și $\mu = 0{,}2553$ m^{-1}.

Tabela 1

Coeficienți de reducere pentru $a = 0{,}0025$ m²/h

L (m)	1	2	3	4	5	6	7	8
C_m	0,999	0,994	0,969	0,912	0,820	0,711	0,604	0,514
C_Δ	0,999	0,996	0,991	0,978	0,954	0,928	0,897	0,863
L (m)	9	10	11	12	13	14	15	16
C_m	0,442	0,387	0,345	0,312	0,286	0,265	0,248	0,232
C_Δ	0,828	0,792	0,755	0,724	0,687	0,653	0,619	0,588
L (m)	17	18	19	20	21	22	23	24
C_m	0,219	0,207	0,196	0,187	0,177	0,170	0,162	0,156
C_Δ	0,559	0,532	0,508	0,486	0,466	0,448	0,431	0,415

Tabela 2

Coeficienți de reducere pentru $a = 0{,}0040$ m²/h

L (m)	1	2	3	4	5	6	7	8
C_m	0,999	0,998	0,988	0,962	0,912	0,851	0,762	0,675
C_Δ	0,999	0,997	0,994	0,985	0,972	0,955	0,937	0,915
L (m)	9	10	11	12	13	14	15	16
C_m	0,593	0,522	0,462	0,414	0,374	0,342	0,316	0,295
C_Δ	0,890	0,862	0,832	0,802	0,774	0,748	0,724	0,698
L (m)	17	18	19	20	21	22	23	24
C_m	0,277	0,261	0,247	0,235	0,224	0,214	0,205	0,197
C_Δ	0,671	0,645	0,618	0,593	0,570	0,548	0,528	0,509

Tabela 3

Coeficienţi de reducere pentru a = 0,0055 m²/h

L (m)	1	2	3	4	5	6	7	8
C_m	0,999	0,999	0,993	0,980	0,952	0,908	0,845	0,778
$C\Delta$	0,999	0,998	0,997	0,993	0,986	0,973	0,960	0,945
L (m)	9	10	11	12	13	14	15	16
C_m	0,703	0,630	0,564	0,507	0,457	0,416	0,382	0,353
$C\Delta$	0,928	0,910	0,886	0,862	0,837	0,810	0,784	0,756
L (m)	17	18	19	20	21	22	23	24
C_m	0,329	0,308	0,291	0,276	0,262	0,250	0,240	0,230
$C\Delta$	0,736	0,715	0,693	0,670	0,645	0,624	0,603	0,582

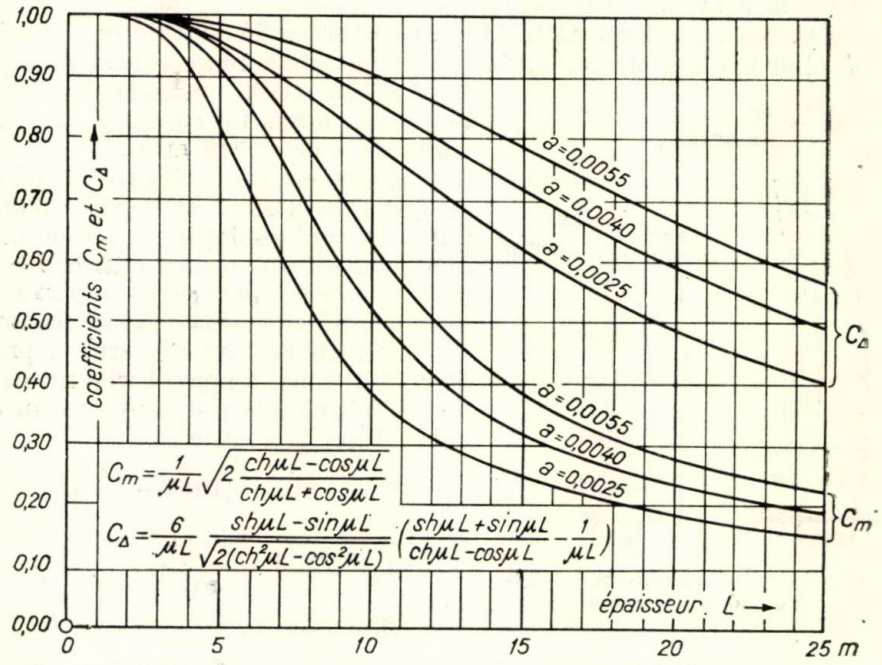


Fig. 10. — Coeficienţii de reducere C_m şi $C\Delta$, calculaţi pentru diverse valori ale coeficientului de difuzibilitate a.

În ce priveşte semnele care trebuie admise pentru primii termeni din formulele deduse anterior, se menţionează că :

— în formulele (11), (12), (13), semnul plus corespunde unei perioade calde, de ridicare a temperaturilor peste temperatura medie, iar semnul

minus corespunde unei perioade reci, de coborîre a temperaturilor sub temperatura medie; lacul poate fi plin ($A_a \neq A_l$) sau gol ($A_a = A_l$);

— în formulele (18), (19), (20), semnul plus corespunde unei perioade calde, în care paramentul aval este mai cald decît cel amonte, iar semnul minus corespunde unei perioade reci, în care paramentul aval este mai rece decît cel amonte; pentru ca $\Delta\theta$ să existe, este necesar ca lacul să fie plin ($A_a \neq A_l$);

— amplitudinile A_a şi A_l se introduc în calcul cu valorile lor absolute.

G. EXEMPLE DE CALCUL

Formulele deduse mai sus au fost aplicate la determinarea temperaturilor de calcul pentru două baraje în arc din ţara noastră, în construcţie (fig. 11): barajul Vidraru — Rîul Argeş, înalt de 166 m, şi barajul Baciu — Rîul Doamnei, înalt de 33 m. În amplasamentele lor, temperatura medie multianuală a aerului este de 8,5°C, iar amplitudinile lunare de ordinul a $\pm$ 15°C. S-a considerat că închiderea rosturilor de contracţie se va face atunci cînd betonul din corpul barajelor va atinge temperatura de 8,5°C, identică cu media multianuală. Pentru beton s-a admis un coeficient de difuzibilitate $a = 0{,}0040$ m²/h.

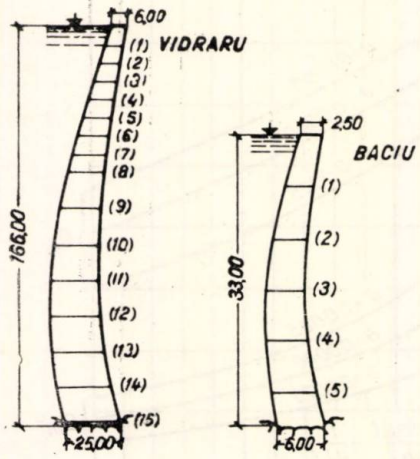


Fig. 11. — Secţiuni maestre prin barajele Vidraru şi Baciu.

Ipotezele de încărcare examinate au fost cele clasice. În cazul lacurilor pline, în care oscilaţiile de temperatură din amonte sînt defazate faţă de cele din aval, calculele s-au efectuat în paralel, ţinînd şi neţinînd seama de acest fenomen.

Pentru barajul Vidraru, pe primii 60 m adîncime, temperaturile medii din lac, amplitudinile şi defazajele s-au calculat după formulele

$$\bar{\theta}_l = 4{,}50 + 9{,}10\left(1 - \frac{z}{60}\right)^2,$$

$$A_l = 15\left(1 - \frac{z}{60}\right)^2,$$

$$D_f = \sqrt{135\, z}.$$

Sub adîncimea de 60 m, temperatura apei s-a considerat constantă şi egală cu 4,5°C.

Mersul calculelor şi rezultatele respective sînt indicate în tabelele 4 şi 5. Pe marginea lor se pot face următoarele constatări:

— în mod sistematic, valorile calculate ţinînd seama de defazaj sînt mai reduse decît cele calculate neglijînd acest fenomen; rezultă că

Tabela 4

Barajul Vidraru. Calculul datelor termice de bază

Secţ.	z (m)	L (m)	$\bar{\theta}_a$(°C)	$\bar{\theta}_l$(°C)	A_a (°C)	A_l(°C)	β (rad.)	$\theta_m - (\bar{\theta}_a + \bar{\theta}_l)/2$		$\Delta\theta - (\bar{\theta}_a - \bar{\theta}_l)$	
								(11)	(13)	(18)	(20)
1	7,50	7,30	8,50	11,47	15,00	11,48	0,55	±9,39	±9,75	±0,25	±3,10
2	15,00	8,40	,,	9,62	,,	8,44	0,77	7,00	7,51	2,32	5,57
3	22,50	9,40	,,	8,05	,,	5,86	0,95	5,35	5,87	5,47	7,56
4	30,00	10,50	,,	6,78	,,	3,75	1,10	4,18	4,60	7,47	9,08
5	37,50	11,50	,,	5,78	,,	2,11	1,22	3,46	3,74	9,57	10,23
6	45,00	12,45	,,	5,07	,,	0,94	1,34	3,01	3,15	10,81	10,95
7	52,50	13,50	,,	4,64	,,	0,23	1,45	2,69	2,72	11,21	11,20
8	60,00	14,30	,,	4,50	,,	0,00	—		2,51		11,12
9	75,00	16,20	,,	,,	,,	,,	—		2,18		10,39
10	90,00	17,50	,,	,,	,,	,,	—		2,01		9,87
11	105,00	19,05	,,	,,	,,	,,	—		1,85		9,09
12	120,00	20,60	,,	,,	,,	,,	—		1,71		8,69
13	135,00	22,00	,,	,,	,,	,,	—		1,61		8,22
14	150,00	23,70	,,	,,	,,	,,	—		1,49		7,72
15	165,00	25,00	8,50	4,50	15,00	0,00	—		1,42		7,37

un calcul termic mai exact conduce la rezistenţe mai mici, dînd posibilitatea încărcării structurii în mai mare măsură cu alte solicitări;

— diferenţele valorice sînt mai mari în cazul diferenţelor de temperatură $\Delta\theta$ decît în cazul temperaturilor medii θ_m; de asemenea ele sînt mai pronunţate în regiunea superioară a barajului, unde dimensiunile sînt mai reduse şi deci structura mai sensibilă la variaţiile de temperatură;

— temperaturile uniforme θ_m — 8,50, mai mari în valoare absolută în cazul unei coborîri de temperatură decît în cazul unei ridicări, indică drept mai favorabilă închiderea rosturilor la o temperatură a betonului cu circa 2°C mai joasă decît temperatura medie multianuală de 8,50°C; procedînd astfel, cifrele de calcul se echilibrează şi eforturile de tensiune care apar în perioadele reci se reduc proporţional.

Tabela 5

Barajul Vidraru. Temperaturi de calcul în diferite ipoteze

Secț.	z (m)	Lac gol		Lac plin — ridicare temp.				Lac plin-coborîre temp.			
		$\theta_m - 8{,}50$		$\theta_m - 8{,}50$		$\Delta\theta$		$\theta_m - 8{,}50$		$\Delta\theta$	
		ridicare	coborîre	(11)	(13)	(18)	(20)	(11)	(13)	(18)	(20)
1	7,50	11,22	−11,22	10,87	11,23	−2,72	0,13	−7,91	−8,27	−3,22	−6,07
2	15,00	9,61	− 9,61	7,56	8,07	1,20	4,45	−6,44	−6,95	−3,44	−6,69
3	22,50	8,45	− 8,45	5,13	5,65	5,92	8,01	−5,57	−6,09	−5,02	−7,11
4	30,00	7,35	− 7,35	3,32	3,74	9,19	10,80	−5,04	−5,46	−5,75	−7,36
5	37,50	6,55	− 6,55	2,10	2,38	12,29	12,95	−4,82	−5,10	−6,85	−7,51
6	45,00	5,93	− 5,93	1,30	1,44	14,24	14,38	−4,72	−4,86	−7,38	−7,52
7	52,50	5,37	− 5,37	0,76	0,79	15,07	15,06	−4,62	−4,65	−7,35	−7,34
8	60,00	5,02	− 5,02		0,51		15,12		−4,51		−7,12
9	75,00	4,36	− 4,36		0,18		14,39		−4,18		−6,39
10	90,00	4,03	− 4,03		0,01		13,87		−4,01		−5,87
11	105,00	3,70	− 3,70		−0,15		13,09		−3,85		−5,09
12	120,00	3,42	− 3,42		−0,29		12,69		−3,71		−4,69
13	135,00	3,22	− 3,22		−0,39		12,22		−3,61		−4,22
14	150,00	2,98	− 2,98		−0,51		11,72		−3,49		−3,72
15	165,00	2,83	− 2,83		−0,58		11,37		−3,42		−3,37

Pentru barajul Baciu, de o înălțime maximă de 33 m, temperaturile medii din lac, amplitudinile și defazajele s-au calculat după formulele

$$\bar{\theta}_l = 4{,}50 + 9{,}10\left(1 - \frac{z}{33}\right)^2,$$

$$A_l = 15\left(1 - \frac{z}{33}\right)^2,$$

$$D_l = \sqrt{135\, z}\,.$$

Mersul calculelor și rezultatele respective sînt indicate în tabelele 6 și 7. Constatările făcute mai sus pentru barajul Vidraru se păstrează calitativ și pentru barajul Baciu, mai scund și de dimensiuni mai reduse

(grosimea lui variază de la 2,50 m la coronament la 6 m la bază). Caracteristic este faptul că temperaturile de calcul au valori mai ridicate decît în cazul barajului Vidraru și că diferențele procentuale între cifrele calculate, ținînd și neținînd seama de defazajul dintre oscilații, sînt mai mari (vezi tabelele 6 și 7). De aici și concluzia că, în timp ce la barajele de dimensiuni mai groase se poate neglija acest fenomen, la cele subțiri, mai sensibile la variațiile de temperatură ale mediului exterior, este indicat să se țină seama de el.

Tabela 6

Barajul Baciu. Calculul datelor termice de bază

Secț.	z (m)	L (m)	$\bar{\theta}_a$ (°C)	$\bar{\theta}_l$ (°C)	A_a (°C)	A_l (°C)	β (rad.)	$\theta_m-(\bar{\theta}_a+\bar{\theta}_l)/2$		$\Delta\theta-(\bar{\theta}_a-\bar{\theta}_l)$	
								(11)	(13)	(18)	(20)
1	6,00	3,65	8,50	10,59	15,00	10,04	0,49	±11,84	±12,19	±4,14	±4,89
2	12,00	4,42	8,50	8,19	15,00	6,07	0,69	9,48	9,96	7,86	8,71
3	18,00	5,04	8,50	6,38	15,00	3,10	0,85	7,86	8,26	10,89	11,39
4	24,00	5,52	8,50	5,18	15,00	1,12	0,98	6,90	7,11	12,93	13,09
5	30,00	5,87	8,50	4,50	15,00	0,12	1,10	6,45	6,48	13,84	13,85

Tabela 7

Barajul Baciu. Temperaturi de calcul în diferite ipoteze

Secț	z (m)	Lac gol		Lac plin — ridicare temp.				Lac plin-coborîre temp.			
		$\theta_m-8{,}50$		$\theta_m-8{,}50$		$\Delta\theta$		$\theta_m-8{,}50$		$\Delta\theta$	
		ridicare	coborîre	(11)	(13)	(18)	(20)	(11)	(13)	(18)	(20)
1	6,00	14,60	−14,60	12,88	13,23	2,05	2,80	−10,80	−11,15	−6,23	−6,98
2	12,00	14,18	−14,18	9,32	9,80	8,17	9,02	− 9,64	−10,12	−7,55	−8,40
3	18,00	13,70	−13,70	6,80	7,20	13,01	13,51	− 8,92	− 9,32	−8,77	−9,27
4	24,00	13,22	−13,22	5,24	5,45	16,25	16,41	− 8,56	− 8,77	−9,61	−9,77
5	30,00	12,86	−12,86	4,49	4,52	17,76	17,77	− 8,41	− 8,44	−9,92	−9,93

Primită la redacție la 15 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. * * * Institutul de meteorologie, *Clima Republicii Populare Romîne*, vol. I (redactori S. M. Stoenescu și D. Tiștea), C.S.A., București, 1962.
2. R. Prișcu, *Contribuții la problema determinării temperaturilor de calcul pentru barajele arcuite*. St. cer. mec. apl., *2* (1957).

3. P. GÎȘTESCU, *Lacurile din R.P.R.*, Bucureşti, 1963.
4. A. BRATRÁNEK, *The course of temperature in rivers and its changes by the water management.* Praga, 1961.
5. A. DA SILVEIRA, *As variações de temperatura nas barragens.* Lisabona, 1961.
6. A. STUCKY, M. DERRON, *Problèmes thermiques posés par la construction des barrages-réservoirs.* Lausanne, 1957.
7. M. RITTER, *Temperaturverlauf und Wärmespannungen in Mauern bei oscillierenden Aussentemperaturen.* Zürich, 1944.
8. R. PRIȘCU, *O metodă de determinare a temperaturilor de calcul pentru barajele arcuite.* Comunicările Acad. R.P.R., *3* (1957).

EFECTUL VARIAȚIEI DE TEMPERATURĂ ȘI AL DEPLASĂRII REAZEMELOR ÎN CALCULUL CADRELOR SPAȚIALE[1])

de DECEBAL ANASTASESCU[2]) și ION MUNTEANU[3])

539.4

Se prezintă modul de determinare al eforturilor ce apar în cadrele spațiale atît datorită variației de temperatură, cît și tasării reazemelor. Se aplică metoda deplasărilor cu rezolvarea iterativă a ecuațiilor de condiție. Pe baza exemplelor practice de calcul care însoțesc lucrarea, se prezintă diferențele ce rezultă între eforturile din structură în ipoteza de calcul spațială și cea plană.

1. INTRODUCERE

1.1. Determinarea prin metoda deplasărilor a eforturilor ce apar în barele cadrelor spațiale datorită variației de temperatură și deplasărilor de reazeme prezintă un aspect comun prin modul în care se obțin termenii liberi R_X, R_Y, R_Z din sistemul de ecuații caracteristic al fiecărui nod.

1.2. Odată cunoscuți acești termeni, problema se rezolvă după procedeele cunoscute, calculul sistemului general de ecuații din metoda deplasărilor putîndu-se efectua iterativ, fie pe o singură schemă de transmiteri spațiale [9], [14], fie pe mai multe [6], [16].

1.3. În această lucrare se prezintă cel de-al doilea procedeu și posibilitățile de a se ajunge în continuare la scheme de echilibrare plane.

2. CAZUL VARIAȚIEI DE TEMPERATURĂ

2.1. Se consideră sistemul spațial elementar (fig. 1), cu riglele în planul orizontal XOY și stîlpul înclinat situat într-un plan vertical, supus unei creșteri de temperatură în axă cu t grade ($t°C$).

[1]) Publicată în „Rev. roum. sci. teh. — Mécanique Appliquée", **10**, *1* (1965) (în lb. franceză).

[2]) D.S.A.P.C. — Banat.

[3]) Institutul politehnic Timișoara.

Acest tip de structură poate fi considerat în mod practic cel mai general caz posibil şi îl vom denumi de tipul III. În cazul cînd stîlpii sînt verticali, structura este de tipul II, iar dacă şi riglele sînt ortogonale cadrul este de tipul I.

Sistemul de axe al nodului k este dat în figura 2.

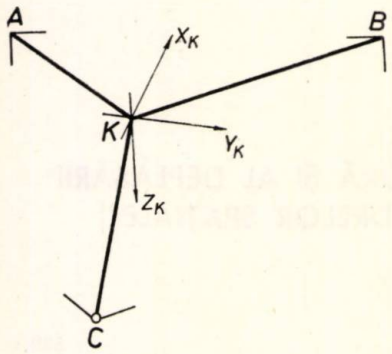


Fig. 1

Datorită alungirii barelor kl ($l = A, B, C$), nodul k se deplasează cu Δ_k (fig. 3). Pentru a obţine poziţia deplasată k' a nodului k, se introduc articulaţii în noduri şi, aplicînd formula Maxwell-Mohr, se determină proiecţiile deplasării Δ_k pe axele X, Y, Z ale sistemului de axe din nodul k:

$$\begin{aligned} \bar{1}.\ \Delta_{kX} &= \alpha\, t^\circ \sum \alpha_{kl,3} \cdot l_{kl} \\ \bar{1}.\ \Delta_{kY} &= \alpha\, t^\circ \sum \beta_{kl,3} \cdot l_{kl}\,; \qquad (l = A, B, C), \\ \bar{1}.\ \Delta_{kZ} &= \alpha\, t^\circ \sum \gamma_{kl,3} \cdot l_{kl} \end{aligned}$$

unde

$\alpha_{kl,a}$, $\beta_{kl,a}$, $\gamma_{kl,a}$ sînt cosinii directori ai direcţiei principale a, din capătul k al barei kl, faţă de axele X, Y, Z;

α — coeficientul de dilatare termică, liniară.

În funcţie de Δ_{kX}, Δ_{kY}, Δ_{kZ} se determină deplasările relative ale capetelor de bară după direcţiile 1,2 (pe direcţia 3 nu interesează, neproducînd momente încovoetoare):

$$\begin{aligned} \Delta_{kl,1} &= \Delta_{kX} \cdot \alpha_{kl,1} + \Delta_{kY} \cdot \beta_{kl,1} + \Delta_{kZ} \cdot \gamma_{kl,1}\,; \\ \Delta_{kl,2} &= \Delta_{kX} \cdot \alpha_{kl,2} + \Delta_{kY} \cdot \beta_{kl,2} + \Delta_{kZ} \cdot \gamma_{kl,2}\,. \end{aligned}$$

2.2. Se ajunge la acelaşi rezultat aplicînd procedeul Williot, cunoscut de la structurile plane. Se determină întîi în planul XOY poziţia deplasată k'' a nodului k, iar apoi poziţia deplasată pe verticală k' a aceluiaşi nod, printr-o construcţie similară intersectînd perpendicularele pe deplasările cunoscute $\overline{kk''}$ şi $\overline{kk'''}$ (fig. 4). De această dată procedeul este însă mai dificil decît în cazul structurilor plane, necesitînd determinarea analitică în spaţiu a poziţiei punctului k deplasat. Această poziţie poate fi obţinută printr-o construcţie grafică situată într-un singur plan vertical numai în cazurile:

— cadrelor de tipul III simetrice faţă de planul XOZ;

— cadrelor de tipul II şi I.

2.3. Datorită rotirii barelor cu $\theta_{kl,a}$, unde $\theta_{kl,a} = \dfrac{\Delta_{kl,a}}{l_{kl}}$ ($l = A, B, C$; $a = 1,2$), în sistemul de bază al structurii cu nodurile blocate apar momentele de încastrare perfectă, acţiuni pe nod (fig. 5), pentru bara perfect încastrată la ambele capete [4], [6]:

$$\mathfrak{M}_{kl,a} = \frac{\delta_{ll,a} + \delta_{lk,a}}{\delta_{kk,a} \cdot \delta_{ll,a} - \delta^2_{kl,a}} \cdot \frac{\Delta_{kl,a}}{l_{kl}}$$

$$\mathfrak{M}_{lk,\,a} = \frac{\delta_{kk\ a} + \delta_{lk,\,a}}{\delta_{kk,\,a} \cdot \delta_{ll,\,a} - \delta^2_{lk,\,a}} \cdot \frac{\Delta_{kl,\,a}}{l_{kl}}$$

și

$$\mathfrak{M}_{kl,\,a} = \frac{1}{\delta_{kk,\,a}} \cdot \frac{\Delta_{kl,\,a}}{l_{kl}} \quad (a = 1,2)$$

pentru bara articulată la capătul l.

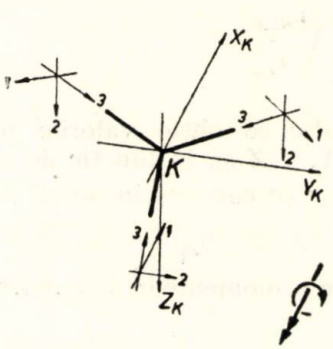


Fig. 2

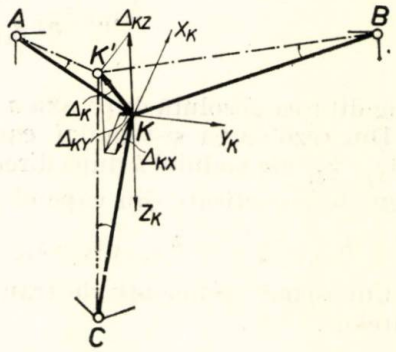


Fig. 3

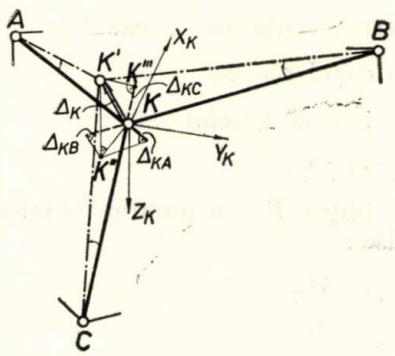


Fig. 4

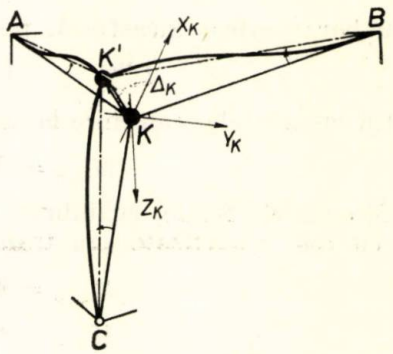


Fig. 5

2.4. Cunoscînd valorile $\mathfrak{M}_{kl,\,a}$, se obțin componentele R_{X_k}, R_{Y_k}, R_{Z_k} ale momentului rezultant, acțiune pe nodul k:

$$R_{Xk} = \sum \mathfrak{M}_{kl,\,a} \cdot \alpha_{kl,\,a} \quad (a = 1,2)$$
$$R_{Yk} = \sum \mathfrak{M}_{kl,\,a} \cdot \beta_{kl,\,a}$$
$$R_{Zk} = \sum \mathfrak{M}_{kl,\,a} \cdot \gamma_{kl,\,a}.$$

Se rezolvă în continuare sistemul caracteristic al nodului k [5]:

$$\theta_{X_k} \sum K\alpha^2 + \theta_{Y_k} \sum K\beta\alpha + \theta_{Z_k} \sum K\gamma\alpha + R_{X_k} = 0$$
$$\theta_{X_k} \sum K\alpha\beta + \theta_{Y_k} \sum K\beta^2 + \theta_{Z_k} \sum K\gamma\beta + R_{Y_k} = 0$$
$$\theta_{X_k} \sum K\alpha\gamma + \theta_{Y_k} \sum K\beta\gamma + \theta_{Z_k} \sum K\gamma^2 + R_{Z_k} = 0,$$

unde

$$K_{kl,\,a} = \frac{\delta_{ll,\,a}}{\delta_{kk,\,a}\cdot\delta_{ll,\,a} - \delta^2_{kl,\,a}} \text{ şi } K_{kl,\,a} = \frac{1}{\delta_{kk,\,a}}$$

reprezintă rigidităţile absolute ale barei kl pentru capătul k şi după direcţia $a = 1,2$ în cazul cînd capătul opus este perfect încastrat, respectiv articulat, iar [1], [13].

$$K_{kl,\,3} = \frac{1}{\delta_{kk,\,3}} = \frac{G}{\int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{J_{x,3}}}$$

este rigiditatea absolută după axa $a = 3$.

Din rezolvarea sistemului caracteristic se obţin valorile rotirilor θ_{X_k}, θ_{Y_k}, θ_{Z_k} ale nodului k după direcţiile X, Y, Z şi, în funcţie de acestea, momentele repartizate din capetele barelor ce concură în nodul k:

$$M^r_{kl,\,a} = K_{kl,\,a}\cdot\theta_{kl,\,a} = K_{kl,\,a}\,(\theta_{X_k}\cdot\alpha_{kl,\,a} + \theta_{Y_k}\cdot\beta_{kl,\,a} + \theta_{Z_k}\cdot\gamma_{kl,\,a}), \quad (a = 1,2,3).$$

Cunoscînd coeficienţii de transmitere a momentelor la capătul opus al barelor:

$$t^{(\mathrm{Ma})}_{k\to l} = \frac{\delta_{lk,\,a}}{\delta_{ll,\,a}}; \quad t^{(\mathrm{Ma})}_{k\to l} = 0,$$

pentru bara perfect încastrată, respectiv articulată, în cazul $a = 1,2$, şi

$$t^{(\mathrm{Ma})}_{k\to l} = +1, \text{ în cazul } a = 3,$$

se obţin momentele transmise la capetele l ale barelor kl:

$$M^t_{lk,\,a} = M^r_{kl,\,a}\cdot t^{(\mathrm{Ma})}_{k\to l}.$$

Momentele finale, echilibrate, se obţin din însumarea momentelor $\mathfrak{M}_{kl,\,a}$ cu cele repartizate sau transmise:

$$M_{kl,\,a} = \mathfrak{M}_{kl,\,a} + M^r_{kl,\,a}$$

$$M_{lk,\,a} = \mathfrak{M}_{lk,\,a} + M^t_{lk,\,a}.$$

2.5. În cazul unei structuri mai complexe (fig. 6), calculul se conduce în două etape.

În prima etapă de calcul, în ipoteza blocării şi fixării cinematice a nodurilor structurii, se determină momentele $\mathfrak{M}_{kl,\,a}$ după procedeul expus anterior, luînd un sistem de axe de referinţă oarecare ($0-0$ şi $0'-0'$).

Se echilibrează apoi pe rînd nodurile $k,l,\ldots,n$, făcîndu-se succesiv repartizările şi transmiterile respective pentru obţinerea momentelor echilibrate din etapa I:

$$M^*_{kl,\,a} = \mathfrak{M}_{kl,\,a} + \sum M^r_{kl,\,a} + \sum M^t_{kl,\,a}.$$

În etapa doua de calcul, se dau pe rînd deplasări arbitrare structurii după direcţia legăturilor liniare, obţinîndu-se momentele echilibrate $M^L{}_{kl,a}$ ($L = \mathrm{I,II},\ldots,\mathrm{IV}$).

Momentele finale se obțin cu ajutorul expresiei

$$M_{kl,a} = M^{*}_{kl,a} + \sum C_L \cdot M^{L}_{kl,a} \quad (l = A,B,\ldots F \quad L = \text{I,II}\ldots\text{IV}).$$

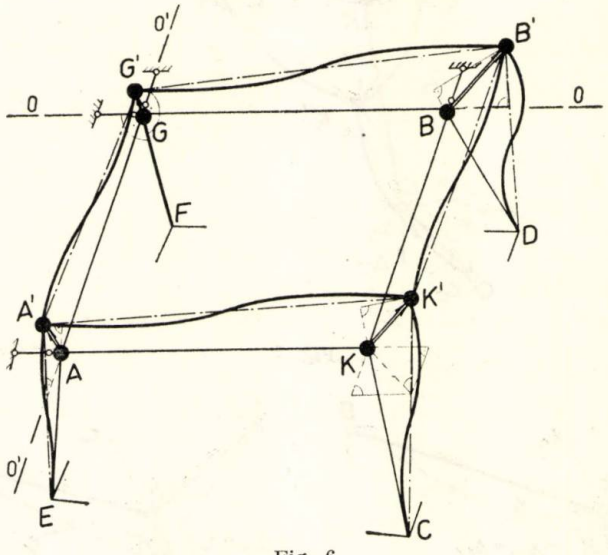


Fig. 6

Coeficienții C_L de corecție ai deplasărilor liniare arbitrare se obțin din ecuații de lucru mecanic virtual de forma : [11]

$$C_{\text{I}}L^{\text{I}}_{\text{I}} + C_{\text{II}}L^{\text{II}}_{\text{I}} + \ldots + C_N L^{N}_{\text{I}} + L^{*}_{\text{I}} = 0$$
$$C_{\text{I}}L^{\text{I}}_{N} + C_{\text{II}}L^{\text{II}}_{N} + \ldots + C_N L^{N}_{N} + L^{*}_{N} = 0,$$

unde

$$L^{\text{I}}_{N} = \sum_s M^{\text{I}}_{kl,a} \cdot \theta^{N}_{kl,a}; \quad L^{*}_{N} = \sum_s M^{*}_{kl,a} \cdot \theta^{N}_{kl,a} \quad (a = 1,2),$$

sau din ecuații de forțe de deviație :

$$C_{\text{I}}D^{\text{I}}_{\text{I}} + C_{\text{II}}D^{\text{II}}_{\text{I}} + \ldots + C_N D^{N}_{\text{I}} + D^{*}_{\text{I}} = 0$$
$$C_{\text{I}}D^{\text{I}}_{N} + C_{\text{II}}D^{\text{II}}_{N} + \ldots + C_N D^{N}_{N} + D^{*}_{N} = 0.$$

3. CAZUL DEPLASĂRILOR DE REAZEME

Se consideră aceeași structură (fig. 1) al cărei reazem C suferă o deplasare Δ_C (fig. 7) de direcție oarecare.

Cunoscînd proiecțiile Δ_{C_X}, Δ_{C_Y}, Δ_{C_Z} ale deplasării Δ_C după axele X_C, Y_C, Z_C, precum și deplasările $\Delta_{kl,a}$ obținute din epura deplasărilor cinematice ale structurii articulate (fig. 8), se calculează valorile momentelor $\mathfrak{M}_{kl,a}$.

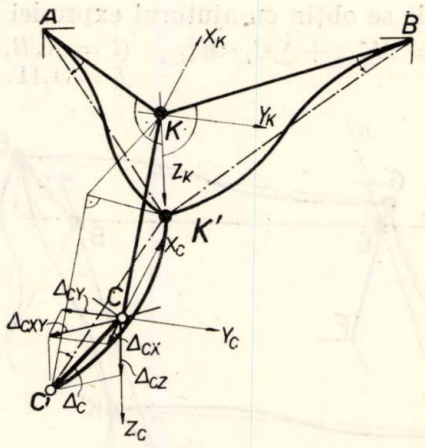


Fig. 7

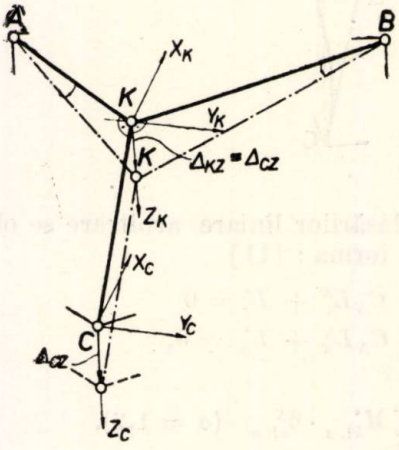


Fig. 8 (*a*)

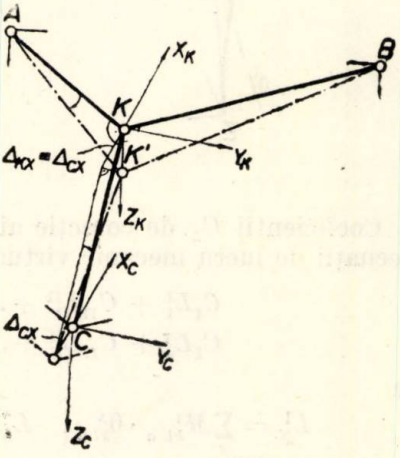


Fig. 8 (*b*)

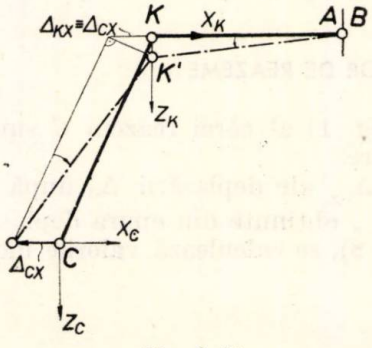


Fig. 8 (*c*)

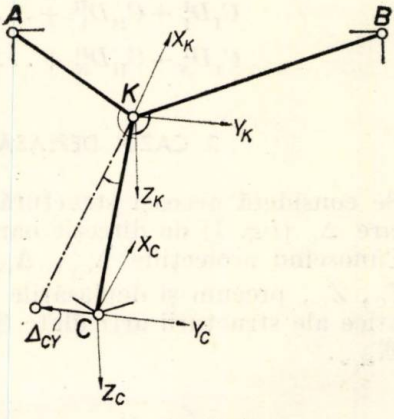


Fig. 8 (*d*)

Echilibrarea nodului k sub acțiunea rezultantei acestor momente se face similar cazului variației de temperatură.

În cazul unei structuri mai complexe (fig. 9), unde reazemul C suferă deplasarea Δ_C și rotirea φ_C, după determinarea momentelor $\mathfrak{M}_{kl,a}$

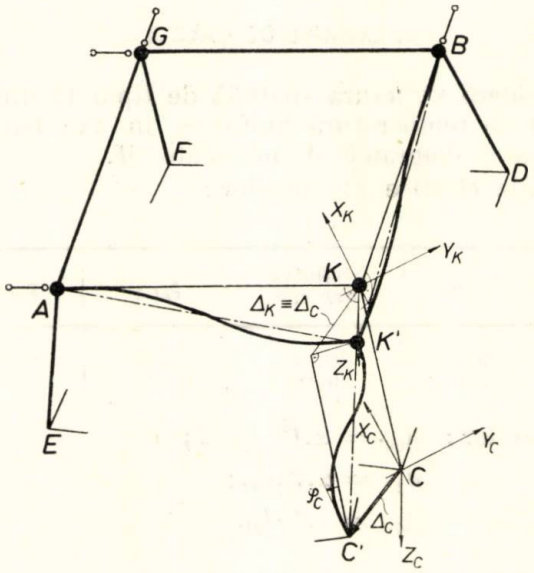


Fig. 9

acestea se echilibrează succesiv în etapa I, urmînd ca etapa a II-a și obținerea momentelor finale să se facă ca și în cazul variației de temperatură.

4. APROXIMAȚII ÎN CALCUL

La cadrele de tipul I, independența rotirilor din planele ortogonale permite descompunerea schemei de echilibrare spațială în scheme plane, situate în plane paralele și legate între ele prin transmiteri de torsiuni (ex. 5.3).

Dacă între aceste plane paralele există plane de simetrie (geometrică, elastică și de încărcare), torsiunile barelor de legătură se anulează, astfel încît echilibrările se efectuează independent și numai în planele paralele, fără transmiteri spațiale (ex. 5.4).

În prezența unor plane de simetrie după ambele direcții ortogonale, schema de echilibrare spațială se reduce la scheme plane independente (ex.5.5).

Rezultă deci că, în absența unor plane de simetrie, pentru a se ajunge la scheme de echilibrări plane este necesară neglijarea momentelor de torsiune. Diferențele care se obțin astfel față de valorile momentelor calculate exact se măresc o dată cu accentuarea nesimetriei structurii(ex. 5.3).

În cazul cadrelor de tipul II şi III, neglijarea momentelor de torsiune şi dispunerea laturilor stîlpilor într-un anumit raport [10], [3], [12] permit, de asemenea, reducerea schemei de echilibrare spaţială la o serie de scheme de echilibrare plane (ex. 5.2).

5. EXEMPLE DE CALCUL

5.1. Se consideră structura spaţială de tipul II din figura 10 sub acţiunea variaţiei de temperatură uniformă în axa barelor, $t^\circ > 0$. Se prezintă determinarea diagramei de momente M.

Caracteristicile elastice ale barelor:

Bara	l cm	Secţiunea bxh cm²	$\rho_{kl,1}$	$\rho_{kl,2}$	$\rho_{kl,3}$
Stîlpul	500	50×50	1,042	1,042	0,219
Rigla	500	30×60	1,080	0,270	0,093

Dilatările barelor: $u_{00'} = \alpha . t^\circ . l_{00'}/2$;

$u_{20} = \alpha . t^\circ . l_{02}$;

$u_{01} = \alpha . t^\circ \cdot l_{01}$.

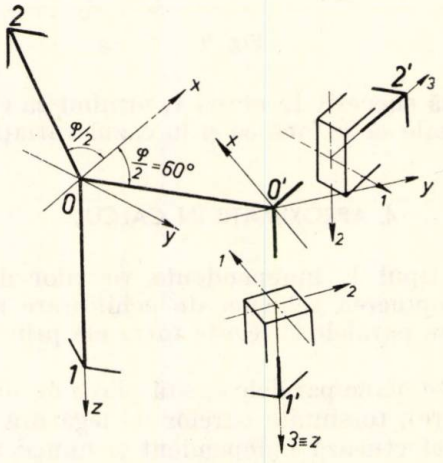


Fig. 10

Deplasările relative ale capetelor barelor:

$$\Delta_{00',1} = 0\,; \quad \Delta_{00',2} = 0\,;$$

$$\Delta_{20,1} = \alpha . t^\circ\, l\,; \quad \Delta_{20,2} = 2 . \alpha . t^\circ . l/\sqrt{3}\,;$$

$$\Delta_{01,1} = \alpha\, t^\circ\, l/2\sqrt{3}\,; \quad \Delta_{01,2} = 3\ \alpha t^\circ\, l/2.$$

Momente de încastrare perfectă :

$$\mathfrak{M}_{02,1} = \mathfrak{M}_{20,1} = 6.E.J_{02,1}\ \Delta_{02,1}/l_{02}^2 = 6.E.1{,}080.\ \alpha.t^\circ = 6{,}480\ E\ \alpha\ t^\circ C;$$

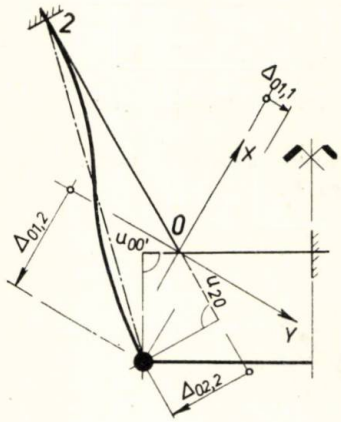


Fig. 11

$$\mathfrak{M}_{02,2} = \mathfrak{M}_{20,2} = 1{,}872\ E\ \alpha\ t^\circ;$$
$$\mathfrak{M}_{01,1} = \mathfrak{M}_{10,1} = 1{,}805\ E\ \alpha\ t^\circ;$$
$$\mathfrak{M}_{01,2} = \mathfrak{M}_{10,2} = 9{,}380\ E\ \alpha\ t^\circ.$$

Deformația din variația de temperatură fiind simetrică (fig. 11), dilatările, deplasările, momentele de încastrare perfectă și deci și echilibrările se calculează pe jumătate de structură. Rigiditățile ρ' pentru bara $00'$ tăiată de planul de simetrie vor fi [5], [6] :

$$\rho'_{kl,a} = (1 - t_{kl,a})\ \rho_{kl,a}, \quad a = 1,2; \quad \rho_{kl,3} = 0;$$

Barele, având J = ct., vor avea $t_{kl,a} = 1/2$, unde $a = 1,2$, iar $t_{kl,3} = +1$.

Echilibrarea nodului O se face în tabela următoare :

Bara axa	0−1			0−2			0−0′		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
ρ	1,042	1,042	0,219	1,080	0,270	0,093	0,540	0,135	0
α	1	0	0	−0,866	0	−0,500	−0,866	0	−0,500
β	0	1	0	−0,500	0	0,866	0,500	0	−0,866
γ	0	0	− 1	0	1	0	0	− 1	0
$\rho\alpha$	1,042	0	0	−0,935	0	−0,047	−0,468	0	0
$\rho\beta$	0	1,042	0	−0,540	0	−0,081	0,270	0	0
$\rho\gamma$	0	0	−0,219	0	0,270	0	0	−0,135	0
$\rho\alpha\beta$	0	0	0	0,468	0	−0,041	−0,234	0	0
$\rho\alpha^2$	1,042	0	0	0,810	0	0,023	0,405	0	0
$\rho\beta^2$	0	1,042	0	0,270	0	0,070	0,135	0	0
$\rho\gamma^2$	0	0	0,219	0	0,270	0	0	0,135	0

$$\Sigma\rho\alpha^2 = 2{,}280;\ \Sigma\rho\beta^2 = 1{,}517;\ \Sigma\rho\gamma^2 = 0{,}624;$$

$$\Sigma\ \rho\ \alpha\ \beta = 0{,}193;$$

$\mathfrak{M}$	−1,805	−9,380	0	−6,480	−1,872	0	0	0	0

$$R_x = +3{,}805;\ R_y = -6{,}140;\ R_z = -1{,}872;$$

$$\theta_x = -2{,}0334;\ \theta_y = +4{,}3062;\ \theta_z = +3{,}0000;$$

M^r	+2,119	0	0	+1,901	0	+0,096	+0,952	0	0
	0	+4,487	0	−2,325	0	+0,348	+1,163	0	0
	0	0	−0,656	0	+0,812	0	0	−0,405	0
	−2,119	+4,487	−0,656	−0,424	+0,812	+0,444	+2,115	−0,405	0
M	−3,924	−4,893	−0,656	−6,664	−1,060	+0,444	+2,115	−0,405	0

Momentele de la celelalte capete ale barelor sînt :

Bara axa	1—0			2—0			0′—0		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$\mathfrak{M}$	−1,805	−9,380	0	−6,240	−1,872	0	0	0	0
M^t	−1,060	+2,244	−0,656	−0,212	+0,406	+0,444	+2,115	−0,405	0
M	−2,865	−7,136	−0,656	−6,452	−1,466	+0,444	+2,115	−0,405	0

Momentele finale rezultă prin multiplicarea acestor valori cu $\alpha . t^\circ . E$ şi sînt reprezentate în diagrama din figura 12.

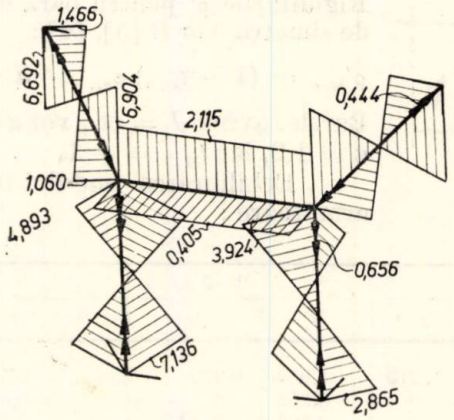


Fig. 12

5.2. Pentru structura spaţială de tipul II din figura 10, cu stîlpii dreptunghiulari în raport, supusă acţiunii $t^\circ > 0$, se cere diagrama momentelor M.

Caracteristicile elastice ale barelor :

Bara	l (cm)	Secţiunea $b \times h$ cm^2	$\rho_{kl,1}$	$\rho_{kl,2}$	$\rho_{kl,2}$
Stîlpul	500	35×60	1,260	0,429	0,137
Rigla	500	30×60	1,080	0,270	0,093

Dilatările barelor, precum şi deplasările relative ale nodurilor barelor, sînt aceleaşi cu cele de la exemplul 5.1 (fig. 11).

5.2.1. Calculul exact

Momentele de încastrare perfectă :

$$\mathfrak{M}_{02,1} = \mathfrak{M}_{20,1} = 6{,}480 . E . \alpha . t^\circ ;$$
$$\mathfrak{M}_{02,2} = 1{,}872 . E . \alpha . t^\circ ;$$
$$\mathfrak{M}_{01,1} = \mathfrak{M}_{10,1} = 2{,}182 . E . \alpha . t^\circ ;$$
$$\mathfrak{M}_{01,2} = \mathfrak{M}_{10,2} = 3{,}861 . E . \alpha . t^\circ .$$

Echilibrarea nodului O se face în mod identic cu cazul exemplului 5.1, iar diagrama de momente finale este dată în figura 13.

5.2.2. Calculul aproximativ, neglijînd torsiunea riglelor ($m_{\text{rigle},3}=0$), se conduce după [2].

Diagrama de momente finale este dată în figura 13, valorile fiind trecute în paranteze.

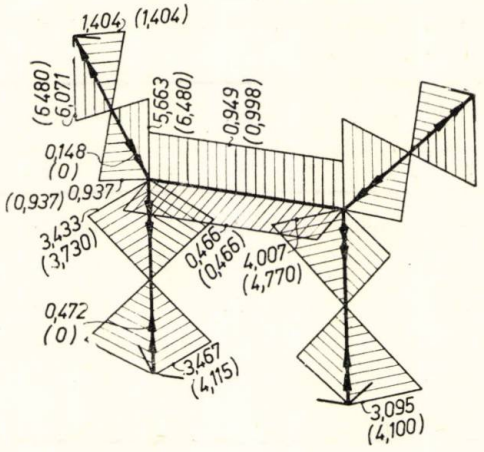


Fig. 13

5.3. Pentru structura din figura 14, supusă variației $t^\circ > 0$, se prezintă diagrama de momente.

Caracteristicile elastice ale barelor rezultă din figura 14.

Deformata structurii datorită variației de temperatură ($t^\circ > 0$) este dată în figura 15, unde liniile punctate reprezintă dilatările barelor, respectiv deplasările relative de nod.

Calculul s-a efectuat în trei situații, și anume :

1) calculul în spațiu exact;

2) calculul în spațiu considerînd torsiuni nule în bare;

3) calculul numai în planele verticale transversale (principale).

Diagrama finală de momente pentru situația 1 de calcul este dată în figura 16, iar rezultatele pentru cele trei situații de calcul sînt date în tabela următoare (pentru comparație). Valorile din tabel trebuie multiplicate cu $\alpha\ t^\circ\ E$ pentru a obține valorile momentelor.

Bara / Axa / Situația	A–1			1–A			2–B			3–D		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	9,650	1,285	0,125	3,980	1,365	0,125	2,605	1,860	—	4,020	2,050	—
2	7,935	1,235	0	4,190	1,240	0	2,850	1,705	—	3,980	2,135	—
3	7,805	0	0	4,070	0	0	3,005	0	—	3,755	0	—

Bara / Axa / Situația	4–C			C–4			1–2			2–1		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	6,640	1,295	0,165	8,825	0,785	0,165	1,110	0,120	0,205	1,430	0,100	0,205
2	5,895	1,355	0	8,095	0,785	0	1,240	0,060	0	1,705	0,055	0
3	6,000	0	0	8,260	0	0	0	0	0	0	0	0

Bara / Axa / Situația	2–3			3–2			3–4			4–3		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	2,810	0,100	0,430	4,875	0,150	0,430	2,480	0,150	0,855	1,550	0,055	0,855
2	2,850	0,055	0	3,980	0,115	0	2,135	0,115	0	1,355	0,105	0
3	3,005	0	0	3,755	0	0	0	0	0	0	0	0

Bara / Axa / Situația	4–1			1–4		
	1	2	3	1	2	3
1	5,785	0,220	0,255	3,775	0,005	0,255
2	5,895	0,105	0	4,190	0,060	0
3	6,000	0	0	4,070	0	0

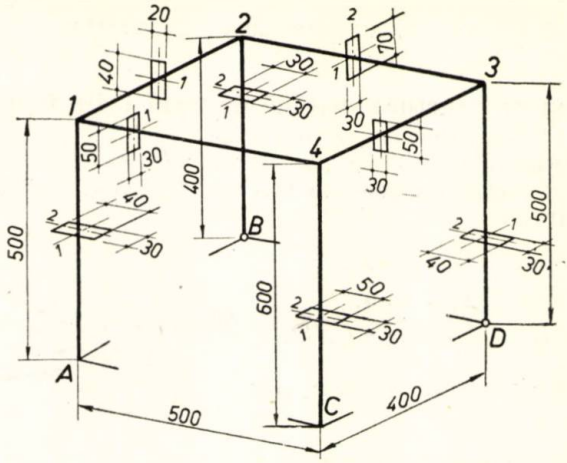


Fig. 14

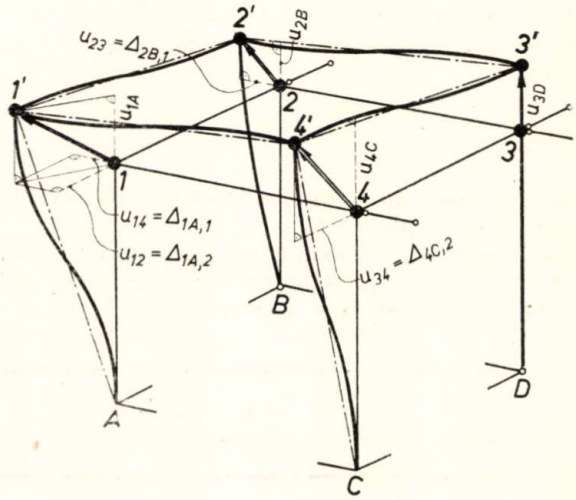


Fig. 15

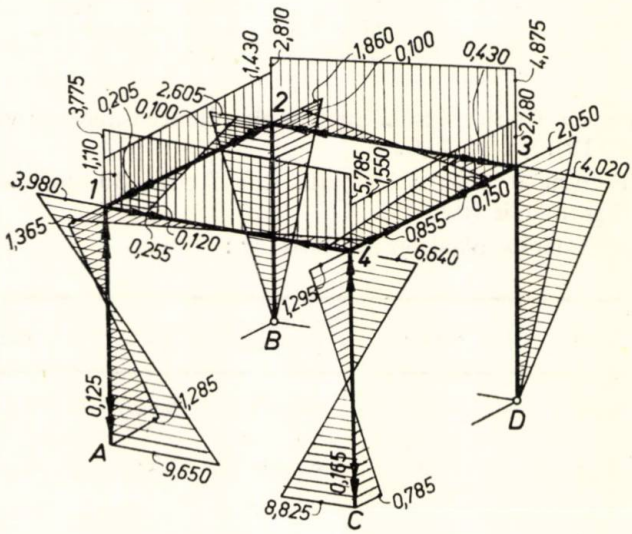


Fig. 16

5.4. Pentru structura spaţială de tipul I din figura 17 sub acţiunea $t^\circ > 0$, se cere diagrama de momente M.

Caracteristicile elastice ale barelor (vezi exemplul 5.1). Dilatările barelor sînt aceleaşi cu cele de la exemplul 5.1. Deplasările relative ale nodurilor barelor :

$$\Delta_{00',1} = 0, \qquad \Delta_{00',2} = 0,$$
$$\Delta_{01,1} = \alpha.t^\circ l/2, \qquad \Delta_{01,2} = \alpha.t^\circ l,$$
$$\Delta_{02,1} = \alpha.t^\circ l, \qquad \Delta_{02,2} = \alpha.t^\circ.l/2.$$

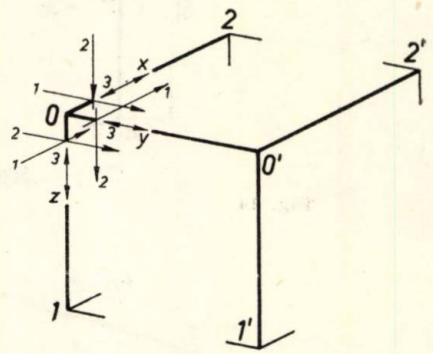


Fig. 17

Momentele de încastrare perfectă :

$$\mathfrak{M}_{01,1} = \mathfrak{M}_{10,1} = 6.E.J_{01,1} \cdot \Delta_{10,1}/l_{01}^2 =$$
$$= 6.E.1{,}042.\alpha.t^\circ/2 =$$
$$= 3{,}126.E.\alpha.t^\circ ;$$
$$\mathfrak{M}_{01,2} = 6{,}252.E.\alpha.t^\circ ;$$
$$\mathfrak{M}_{02,1} = 6{,}480.E.\alpha.t^\circ ;$$
$$\mathfrak{M}_{02,2} = 0{,}810.E.\alpha.t^\circ.$$

Deformaţia din variaţia de temperatură fiind simetrică, se ţine seama de observaţiile de la exemplul 5.1.

Echilibrarea nodului O se face separat în cele trei plane ($2-0-0'$, $2-0-1$, $1-0-0'$), direct pe schema structurii (fig. 18).

Coeficienţii de repartizare vor fi :

Axa / Bara	$r'_{kl} = \rho'_{kl}/\Sigma\,\rho'$		
	1	2	3
0—1	0,622	0,492	0,351
0—2	0,508	0,433	0,056
0—0′	0,332	0,216	0

Momentele finale rezultă prin multiplicarea acestor valori, reprezentate în (fig. 19), cu $\alpha.\ t^\circ.E$.

5.5. Pentru structura spaţială din figura 20 supusă la $t^\circ > 0$, se prezintă diagrama M (fig. 21).

Caracteristicile elastice ale barelor :

Bara	l (cm)	Secţiunea $b \times h$ (cm²)	$\rho_{kl,\,1}$	$\rho_{kl,\,2}$
Stîlp	500	40×40	0,427	0,427
Riglă	500	40×60	1,440	0,640

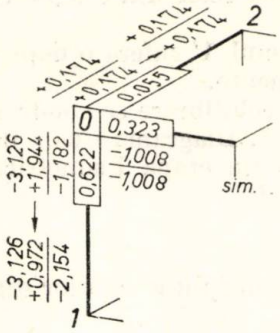


Fig. 18

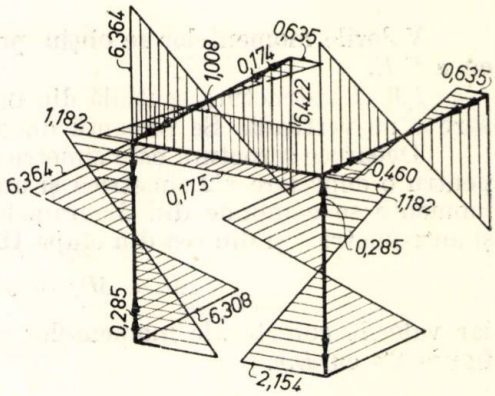


Fig. 19

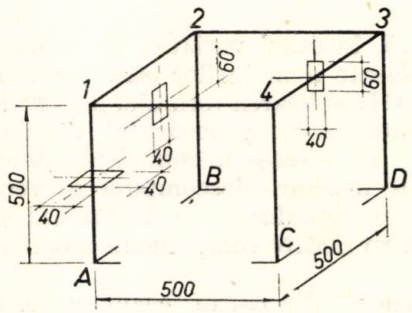


Fig. 20

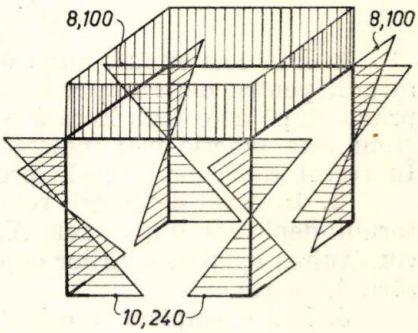


Fig. 21

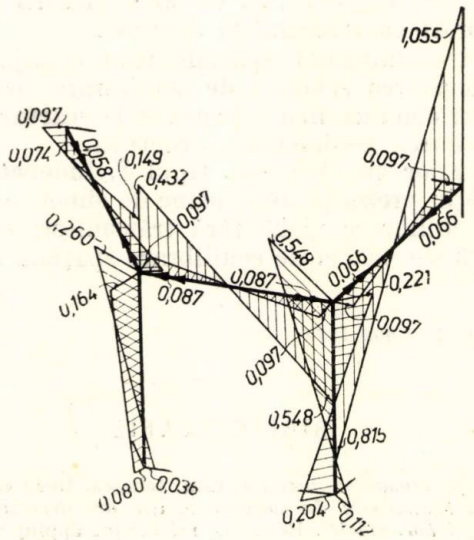


Fig. 22

Valorile momentelor se obţin prin multiplicarea celor din diagramă cu $\alpha\, t^{\circ} E$.

5.6. La structura spaţială din figura 10, reazemul 1′ suferă o deplasare v pe verticală. Se prezintă diagrama de momente.

Deoarece structura este simetrică, calculul de echilibrare se conduce pentru o deplasare $v/2$ simetrică şi una antisimetrică. Diagrama finală de momente se compune din diagramele de momente din etapa I simetrică şi antisimetrică şi din cea din etapa II corectată, deci

$$M = M^{IS} + M^{IaS} + C.M^{II},$$

iar valorile corecte ale momentelor se obţin prin multiplicarea celor din figura 22 cu $E.v$.

6. CONCLUZII

1. Din cele expuse anterior rezultă că, în cazul variaţiei de temperatură, pentru determinarea poziţiei deplasate a nodurilor structurii, în prima etapă de calcul, la cadrele de tipul III, aplicarea formulei Maxwell-Mohr este practic mai indicată decît generalizarea procedeului Williot. În restul cazurilor, ambele procedee sînt în aceeaşi măsură aplicabile.

2. În cazul deplasării reazemelor este necesară descompunerea vectorului-deplasare după axele X, Y, Z ale reazemului ce se deplasează şi construirea epurei nodurilor deplasate pentru fiecare componentă a deplasării în parte.

3. Din exemplele de calcul prezentate rezultă că, în cazul cadrelor de tipul II, III şi I nesimetrice, determinarea eforturilor în structură datorită atît variaţiei de temperatură, cît şi deplasării reazemelor necesită scheme de echilibrări cu transmiteri spaţiale.

Eliminarea transmiterilor spaţiale prin neglijarea momentelor de torsiune şi transformarea schemei de echilibrare spaţială în scheme de echilibrare plane ar conduce în aceste cazuri la ecarturi care, se majorează o dată cu accentuarea nesimetriei structurii.

În cazul cadrelor simetrice de tipul I, independenţa rotirilor din planele ortogonale în prezenţa unor plane de simetrie conduce la apariţia unor scheme de echilibrare plană fără transmiteri spaţiale sau chiar la reducerea completă a schemei de echilibrare spaţială la o serie de scheme plane.

Primită la redacţie la 7 mai 1964

BIBLIOGRAFIE

1. R. AGENT, *Metoda aproximaţiilor succesive*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1955.
2. D. ANASTASESCU, I. MUNTEANU, *Le calcul simplifié des structures spatiales du type tour sous charges horizontales*. Revue de mécanique appliquée, **VII** *4* (1962).
3. Д. АНАСТАСЕСКУ, И. МУНТЕАНУ, *К расчету рамных конструкций башенного типа*. Строительная механика и расчет сооружений, *6* — Москва (1963).—

4. C. N. Avram, *La généralisation de la méthode Cross pour le calcul des structures hyperstatiques*. Tip. Hălmăgeanu, Timişoara, 1949.
5. C., J. L. Cassado Fernandez, *Calcul des grandes ossatures réticulaires*. Dunod, Paris, 1954.
6. C. Cătuneanu, D. Anastasescu, I. Munteanu, *Generalizarea metodei repartizării momentelor la calculul cadrelor spațiale*. Buletinul ştiinţific şi tehnic al Instit. politehnic Timişoara, **3** *17* (1958).
7. Al. Gheorghiu, *Statica construcțiilor*, II, Curs, I.C. Bucureşti.
8. В.К. Юдин, *Расчёт пространственных рам*. Киев, 1961.
9. А. Коган, *Расчёт пространственных рам по методу распределения моментов защемления*. Москва, 1954.
10. M. D. Kupferschmidt, *Ebene und Räumliche Rahmentragwerke*. Springer, Wien, 1952.
11. P. Mazilu, *Statica construcțiilor*, II. Edit. tehnică, Bucureşti, 1959.
12. I. Munteanu, *Cadre spațiale simetrice radial cu stîlpi neparaleli*. St. cerc. şt. tehn., Academia R.P.R., Baza Timişoara, **X** 1, (1963).
13. V. Petcu, *Asupra staticii grinzii de beton armat de secțiunea variabilă la torsiune*. Revista construcțiilor şi a materialelor de construcții, *4*, 1958, Bucureşti.
14. C. Popovici, *O teorie generală a metodei distribuirii eforturilor*. St. cerc. mec. apl., *3—4* (1956—1957).
15. И.М. Рабинович, *Курс строительной механики стержневых систем*. Москва, 1954.
16. B. Rawlings, *The general moment distribution analysis of space frames*. *The structural Engineer*, **38**, *6* (1960) şi **41**, *12* (1963).

CONTRIBUȚIE LA PROBLEMA REZEMĂRII INTERMEDIARE A BARELOR CU PEREȚI SUBȚIRI[1]

de I. APPELTAUER și E. CUTEANU[2]

539.4

În lucrarea de față se determină formula de calcul pentru forța de fixare a unui stîlp de cadru, rezemarea intermediară acționînd în planul longitudinal structurii, stîlpul fiind solicitat în planul transversal la încovoiere cu forța axială. S-a considerat cazul general al barei monosimetrice, sprijinite elastic la un nivel oarecare în raport cu centrul de răsucire. Întrucît s-a urmărit de la început determinarea forțelor de fixare maxime, a fost suficient să se considere o singură rezemare intermediară la mijlocul lungimii, iar în planul cadrului transversal să se limiteze analiza la forța axială cu moment de încovoiere constant în lungul barei.

Formula de calcul a forței de fixare fiind prea complicată pentru aplicarea directă în proiectare, se pot întocmi cu ușurință abace în funcție de parametrii principali ai problemei. În acest sens s-au prezentat în lucrare cîteva diagrame orientative. Se observă că forța de fixare reprezintă numai o fracțiune foarte mică din forța normală capabilă a barei.

În continuare se prezintă verificarea stîlpului de cadru rezemat intermediar, atît cu un calcul direct, dar laborios, cît și cu o formulă aproximativă, care simplifică mult calculul fără a greva exactitatea lui practică. În cadrul acestei verificări s-a justificat și considerarea aproximativă a imperfecțiunilor.

1. DEFINIREA PROBLEMEI

Stîlpii cadrelor de oțel supuși la compresiune excentrică în planul cadrului transversal sînt de obicei rigidizați prin rezemări intermediare, care acționează longitudinal structurii. Atît pentru a cunoaște acțiunea

[1]) Publicată în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique appliquée", **10**, *1* (1965) (în lb. germană).

[2]) Institutul politehnic Timișoara.

favorabilă a rezemărilor intermediare asupra stîlpului propriu-zis, cît și pentru dimensionarea contravîntuirilor înseși, este necesar să se cunoască forțele care se produc în dreptul reazemelor intermediare.

În literatura tehnică există în această privință foarte puține date. W. Zuk [1] își pune aceeași problemă pentru bara dublu simetrică, însă, o rezolvă numai pentru cazurile particulare ale compresiunii centrice respectiv încovoierii pure a barei, cazuri care nu intervin în general la stîlpii cadrelor. Trebuie remarcat că în soluționarea dată de Zuk încovoierii pure intervine o eroare de calcul chiar de la integrarea sistemului de ecuații diferențiale. G. Winter [2], reia, între altele, aceeași problemă pentru cazul compresiunii centrice, însă determină în locul forței de fixare rigiditatea minimă a contravîntuirii, la care flambajul prin bifurcarea echilibrului în planul longitudinal se produce la următoarea valoare proprie superioară.

2. DETERMINAREA FORȚEI DE FIXARE PENTRU BARA MONOSIMETRICĂ, COMPRIMATĂ EXCENTRIC ÎN PLANUL CADRULUI TRANSVERSAL ȘI REZEMATĂ ELASTIC ÎN SENS LONGITUDINAL, LA MIJLOCUL LUNGIMII, LA UN NIVEL OARECARE ÎN RAPORT CU CENTRUL DE RĂSUCIRE

2.1. Întrucît din lucrările [1] și [2] rezultă că în cazurile calculate forța de fixare a fost foarte mică, s-a considerat de la început cazul cel mai defavorabil al barei izolate, simplu rezemate la capete în privința încovoierii în sens longitudinal și a răsucirii. Din același considerent, în planul cadrului transversal forța de compresiune excentrică s-a considerat paralelă cu axa barei (adică momentul încovoietor constant în lungul barei).

Prin construcția lui, corespunzătoare cazurilor practice curente, reazemul intermediar împiedică elastic deplasarea pe direcția contravîntuirii, lăsînd liberă rotația prin răsucire, a secțiunii transversale. Tot pentru obținerea forței maxime s-a considerat un singur reazem intermediar la mijlocul lungimii barei.

Din literatură [1], [2] mai rezultă că valori finite ale forței de fixare se obțin numai în ipoteza considerării barelor reale (adică a barelor cu imperfecțiuni). În [1] imperfecțiunile sînt asimilate cu o încovoiere în sens longitudinal și o răsucire inițială a barei, afine cu deformata echilibrului indiferent la flambajul prin încovoiere-răsucire a barei nerezemate intermediar. Această schematizare a imperfecțiunilor a fost menținută și în lucrarea de față, deoarece ea corespunde cu aproximarea divergenței echilibrului printr-un calcul de rezistență de ordinul doi. Determinarea mărimii săgeților și a rotațiilor inițiale se poate face în conformitate cu [3], prin racordare la curba coeficientului de flambaj din *Normativul condiționat pentru calculul construcțiilor la stări limită. Proiectarea construcțiilor metalice, civile și industriale* (*P. 11—62*) [4].

2.2. În raport cu sistemul de referință intrinsec cu originea în centrul de răsucire (fig. 1), sistemul de ecuații diferențiale se scrie :
în zona $0 \leqslant x \leqslant l/2$

$$\begin{cases} B\overline{w}_1'' + N(\overline{w}_1 + \overline{w}_0) + N\overline{e}(\varphi_1 + \varphi_0) - \dfrac{F}{2}x = 0 \\ C_\omega \varphi_1''' - C\varphi_1' + Ni_c^2(\varphi_1' + \varphi_0') + N\overline{e}(\overline{w}_1' + \overline{w}_0') - r_z Ne(\varphi_1' + \varphi_0') - \dfrac{F}{2}\overline{\eta} = 0, \end{cases} \tag{1-2}$$

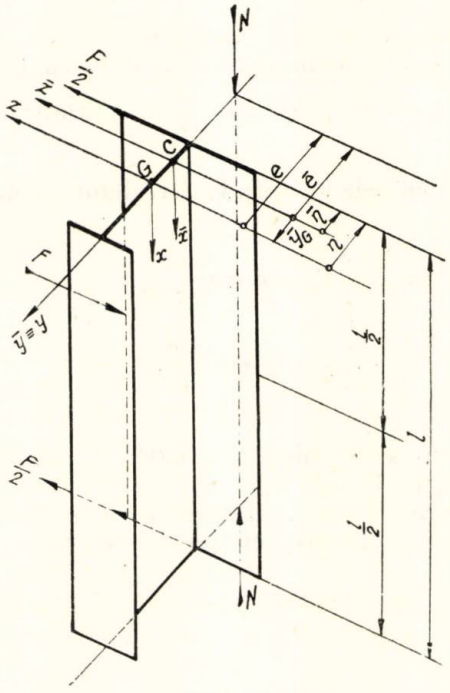


Fig. 1

unde s-a notat cu
$\overline{w}_1$ și φ_1 deplasarea după axa $\overline{z}$ și rotația secțiunii transversale în jurul axului de răsucire, considerată pozitivă în sens antiorar,
— cu $\overline{w}_0$ și φ_0 deformațiile inițiale corespunzătoare,
— cu e și $\overline{e}$ excentricitatea forței normale N în raport cu centrul de greutate și centrul de răsucire (aceste excentricități sînt legate prin relația

$$e = \overline{e} + \overline{y}_G \tag{3}$$

unde $\overline{y}_G$ este ordonata centrului de greutate),
— cu F forța de fixare din reazemul intermediar și cu $\overline{\eta}$ nivelul reazemului în raport cu centrul de răsucire,

— cu $B = E I_y$, $C = G I_r$, $C_\omega = E I_\omega$ modulele de rigiditate la încovoiere, la răsucire liberă şi împiedicată;
— cu

$$i_c^2 = \frac{I_z + I_y}{A} + \overline{y}_G^2 \tag{4}$$

pătratul razei de inerţie polare în raport cu centrul de răsucire, iar cu

$$r_z = \frac{1}{I_z}\left[\int_A \overline{y}\,(\overline{z}^2 + \overline{y}^2)\,\mathrm{d}A - \overline{y}_G\, i_c^2 A\right] \tag{5}$$

o caracteristică liniară a secţiunii monosimetrice.

În zona $l/2 < x \leqslant l$, ultimul termen din ecuaţia (1), respectiv (2) se înlocuieşte cu $\frac{F}{2}(x - l)$, respectiv $\frac{F}{2}\overline{\eta}$, notînd sistemul obţinut cu (1′—2′).

În conformitate cu cele arătate la 2.1, deformaţiile iniţiale s-au considerat după legea

$$\begin{cases} \overline{w}_0 = a \sin \dfrac{\pi x}{l} \\ \varphi_0 = b \sin \dfrac{\pi x}{l}, \end{cases} \tag{6—7}$$

unde l este lungimea barei.

Pentru rezolvarea sistemului de ecuaţii (1—2) se integrează o dată ecuaţia (2) (din condiţiile limită $\overline{w}_1 = \varphi_1 = \varphi_1'' = 0$ pentru $x = 0$ rezultă constanta de integrare $C_1 = 0$), eliminînd cu relaţia obţinută săgeţile din ecuaţia (1). Astfel se găseşte ecuaţia diferenţială

$$\varphi_1^{IV} - K_1 \varphi_1'' - K_2 \varphi_1 = c \sin \frac{\pi x}{l} - d\,Fx, \tag{8}$$

unde

$$K_1 = \frac{1}{C_\omega}\left[C - N\left(i_c^2 - r_z\, e + \frac{C_\omega}{B}\right)\right]; \quad K_2 = \frac{N}{BC_\omega}\left[C - N\left(i_c^2 - r_z\, e - \overline{e}^2\right)\right]$$

$$c = \frac{N\overline{e}}{BC_\omega}\left\{N_y a + \frac{N}{\overline{e}}\left[\left(\frac{N_y}{N} - 1\right) g + \overline{e}^2\right] b\right\}; \quad d = \frac{N}{2BC_\omega}(\overline{e} - \overline{\eta}), \tag{9—12}$$

cu notaţiile intermediare:

$$N_y = \frac{\pi^2 B}{l^2} \qquad \text{şi} \qquad g = i_c^2 - r_z\, e. \tag{13—14}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (8) este:

$$\varphi_1 = C_2 \operatorname{sh} \gamma x + C_3 \operatorname{ch} \gamma x + C_4 \sin \alpha x + C_5 \cos \alpha x + k \sin \frac{\pi x}{l} + q\,Fx, \tag{15}$$

unde

$$\gamma = \sqrt{\frac{K_1 + \sqrt{K_1^2 + 4K_2}}{2}}; \qquad \alpha = \sqrt{\frac{-K_1 + \sqrt{K_1^2 + 4K_2}}{2}};$$

$$k = \frac{c}{\frac{\pi^4}{l^4} + \frac{\pi^2}{l^2}(\gamma^2 - \alpha^2) - \alpha^2\gamma^2} = \frac{\frac{N_y}{N}\bar{e}a + \left[\left(\frac{N_y}{N} - 1\right)g + \bar{e}^2\right]b}{\frac{N_y}{N}\cdot\frac{N'_\omega}{N} + \left(\frac{N_y}{N} - 1\right)\left(\frac{C}{N} - g\right) - \frac{N'_\omega}{N} - \bar{e}^2} \tag{16-19}$$

$$q = \frac{\bar{e} - \bar{\eta}}{2\,[C - N(g - \bar{e}^2)]},$$

cu notația intermediară :

$$N'_\omega = \frac{\pi^2 C_\omega}{l^2}. \tag{20}$$

Operînd similar asupra sistemului de ecuații (1′—2′), valabil în zona $l/2 < x \leqslant l$ (constanta de integrare obținută prin integrarea ecuației (2′) se determină din condițiile limită $\bar{w}_2 = \varphi_2 = \varphi_2'' = 0$ pentru $x = l$, găsind $C_6 = -\frac{F\eta l}{2}$), rezultă soluția generală :

$$\varphi_2 = C_7 \operatorname{sh}\gamma x + C_8 \operatorname{ch}\gamma x + C_9 \sin\alpha x + C_{10}\cos\alpha x + k\sin\frac{\pi x}{l} - qF(x-l). \tag{21}$$

2.3. Dintre condițiile limită de la capătul $x = 0$ rămîn operante $\varphi_1 = \varphi_1'' = 0$, rezultînd $C_3 = C_5 = 0$. Celelalte două condiții, $\bar{w}_1 = \bar{w}_1'' = 0$, sînt satisfăcute identic. Similar stau lucrurile și la $x=l$, obținîndu-se relațiile :

$$\begin{cases} C_7 \operatorname{sh}\gamma l + C_8 \operatorname{ch}\gamma l + C_9 \sin\alpha l + C_{10}\cos\alpha l = 0 \\ C_7\gamma^2 \operatorname{sh}\gamma l + C_8\gamma^2 \operatorname{ch}\gamma l - C_9\alpha^2 \sin\alpha l - C_{10}\alpha^2\cos\alpha l = 0. \end{cases} \tag{22-23}$$

În vederea simplificării la maximum a sistemului de ecuații pentru determinarea constantelor de integrare și a forței de fixare F, condițiile limită de la $x = l/2$ reflectă și proprietăți de simetrie ale deformatei în raport cu această secțiune. Astfel s-au ales condițiile

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_2; \quad \varphi_1 = \varphi_2; \quad \bar{w}'_1 = 0; \quad \varphi'_1 = 0; \quad \bar{w}_1 = -\varphi_1\bar{\eta} + \varkappa F, \tag{24-28}$$

unde $\varkappa$ reprezintă elasticitatea reazemului în cm/kgf. Explicit condițiile (24—28) se scriu :

$$\begin{cases} (C_2 - C_7)\, T_1 \operatorname{sh}\dfrac{\gamma l}{2} + (C_9 - C_4)\, T_2 \sin\dfrac{\alpha l}{2} - C_8\, T_1 \operatorname{ch}\dfrac{\gamma l}{2} + C_{10}\, T_2 \cos\dfrac{\alpha l}{2} = 0 \\ (C_2 - C_7) \operatorname{sh}\dfrac{\gamma l}{2} - (C_9 - C_4) \sin\dfrac{\alpha l}{2} - C_8 \operatorname{ch}\dfrac{\gamma l}{2} - C_{10} \cos\dfrac{\alpha l}{2} = 0 \\ C_2\, T_1\, \gamma \operatorname{ch}\dfrac{\gamma l}{2} - C_4\, T_2\, \alpha \cos\dfrac{\alpha l}{2} = F T_3 \\ C_2\, \gamma \operatorname{ch}\dfrac{\gamma l}{2} + C_4\, \alpha \cos\dfrac{\alpha l}{2} = -\, qF \\ C_2 (T_1 - N\bar{e}\,\bar{\eta}) \operatorname{sh}\dfrac{\gamma l}{2} - C_4 (T_2 + N\bar{e}\,\bar{\eta}) \sin\dfrac{\alpha l}{2} = \\ = k(T_4 + N'_\omega) - N(\bar{e}a + gb) + F\left(T_4 \dfrac{ql}{2} + \dfrac{\bar{\eta} l}{4} - N\bar{e}\,\varkappa\right), \end{cases} \tag{29—33}$$

cu notațiile intermediare :

$$T_1 = \gamma^2 C_\omega - \bar{C}\,;\; T_2 = \alpha^2 C_\omega + \bar{C}\,;\; T_3 = q\bar{C} + \frac{\bar{\eta}}{2}\,;\; T_4 = \\ = \bar{C} + N\bar{e}\,\bar{\eta}\,;\; \bar{C} = C - Ng. \tag{34—38}$$

Se constată astfel că pentru determinarea forței de fixare F este suficient să se considere din sistemul de 7 ecuații (22—23), (29—33) cu 7 necunoscute numai ultimele 3 ecuații (31—33), care formează un sistem izolat cu necunoscutele C_2, C_4 și F. Prin rezolvarea lui se găsește

$$F = \frac{(\alpha^2 + \gamma^2)\, C_\omega\, [N(\bar{e}a + gb) - k(\bar{C} + N'_\omega + N\bar{e}\,\bar{\eta})]}{\dfrac{1}{\gamma} \operatorname{th}\dfrac{\gamma l}{2}\left(q\alpha^2 C_\omega - \dfrac{\bar{\eta}}{2}\right)(\gamma^2 C_\omega - \bar{C} - N\bar{e}\,\bar{\eta}) - \dfrac{1}{\alpha} \operatorname{tg}\dfrac{\alpha l}{2}\left(q\gamma^2 C_\omega + \dfrac{\bar{\eta}}{2}\right)(\alpha^2 C_\omega + \\ + \bar{C} + N\bar{e}\,\bar{\eta}) + (\alpha^2 + \gamma^2)\, C_\omega \left[(\bar{C} + N\bar{e}\,\bar{\eta})\dfrac{ql}{2} + \dfrac{\bar{\eta} l}{4} - N\bar{e}\,\varkappa\right]} \tag{39}$$

Întrucît în cursul rezolvării s-a introdus ipoteza

$$T_1 \left[(T_1 T_2 - T_2 N\bar{e}\,\bar{\eta})\, \alpha \cos\frac{\alpha l}{2} \operatorname{sh}\frac{\gamma l}{2} - (T_1 T_2 + T_1 N\bar{e}\,\bar{\eta})\, \gamma \sin\frac{\alpha l}{2} \operatorname{ch}\frac{\gamma l}{2}\right] \neq 0, \tag{40}$$

rezultă din $T_1 \neq 0$

$$\frac{1}{2}\left[\bar{C} - N\frac{C_\omega}{B} + \sqrt{\left(\bar{C} + N\frac{C_\omega}{B}\right)^2 + 4N^2 \frac{C_\omega}{B}\,\bar{e}^2}\,\right] \neq \bar{C}, \tag{40'}$$

adică $\bar{e} \neq 0$ (40''). Înseamnă că în cadrul rezolvării sistemului (1—2) respectiv (1'—2'), forța normală de compresiune excentrică nu poate fi aplicată în centrul de răsucire. De altfel, în acest caz se poate observa direct că ecuațiile (1—2) se decuplează și se integrează independent, soluțiile rămînînd legate numai prin condiția limită (28). Scriind că și al doilea factor al inegalității (40) este diferit de zero, se obține

$$\frac{1-\dfrac{N\bar{e}\,\bar{\eta}}{T_1}}{1+\dfrac{N\bar{e}\,\bar{\eta}}{T_2}} \neq \sqrt{\frac{K_1+\sqrt{K_1^2+4K_2}}{K_1-\sqrt{K_1^2+4K_2}}}\cdot\frac{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha l}{2}}{\operatorname{th}\dfrac{\gamma l}{2}}, \tag{40''}$$

ceea ce este satisfăcut, deoarece, conform (40'), și $T_1 > 0$.

În cazul particular al fixării în dreptul centrului de răsucire, formula (39) se simplifică, întrucît $\bar{\eta} = 0$. De altfel, în cazul compresiunii excentrice cu excentricități raportate medii (fig. 2), acest caz corespunde la forța de fixare maximă. În practică însă fixarea se face mai des în dreptul tălpii comprimate.

În cadrul calculului numeric al forței de fixare F cu formula (39), trebuie menționat cazul particular cînd $\alpha l = \pi$, întrucît în acest caz atît k, cît și $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha l}{2}$ tind către infinit, iar expresia lui F devine nedeterminată. Ridicînd această nedeterminare, se găsește

$$F = \frac{\pi\alpha(\alpha^2+\gamma^2)\,C_\omega N\bar{e}a\left[1+\left(\dfrac{N_y-N}{N_y\bar{e}a}\,g+\dfrac{N\bar{e}}{N_y a}\right)b\right](\bar{C}+N'_\omega+N\bar{e}\,\bar{\eta})}{4\left[1+\left(\dfrac{\gamma l}{2}\right)^2\right]\left(q\gamma^2 C_\omega+\dfrac{\bar{\eta}}{2}\right)(\alpha^2 C_\omega+\bar{C}+N\bar{e}\,\bar{\eta})}\cdot \tag{39'}$$

Formulele (39) permit studiul acțiunii tuturor parametrilor semnificativi asupra valorii forței de fixare. Formula fiind prea complicată pentru a putea fi folosită direct în proiectare, se pot întocmi abace cuprinzînd parametri menționați.

3. CAZUL SECȚIUNII MONOSIMETRICE FĂRĂ STRÎMBAREA LINIEI MEDIANE

Pentru bara cu secțiunea transversală în simplu T ($C_\omega = 0$), rezemată în sens longitudinal în dreptul centrului de răsucire ($\bar{\eta} = 0$) la mijlocul lungimii barei, sistemul de ecuații diferențiale se scrie :
în zona $0 \leqslant x \leqslant l/2$

$$\begin{cases} B\bar{w}_1'' + N(\bar{w}_1+\bar{w}_0) + N\bar{e}\,(\varphi_1+\varphi_0) - \dfrac{F}{2}\,x = 0 \\ -\,C\,\varphi_1' + Ni_c^2(\varphi_1'+\varphi_0') + N\bar{e}\,(\bar{w}_1'+\bar{w}_0') - r_z\,Ne(\varphi_1'+\varphi_0') = 0. \end{cases} \tag{41—42}$$

În zona $l/2 < x \leqslant l$, ultimul termen din ecuația (41) se înlocuiește cu $\frac{F}{2}(x-l)$, notînd sistemul obținut cu (41′—42′).

După cum se va vedea mai jos, atît la calculul forței de fixare F, cît și la verificarea barei se va putea renunța la rotația inițială φ_0, introducînd pentru $\overline{w}_0$ valoarea determinată conform [3]. Luînd deci $\varphi_0 = 0$, rezultă cu notația

$$\overline{C} = C - N(i_c^2 - r_z e) \tag{43}$$

printr-un procedeu analog cu cel din 2.1, ecuația diferențială

$$\varphi_1'' + K\varphi_1 = -a\frac{\pi^2}{l^2}\frac{N\overline{e}}{\overline{C}}\sin\frac{\pi x}{l} + \frac{FN\overline{e}}{2B\overline{C}}x, \tag{44}$$

unde

$$K = \frac{\overline{C} + N\overline{e}^2}{B\overline{C}}N. \tag{45}$$

Soluția generală a ecuației (44) este:

$$\varphi_1 = C_2 \sin \alpha x + C_3 \cos \alpha x + k \sin\frac{\pi x}{l} + qFx, \tag{46}$$

unde

$$\alpha = \sqrt{K}\,; \qquad k = \frac{a\pi^2 N\overline{e}}{\overline{C}(\pi^2 - kl^2)}\,; \qquad q = \frac{N\overline{e}}{2BCK}\cdot \tag{47—49}$$

Operînd similar asupra sistemului de ecuații (41′—42′), valabil în zona $l/2 < x \leqslant l$, rezultă soluția generală:

$$\varphi_2 = C_5 \sin \alpha x + C_6 \cos \alpha x + k \sin\frac{\pi x}{l} - qF(x-l)\cdot \tag{50}$$

În virtutea condițiilor limită $\overline{w} = \varphi = 0$ pentru $x = 0$ respectiv $x = l$, constantele C_1 și C_4 au rezultat nule.

Dintre condițiile limită de la capătul $x = 0$ a rămas operantă $\varphi_1 = 0$, rezultînd $C_3 = 0$. Celelalte condiții $\varphi_1'' = \overline{w}_1'' = 0$ sînt satisfăcute identic. Pentru $x = l$, cu aceeași condiție ($\varphi_1 = 0$), rezultă relația

$$C_5 \sin \alpha l + C_6 \cos \alpha l = 0. \tag{51}$$

Condițiile limită de la $x = l/2$ sînt:

$$\overline{w}_1 = \overline{w}_2\,; \quad \varphi_1 = \varphi_2\,; \quad \overline{w}_1' = 0\,; \quad \varphi_1' = 0\,; \quad \overline{w}_1 = \varkappa F. \tag{52—56}$$

Explicit condițiile (52—56)se scriu :

$$\begin{cases} (C_2 - C_5) \sin \dfrac{\alpha l}{2} - C_6 \cos \dfrac{\alpha l}{2} = 0 \\ F = -\dfrac{C_2 \alpha}{q} \cos \dfrac{\alpha l}{2} \\ C_2 = \left[F \left(\dfrac{\varkappa}{\overline{C}} - \dfrac{ql}{2} \right) + \dfrac{N\overline{e}a}{\overline{C}} - k \right] \dfrac{1}{\sin \dfrac{\alpha l}{2}}, \end{cases} \tag{57—59}$$

observînd că (52—53), respectiv (54—55) conduc la aceleași ecuații.

Forța de fixare F rezultă din rezolvarea sistemului de ecuații (58—59) :

$$F = \frac{\alpha(\overline{C}k - N\overline{e}a)}{\overline{C}\left[q \operatorname{tg} \dfrac{\alpha l}{2} - \alpha \left(\dfrac{ql}{2} - \dfrac{\varkappa}{\overline{C}} \right) \right]}. \tag{60}$$

4. CALCULUL NUMERIC AL FORȚEI DE FIXARE

În primul rînd s-au calculat forțele de fixare pentru bara dublu simetrică, considerînd reazemul intermediar dispus în dreptul centrului de greutate ($\overline{\eta} = 0$). Pentru a se obține forțe de fixare cît mai mari, reazemul intermediar s-a considerat rigid ($\varkappa = 0$). În vederea efectuării calculelor pe o secțiune tipică pentru stîlpii cadrelor, s-a ales un profil dublu T cu tălpi late IP DIN 1025. Din sortimentul acestui profil s-a ales numărul 20, considerîndu-l o secțiune cu dimensiuni medii. S-au determinat variațiile forței de fixare în funcție de excentricitatea raportată $m = \dfrac{e}{r_s}$ pentru mai multe valori ale coeficientului de subțirime λ_z. S-au considerat cinci valori ale excentricității raportate între 0 și 5, și trei valori ale coeficientului de subțirime λ_z(30, 60, 90). Întrucît forța normală este factorul cel mai important în determinarea forței de fixare, pentru fiecare caz calculat ea a fost definită corespunzător cu starea limită a barei în planul xGy (planul cadrului transversal). În concordordanță cu [4], în cadrul stării limită s-a admis în cazul compresiunii excentrice depășirea curgerii de fibră prin plasticizări parțiale atît de mici, încît să nu influențeze calculul static elastic. (În schimb, nu s-a inclus acțiunea imperfecțiunilor din planul xGz.) Rezultatele sînt cuprinse în diagramele din figura 2. Trebuie subliniat că pe traseul continuu al diagramelor sînt reprezentate

şi cazurile particulare cînd forţa normală excentrică se aplică în centrul de răsucire. Calculele numerice au dovedit că primul termen de la numitorul formulei (39) este totdeauna atît de mic, încît poate fi neglijat. Pentru a cunoaşte influenţa nivelului de fixare asupra valorii forţei de

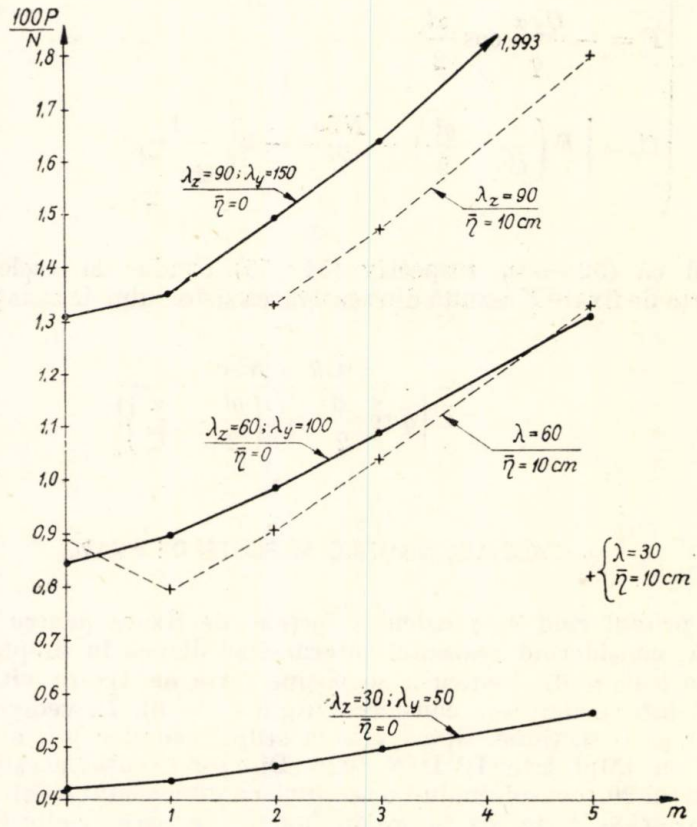


Fig. 2

fixare, aceasta s-a calculat corespunzător lui $\bar{\eta} = 10$ cm (fixare în dreptul tălpii comprimate) pentru $\lambda_z = 60$, $\lambda_z = 90$ şi m cuprins între 2 şi 5, respectiv $\lambda_z = 30$, $m = 5$ (fig. 2).

În al doilea rînd, s-a căutat să se urmărească efectul monosimetriei secţiunii transversale asupra variaţiei forţei de fixare, raportate la forţa normală capabilă a barei. O astfel de curbă este reprezentată în figura 3, în care monosimetria secţiunii s-a definit prin raportul $\frac{r_z}{a_i}$, a_i fiind lăţimea tălpii inferioare.

Curba corespunde la $\lambda_z = 60$ și $m = 1$, λ_y fiind variabil de la secțiune la secțiune (secțiunea a doua fiind obținută prin reducerea la jumătate a lățimii tălpii inferioare a profilului IP 20, iar secțiunea a treia prin reducerea acestei lățimi la grosimea inimii).

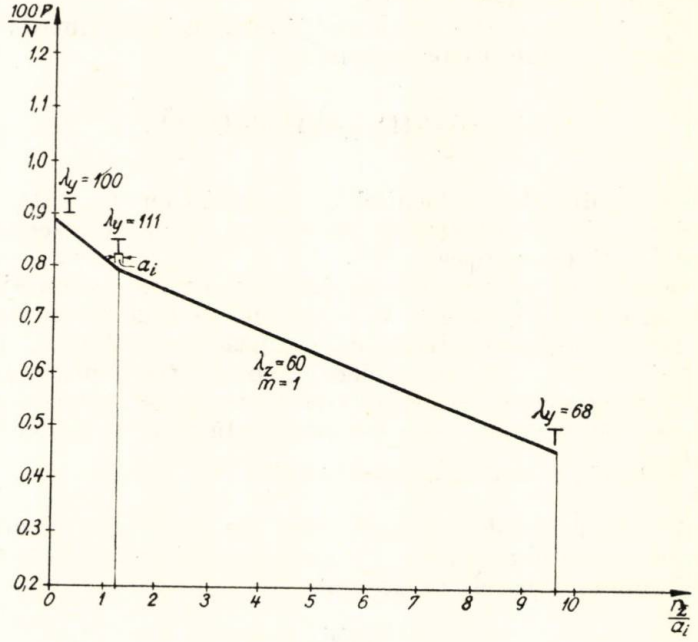


Fig. 3

5. VERIFICAREA BAREI REZEMATE INTERMEDIAR

5.1. În cadrul aproximării instabilității prin divergența echilibrului printr-un calcul de rezistență de ordinul doi, s-a propus în [3], pentru cazul încovoierii cu forță axială în planul cadrului transversal, formula de verificare

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_z^{II}}{K_z W_z} + \bar{\sigma}_{N,M} \leqslant R, \tag{61}$$

unde N este forța axială de calcul, M_z^{II} momentul de încovoiere de calcul de ordinul doi (solicitările de calcul fiind solicitările normate majorate cu coeficienții de supraîncărcare), K_z coeficientul de plasticizare parțială în conformitate cu [4], iar $\bar{\sigma}_{N,M}$ o tensiune suplimentară care ține seama de efectul imperfecțiunilor în deformația de încovoiere după axa minimă și în cea de răsucire. Această tensiune suplimentară se poate scrie

$$\bar{\sigma}_{N,M} = E \frac{c_{ov}}{10^3 K_y} \cdot \frac{1}{\bar{n} - 1}, \tag{62}$$

unde c_{6y} este un coeficient în funcţie de calitatea oţelului racordat la coeficienţii de flambaj din [4], K_y coeficientul de plasticizare parţială corespunzător axei minime, iar $\overline{n}$ coeficientul flambajului prin încovoiere-răsucire, care majorează toate încărcările aplicate pe bara ideală pentru a obţine flambajul prin încovoiere-răsucire.

În [3] s-a dat pentru coeficientul $\overline{n}$ formula aproximativă de suprapunere neliniară a diferitelor solicitări:

$$\overline{n} = \frac{N_y}{\Omega_1}\left(\Omega_2 \pm \sqrt{\Omega_2^2 + \Omega_0\Omega_1}\right), \tag{63}$$

unde N_y rezultă din (13) (înlocuind în general l cu $l_f = \mu l$), iar Ω_0, Ω_1 şi Ω_2 fiind definite în funcţie de încărcarea barei, de rezemarea ei şi de caracteristicile ei geometrice.

Din punctul de vedere al rezemării intermediare, avantajul formulei (63) constă în faptul că notaţia N_y reprezintă de fapt forţa critică a barei ideale cu rezemare intermediară, corespunzătoare bifurcării echilibrului numai prin deformaţia de încovoiere. Această forţă poate fi calculată elementar atît pentru rezemări intermediare rigide, cît şi pentru cele elastice. Dacă, de exemplu, bara este rezemată rigid la mijlocul lungimii, $N_y = \dfrac{\pi^2 E I_y}{4l^2}$ (unde l este lungimea barei).

5.2. Pentru a învedera cele de mai sus s-a făcut şi determinarea exactă a tensiunii suplimentare $\bar{\sigma}$, în ipoteza sprijinirii intermediare rigide la mijlocul lungimii barei, cu formula

$$\bar{\sigma} = -E(z\overline{w}'' + \omega\varphi''). \tag{64}$$

Din rezolvarea sistemului (1—2) s-au obţinut în intervalul cuprins între $0 \leqslant x \leqslant l/2$ $\overline{w}''$ şi φ'', constantele de integrare corespunzătoare C_2 şi C_4 putînd fi determinate din ecuaţiile (31—32). Astfel (64) devine explicit

$$\bar{\sigma} = -E\left\{\left\{-z\left\{\frac{1}{N\bar{e}}\left[C_\omega\left(C_2\gamma^4 \operatorname{sh}\gamma x + C_4\alpha^4 \sin\alpha x + k\frac{\pi^4}{l^4}\sin\frac{\pi x}{l}\right) - \right.\right.\right.\right.$$

$$-\overline{C}\left(C_2\gamma^2 \operatorname{sh}\gamma x - C_4\alpha^2 \sin\alpha x - k\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}\right) + Ngb\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}\Big] + \tag{64'}$$

$$\left.\left.\left.\left. + a\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}\right\} + \omega\left(C_2\gamma^2 \operatorname{sh}\gamma x - C_4\alpha^2 \sin\alpha x - k\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}\right)\right\}\right\},$$

unde

$$C_2 = F\frac{\dfrac{\overline{\eta}}{2} - q\alpha^2 C_\omega}{C_\omega(\alpha^2+\gamma^2)\gamma \operatorname{ch}\dfrac{\gamma l}{2}} \quad \text{şi} \quad C_4 = -F\frac{\dfrac{\overline{\eta}}{2} + q\gamma^2 C_\omega}{C_\omega(\alpha^2+\gamma^2)\alpha\cos\dfrac{\alpha l}{2}}. \tag{65—66}$$

Pentru a obține secțiunea în care $\bar{\sigma}$ este maxim, s-a aplicat condiția de extremă relației (64'), obținînd ecuația:

$$t_1 \operatorname{ch} \gamma x + t_2 \cos \alpha x + t_3 \cos \frac{\pi x}{l} = 0, \tag{67}$$

cu notațiile intermediare:

$$t_1 = C_2 \gamma^3 \left(\frac{T_1}{N\bar{e}} z - \omega \right); \quad t_2 = C_4 \alpha^3 \left(\frac{T_2}{N\bar{e}} z + \omega \right)$$

și (68—70),

$$t_3 = \frac{1}{N\bar{e}} k \left(\frac{\pi}{l} \right)^3 \left[C_\omega \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 + \bar{C} \right] z - \left(\frac{\pi}{l} \right)^3 \left[\left(a + \frac{gb}{\bar{e}} \right) z - k\omega \right].$$

5.3. Pentru aplicația numerică s-a ales cazul $\lambda_z = 60$, $m = 2$, profilul fiind IP20, corespunzînd $N = 61{,}5$ tf și e=14,4 cm.

Deformata inițială, dată conform [3] sub forma unor săgeți inițiale fîn dreptul tălpii comprimate, poate fi scindată în săgeți, respectiv rotații inițiale ($\bar{w}_0$ și φ_0), cunoscînd raza de rotație a secțiunii transversale [5]. (Raza de rotație y_r este distanța de la centrul de răsucire pînă la centrul instantaneu de rotație.) Această rază este o caracteristică a barei în cazurile de solicitare simplă la compresiune centrică, respectiv încovoiere, fiind funcție de excentricitate în cazul compresiunii excentrice:

$$\bar{y}_r = \frac{\bar{y}_G - e}{1 - \dfrac{N_y}{N_{cr}}}, \tag{71}$$

unde $N_{cr} = \bar{n}N$ este forța normală excentrică corespunzătoare flambajului prin încovoiere-răsucire a barei ideale. Astfel, săgeata inițială (pentru $x = l/2$) din dreptul tălpii comprimate $f_0 = 0{,}873$ cm este echivalentă cu amplitudinile $a = 0{,}769$ cm și $b = 0{,}0208$. (Cu aceste valori, forța de fixare este $F = 0{,}727$ tf, față de $F = 0{,}608$ tf calculat cu $a = f_0$ și $b = 0$, ceea ce nu reprezintă o modificare semnificativă nici pentru calculul contravîntuirii.)

Tensiunea suplimentară rezultă maximă în secțiunea $x = 142$ cm, avînd valoarea de $\bar{\sigma} = 0{,}0985$ tf/cm², calculată din relația (64'). Cu formula aproximativă (62) rezultă $\bar{\sigma} = 0{,}101$ tf/cm² fără coeficientul de plasticizare parțială K_y, respectiv $\sigma = 0{,}081$ tf/cm² cu acest coeficient. Concordanța cu valoarea exactă este foarte bună.

5.4. Pentru a justifica asimilarea tuturor imperfecțiunilor cu o curbură inițială ($a = f_0$, $b = 0$) și din punctul de vedere al verificării barei, s-a calculat în această ipoteză tensiunea suplimentară pentru profilul IP20 cu $\lambda_z = 60$ și $m = 1$, găsind $\bar{\sigma} = 0{,}0845$ tf/cm². Cu formula aproximativă (62) rezultă $\sigma = 0{,}098$ tf/cm².

Primită la redacție la 19 iunie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. W. Zuk, *Lateral bracing forces on beams and columns.* Proceedings of the ASCE Journal of the Engeneering Mechanics Division EM, 3 July, 1956.
2. G. Winter, *Lateral bracing of columns and beams.* Transactions of the ASCE, **125**, 807 (1960).
3. I. Appeltauer, T. Barta, *Stabilitatea cadrelor. Calculul de stabilitate al cadrelor de oţel,* partea a II-a. *Cadre.* Buletinul de studii şi cercetări INCERC-ISCAS *2,* 39 (1962); partea a III-a. *Verificarea secţiunilor cu considerarea flambajului prin încovoiere-răsucire al barelor cu pereţi subţiri.* Buletinul de studii şi cercetări INCERC-ISCAS, *4,* 41 (1962).
4. — *Normativ condiţionat pentru calculul construcţiilor la stări limită,* vol. II, partea a IV-a, *Proiectarea construcţiilor metalice, civile şi industriale.* Edit. tehnică, 1963, 11–62.
5. F. Hunyadi, *Állando és változó keresztmetszetü acéltartók kifordulása. Épitöipari és közlekedési müszaki egyetem tudományos közleményei,* **IV**, *1,* 11 (1958).

CALCULUL PLASTIC AL PLĂCILOR DREPTUNGHIULARE DE BETON ARMAT REZEMATE PE TREI LATURI, SOLICITATE DE ÎNCĂRCĂRI UNIFORM DISTRIBUITE [1]

de VALERIU PETCU [2]

539.3

În lucrare se stabilesc momentele plastice ale plăcilor independente de beton armat de formă dreptunghiulară rezemate pe trei laturi, solicitate de încărcări permanente şi temporare uniform distribuite pe toată suprafaţa lor. Sînt luate în consideraţie patru tipuri de plăci, în funcţie de modul de rezemare al celor trei laturi (simplă rezemare sau încastrare perfectă). Studiul se bazează pe concepţia generală a coeficientului de redistribuţie. Pentru rezolvarea ecuaţiei de echilibru plastic a acestor elemente de construcţie se foloseşte criteriul redistribuţiei minime.

1. INTRODUCERE

Determinarea capacităţii de rezistenţă a plăcilor armate pe două direcţii se bazează pe teoria liniilor de rupere [1]. Ipoteza fundamentală a acestei teorii constă în admiterea stadiului de mecanism ca stare limită de rezistenţă a acestor elemente de construcţie.

Din examinarea caracteristicilor plăcilor experimentate pînă în prezent în diferite ţări rezultă că ipoteza de mai sus este valabilă în toate cazurile în care sînt îndeplinite următoarele condiţii [3], [4]:

$$R_a \leqslant 3\,000 \text{ kgf/cm}^2 \tag{1}$$

$$R_b \geqslant \frac{R_a}{20} \text{ kgf/cm}^2 \tag{2}$$

$$\mu \leqslant \frac{30}{R_a}. \tag{3}$$

(Notaţiile folosite sînt date în capitolul 2.)

[1]) Publicată în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **10**, *1* (1965) (în lb. franceză).

[2]) Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti.

Momentele plastice obținute pe baza teoriei liniilor de rupere sînt momente plastice de calcul numai dacă [2], [3], [4]:

1) procentul de armare din secțiunea cea mai solicitată a plăcii este mai mare sau cel puțin egal cu valoarea dată în tabela 1, în funcție de

Tabela 1

Valorile minime ale procentului de armare 100 μ

d (mm)	Marca oțelului	α_f (mm)				
		0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
6	OL 38	0,59	0,36	0,23	0,18	0,14
	PC 52	0,86	0,43	0,28	0,21	0,17
7	OL 38	0,69	0,42	0,27	0,21	0,17
	PC 52	—	0,50	0,33	0,25	0,20
8	OL 38	0,79	0,48	0,31	0,24	0,19
	PC 52	—	0,57	0,38	0,28	0,23
10	OL 38	0,98	0,60	0,38	0,29	0,24
	PC 52	—	0,71	0,47	0,35	0,28
12	OL 38	1,18	0,72	0,46	0,35	0,28
	PC 52	—	0,85	0,56	0,42	0,34
14	OL 38	1,38	0,84	0,53	0,41	0,33
	PC 52	—	—	0,66	0,49	0,39
16	OL 38	—	0,96	0,61	0,47	0,38
	PC 52	—	—	0,75	0,56	0,45
18	OL 38	—	1,08	0,69	0,53	0,43
	PC 52	—	—	0,84	0,63	0,50
20	OL 38	—	1,20	0,76	0,58	0,47
	PC 52	—	—	0,93	0,70	0,56

marca oțelului, de deschiderea maximă admisibilă a fisurilor în stadiul de exploatare și de diametrul mediu al vergelelor de armătură;

2) coeficientul de redistribuție îndeplinește condiția $r \leqslant r_a$.

În cazurile în care $r > r_a$, se impune luarea în considerație a unei redistribuții parțiale a eforturilor sub acțiunea încărcărilor de calcul,

astfel încît mărimea coeficientului de redistribuţie r', corespunzătoare acestei redistribuţii parţiale a eforturilor, să satisfacă egalitatea $r' = r_a$. În aceste cazuri, momentele plastice ce se obţin din condiţia $r' = r_a$ diferă de momentele plastice obţinute pe baza teoriei liniilor de rupere, fiind totdeauna superioare acestora din urmă.

Din cele de mai sus rezultă că determinarea momentelor plastice de calcul ale plăcilor de beton armat este funcţie de mărimea coeficientului de redistribuţie r.

În cele ce urmează se stabilesc coeficienţii de redistribuţie şi se prezintă metoda de determinare a momentelor plastice de calcul pentru plăcile dreptunghiulare de beton armat rezemate pe trei laturi şi libere pe a patra latură, solicitate de încărcări permanente şi temporare uniform distribuite pe toată suprafaţa lor.

Studiul se bazează pe metoda generală de calcul a construcţiilor la stări limită, ale cărei principii sînt expuse în lucrările cu caracter oficial [5] şi [6].

Terminologia folosită este cea dată în aceste prescripţii, precum şi în lucrările privind calculul plastic al construcţiilor de beton armat.

2. NOTAŢII

d — diametrul mediu al vergelelor de armătură, exprimat în cm;

g — încărcarea permanentă de calcul uniform distribuită pe unitatea de suprafaţă;

l_1, l_2 — deschiderile plăcii, l_1 fiind deschiderea plăcii pe direcţia laturii libere;

L_M — lucrul mecanic virtual al momentelor plastice în stadiul de mecanism al plăcii;

L_Q — lucrul mecanic virtual al încărcărilor permanentă şi temporară de calcul în stadiul de mecanism al plăcii;

M_{p1} — momentul plastic pozitiv pe unitatea de lungime, acţionînd pe direcţia l_1;

M_{p2} — momentul plastic pozitiv pe unitatea de lungime, acţionînd pe direcţia l_2;

M'_{p1} — valoarea absolută a momentului plastic negativ, acţionînd pe unitatea de lungime a laturilor încastrate perpendiculare pe latura liberă;

M'_{p2} — valoarea absolută a momentului plastic negativ, acţionînd pe unitatea de lungime a laturii încastrate paralele cu latura liberă;

p_n — încărcarea temporară normată, uniform distribuită pe unitatea de suprafaţă;

p_u — încărcarea temporară de calcul, uniform distribuită pe unitatea de suprafaţă;

p_1 — încărcarea temporară uniform distribuită pe unitatea de suprafaţă, corespunzătoare atingerii limitei de curgere de calcul într-un singur punct al armăturii;

R_a — limita de curgere de calcul a armăturii, exprimată în kgf/cm^2;

R_b — rezistența de calcul a betonului la compresiune, exprimată în kgf/cm²;

u_1, u_2 — coeficienți subunitari care intervin în expresia ecuației de echilibru plastic, prin care se ține seama de reducerea armăturii din cîmp pe direcțiile l_1 și l_2 ca urmare a ridicării unei părți a acestei armături pe reazeme;

x_1 — distanță care caracterizează schema de rupere I (fig. 1)

x_2 — distanță care caracterizează schema de rupere II (fig. 1);

α_f — deschiderea maximă admisibilă a fisurilor, exprimată în mm;

100μ — procentul de armare într-o secțiune de calcul;

$$r = \frac{q_u}{q_1}; \; r_a = \frac{q_u}{q_n}$$

$$q_n = g + p_n; \; q_u = g + p_u; \; q_1 = g + p_1;$$

$$\xi_1 = \frac{x_1}{l_1}; \; \xi_2 = \frac{x_2}{l_2}; \; \lambda = \frac{l_2}{l_1}.$$

3. SCHEME DE RUPERE

Schemele posibile de rupere ale plăcilor dreptunghiulare de beton armat, rezemate pe trei laturi și solicitate de încărcări permanente și temporare uniform distribuite pe toată suprafața lor, sînt reprezentate în figura 1.

Ruperea plăcilor după una dintre aceste două scheme depinde de raportul laturilor și de raportul cantităților de armătură așezate pe cele două direcții ale plăcilor.

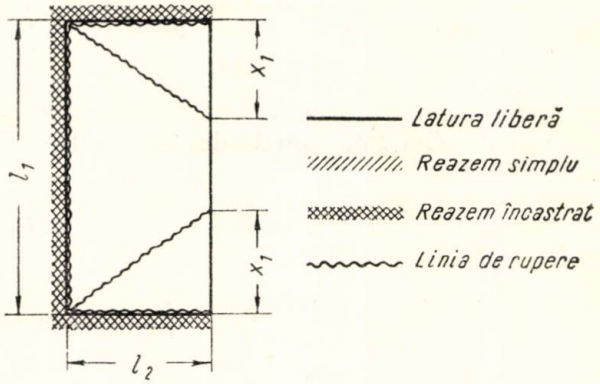
Observație. Figura 1 cuprinde, de asemenea, reprezentarea convențională a liniilor de rupere și a laturilor simplu rezemate și încastrate perfect.

4. IPOTEZE DE CALCUL

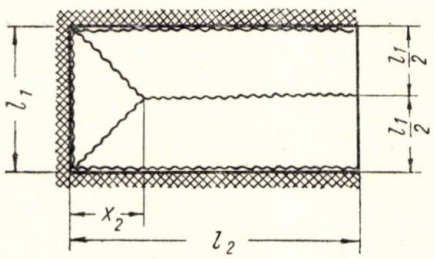
a) Starea limită de rezistență a plăcilor de beton armat corespunde transformării lor în mecanisme sub acțiunea încărcărilor de calcul.

b) Armătura din cîmpurile și de pe reazemele plăcilor se presupune uniform distribuită pe fiecare direcție. Pe fiecare direcție, din secțiunea de armătură din cîmp se ridică $\frac{1}{3}$ pe laturile teoretic simplu rezemate și $\frac{2}{3}$ pe laturile încastrate. Pe fiecare direcție, ridicarea armăturii se face la o distanță de reazeme egală cu $\frac{l_{min}}{5}$, l_{min} fiind deschiderea cea mai mică a plăcilor. De această reducere a armăturii din cîmp se ține seama la determinarea lucrului mecanic virtual produs de momentele plastice din cîmp în stadiul de mecanism al plăcilor.

c) Se admite că grinzile care mărginesc plăcile nu au nici o capacitate de rezistență la torsiune. De aceea în ecuația de echilibru plastic nu sînt luate în considerație momentele plastice negative corespunzătoare armă-



I Schema de rupere



II Schema de rupere

Fig. 1. — Schema de rupere.

turii ce se ridică din cîmp pe laturile care în schemele de calcul ale plăcilor apar simplu rezemate.

d) Armarea colțurilor plăcilor este în măsură să asigure formarea unui mecanism de rupere avînd ca schemă numai una din reprezentările din figura 1.

e) Comportarea plăcilor sub acțiunea încărcărilor este perfect elastică pînă la atingerea limitei de curgere de calcul într-un singur punct al armăturii.

f) Armătura se presupune alcătuită din vergele de oțel cu palier de curgere (oțel OL 38 sau PC 52).

Observație. Rezultatele obținute în cadrul acestui studiu rămîn de asemenea valabile în cazurile în care pe laturile simplu rezemate sau încastrate se ridică $\frac{1}{2}$ din secțiunea de armătură din cîmp, întrucît în aceste cazuri capacitatea portantă a plăcilor diferă de cea corespunzătoare ipotezei (*b*), în plus sau în minus, cu maximum 5%.

5. ECUAȚIA DE ECHILIBRU PLASTIC

Expresia generală a ecuației de echilibru plastic a unei structuri de beton armat, obținută pe baza principiului lucrului mecanic virtual aplicat stadiului de mecanism al structurii, este

$$L_M + L_Q = 0. \tag{4}$$

În cazul plăcilor care se studiază, se consideră o deplasare virtuală egală cu unitatea a punctelor sau a punctului în care liniile de rupere intersectează latura liberă.

Lucrurile mecanice virtuale L_M și L_Q corespunzătoare acestei deplasări, precum și ecuația de echilibru plastic (4) au următoarele expresii :

a) Schema de rupere I

$$L_M = -\left[\frac{2u_1\lambda}{\xi_1} M_{p1} + \frac{2u_2\xi_1}{\lambda} M_{p2} + \frac{2\lambda}{\xi_1} M'_{p1} + \frac{1}{\lambda} M'_{p2}\right] \tag{5}$$

$$L_Q = \frac{\lambda}{6}(3-2\xi_1)\, q_u\, l_1^2 \tag{6}$$

$$\frac{2u_1\lambda}{\xi_1} M_{p1} + \frac{2u_2\xi_1}{\lambda} M_{p2} + \frac{2\lambda}{\xi_1} M'_{p1} + \frac{1}{\lambda} M'_{p2} = \frac{\lambda}{6}(3-2\xi_1)\, q_u\, l_1^2 \tag{7}$$

b) Schema de rupere II

$$L_M = -\left[4u_1\lambda\, M_{p1} + \frac{u_2}{\lambda\xi_2} M_{p2} + 4\lambda M'_{p1} + \frac{1}{\lambda\xi_2} M'_{p2}\right] \tag{8}$$

$$L_Q = \frac{\lambda}{6}(3-\xi_2)\, q_u\, l_1^2 \tag{9}$$

$$4u_1\lambda M_{p1} + \frac{u_2}{\lambda\xi_2} M_{p2} + 4\lambda M'_{p1} + \frac{1}{\lambda\xi_2} M'_{p2} = \frac{\lambda}{6}(3-\xi_2) q_u\, l_1^2. \tag{10}$$

Expresiile (7) și (10) ale ecuației de echilibru plastic arată că pentru obținerea unei soluții a momentelor plastice sînt necesare ecuații suplimentare.

Stabilirea acestor ecuații se face pe baza criteriului redistribuției minime [3], [4], a cărui aplicare asigură unei plăci armate pe două direcții cele mai favorabile condiții de rupere și de exploatare. Potrivit acestui criteriu, redistribuția minimă de eforturi are loc în cazul în care limita de curgere a armăturii este atinsă simultan în cele mai solicitate puncte ale plăcii. Pe de altă parte, momentul plastic al unei secțiuni de beton armat este egal cu momentul încovoietor corespunzător atingerii limitei de curgere în toată armătura întinsă a secțiunii. În consecință, aplicarea criteriului redistribuției minime are ca rezultat atingerea valorilor momentelor plastice simultan în punctele cele mai solicitate ale plăcii.

În cazul plăcilor ce se studiază, fie q_1 valoarea încărcării corespunzătoare acestui stadiu. Din cele de mai sus rezultă că momentele plastice

sînt egale cu momentele elastice produse de încărcarea q_1. Prin eliminarea încărcării q_1 între aceste egalități se obține numărul de ecuații suplimentare necesare pentru determinarea soluției momentelor plastice.

Mărimea încărcării q_1, necesară pentru calculul coeficientului de redistribuție, se obține prin egalarea valorii unui moment plastic oarecare cu expresia momentului elastic corespunzător, dat de încărcarea q_1.

6. EXPRESIILE MOMENTELOR PLASTICE

Pentru aplicarea practică a criteriului redistribuției minime la plăcile care fac obiectul acestui studiu este necesară stabilirea în prealabil a punctelor celor mai solicitate ale acestor plăci.

Din calculul elastic al plăcii dreptunghiulare de beton armat încastrate pe trei laturi și libere pe a patra latură, solicitate de încărcări uniform distribuite pe toată suprafața ei, rezultă că momentele elastice maxime (în valoare absolută) au loc în următoarele puncte ale plăcii (fig. 11):

a) momentul maxim în cîmp pe direcția l_1 la mijlocul laturii libere (fig. 11, punctul 1);

b) momentul maxim în cîmp pe direcția l_2 în centrul plăcii (fig. 11, punctul 2);

c) momentul maxim pe laturile încastrate perpendiculare pe latura liberă în punctele de intersecție ale acestora cu latura liberă (fig. 11, punctul 1′);

d) momentul maxim pe latura încastrată paralelă cu latura liberă la mijlocul acestei laturi (fig. 11, punctul 2′).

Aceste concluzii rămîn valabile și pentru plăcile avînd una, două sau trei laturi simplu rezemate.

Ținînd seama de egalitatea dintre momentele plastice și momentele elastice produse de încărcarea q_1 în punctele cele mai solicitate ale plăcii, rezultă pentru momentele plastice următoarele expresii:

$$\begin{aligned} M_{p1} &= \alpha_1 q_1 l_1^2, \quad M'_{p1} = \alpha'_1 q_1 l_1^2; \\ M_{p2} &= \alpha_2 q_1 l_1^2, \quad M'_{p2} = \alpha'_2 q_1 l_2^2, \end{aligned} \tag{11}$$

unde α_1, α_2, α'_1 și α'_2 sînt coeficienții care caracterizează momentele elastice maxime (în valoare absolută) din punctele cele mai solicitate ale plăcii.

Valorile acestor coeficienți sînt date, de exemplu, în lucrarea [7].

Prin eliminarea încărcării q_1 între egalitățile (11) se obțin următoarele relații:

$$\begin{aligned} M_{p2} &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1} M_{p1} = \nu_2 M_{p1}, \\ M'_{p1} &= \frac{\alpha'_1}{\alpha_1} M_{p1} = \nu'_1 M_{p1}, \\ M'_{p2} &= \frac{\alpha'_2}{\alpha_1} \lambda^2 M_{p1} = \nu'_2 M_{p1}, \end{aligned} \tag{12}$$

în care M_{p1} este considerat ca moment plastic de referință.

Coeficienţii ν_2, ν_1' şi ν_2' care intervin în ecuaţiile (12) au următoarele expresii:

$$\nu_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}; \quad \nu_1' = \frac{\alpha_1'}{\alpha_1}; \quad \nu_2' = \frac{\alpha_2'}{\alpha_1}\lambda^2. \tag{13}$$

Făcînd în ecuaţia de echilibru plastic substituţiile indicate de ecuaţiile (12), se obţin pentru momentul plastic de referinţă M_{p1}, pentru încărcarea q_1 şi pentru coeficientul de redistribuţie r, expresiile următoare:

Schema de rupere I:

$$M_{p1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\lambda(3-2\xi_1)}{\frac{2u_1\lambda}{\xi_1} + \frac{2u_2\nu_2\xi_1}{\lambda} + \frac{2\lambda\nu_1'}{\xi_1} + \frac{\nu_2'}{\lambda}} q_u l_1^2 = m_1 q_u l_1^2 \tag{14}$$

$$q_1 = \frac{m_1}{\alpha_1} q_u \tag{15}$$

$$r = \frac{\alpha_1}{m_1}, \tag{16}$$

unde coeficientul m_1 este dat de relaţia:

$$m_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\lambda(3-2\xi_1)}{\frac{2u_1\lambda}{\xi_1} + \frac{2u_2\nu_2\xi_1}{\lambda} + \frac{2\lambda\nu_1'}{\xi_1} + \frac{\nu_2'}{\lambda}}. \tag{17}$$

Schema de rupere II:

$$M_{p1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\lambda(3-\xi_2)}{4u_1\lambda + \frac{u_2\nu_2}{\lambda\xi_2} + 4\lambda\nu_1' + \frac{\nu_2'}{\lambda\xi_2}} q_u l_1^2 = m_1 q_u l_1^2, \tag{18}$$

unde

$$m_1 = \frac{1}{6} \cdot \frac{\lambda(3-\xi_2)}{4u_1\lambda + \frac{u_2\nu_2}{\lambda\xi_2} + 4\lambda\nu_1' + \frac{\nu_2'}{\lambda\xi_2}}. \tag{19}$$

Încărcarea q_1 şi coeficientul de redistribuţie r au aceleaşi expresii ca şi în cazul schemei de rupere I, în care însă m_1 are valoarea dată de relaţia (19).

Relaţiile (14)—(17), (18) şi (19) conţin necunoscutele ξ_1 şi ξ_2, care definesc cele două scheme de rupere.

Valorile acestor parametri se determină pe baza reciprocei teoremei cinematice a teoriei plastice a structurilor.

În cazul plăcilor, enunţul acestei reciproce este următorul: fiind date caracteristicile statico-geometrice, precum şi valorile încărcărilor permanentă şi temporară de calcul ale unei plăci, ale cărei momente plastice pot fi exprimate în funcţie de un singur moment plastic luat ca refe-

rinţă, valoarea parametrului (sau parametrilor) care caracterizează schema reală de rupere corespunde valorii maxime a momentului plastic de referinţă.

În cazul plăcilor care se examinează, parametrii ξ_1 şi ξ_2 se determină din condiţia de maximum a expresiilor (14) şi (18).

În cele de mai jos se stabilesc valorile parametrilor schemelor de rupere şi se determină momentele plastice şi coeficienţii de redistribuţie pentru patru tipuri de plăci dreptunghiulare armate pe două direcţii, rezemate pe trei laturi şi libere pe a patra latură.

7. PLACA SIMPLU REZEMATĂ PE TREI LATURI ŞI LIBERĂ PE A PATRA LATURĂ (fig. 2)

Momentele plastice de pe laturile plăcii sînt nule, adică

$$M'_{p1} = M'_{p2} = 0; \quad \nu'_1 = \nu'_2 = 0.$$

Ţinînd seama de ipoteza de calcul (*b*) prezentată în capitolul 4 al acestui studiu, se obţin pentru coeficienţii u_1 şi u_2 valorile date în tabela 2, în funcţie de schema de rupere şi de raportul laturilor plăcii.

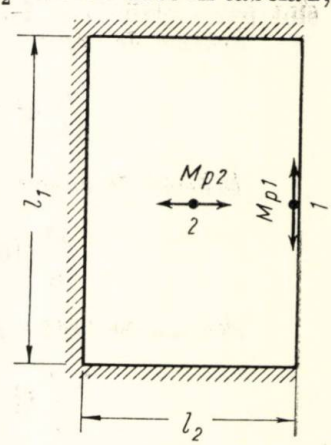


Fig. 2

Observaţie. Valorile coeficienţilor u_1 şi u_2, date în tabela 2 sînt valabile numai în cazurile în care $\xi_1 \geqslant 0{,}2$ şi $\xi_2 \geqslant 0{,}2$ pentru $l_2 \leqslant l_1$, respectiv $\xi_2 \geqslant \frac{0{,}2}{\lambda}$ pentru $l_2 \geqslant l_1$, adică numai în cazurile în care liniile de rupere oblice depăşesc zona de ridicare a armăturii din cîmp pe reazeme.

Prin substituirea valorilor coeficienţilor u_1 şi u_2 în expresiile (14) şi (18), se obţin următoarele rezultate:

Schema de rupere I, cu $l_2 \leqslant l_1$:

$$M_{p1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\lambda^2 (3\xi_1^2 - 2\xi_1^3)}{28\nu_2 \xi_1^3 + 30\lambda^2 \xi_1 - 2\lambda^3} \cdot q_u l_1^2. \tag{20}$$

Schema de rupere II, cu $l_2 \leqslant l_1$:

$$M_{p1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\lambda^2 (3\xi_2^2 - \xi_2^3)}{-8\lambda^3 \xi_2^3 + 60\lambda^2 \xi_2^2 + 15\nu_2 \xi_2 - \nu_2} \cdot q_u l_1^2. \tag{21}$$

Schema de rupere II, cu $l_2 \geqslant l_1$:

$$M_{p1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\lambda^2 (3\xi_2^2 - \xi_2^3)}{-8\lambda^3 \xi_2^3 + 60\lambda^2 \xi_2^2 + 15\nu_2 \lambda \xi_2 - \nu_2} \cdot q_u l_1^2. \tag{22}$$

Conform reciprocei teoremei cinematice, soluţia momentelor plastice ale plăcii se obţine din condiţia de maximum a momentului plastic de referinţă M_{p1}, adică din ecuaţia

$$\frac{dM_{p1}}{d\xi_1} = 0 \tag{23}$$

pentru schema de rupere I, respectiv din ecuația

$$\frac{dM_{p1}}{d\xi_2} = 0 \tag{24}$$

pentru schema de rupere II.

Tabela 2

Coeficienții u_i	Schema I	Schema II	
	$l_2 \leqslant l_1$	$l_2 \leqslant l_1$	$l_2 \geqslant l_1$
u_1	$1 - \frac{\lambda}{15\,\xi_1}$	$1 - \frac{2\lambda\,\xi_2}{15}$	$1 - \frac{2\,\xi_2}{15}$
u_2	$\frac{14}{15}$	$1 - \frac{1}{15\,\xi_2}$	$1 - \frac{1}{15\lambda\,\xi_2}$

Pentru placa considerată, ecuațiile (23) și (24), în care necunoscutele sînt parametrii ξ_1 și ξ_2, au următoarele expresii :

Schema de rupere I, cu $l_2 \leqslant l_1$:

$$\frac{7\nu_2}{\lambda^3}\,\xi_1^3 + \frac{10}{\lambda}\,\xi_1^2 - \left(\frac{15}{2\lambda} + 1\right)\xi_1 + 1 = 0. \tag{25}$$

Schema de rupere II, cu $l_2 \leqslant l_1$:

$$\frac{\lambda^2}{\nu_2}(10 - 4\lambda)\,\xi_2^3 + 5\xi_2^2 - 8\xi_2 + 1 = 0. \tag{26}$$

Schema de rupere II, cu $l_2 \geqslant l_1$:

$$\frac{6\lambda^3}{\nu_2}\,\xi_2^3 + 5\lambda\xi_2^2 - \frac{1}{2}(15\lambda + 1)\xi_2 + 1 = 0. \tag{27}$$

Valorile coeficienților α_1, α_2 și ν_2 sînt date în tabela 3, în funcție de raportul laturilor plăcii $\lambda = \frac{l_2}{l_1}$.

Valorile parametrilor ξ_1 și ξ_2, care fac maximă valoarea momentului plastic de referință M_{p1}, sînt date în tabela 4, alături de cele ale coeficienților m_1 și m_2, care caracterizează momentele plastice ale plăcii, avînd expresiile :

$$m_1 = \frac{M_{p1}}{q_u \cdot l_1^2} \text{ și } m_2 = \frac{M_{p2}}{q_u \cdot l_1^2}. \tag{28}$$

Observații. 1. Din compararea coeficienților α_1 și α_2, care caracterizează momentele elastice, cu coeficienții m_1 și m_2, care caracterizează momentele plastice, rezultă că pentru $\lambda < 0{,}84$ momentele încovoietoare determinate în ipoteza comportării elastice a plăcilor sub acțiunea încărcărilor de calcul sînt mai mici decît momentele plastice corespunzătoare.

Acest rezultat, aparent neașteptat, este consecința faptului că în stadiul elastic comportarea plăcilor este influențată în sens favorabil de momentele de torsiune care iau naștere ca urmare a împiedicării colțurilor de a se ridica de pe reazeme. Această influență are drept consecință obținerea de valori ale momentelor încovoietoare inferioare valorilor obținute în ipoteza

Tabela 3

λ	α_1	α_2	ν_2
0,3	0,0256	0,0082	0,320
0,4	0,0415	0,0126	0,313
0,5	0,0575	0,0161	0,280
0,6	0,0724	0,0184	0,254
0,7	0,0848	0,0198	0,233
0,8	0,0922	0,0207	0,225
0,9	0,1037	0,0202	0,195
1,0	0,1108	0,0195	0,176
1,2	0,1201	0,0179	0,149
1.5	0,1264	0,0142	0,112
2,0	0,1316	0,0088	0,067

ridicării libere a colțurilor sub acțiunea încărcărilor. Această reducere este cu atît mai mare, cu cît raportul $\lambda = \frac{l_2}{l_1}$ este mai mic.

În stadiul de mecanism al plăcii însă, influența momentelor de torsiune asupra capacității de rezistență este nulă. Acesta este motivul pentru care, pentru anumite valori ale raportului laturilor plăcii, calculul plastic conduce la momente plastice mai mari decît cele elastice determinate pe baza încărcărilor de calcul. Acest fenomen nu este specific numai plăcilor simplu rezemate pe trei laturi, ci poate fi întîlnit și la alte tipuri de plăci. Ca exemplu se citează placa dreptunghiulară simplu rezemată pe tot conturul, solicitată de încărcări uniform distribuite pe toată suprafața ei.

Ținînd seama de cele expuse mai sus, se recomandă următorul procedeu pentru calculul plastic al plăcilor simplu rezemate pe trei laturi:

— pentru $\lambda \leqslant 0{,}84$, momentele plastice se vor lua egale cu momentele elastice produse de încărcările de calcul;

— pentru $\lambda > 0{,}84$, momentele plastice se vor determina cu ajutorul coeficienților m_1 și m_2, dați în tabela 4.

2. Pentru $\lambda > 1{,}5$, valoarea maximă a momentului plastic de referință M_{p1} are loc pentru valori ale parametrului ξ_2 mai mici decît $\frac{0{,}20}{\lambda}$. În aceste cazuri, coeficientul u_2 are valoarea $\frac{2}{3}$, independentă de raportul $\lambda = \frac{l_2}{l_1}$, coeficientul u_1 rămînînd cel dat în tabela 2.

Tabela 4

λ	Schema I			Schema II					
	$l_2 \leqslant l_1$			$l_2 \leqslant l_1$			$l_2 \geqslant l_1$		
	m_1	m_2	ξ_1	m_1	m_2	ξ_2	m_1	m_2	ξ_2
0,3	0,0497	0,0159	0,37	—	—	—	—	—	—
0,4	—	—	—	0,0602	0,0189	0,80	—	—	—
0,5	—	—	—	0,0728	0,0204	0,67	—	—	—
0,6	—	—	—	0,0825	0,0209	0,57	—	—	—
0,7	—	—	—	0,0897	0,0209	0,48	—	—	—
0,8	—	—	—	0,0950	0,0214	0,42	—	—	—
0,9	—	—	—	0,101	0,0197	0,36	—	—	—
1,0	—	—	—	0,105	0,0184	0,31	0,105	0,0184	0,31
1,2	—	—	—	—	—	—	0,110	0,0162	0,24
1,5	—	—	—	—	—	—	0,114	0,0128	0,15
2,0	—	—	—	—	—	—	0,119*)	0,0080*)	0,10*)

*) Pentru $\xi_2 < \frac{0,20}{\lambda}$ și $l_2 \geqslant l_1$, la determinarea momentelor plastice s-a ținut seama de faptul că liniile de rupere care pătrund în colțuri sînt situate în întregime în zona în care se ridică pe reazeme o parte din armătura din cîmp.

Ţinînd seama de modificarea coeficientului ν_2, relaţia (22) devine

$$M_{p1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\lambda^2 (3\,\xi_2 - \xi_2^2)}{-8\lambda^2\xi_2^2 + 60\,\lambda^2\xi_2 + 10\nu_2} \cdot q_u l_1^2. \tag{29}$$

Condiţia de maximum a momentului plastic de referinţă, exprimată de ecuaţia (24), devine

$$\frac{6\lambda^2}{5\nu_2}\,\xi_2^2 + \frac{2}{3}\,\xi_2 - 1 = 0. \tag{30}$$

Pentru $\lambda = 2{,}0$, valoarea parametrului ξ_2 este dată în tabela 4.

În figura 3 sînt reprezentaţi cu linie plină coeficienţii m_1 şi m_2 pentru $\lambda > 0{,}84$ şi cu linie punctată rapoartele $n_1 = \dfrac{M_{e1}}{q_u l_1^2}$ şi $n_2 = \dfrac{M_{e2}}{q_u l_1^2}$ pentru

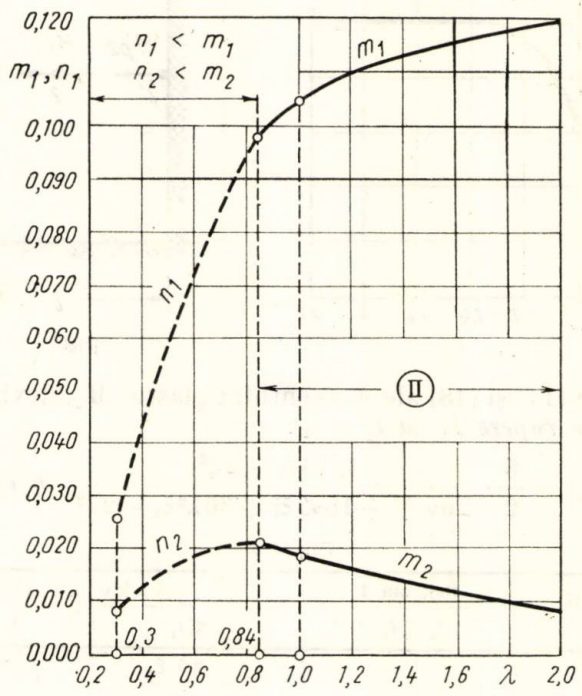


Fig. 3

$\lambda \leqslant 0{,}84$, unde M_{e1} şi M_{e2} sînt momentele elastice maxime produse de încărcările de calcul.

Tabela 5

λ	0,9	1,0	1,2	1,5	2,0
r	1,03	1,06	1,10	1,11	1,11

Valorile coeficientului de redistribuţie sînt date în tabela 5 şi sînt reprezentate grafic în figura 4.

9. PLACA SIMPLU REZEMATĂ PE DOUĂ LATURI PARALELE, ÎNCASTRATĂ PERFECT PE A TREIA LATURĂ ŞI LIBERĂ PE A PATRA LATURĂ (fig. 5)

Momentele plastice de pe laturile simplu rezemate sînt nule, adică :

$$M'_{p1} = 0 \; ; \quad \nu'_1 = 0.$$

Valorile coeficienţilor u_1 şi u_2 sînt date în tabela 6.

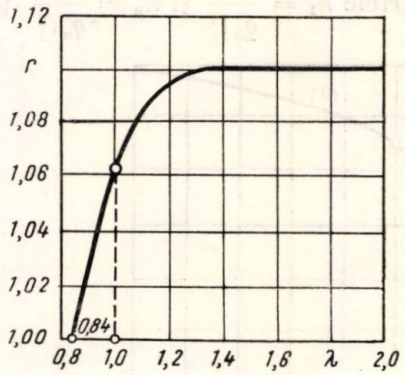


Fig. 4

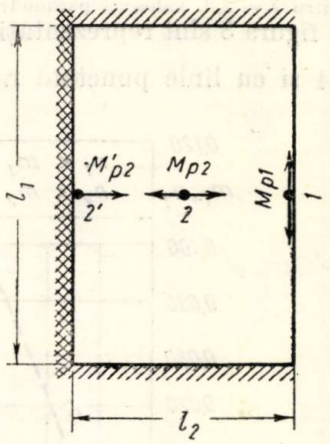


Fig. 5

Expresiile (14) şi (18) ale momentului plastic M_{p1} devin :
Schema de rupere I, cu $l_2 \leqslant l_1$:

$$M_{p1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\lambda^2 (3\xi_1^2 - 2\xi_1^3)}{26\nu_2 \xi_1^3 + 15\nu'_2 \xi_1^2 + 30\lambda^2 \xi_1 - 2\lambda^3} \cdot q_u l_1^2 . \tag{31}$$

Tabela 6

Coeficienţii u_i	Schema I	Schema II	
	$l_2 \leqslant l_1$	$l_2 \leqslant l_1$	$l_2 \geqslant l_1$
u_1	$1 - \frac{\lambda}{15\,\xi_1}$	$1 - \frac{2\lambda\,\xi_2}{15}$	$1 - \frac{2\,\xi_2}{15}$
u_2	$\frac{13}{15}$	$1 - \frac{2}{15\,\xi_2}$	$1 - \frac{2}{15\lambda\,\xi_2}$

Schema de rupere II, cu $l_2 \leqslant l_1$:

$$M_{p1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\lambda^2 (3\xi_2^2 - \xi_2^3)}{-8\lambda^3 \xi_2^3 + 60\lambda^2 \xi_2^2 + 15(\nu_2 + \nu'_2)\xi_2 - 2\nu_2} \cdot q_u l_1^2 . \tag{32}$$

Schema de rupere II, cu $l_2 \geqslant l_1$:

$$M_{p1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\lambda^3 (3\xi_2^2 - \xi_2^3)}{-8\lambda^3 \xi_2^3 + 60\lambda^3 \xi_2^2 + 15\lambda(\nu_2 + \nu'_2)\xi_2 - 2\nu_2} \cdot q_u l_1^2 . \tag{33}$$

Ecuaţiile (23) şi (24) au următoarele expresii :
Schema de rupere I, cu $l_2 \leqslant l_1$:

$$\frac{1}{2\lambda^3}(13\nu_2 + 5\nu_2')\xi_1^3 + \frac{10}{\lambda}\xi_1^2 - \left(1 + \frac{15}{2\lambda}\right)\xi_1 + 1 = 0. \tag{34}$$

Schema de rupere II, cu $l_2 \leqslant l_1$:

$$\frac{\lambda^2}{\nu_2}(5 - 2\lambda)\xi_2^3 + \frac{5}{2}\left(1 + \frac{\nu_2'}{\nu_2}\right)\xi_2^2 - \frac{1}{4}\left(17 + 15\frac{\nu_2'}{\nu_2}\right)\xi_2 + 1 = 0 \cdot \tag{35}$$

Schema de rupere, II, cu $l_2 \geqslant l_1$:

$$\frac{3\lambda^3}{\nu_2}\xi_2^3 + \frac{5\lambda}{2}\left(1 + \frac{\nu_2'}{\nu_2}\right)\xi_2^2 - \frac{1}{4}\left[2 + 15\lambda\left(1 + \frac{\nu_2'}{\nu_2}\right)\right]\xi_2 + 1 = 0. \tag{36}$$

Valorile coeficienţilor α_1, α_2, α_2', ν_2 şi ν_2' sînt date în tabela 7.

Tabela 7

λ	α_1	α_2	α_2'	ν_2	ν_2'
0,3	0,0056	0	0,4308	0	6,92
0,4	0,0153	0	0,3687	0	3,85
0,5	0,0288	0	0,3091	0	2,68
0,6	0,0436	0,0011	0,2513	0,026	2,08
0,7	0,0594	0,0053	0,2066	0,089	1,70
0,8	0,0736	0,0090	0,1702	0,122	1,48
0,9	0,0858	0,0120	0,1416	0,140	1,34
1,0	0,0955	0,0144	0,1182	0,151	1,24
1,2	0,1098	0,0171	0,0845	0,156	1,11
1,5	0,1229	0,0164	0,0548	0,133	1,00
2,0	0,1308	0,0119	0,0312	0,091	0,95

Valorile parametrilor ξ_1 şi ξ_2, care fac maximă valoarea momentului plastic de referinţă M_{p1}, sînt date în tabela 8, alături de valorile coeficienţilor m_1, m_2 şi m_2', care caracterizează momentele plastice ale plăcii, avînd expresiile :

$$m_1 = \frac{M_{p1}}{q_u l_1^2}, \quad m_2 = \frac{M_{p2}}{q_u l_1^2} \quad \text{şi} \quad m_2' = \frac{M_{p2}'}{q_u l_1^2}. \tag{37}$$

Tabela 8

λ	Schema I				Schema II							
	$l_2 \leqslant l_1$				$l_2 \leqslant l_1$				$l_2 \geqslant l_1$			
	m_1	m_2	m_2'	ξ_1	m_1	m_2	m_2'	ξ_2	m_1	m_2	m_2'	ξ_2
0,3	0,0051	0	0,0351	0,15	—	—	—	—	—	—	—	—
0,4	0,0133	0	0,0512	0,25	—	—	—	—	—	—	—	—
0,5	0,0241	0	0,0645	0,34	—	—	—	—	—	—	—	—
0,6	0,0355	0,0009	0,0738	0,41	—	—	—	—	—	—	—	—
0,7	0,0460	0,0041	0,0782	0,46	—	—	—	—	—	—	—	—
0,8	0,0552	0,0067	0,0817	0,98	—	—	—	—	—	—	—	—
0,9	—	—	—	—	0,0628	0,0088	0,0842	0,91	—	—	—	—
1,0	—	—	—	—	0,0695	0,0105	0,0862	0,85	0,0695	0,0105	0,0862	0,85
1,2	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0790	0,0123	0,0877	0,74
1,5	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0890	0,0118	0,0890	0,60
2,0	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0982	0,0089	0,0933	0,47

Aceşti coeficienţi sînt reprezentaţi grafic în figura 6.

Valorile coeficientului de redistribuţie sînt date în tabela 9 şi sînt reprezentate grafic în figura 7.

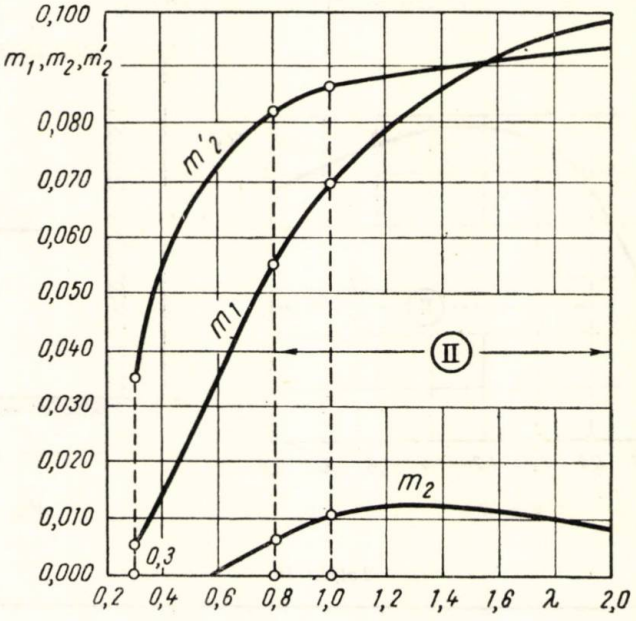


Fig. 6

Tabela 9

λ	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
r	1,11	1,15	1,19	1,23	1,29	1,34
λ	0,9	1,0	1,2	1,5	2,0	—
r	1,37	1,38	1,39	1,28	1,34	—

9. PLACA ÎNCASTRATĂ PERFECT PE DOUĂ LATURI PARALELE, SIMPLU REZEMATĂ PE A TREIA LATURĂ ŞI LIBERĂ PE A PATRA LATURĂ (fig. 8)

Momentul plastic pe latura simplu rezemată este nul, adică :

$$M'_{p2} = 0\,;\ \nu'_2 = 0.$$

Valorile coeficienţilor u_1 şi u_2 sînt date în tabela 10.

Expresiile (14) şi (18) ale momentului plastic M_{p1} devin :

Schema de rupere I, cu $l_2 \leqslant l_1$:

$$M_{p1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\lambda^2 (3\xi_1^2 - 2\xi_1^3)}{28\nu_2 \xi_1^3 + 30\lambda^2(1+\nu'_1)\xi_1 - 4\lambda^3} \cdot q_u l_1^2. \qquad (38)$$

Schema de rupere II, cu $l_2 \leqslant l_1$:

$$M_{p1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\lambda^2(3\xi_2^2 - \xi_2^3)}{-16\lambda^3\xi_2^3 + 60\lambda^2(1+\nu_1')\xi_2^2 + 15\nu_2\xi_2 - \nu_2} \cdot q_u l_1^2. \qquad (39)$$

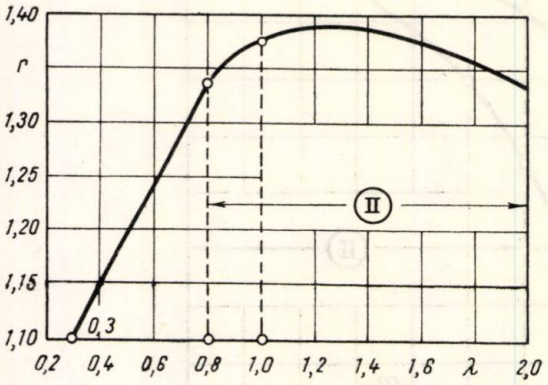


Fig. 7

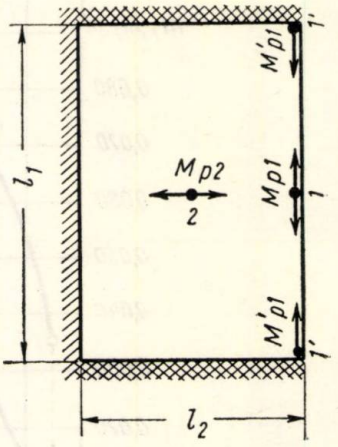


Fig. 8

Tabela 10

Coeficienţii u_i	Schema I	Schema II	
	$l_2 \leqslant l_1$	$l_2 \leqslant l_1$	$l_2 \geqslant l_1$
u_1	$1 - \frac{2\lambda}{15\xi_1}$	$1 - \frac{4\lambda\xi_2}{15}$	$1 - \frac{4\xi_2}{15}$
u_2	$\frac{14}{15}$	$1 - \frac{1}{15\xi_2}$	$1 - \frac{1}{15\lambda\xi_2}$

Schema de rupere II, cu $l_2 \geqslant l_1$:

$$M_{p1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\lambda^3(3\xi_2^2 - \xi_2^3)}{-16\lambda^3\xi_2^3 + 60\lambda^3(1+\nu_1')\xi_2^2 + 15\lambda\nu_2\xi_2 - \nu_2} \cdot q_u l_1^2. \qquad (40)$$

Ecuaţiile (23) şi (24) au următoarele expresii :
Schema de rupere I, cu $l_2 \leqslant l_1$:

$$\frac{7\nu_2}{2\lambda^3}\xi_1^3 + \frac{5(1+\nu_1')}{\lambda}\xi_1^2 - \left[\frac{15(1+\nu_1')}{4\lambda} + 1\right]\xi_1 + 1 = 0. \qquad (41)$$

Schema de rupere II, cu $l_2 \leqslant l_1$:

$$\frac{\lambda^2}{\nu_2}[10(1+\nu_1')-8\lambda]\xi_2^3+5\xi_2^2-8\xi_2+1=0. \tag{42}$$

Schema de rupere II, cu $l_2 \geqslant l_1$:

$$\frac{\lambda^3}{\nu_2}[10(1+\nu_1')-8]\xi_2^3+5\lambda\xi_2^2-8\lambda\xi_2+1=0. \tag{43}$$

Valorile coeficienților α_1, α_2, α_1', ν_2 și ν_1' sînt date în tabela 11.

Tabela 11

λ	α_1	α_2	α_1'	ν_2	ν_1'
0,3	0,0230	0,0077	0,0693	0,335	3,01
0,4	0,0307	0,0090	0,0782	0,293	2,55
0,5	0,0361	0,0098	0,0846	0,271	2,34
0,6	0,0403	0,0104	0,0852	0,258	2,11
0,7	0,0426	0,0103	0,0854	0,242	2,01
0,8	0,0438	0,0096	0,0853	0,219	1,95
0,9	0,0442	0,0086	0,0850	0,195	1,92
1,0	0,0445	0,0073	0,0848	0,164	1,90
1,2	0,0447	0,0055	0,0846	0,123	1,89
1,5	0,0449	0,0033	0,0845	0,073	1,88
2,0	0,0450	0,0011	0,0845	0,024	1,88

Valorile parametrilor ξ_1 și ξ_2, care fac maximă valoarea momentului plastic de referință M_{p1}, sînt date în tabela 12, alături de valorile coeficienților m_1, m_2 și m_1', care caracterizează momentele plastice ale plăcii, avînd expresiile:

$$m_1=\frac{M_{p1}}{q_u l_1^2},\quad m_2=\frac{M_{p2}}{q_u l_1^2}\quad \text{și}\quad m_1'=\frac{M_{p1}'}{q_u l_1^2}. \tag{44}$$

Acești coeficienți sînt reprezentați grafic în figura 9.

Valorile coeficientului de redistribuție sînt date în tabela 13 și sînt reprezentate grafic în figura 10.

Tabela 12

λ	Schema I				Schema II							
	$l_2 \leqslant l_1$				$l_2 \leqslant l_1$				$l_2 \geqslant l_1$			
	m_1	m_2	m_1'	ξ_1	m_1	m_2	m_1'	ξ_2	m_1	m_2	m_1'	ξ_2
0,3	—	—	—	—	0,0177	0,0063	0,0562	0,58	—	—	—	—
0,4	—	—	—	—	0,0237	0,0070	0,0605	0,45	—	—	—	—
0,5	—	—	—	—	0,0281	0,0076	0,0657	0,35	—	—	—	—
0,6	—	—	—	—	0,0319	0,0082	0,0672	0,29	—	—	—	—
0,7	—	—	—	—	0,0345	0,0084	0,0693	0,21	—	—	—	—
0,8	—	—	—	—	0,0366	0,0080	0,0715	0,20	—	—	—	—
0,9	—	—	—	—	0,0379	0,0074	0,0727	0,20	—	—	—	—
1,0	—	—	—	—	0,0391*)	0,0064*)	0,0743*)	0,18*)	0,0391*)	0,0642*)	0,0743*)	0,18*)
1,2	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0402*)	0,0493*)	0,0760*)	0,14*)
1,5	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0416*)	0,0303*)	0,0780*)	0,09*)
2,0	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0425*)	0,0010*)	0,0800*)	0,04*)

*) Pentru $\xi_2 < \frac{0{,}20}{\lambda}$ și $l_2 \geqslant l_1$, la determinarea momentelor plastice s-a ținut seama de faptul că liniile de rupere care pătrund în colțuri sînt situate în întregime în zona în care se ridică pe reazeme o parte din armătura din cîmp.

Tabela 13

λ	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
r	1,30	1,30	1,29	1,27	1,24	1,20
λ	0,9	1,0	1,2	1,5	2,0	—
r	1,17	1,14	1,11	1,08	1,06	—

10. PLACA ÎNCASTRATĂ PERFECT PE TREI LATURI ŞI LIBERĂ PE A PATRA LATURĂ (fig. 11)

Valorile coeficienţilor u_1 şi u_2 sînt date în tabela 14.
Expresiile (14) şi (18) ale momentului plastic M_{p1} devin :
Schema de rupere I, cu $l_2 \leqslant l_1$:

$$M_{p1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\lambda^2 (3\xi_1^2 - 2\xi_1^3)}{26\nu_2\xi_1^3 + 15\nu_2'\xi_1^2 + 30\lambda^2(1+\nu_1')\xi_1 - 4\lambda^3} q_u l_1^2. \qquad (45)$$

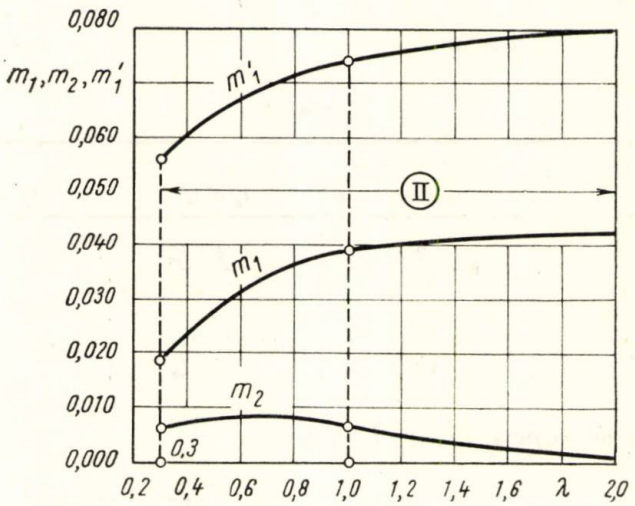


Fig. 9

Schema de rupere II, cu $l_2 \leqslant l_1$:

$$M_{p1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\lambda^2 (3\xi_2^2 - \xi_2^3)}{-16\lambda^3\xi_2^3 + 60\lambda^2(1+\nu_1')\xi_2^2 + 15(\nu_2+\nu_2')\xi_2 - 2\nu_2} \cdot q_u l_1^2. \qquad (46)$$

Schema de rupere II, cu $l_2 \geqslant l_1$:

$$M_{s1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\lambda^3 (3\xi_2^2 - \xi_2^3)}{-16\lambda^3\xi_2^3 + 60\lambda^3(1+\nu_1')\xi_2^2 + 15\lambda(\nu_2+\nu_2')\xi_2 - 2\nu_2} \cdot q_u l_1^2. \qquad (47)$$

Ecuațiile (23) și (24) au următoarele expresii :
Schema de rupere I, cu $l_2 \leqslant l_1$:

$$\frac{1}{4\lambda^3}(13\nu_2+5\nu_2')\xi_1^3+\frac{5(1+\nu_1')}{\lambda}\xi_1^2-\left[\frac{15\,(1+\nu_1')}{4\lambda}+1\right]\xi_1+1=0. \quad (48)$$

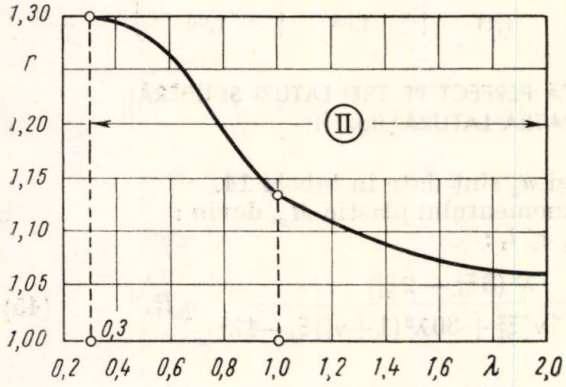


Fig. 10

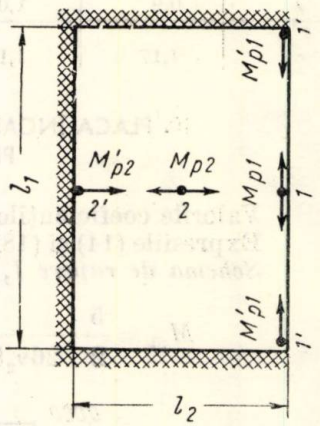


Fig. 11

Tabela 14

Coeficienții u_i	Schema I	Schema II	
	$l_2 \leqslant l_1$	$l_2 \leqslant l_1$	$l_2 \geqslant l_1$
u_1	$1-\frac{2\lambda}{15\,\xi_1}$	$1-\frac{4\lambda\xi_2}{15}$	$1-\frac{4\xi_2}{15}$
u_2	$\frac{13}{15}$	$1-\frac{2}{15\,\xi_2}$	$1-\frac{2}{15\lambda\xi_2}$

Schema de rupere II, cu $l_2 \leqslant l_1$:

$$\frac{\lambda^2}{\nu_2}[5(1+\nu_1')-4\lambda]\xi_2^3+\frac{5(\nu_2+\nu_2')}{2\nu_2}\xi_2^2-\left[\frac{17}{4}+\frac{15\nu_2'}{4\nu_2}\right]\xi_2+1=0. \quad (49)$$

Schema de rupere II, cu $l_2 \geqslant l_1$:

$$\frac{\lambda^3}{\nu_2}(5\nu_1'+1)\xi_2^3+\frac{5\lambda(\nu_2+\nu_2')}{2\nu_2}\xi_2^2-\left[\frac{15\lambda(\nu_2+\nu_2')}{4\nu_2}+\frac{1}{2}\right]\xi_2+1=0. \quad (50)$$

Valorile coeficienților α_1, α_2, α_1', α_2', ν_2, ν_1' și ν_2' sînt date în tabela 15.

Tabela 15

λ	α_1	α_2	α'_1	α'_2	ν_2	ν'_1	ν'_2
0,3	0,0078	0	0,0333	0,3833	0	4,27	4,43
0,4	0,0173	0	0,0545	0,2783	0	3,15	2,57
0,5	0,0268	0	0,0709	0,2004	0	2,65	1,87
0,6	0,0333	0,0044	0,0798	0,1476	0,132	2,39	1,60
0,7	0,0384	0,0062	0,0837	0,1106	1,161	2,18	1,41
0,8	0,0413	0,0076	0,0848	0,0865	0,184	2,05	1,34
0,9	0,0426	0,0087	0,0850	0,0691	0,204	1,99	1,31
1,0	0,0435	0,0084	0,0851	0,0559	0,193	1,95	1,29
1,2	0,0443	0,0077	0,0848	0,0387	0,174	1,91	1,26
1,5	0,0449	0,0052	0,0846	0,0248	0,116	1,88	1,24
2,0	0,0450	0,0025	0,0845	0,0139	0,056	1,87	1,23

Valorile parametrilor ξ_1 și ξ_2, care fac maximă valoarea momentului plastic de referință M_{p1}, sînt date în tabela 16, alături de valorile coeficienților m_1, m_2, m'_1 și m'_2, care caracterizează momentele plastice ale plăcii, avînd expresiile :

$$m_1 = \frac{M_{p1}}{q_u l_1^2},\quad m_2 = \frac{M_{p2}}{q_u l_1^2},\quad m'_1 = \frac{M'_{p1}}{q_u l_1^2} \text{ și } m'_2 = \frac{M'_{p2}}{q_u l_1^2}. \tag{51}$$

Acești coeficienți sînt reprezentați grafic în figura 12.

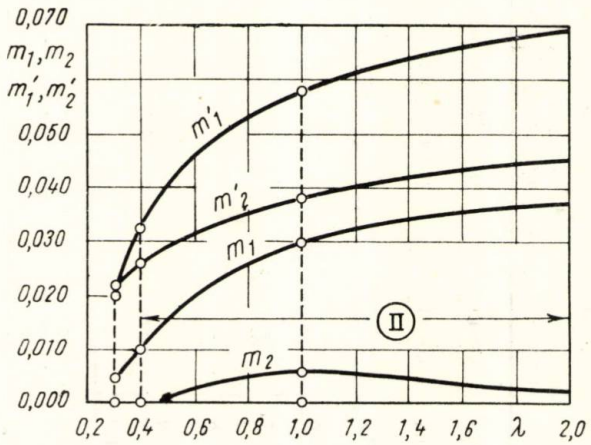


Fig. 12

Tabela 16

λ	Schema I					Schema II									
	$l_2 \leqslant l_1$					$l_2 \leqslant l_1$					$l_2 \geqslant l_1$				
	m_1	m_2	m_1'	m_2'	ξ_1	m_1	m_2	m_1'	m_2'	ξ_2	m_1	m_2	m_1'	m_2'	ξ_2
0,3	0,0049	0	0,0207	0,0215	0,39	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,4	0,0103	0	0,0323	0,0263	0,50	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,5	—	—	—	—	—	0,0156	0	0,0413	0,0291	0,86	—	—	—	—	—
0,6	—	—	—	—	—	0,0193	0,0026	0,0462	0,0309	0,77	—	—	—	—	—
0,7	—	—	—	—	—	0,0230	0,0037	0,0502	0,0325	0,69	—	—	—	—	—
0,8	—	—	—	—	—	0,0259	0,0048	0,0532	0,0347	0,63	—	—	—	—	—
0,9	—	—	—	—	—	0,0277	0,0057	0,0552	0,0363	0,59	—	—	—	—	—
1,0	—	—	—	—	—	0,0296	0,0057	0,0577	0,0382	0,55	0,0296	0,0057	0,0577	0,0382	0,55
1,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0319	0,0056	0,0608	0,0402	0,48
1,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0345	0,0040	0,0648	0,0427	0,39
2,0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0369	0,0021	0,0690	0,0453	0,30

Valorile coeficientului de redistribuţie sînt date în tabela 17 şi sînt reprezentate grafic în figura 13.

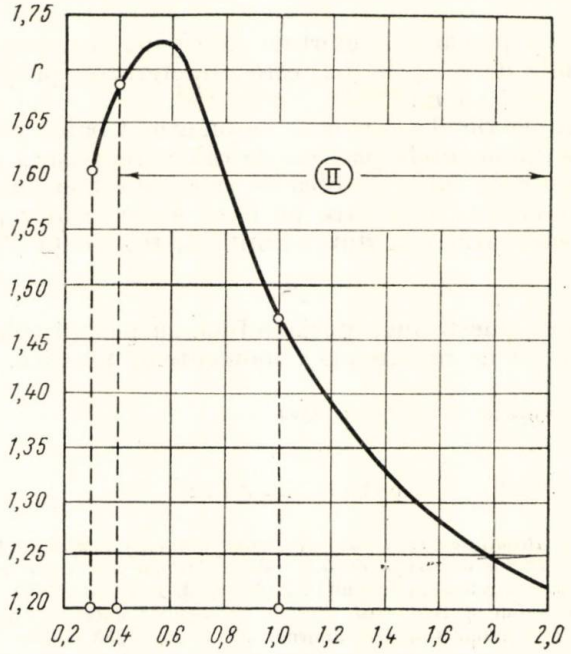


Fig. 13

Tabela 17

λ	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
r	1,61	1,69	1,72	1,73	1,67	1,60
λ	0,9	1,0	1,2	1,5	2,0	—
r	1,54	1,47	1,39	1,31	1,22	—

11. MOMENTE DE CALCUL

Momentele plastice determinate pe baza criteriului redistribuţiei minime, în ipoteza redistribuirii totale a eforturilor, sînt momente plastice de calcul atîta timp cît $r \leqslant r_a$, adică atîta timp cît $q_1 \geqslant q_n$.

În cazurile în care $r > r_a$, momentele de calcul sînt date de relaţiile :

$$M_{p1} = \alpha_1 q_n l_1^2; \quad M'_{p1} = \alpha'_1 q_n l_1^2;$$
$$M_{p2} = \alpha_2 q_n l_1^2; \quad M'_{p2} = \alpha'_2 q_n l_2^2. \tag{52}$$

Pentru aceste valori ale momentelor plastice, încărcarea q_1 corespunzătoare atingerii limitei de curgere de calcul simultan în punctele cele

mai solicitate ale armăturii este egală cu încărcarea q_n, aceasta reprezentînd suma dintre încărcarea permanentă de calcul şi încărcarea temporară normată.

Redistribuţia parţială de eforturi corespunzătoare momentelor plastice de calcul date de relaţiile (52) este caracterizată printr-un coeficient de redistribuţie egal cu r_a.

În calculul plastic al plăcilor de beton armat bazat pe criteriul redistribuţiei minime, momentele plastice de calcul reprezintă în acelaşi timp momente de rupere de calcul în ceea ce priveşte dimensionarea armăturii [4]. Această dimensionare se face pe baza prescripţiilor pentru calculul secţiunilor de beton armat la starea limită de rezistenţă [5], [6].

★

Autorul mulţumeşte ing. Mariana Ionescu pentru colaborarea sa la rezolvarea condiţiei de maximum a momentelor plastice.

Primită la redacţie la 21 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. K. W. JOHANSEN, *Brudlinieteorier*. Jul. Gjellerups Forlag, Copenhaga, 1943.
2. V. PETCU, *Les conditions de service dans le calcul plastique des structures hyperstatiques en béton armé*. Archiwum Inzynierii Ladowej, **8**, *1*, 3—18 (1962).
3. — *Plastic design of reinforced concrete rectangular slabs under uniformly distributed loads*. The Indian Concrete Journal, **37**, *7*, 247—253 (1963).
4. — *Calculul plastic al plăcilor continue de beton armat, solicitate de încărcări uniform distribuite*. Revista construcţiilor şi a materialelor de construcţii, **16**, *5*, 260—267 (1964).
5. * * * *Normativ condiţionat pentru calculul construcţiilor la stări limită*, vol. I., Edit. tehnică, Bucureşti, 1962.
6. * * * *Recommandations pratiques unifiées pour le calcul et l'execution des ouvrages en beton armé*. Comité Européen du Béton, 1964.
7. A. I. CIŞMIGIU, P. V. VERNESCU, *Aplicaţii ale teoriei elasticităţii în construcţii. Plăci curbe şi plane*. ESAC, Bucureşti, 1955.

ASUPRA TEORIEI ÎNVELITORILOR ŞI PLĂCILOR ELASTICE, ANIZOTROPE [1]

de LIVIU LIBRESCU [2]

539.3

În această lucrare se dezvoltă o teorie a învelitorilor şi plăcilor elastice, omogene şi anizotrope, teorie în care se elimină ipoteza Love-Kirchhoff.

În felul acesta sînt eliminate contradicţiile inerente pe care le introduce această ipoteză.

Condiţiile la limită pe suprafeţele de mărginire exterioare ale învelitorii sînt satisfăcute riguros. Nu se face nici o restricţie în ceea ce priveşte grosimea învelitorii, de unde posibilitatea de a putea determina starea de tensiune a învelitorilor anizotrope groase.

În final, rezultatele generale obţinute sînt ilustrate pe cazul plăcii plane subţiri.

1. INTRODUCERE

Problema construirii teoriei învelitorilor şi plăcilor elastice nelegată de ipoteza Love-Kirchhoff [3]) a constituit obiectul a numeroase cercetări. În acest sens citäm lucrările lui N. A. Kilcevski [3], A. I. Lurie [4], V. V. Novojilov şi P. M. Finkelstein [5], A. E. Green şi W. Zerna [6], E Reissner [7], [8], P. M. Naghdi [9], D. Rüdiger [10], X. M. Mustari şi I. G. Teregulov [11], [12], A. L. Goldenweiser [13] — [15], W. Zerna [16], N. A. Kilcevski [17] etc. Construirea teoriei învelitorilor elastice anizotrope nelegată de ipoteza Love-Kirchhoff a căpătat o considerabilă dezvoltare prin lucrările datorite lui S. A. Ambarţumian [18] — [23]. O cuprinzătoare bibliografie privind stadiul actual în această ultimă problemă este dată în [24].

[1]) Lucrare publicată în „Инженерный журнал", IV, 3, (1964).

[2]) Institutul de mecanică aplicată al Academiei R.P.R.

[3]) Conţinutul acestei ipoteze şi eroarea la care ea conduce sînt discutate pe larg de exemplu în [1].

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 18, NR. 1, P. 117–133 BUCUREŞTI 1965

MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

În cele ce urmează vom dezvolta o teorie a învelitorilor omogene și anizotrope în care se elimină ipotezele uzuale.

Se ține seama de componentele e_{i3} ($i = 1,2,3$) ale tensorului deformație, precum și de componentele τ^{i3} ale tensorului tensiune. Condițiile la limită pe suprafețele de mărginire exterioare ale învelitorii sînt satisfăcute riguros. Nu se face nici o restricție în ceea ce privește grosimea învelitorii, avînd astfel posibilitatea de a determina starea de tensiune a învelitorilor anizotrope groase.

2. RELAȚII GEOMETRICE

Considerăm o învelitoare de grosime constantă h. Ecuația suprafeței sale mediane o definim prin

$$\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2), \tag{1}$$

unde $\bar{r} = \overline{OM}$ este vectorul de poziție a lui M, iar x^μ ($\mu = 1,2$) [4]) coordonatele gaussiene ale punctelor suprafeței. Vectorii

$$\bar{r}_\alpha = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^\alpha}, \tag{2}$$

cu direcția tangentelor în M la curbele coordonate ale suprafeței mediane. Poziția unui punct din mediul tridimensional al învelitorii este dată de

$$\bar{R}(x^1, x^2, x^3) = \bar{r} + x^3 \bar{n}, \tag{3}$$

unde $\bar{n}$ este vectorul unitar al normalei la suprafața mediană, iar $x^3 = z\,(-\frac{1}{2}h \leqslant z \leqslant +\frac{1}{2}h)$ distanța punctului respectiv la suprafața mediană. Suprafețele de mărginire exterioară și interioară a învelitorii sînt definite de $z = \pm\frac{h}{2}$. Prin $a_{\alpha\beta}$, respectiv $a^{\alpha\beta}$ se notează componentele covariante, respectiv contravariante ale tensorului metric al suprafeței mediane, prin a determinantul matricei $(a_{\alpha\beta})$:

$$a = \det(a_{\alpha\beta}) = a_{11}\ a_{22} - a_{12}^2 \tag{4}$$

Componentele covariante ale celei de-a doua și celei de-a treia forme fundamentale a suprafeței mediane sînt notate respectiv prin $b_{\alpha\beta}$ și $c_{\alpha\beta}$, unde

$$c_{\alpha\beta} = b_{\alpha\lambda}\ b_\beta^\lambda, \tag{5}$$ [5])

iar prin

$$b = \det(b_{\alpha\beta}) = b_{11}\ b_{22} - b_{12}^2 \tag{6}$$

---

[4]) Aici și în cele ce urmează indicii greci iau valorile 1, 2, iar indicii latini valorile 1, 2, 3.

[5]) Fără mențiuni speciale, vom folosi convenția einsteiniană de însumare, precum și binecunoscutul procedeu de ridicare sau coborîre a indicilor unui tensor.

Componentele covariante, respectiv contravariante ale tensorului metric corespunzînd mediului tridimensional al învelitorii nedeformate se notează prin g_{ij}, respectiv g^{ij}, iar prin g

$$g = \det(g_{ij}) = g_{11}\, g_{22} - g_{12}^2. \tag{7}$$

Prin

$$H = \frac{1}{2} a^{\pi\sigma}\, b_{\pi\sigma} \tag{8}$$

se notează curbura medie a suprafeței mediane nedeformate, iar prin

$$K = \frac{b}{a} \tag{9}$$

curbura sa gaussiană.

Ținînd seama de faptul că direcția $x^3 = z$ este normală la suprafața mediană, avem

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2z\, b_{\alpha\beta} + z^2\, c_{\alpha\beta},\ g_{\alpha 3} = g^{\alpha 3} = 0,\ g_{33} = 1. \tag{10}$$

Componentele $g^{\alpha\beta}$ le putem exprima sub forma seriei

$$g^{\alpha\beta} = \overset{(0)}{g}{}^{\alpha\beta} + z\ \overset{(1)}{g}{}^{\alpha\beta} + z^2\ \overset{(2)}{g}{}^{\alpha\beta} + \ldots, \tag{11}^{6)}$$

unde

$$\overset{(0)}{g}{}^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta},\ \overset{(1)}{g}{}^{\alpha\beta} = 2b^{\alpha\beta},\ \overset{(2)}{g}{}^{\alpha\beta} = 3\, c^{\alpha\beta},\ \text{ș.a.m.d.} \tag{12}$$

Ținînd seama în (8) de relațiile (11), (9) și (10), g se poate exprima sub forma

$$g = a\,[1 - 4z\,H + 2z^2\,(2H^2 + K) - 4z^3\,H\,K + z^4\,K^2], \tag{13}$$

iar

$$\sqrt{\frac{g}{a}} = m = \overset{(0)}{m} + z\ \overset{(1)}{m} + z^2\ \overset{(2)}{m},$$

unde

$$\overset{(0)}{m} = 1,\ \overset{(1)}{m} = -2H,\ \overset{(2)}{m} = K. \tag{14}$$

Diferențierea parțială a unui scalar, a unui vector sau a unui tensor în raport cu coordonata x^j va fi indicată printr-un subscript j precedat de o virgulă. Derivata covariană în spațiu (în metrica mediului tridimensional) va fi indicată printr-o dublă linie verticală.

---

6) Toate dezvoltările în serie de puteri întregi și pozitive ale variabilei $x^3 = z$ se presupun a fi absolut și uniform convergente în intervalul $\left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$.

Astfel, regula de derivare covariantă este dată de

$$\begin{aligned} w_{||j} &= w_{,j}, \\ V^h_{||j} &= V^h_{,j} + \Gamma^h_{kj} V^h, \\ V_{h\,||\,j} &= V_{h,j} - \Gamma^k_{hj} V_k, \\ A^{hi}_{\quad||j} &= A^{hi}_{\quad,j} + \Gamma^h_{kj} A^{ki} + \Gamma^i_{kj} A^{hk}, \\ A_{hi\,||\,j} &= A_{hi,j} - \Gamma^k_{hj} A_{ki} - \Gamma^k_{ij} A_{hk}, \end{aligned} \tag{15}$$

unde simbolii lui Christoffel de speţa a doua $\Gamma^h_{ij} = \Gamma^h_{ji}$ sînt daţi de

$$\Gamma^h_{ij} = g^{hk}\,\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}\,g^{hk}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}). \tag{16}$$

În baza relaţiilor (16), (12) şi ţinînd seama de ecuaţiile Gauss-Codazzi date de

$$b_{\alpha\beta\,|\,\lambda} = b_{\lambda\beta\,|\,\alpha} = b_{\lambda\alpha\,|\,\beta}, \tag{17}$$

precum şi de relaţia

$$A_{\lambda\rho,\mu} + A_{\mu\rho,\lambda} - A_{\lambda\mu,\rho} = A_{\lambda\rho\,|\,\mu} + A_{\mu\rho\,|\,\lambda} - A_{\lambda\mu\,|\,\rho} + 2\,\overset{0}{\Gamma}{}^{\tau}_{\lambda\mu} A_{\tau\rho}, \tag{18}$$

unde $A_{\lambda\mu}$ sînt componentele unui tensor simetric (în speţă poate fi $b_{\lambda\mu}$ sau $c_{\lambda\mu}$), se deduc următoarele expresii pentru simbolii lui Christoffel de speţa a doua :

$$\begin{aligned} \Gamma^{\omega}_{\alpha\beta} = \overset{0}{\Gamma}{}^{\omega}_{\alpha\beta} - z\,b^{\omega}_{\beta\,|\,\alpha} - z^2\,b^{\omega}_{\delta}\;b^{\delta}_{\alpha\,|\,\beta} + \ldots z^n\Big[\overset{(n)}{g}{}^{\omega\pi}\,\overset{0}{\Gamma}{}_{\alpha\beta,\pi} - \overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\pi}(b_{\beta\pi\,|\,\alpha} + \\ + 2\,\overset{0}{\Gamma}{}^{\tau}_{\alpha\beta} b_{\tau\pi}) + \overset{(n-2)}{g}{}^{\omega\pi}(b_{\rho\pi} b^{\rho}_{\alpha\,|\,\beta} + \overset{0}{\Gamma}{}^{\rho}_{\alpha\beta}\,c_{\rho\pi})\Big] + \ldots \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^3_{\alpha\beta} &= b_{\alpha\beta} - z_{\alpha\beta}, \\ \Gamma^{\omega}_{\alpha 3} &= -b^{\omega}_{\alpha} - z\,c^{\omega}_{\alpha} - z^2\,b^{\lambda}_{\alpha}\;c^{\omega}_{\alpha} - \ldots - z^n\left(\overset{(n)}{g}{}^{\omega\lambda} b_{\alpha\lambda} - \overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\lambda}\,c_{\alpha\lambda}\right) + \ldots \\ \Gamma^{\alpha}_{33} &= \Gamma^3_{\alpha 3} = \Gamma^3_{33} = 0 \end{aligned} \tag{20}$$[7]

Prin $\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ s-au notat simbolii lui Christoffel de speţa a doua corespunzînd metricei suprafeţei mediane :

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\,(x^{\nu},\ 0) = \frac{1}{2}\,a^{\lambda\mu}(a_{\mu\alpha,\beta} + a_{\mu\beta\alpha} - a_{\alpha\beta,\mu}), \tag{21}$$

[7]) Mărimile afectate de un număr de ordine $(n - i)$ negativ vor fi considerate egale cu zero.

iar derivata covariantă de suprafaţă a unui tensor de suprafaţă (sau a unui invariant ori vector de suprafaţă) a fost indicată printr-un subscript grec precedat de o singură linie verticală. Astfel, pentru un invariant de suprafaţă avem relaţia

$$w_{|\alpha\beta} = w_{|\beta\alpha} = w_{,\alpha\beta} - \overset{0}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\alpha\beta}\, w_{,\lambda}.$$

Derivatele spaţiale ale unui vector spaţial pot fi exprimate, cu ajutorul derivatelor de suprafaţă, astfel :

$$V_{\alpha\,||\beta} = V_{\alpha,\beta} - V_3\Gamma^3_{\alpha\beta} - V_\omega\Gamma^\omega_{\alpha\beta} = V_{\alpha\,|\beta} - V_3\, b_{\alpha\beta} + z\,(V_3\, c_{\alpha\beta} +$$

$$+ V_\omega\, b^\omega_{\alpha\,|\beta}) + z^2\, V_\omega\, b^\omega_\delta\, b^\delta_{\alpha\,|\beta} + \ldots - z^n\, V_\omega\Big[\overset{(n)}{g}{}^{\omega\pi}\,\overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\alpha\beta,\pi} - \tag{22}$$

$$- \overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\pi}\,(b_{\beta\pi\,|\alpha} + 2\,\overset{0}{\Gamma}{}^{\tau}_{\alpha\beta}\, b_{\tau\pi}) + \overset{(n-2)}{g}{}^{\omega\pi}(b_{\rho\pi}\, b^\rho_{\alpha\,|\beta} + \overset{0}{\Gamma}{}^{\rho}_{\alpha\beta}\, c_{\rho\pi})\Big] + \ldots,$$

$$V_{\alpha\,||3} = V_{\alpha,3} + V_\omega\Big[\, b^\omega_\alpha + z\; c^\omega_\alpha + z^2\, b^\gamma_\alpha\, c^\omega_r + \ldots + \ldots z^n\Big(\overset{(n)}{g}{}^{\omega\lambda} b_{\alpha\lambda} - \tag{23}$$

$$- \overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\lambda} c_{\alpha\lambda}\Big) + \ldots\Big],$$

$$V_{3\,|\alpha} = V_{3,\alpha} + V_\omega\Big[\, b^\omega_\alpha + z\; c^\omega_\alpha + z^2\, b^r_\alpha\; c^\omega_r + \ldots. \tag{24}$$

$$+ z^n\Big(\overset{(n)}{g}{}^{\omega\lambda} b_{\alpha\lambda} - \overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\lambda} c_{\alpha\lambda}\Big) + \ldots\Big].$$

Cînd suprafaţa dată de ecuaţia (1) este un plan,

$$b_{\alpha\beta} = 0 \tag{25}$$

şi deci

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}, \quad g = a, \tag{26}$$

$$\Gamma^3_{ik} = 0, \quad \Gamma^\alpha_{\beta 3} = 0, \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}.$$

3. ECUAŢIILE DE ECHILIBRU

În absenţa forţelor masice, ecuaţiile de echilibru pentru un volum elementar decupat din învelitoare se pot scrie sub forma [16]

$$\overline{T}_{i,i} = 0, \tag{27}$$

unde $\overline{T}_i$ este vectorul de tensiune definit prin

$$\overline{T}_i = \sqrt{a}\,(m\,\sigma^{i\rho}\,\overline{r}_\rho + m\,\tau^{i3}\overline{n}), \tag{28}$$

iar

$$\sigma^{i\rho} = (\delta^\rho_\alpha - z\, b^\rho_\alpha)\,\tau^{i\alpha}, \tag{29}$$

τ^{ik} fiind componentele contravariante ale tensorului tensiune corespunzînd mediului tridimensional al învelitoarei.

Ţinînd seama în ecuaţia (27) de (28), ecuaţiile de echilibru se pot scrie şi sub forma [6], [16]

$$\begin{aligned}(m\,\sigma^{\alpha\rho})_{|\alpha} - b^{\rho}_{\alpha}(m\;\tau^{\alpha 3}) + (m\;\sigma^{3\rho})_{,3} = 0,\\ (m\;\tau^{\alpha 3})_{|\alpha} + (m\;\tau^{33})_{,3} + b_{\rho\alpha}(m\;\sigma^{\alpha\rho}) = 0.\end{aligned} \tag{30}$$

Înmulţind ecuaţiile (30) succesiv cu $z^0, z^1, \ldots, z^n$, şi integrîndu-le în raport cu z pe grosime, se obţin în locul ecuaţiilor tridimensionale (30) ecuaţii sub forma bidimensională. Prin introducerea tensorilor momentelor de ordinul n, $L^{\omega\lambda}_{(n)}$, $N^{\omega}_{(n)}$, $Q^{3}_{(n)}$, definite prin

$$L^{\omega\pi}_{(n)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\omega\pi}\, m\, z^n\, \mathrm{d}z,\quad N^{\omega}_{(n)} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau^{\omega 3}\, m\; z^n\, \mathrm{d}z, \tag{31}$$

$$Q^{3}_{(n)} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau^{33}\, m\, z^n\, \mathrm{d}z,$$

ecuaţiile de echilibru ale unui element decupat din învelitoare sînt date prin

$$L^{\omega\rho}_{(0)|\omega} - b^{\rho}_{\omega}\, N^{\omega}_{(0)} + s^{\rho}_{(0)} - b^{\rho}_{\alpha}\, s^{\alpha}_{(1)} = 0, \tag{32}$$

$$N^{\alpha}_{(0)|\alpha} + b_{\rho\alpha}\, L^{\alpha\rho}_{(0)} + p_{(0)} = 0,$$

$$L^{\omega\rho}_{(1)|\omega} - N^{\rho}_{(0)} + s^{\rho}_{(1)} - \frac{h^2}{4}\, b^{\rho}_{\alpha}\, s^{\alpha}_{(0)} = 0,$$

$$N^{\alpha}_{(1)|\alpha} - Q^{3}_{(0)} + b_{\rho\alpha}\, L^{\alpha\rho}_{(1)} + p_{(1)} = 0, \ldots \tag{*}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$L^{\omega\rho}_{(n)|\omega} + (n-1)\, b^{\rho}_{\omega}\, N^{\omega}_{(n)} - n\, N^{\rho}_{(n-1)} + s^{\rho}_{(n)} - b^{\rho}_{\alpha}\, s^{\alpha}_{(n+1)} = 0,$$

$$N^{\alpha}_{(n)|\alpha} - n\, Q^{3}_{(n)-1} + b_{\rho\alpha}\, L^{\alpha\rho}_{(n)} + p_{(n)} = 0, \ldots \tag{*}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

unde

$$s^{\rho}_{(n)} = [m\; z^n\; \tau^{\rho 3}]^{h/2}_{-h/2} \quad \text{şi} \quad p_{(n)} = [m\; z^n\; \tau^{33}]^{h/2}_{-h/2}. \tag{33}$$

Pentru $n = 2t + 1$, $(t = 0,1,\ldots)$ avem

$$s^{\rho}_{(2t+1)} = \left(\frac{h}{2}\right)^{2t} s^{\rho}_{(1)} \quad \text{şi} \quad p_{(2t+1)} = \left(\frac{h}{2}\right)^{2t} p_{(1)}, \tag{34}$$

iar pentru $n = 2t$, $(t = 0,1,\ldots)$

$$s_{(2t)} = \left(\frac{h}{2}\right)^{2t} s^{\rho}_{(0)} \quad \text{şi} \quad p_{(2t)} = \left(\frac{h}{2}\right)^{2t} p_{(0)}.$$

Ansamblul relaţiilor (33) dau legătura dintre condiţiile la limită pe suprafeţele de mărginire exterioare şi forţele exterioare reduse la suprafaţa mediană a învelitorii.

4. ECUAŢIILE FIZICE

Pentru un corp elastic, omogen şi anizotrop, relaţia generală dintre tensiuni şi deformaţiile infinitezimale este dată prin [25]

$$\tau^{ik} = E^{ikrs} e_{rs}, \tag{35}$$

unde e_{rs} reprezintă componentele covariante ale tensorului de deformaţie corespunzînd mediului tridimensional al învelitorii şi E^{ikrs} tensorul modulilor de elasticitate ai corpului. O dată cu relaţia (35) are loc şi relaţia inversă

$$e_{rs} = F_{rslm} \tau^{lm}, \tag{36}$$

unde tensorul F_{rslm} este tensorul coeficienţilor elastici ai corpului.

Tensorii E^{iklm} şi F_{ikrs} posedă proprietăţi de simetrie exprimate prin relaţiile

$$E^{ikrs} = E^{kirs} = E^{kisr} = E^{rsik}, \tag{37}$$

iar între componentele acestor doi tensori există relaţia, uşor de verificat,

$$E^{ijrs} F_{ijkl} = \delta^r_k \ \delta^s_l. \tag{38}$$

Aceşti tensori depind de tensorul simetric g_{ij}, precum şi de proprietăţile fizice ale corpului nedeformat. În cazul corpului elastic omogen avem relaţii suplimentare exprimate prin [25]

$$E^{ijrs}||_t = 0, \quad F_{ijkl}||_t = 0. \tag{39}$$

În cele ce urmează vom considera numai corpuri elastic-omogene.

În cazul în care în fiecare punct al materialului învelitorii există un plan de simetrie elastic paralel cu planul $z=0$, componentele tensorului E^{iklm} (sau F_{ikrs}) care conţin indicele trei o dată sau de trei ori se anulează [25]. Astfel încît în acest caz avem

$$E^{3\alpha\beta\gamma} = E^{333\mu} = E^{3\alpha3\gamma} = E^{\alpha333} = 0 \tag{40}$$

şi analog componentele tensorului F_{ijkl}.

În cazul simetriei elastice în raport cu două plane ortogonale (ortotropie), pe lîngă condiţia care rezultă din considerarea simetriei în raport cu un plan se mai adaugă şi condiţia ca toate componentele tensorului E^{iklm} care conţin indicele unu o dată sau de trei ori se anulează [25] (analog pentru F_{ijkl}).

În cele ce urmează vom aborda cazul învelitorilor construite dintr-un material elastic omogen şi anizotrop, anizotropia fiind de tipul simetriei elastice în raport cu un plan, cazul ortotropiei putîndu-se deduce prin

simpla particularizare a relațiilor obținute. Pentru acest caz, relația tensiuni-deformații sub forma dezvoltată devine

$$\tau^{\omega\pi} = E^{\omega\pi\sigma\rho}\, e_{\sigma\rho} + E^{\omega\pi 33}\, e_{33}, \tag{41 a}$$

$$\tau^{\omega 3} = 2\, E^{\omega 3\lambda 3}\, e_{\lambda 3} \text{ și reciproc, } e_{\lambda 3} = 2\, F_{\lambda 3\omega 3}\, \tau^{\omega 3}, \tag{41 b}$$

$$\tau^{33} = E^{33\sigma\rho}\, e_{\sigma\rho} + E^{3333}\, e_{33}. \tag{41 c}$$

Din ecuația (41 *c*) se deduce expresia lui e_{33} :

$$e_{33} = \frac{1}{E^{3333}}(\tau^{33} - E^{33\alpha\beta}\, e_{\alpha\beta}), \tag{42}$$

în baza căreia (41 *a*) devine

$$\tau^{\omega\pi} = \left(E^{\omega\pi\alpha\beta} - \frac{E^{\omega\pi 33}\, E^{33\alpha\beta}}{E^{3333}}\right) e_{\alpha\beta} + \frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\, \tau^{33}. \tag{43}$$

În ceea ce privește componentele τ^{i3}, vom presupune că ele pot fi reprezentate sub forma unei dezvoltări pe grosime,

$$m\,\tau^{i3} = \overset{(0)}{\varphi}{}^{i} + z\,\overset{(1)}{\varphi}{}^{i} + z^2\,\overset{(2)}{\varphi}{}^{i} + \ldots z^{2n}\,\overset{(2n)}{\varphi}{}^{i} + z^{2n+1}\,\overset{(2n+1)}{\varphi}{}^{i} + \ldots, \tag{44}$$

unde $\overset{(m)}{\varphi}{}^{i} = \overset{(m)}{\varphi}{}^{i}(x^{\alpha})$ sînt funcții necunoscute. Prin satisfacerea condițiilor la limită pe suprafețele exterioare date de relațiile (33), expresia (44) devine

$$m\,\tau^{\rho 3} = \frac{s^{\rho}_{(1)}}{h} + \frac{s^{\rho}_{(0)}}{h}\, z + \overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \overset{(3)}{\varphi}{}^{\rho}\, z\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \tag{45 a}$$

$$+ \ldots + \overset{(2n)}{\varphi}{}^{\rho}\left(z^{2n} - \frac{h^{2n}}{2^{2n}}\right) + \overset{(2n+1)}{\varphi}{}^{\rho}\, z\left(z^{2n} - \frac{h^{2n}}{2^{2n}}\right) + \ldots$$

$$m\,\tau^{33} = \frac{p_{(1)}}{h} + \frac{p_{(0)}\, z}{h} + \overset{(2)}{\psi}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \overset{(3)}{\psi} z\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \tag{45 b}$$

$$+ \ldots \overset{(2n)}{\psi}\left(z^{2n} - \frac{h^{2n}}{2^{2n}}\right) + \overset{(2n+1)}{\psi}\, z\left(z^{2n} - \frac{h^{2n}}{2^{2n}}\right) + \ldots,$$

unde pentru comoditatea scrisului s-a introdus notația

$$\overset{(n)}{\varphi}{}^{3} = \overset{(n)}{\psi}.$$

În felul acesta, expresia (45) a componentelor τ^{i3} satisface toate condiţiile la limită pe suprafeţele $z = \pm \frac{h}{2}$. Vom considera în continuare următoarele dezvoltări după z a componentelor tensorilor E^{ikrs} şi F_{ijlm} :

$$E^{\omega\pi\lambda\rho} = \overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} + z\,\overset{(1)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} + \ldots + z^n\,\overset{(n)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} + \ldots, \qquad (46)^{8)}$$

$$E^{33\omega\pi} = \overset{(0)}{E}{}^{33\omega\pi} + z\,\overset{(1)}{E}{}^{33\omega\pi} + \ldots + z^n\,\overset{(n)}{E}{}^{33\omega\pi} + \ldots,$$

$$E^{3333} = \overset{(0)}{E}{}^{3333}$$

$$F_{\omega 3\lambda 3} = \overset{(0)}{F}{}_{\omega 3\lambda 3} + z\,\overset{(1)}{F}{}_{\omega 3\lambda 3} z^2\,\overset{(2)}{F}{}_{\omega 3\lambda 3}.$$

---

8) Pentru cazul izotrop $E^{ijlr} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\, g^{ij}\, g^{lr} + g^{il}\, g^{jr}\right]$,

$$F_{rslm} = \frac{1+\nu}{E}\left[g_{rl}\, g_{sm} - \frac{\nu}{1+\nu}\, g_{rs}\, g_{lm}\right],$$

unde E şi ν reprezintă modulul lui Young, respectiv constanta lui Poisson. Ţinînd seama de relaţiile (11), (12) se obţine

$$\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\, a^{\omega\pi}\, a^{\lambda\rho} + a^{\omega\lambda}\, a^{\pi\rho}\right],$$

$$\overset{(1)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} = \frac{2E}{1+\nu}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\,(b^{\omega\pi}\, a^{\lambda\rho} + a^{\omega\pi}\, b^{\lambda\rho}) + (a^{\omega\lambda}\, b^{\pi\rho} + b^{\omega\lambda}\, a^{\pi\rho})\right],$$

$$\overset{(2)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\,(3\, c^{\omega\pi}\, a^{\lambda\rho} + 3\, a^{\omega\pi}\, c^{\lambda\rho} + 4\, b^{\omega\pi}\, b^{\lambda\rho}) + (3\, a^{\omega\lambda}\, c^{\pi\rho} + \right.$$

$$\left. + 3\, c^{\omega\lambda}\, a^{\pi\rho} + 4\, b^{\omega\lambda}\, b^{\pi\rho})\right], \ldots\ldots\ldots$$

$$\overset{(n)}{E}{}^{\omega\pi\lambda\rho} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\,(\overset{(0)}{g}{}^{\omega\pi}\,\overset{(n)}{g}{}^{\lambda\rho} + \overset{(1)}{g}{}^{\omega\pi}\,\overset{(n-1)}{g}{}^{\lambda\rho} + \ldots + \overset{(n)}{g}{}^{\omega\pi}\,\overset{(0)}{g}{}^{\lambda\rho}) + \right.$$

$$\left. + (\overset{(0)}{g}{}^{\omega\lambda}\,\overset{(n)}{g}{}^{\pi\rho} + \overset{(1)}{g}{}^{\omega\lambda}\,\overset{(n-1)}{g}{}^{\pi\rho} + \ldots + \overset{(n)}{g}{}^{\omega\lambda}\,\overset{(0)}{g}{}^{\pi\rho})\right],$$

$$\overset{(0)}{E}{}^{33\lambda\rho} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\, a^{\lambda\rho}, \quad \overset{(1)}{E}{}^{33\lambda\rho} = \frac{2E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\, b^{\lambda\rho},$$

$$\overset{(2)}{E}{}^{33\lambda\rho} = \frac{3E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\, c^{\lambda\rho}, \ldots \overset{(n)}{E}{}^{33\lambda\rho} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\,\overset{(n)}{g}{}^{\lambda\rho},$$

$$\overset{(0)}{F}{}_{\omega 3\lambda 3} = \frac{1+\nu}{E}\, a_{\omega\lambda}, \quad \overset{(1)}{F}{}_{\omega 3\lambda 3} = -\frac{2(1+\nu)}{E}\, b_{\omega\lambda},$$

$$\overset{(2)}{F}{}_{\omega 3\lambda 3} = \frac{1+\nu}{E}\, c_{\omega\lambda}, \ldots \overset{(n)}{F}{}_{\omega 3\lambda 3} = 0\ ((n) \geqslant 3).$$

Pentru cazul plăcilor plane, componentele E^{iklm} şi F_{ikrs} sînt independente de z, adică

$$E^{ikrs} = \overset{(0)}{E}{}^{ikrs}, \quad F_{iklm} = \overset{(0)}{F}_{iklm}. \tag{47}$$

5. EXPRESIA COMPONENTELOR TENSORULUI DEFORMAŢIE

Notînd prin V_i componentele covariante ale vectorului deplasare a punctelor mediului tridimensional al învelitorii, avem în cazul micilor deplasări următoarea relaţie între componentele tensorului deformaţie şi componentele vectorului deplasare :

$$e_{ik} = \frac{1}{2}(V_{i\,||\,k} + V_{k\,||\,i}) \tag{48}$$

sau, sub formă dezvoltată,

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(V_{\alpha\,||\,\beta} + V_{\beta\,||\,\alpha}), \tag{49 a}$$

$$e_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(V_{\alpha\,||\,3} + V_{3\,||\,\alpha}), \tag{49 b}$$

$$e_{33} = V_{3\,||\,3} = V_{3,3}. \tag{49 c}$$

Pe baza relaţiilor (49.b), (23) şi (24) şi respectiv a relaţiilor (49 c) şi (42), obţinem (vezi, de exemplu, [10])

$$V_{\alpha,3} = 4F_{\alpha 3\lambda 3}\,\tau^{\lambda 3} - V_{3,\alpha} - 2\,V_{\omega}\,[b^{\omega}_{\alpha} + z\,c^{\omega}_{\alpha} + z^2\,b^{\gamma}_{\alpha}\,c^{\omega}_{\gamma} + \ldots + \tag{50}$$

$$+ z^n\,(\overset{(n)}{g}{}^{\omega\lambda} b_{\alpha\lambda} - \overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\lambda}\,c_{\alpha\lambda}) + \ldots],$$

$$V_{3,3} = \frac{1}{E^{3333}}(\tau^{33} - E^{33\sigma\rho}\,e_{\sigma\rho}), \tag{51}$$

de unde se determină componentele vectorului deplasare $V_i\ (x^{\alpha}, x^3)$. Astfel, considerînd componentele vectorului $\bar{V}$ dezvoltate în serie de puteri

$$V_{\alpha} = \overset{(0)}{V}_{\alpha} + z\,\overset{(1)}{V}_{\alpha} + z^2\,\overset{(2)}{V}_{\alpha} + \ldots + z^n\,\overset{(n)}{V}_{\alpha} + \ldots \tag{52}$$

$$V_3 = \overset{(0)}{V}_3 + z\,\overset{(1)}{V}_3 + z^2\,\overset{(2)}{V}_3 + \ldots + z^n\,\overset{(n)}{V}_3 + \ldots$$

şi ţinînd seama în ecuaţiile (50), (51) şi de expresiile (45 *a*) şi (45 *b*), se obţine

$$\overset{(1)}{V}_\alpha = 4\overset{(0)}{F}_{\alpha 3 \rho 3}\left(\frac{1}{m}\right)^{(0)}(m\ \tau^{\rho 3}) - \overset{(0)}{V}_{3,\alpha} - 2\overset{(0)}{V}_\omega b^\omega_\alpha,$$

$$2\overset{(2)}{V}_\alpha = 4\left[\overset{(0)}{F}_{\alpha 3 \rho 3}\left(\frac{1}{m}\right)^{(1)} + \overset{(1)}{F}_{\alpha 3 \rho 3}\left(\frac{1}{m}\right)^{(0)}\right](m\tau^{\rho 3}) + 4\overset{(0)}{F}_{\alpha 3 \rho 3}\left(\frac{1}{m}\right)^{(0)}(m\ \overset{(1)}{\tau}{}^{\rho 3}) -$$

$$- \overset{(1)}{V}_{3,\alpha} - 2\overset{(1)}{V}_\omega b^\omega_\alpha - 2\overset{(0)}{V}_\omega c^\omega_\alpha, \ldots \tag{53}$$

$$n\overset{(n)}{V}_\alpha = 4\left[\overset{(n-1)}{F}_{\alpha 3 \rho 3}\left(\frac{1}{m}\right)^{(0)} + \overset{(n-2)}{F}_{\alpha 3 \rho 3}\left(\frac{1}{m}\right)^{(1)} + \ldots + \overset{(0)}{F}_{\alpha 3 \rho 3}\left(\frac{1}{m}\right)^{(n-1)}\right](m\ \tau^{\rho 3}) +$$

$$4\left[\overset{(n-2)}{F}_{\alpha 3 \rho 3}\left(\frac{1}{m}\right)^{(0)} + \overset{(n-3)}{F}_{\alpha 3 \rho 3}\left(\frac{1}{m}\right)^{(1)} + \cdots + \overset{(0)}{F}_{\alpha 3 \rho 3}\left(\frac{1}{m}\right)^{(n-2)}\right](\overset{(1)}{m}\tau^{\rho 3}) +$$

$$+ \cdots + 4\overset{(0)}{F}_{\alpha 3 \rho 3}\left(\frac{1}{m}\right)^{(0)}(\overset{(n-1)}{m}\ \tau^{\rho 3}) - \overset{(n-1)}{V}_{3,\alpha} -$$

$$- 2\overset{(0)}{V}_\omega (\overset{(n-1)}{g^{\omega\lambda}}\ b_{\alpha\lambda} - \overset{(n-2)}{g^{\omega\lambda}}\ c_{\alpha\lambda}) - 2\overset{(1)}{V}_\omega (\overset{(n-2)}{g^{\omega\lambda}}\ b_{\alpha\lambda} - \overset{(n-3)}{g^{\omega\lambda}} c_{\alpha\lambda}) - \cdots - 2\overset{(n-1)}{V}_\omega b^\omega_\alpha$$

$$\overset{(1)}{V}_3 = \frac{1}{E^{3333}}\left[\left(\frac{1}{m_x}\right)^{(0)}(\overset{(0)}{m_x}\ \tau^{33}) - \overset{(0)}{E}{}^{33\alpha\beta}\ \overset{(0)}{e}_{\alpha\beta}\right], \ldots$$

$$n\overset{(n)}{V}_3 = \frac{1}{E^{3333}}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{(n-1)}(\overset{(0)}{m}\ \tau^{33}) + \left(\frac{1}{m}\right)^{(n-2)}(\overset{(1)}{m}\tau^{33}) + \ldots + \left(\frac{1}{m}\right)^{(0)}(\overset{(n-1)}{m}\ \tau^{33}) -\right.$$

$$\left. - \overset{(0)}{E}{}^{33\alpha\beta}\ \overset{(n-1)}{e}_{\alpha\beta} - \overset{(1)}{E}{}^{33\alpha\beta}\ \overset{(n-2)}{e}_{\alpha\beta} \ldots - \overset{(n-1)}{E}{}^{33\alpha\beta}\ \overset{(0)}{e}_{\alpha\beta}\right],$$

unde prin $\overset{(i)}{e}_{\alpha\beta}$ s-au notat componentele dezvoltării după z a lui $e_{\alpha\beta}$:

$$e_{\alpha\beta} = \overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} + z\ \overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} + z^2\ \overset{(2)}{e}_{\alpha\beta} + \ldots + z^n\ \overset{(n)}{e}_{\alpha\beta} + \ldots \tag{54}$$

În baza relaţiilor (49 *a*) şi (22), componentele $\overset{(i)}{e}_{\alpha\beta}$ sînt date de

$$\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\overset{(0)}{V}_{\beta|\alpha} + \overset{(0)}{V}_{\alpha|\beta} - 2b_{\alpha\beta}\ \overset{(0)}{V}_3),$$

$$\overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\overset{(1)}{V}_{\alpha|\beta} + \overset{(1)}{V}_{\alpha|\beta} - 2\overset{(1)}{V}_3 b_{\alpha\beta} + 2\overset{(0)}{V}_3 c_{\alpha\beta} + 2\overset{(0)}{V}_\omega b^\omega_{\alpha|\beta}), \tag{55}$$

$$\overset{(2)}{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\overset{(2)}{V}_{\alpha\,|\,\beta} + \overset{(2)}{V}_{\beta\,|\,\alpha} - 2\overset{(2)}{V}_3 b_{\alpha\beta} + 2\overset{(1)}{V}_3 c_{\alpha\beta} + 2\overset{(1)}{V}_\omega b^\omega_{\alpha\,|\,\beta} +$$

$$+ 2\overset{(0)}{V}_\omega b^\omega_\delta b^\delta_{\alpha|\beta}), \ldots$$

$$\overset{(n)}{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\{\overset{(n)}{V}_{\alpha\,|\,\beta} + \overset{(n)}{V}_{\beta\,|\,\alpha} - 2\overset{(n)}{V}_3 b_{\alpha\beta} + 2\overset{(n-1)}{V}_3 c_{\alpha\beta} + 2\overset{(n-1)}{V}_\omega b^\omega_{\alpha\,|\,\beta} +$$

$$+ 2\overset{(n-2)}{V}_\omega b^\omega_\delta b^\delta_{\alpha\,|\,\beta} + \ldots - 2\overset{(1)}{V}_\omega [\overset{(n-1)}{g^{\omega\pi}}\overset{(0)}{\Gamma}_{\alpha\beta,\,\pi} - \overset{(n-2)}{g^{\alpha\pi}}(b_{\pi\beta\,|\,\alpha} + \tag{55}$$

$$+ 2\overset{(0)}{\Gamma}^\tau_{\alpha\beta} b_{\tau\pi}) + \overset{(n-3)}{g^{\omega\pi}}(b_{\rho\pi} b^\rho_{\alpha\,|\,\beta} + \overset{(0)}{\Gamma}^\rho_{\alpha\beta} c_{\rho\pi})] - 2\overset{(0)}{V}_\omega [\overset{(n)}{g^{\omega\pi}}\overset{(0)}{\Gamma}_{\alpha\beta,\,\pi} -$$

$$- \overset{(n-1)}{g^{\omega\pi}}(b_{\beta\pi\,|\,\alpha} + 2\overset{(0)}{\Gamma}^\tau_{\alpha\beta} b_{\tau\pi}) + \overset{(n-2)}{g^{\omega\pi}}(b_{\rho\pi} b^\rho_{\alpha\,\beta} + \overset{(0)}{\Gamma}^\rho_{\alpha\beta} c_{\rho\pi})]\}, \ldots$$

Pornind de la relaţia (43) şi ţinînd seama şi de (54), ecuaţiile tensiuni-deformaţii sînt date de

$$\tau^{\omega\pi} = \overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} + z(\overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} + \overset{(1)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta}) + \ldots + z^n(\overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(n)}{e}_{\alpha\beta} +$$

$$+ \overset{(1)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(n-1)}{e}_{\alpha\beta} + \ldots + \overset{(n)}{E}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta}) + \frac{1}{E^{3333}}\left\{\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}\left(\frac{1}{m}\right)^{(0)}(m\,\tau^{33}) + \right.$$

$$+ z\left[\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}\left(\frac{1}{m_x}\right)^{(1)}(m\,\tau^{33}) + \overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}\left(\frac{1}{m_x}\right)^{(0)}(m\,\tau^{33}) + \overset{(1)}{E}{}^{\omega\pi 33}\left(\frac{1}{m}\right)^{(0)}(m\,\tau^{33})\right] + \ldots +$$

$$+ \ldots + z^n\left\{\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}\left[\left(\frac{1}{m}\right)^{(n)}(m\,\tau^{33}) + \left(\frac{1}{m}\right)^{(n-1)}(m\,\tau^{33}) + \ldots + \right.\right. \tag{56}$$

$$\left.\left. + \left(\frac{1}{m}\right)^{(0)}(m\,\tau^{33})\right] + \ldots + \overset{(n)}{E}{}^{\omega\pi 33}\left(\frac{1}{m}\right)^{(0)}(m\,\tau^{33})\right\} + \ldots, \text{ unde}$$

$$\overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta} = \overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi\alpha\beta} - \frac{\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(0)}{E}{}^{33\alpha\beta}}{E^{3333}},\ \overset{(1)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta} = \overset{(1)}{E}{}^{\omega\pi\alpha\beta} -$$

$$- \frac{\overset{(1)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(0)}{E}{}^{33\alpha\beta} + \overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(1)}{E}{}^{33\alpha\beta}}{E^{3333}}, \ldots, \overset{(n)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta} = \overset{(n)}{E}{}^{\omega\pi\alpha\beta} -$$

$$- \frac{\overset{(n)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(0)}{E}{}^{33\alpha\beta} + \overset{(n-1)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(1)}{E}{}^{33\alpha\beta} + \ldots \overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(n)}{E}{}^{33\alpha\beta}}{E^{3333}}, \ldots$$

Ţinînd seama de relaţiile (56) şi (45), în (31) se obţine legătura dintre momentele de ordin n şi funcţiile $\overset{(0)}{V}_\alpha$, $\overset{(0)}{V}_3$, $\overset{(2)}{\varphi}{}^\alpha$, $\overset{(2)}{\psi}, \ldots$ $\overset{(n)}{\varphi}{}^\alpha$, $\overset{(n)}{\psi}, \ldots$ În cazul

aproximaţiei de ordinul N a dezvoltărilor (45) ($N = 2,3,\ldots$), înlocuind expresia momentelor de ordin n ($n = 0,1,\ldots (N-1)$) în ecuaţiile de echilibru (32), se obţine un sistem de $3N$ ecuaţii de derivate parţiale pentru cele $3N$ necunoscute ale problemei $\overset{(0)}{V}_\alpha$, $\overset{(0)}{V}_3$, $\overset{(2)}{\varphi}{}^\alpha$, $\overset{(2)}{\psi}$ ... $\overset{(N)}{\varphi}{}^\alpha$, $\overset{(N)}{\psi}$.

Calculele necesare în vederea obţinerii sistemului de ecuaţii sub această formă generală sînt destul de laborioase, aşa încît nu vom proceda la scrierea lui.

După cum se vede, toate dezvoltările anterioare au fost făcute neaducînd nici un fel de restricţie în ceea ce priveşte grosimea învelitorii. Aceasta dă posibilitatea determinării stării de tensiune a învelitorilor anizotrope groase.

Se poate arăta însă că numărul necunoscutelor şi respectiv al ecuaţiilor poate fi redus în anumite cazuri, exprimînd funcţiile $\overset{(2)}{\psi},\ldots\overset{(n+1)}{\psi},\ldots$ cu ajutorul celorlalte funcţii, $\overset{(0)}{V}_\alpha$, $\overset{(0)}{V}_3$, $\overset{(2)}{\varphi}{}^\alpha,\ldots\overset{(n)}{\varphi}{}^\alpha,\ldots$ Într-adevăr, vom porni în acest scop de la ecuaţia de echilibru

$$(m_x\,\tau^{\alpha 3})_{|\alpha} + (m_x\,\tau^{33})_{,3} + m_x\,\tau^{\alpha\varphi}\,(b_{\alpha\varphi} - z\,c_{\alpha\varphi}) = 0. \tag{57}$$

Ţinînd seama de dezvoltarea (45 b) şi de faptul că $m_x\,\tau^{\lambda\pi}$ şi $m_x\tau^{\omega 3}$ pot fi exprimate sub forma

$$m\,\tau^{\lambda\pi} = \overset{(0)}{(m\,\tau^{\lambda\pi})} + z\overset{(1)}{(m\,\tau^{\lambda\pi})} + \ldots + z^n\overset{(n)}{(m\,\tau^{\lambda\pi})} + \ldots \tag{58}$$

$$m\,\tau^{\alpha 3} = \overset{(0)}{(m\,\tau^{\alpha 3})} + z\overset{(1)}{(m\,\tau^{\alpha 3})} + \ldots + z^n\overset{(n)}{(m\,\tau^{\alpha 3})} + \ldots,$$

din (58) şi (57), prin identificarea coeficienţilor aceloraşi puteri a lui z, se obţine succesiv

$$-\frac{p_{(0)}}{h} + \frac{h^2}{4}\overset{(3)}{\psi} + \ldots + \frac{h^{2n}}{z^{2n}}\overset{(2n+1)}{\psi} + \ldots = \overset{(0)}{(m\,\tau^{\alpha 3})}_{|\alpha} + \overset{(0)}{(m\,\tau^{\alpha\varphi})}\,b_{\alpha\varphi}.$$

$$2\overset{(2)}{\psi} = -\overset{(1)}{(m\,\tau^{\alpha 3})}_{|\alpha} - \overset{(1)}{(m\,\tau^{\alpha\varphi})}\,b_{\alpha\varphi} + \overset{(0)}{(m\,\tau^{\alpha\varphi})}\,c_{\alpha\varphi}, \tag{59}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2n\overset{(2n)}{\psi} = -\overset{(2n-1)}{(m\,\tau^{\alpha 3})}_{|\alpha} - \overset{(2n-1)}{(m\,\tau^{\alpha\varphi})}\,b_{\alpha\varphi} + \overset{(2n-2)}{(m\,\tau^{\alpha\varphi})}\,c_{\alpha\varphi}, \tag{60}$$

$$(2n+1)\overset{(2n+1)}{\psi} = -\overset{(2n)}{(m\,\tau^{\alpha 3})}_{|\alpha} - \overset{(2n)}{(m\,\tau^{\alpha\varphi})}\,b_{\alpha\varphi} + \overset{(2n-1)}{(m\,\tau^{\alpha\varphi})}\,c_{\alpha\varphi},\ldots$$

Se poate observa că relaţia (59) combinată cu (60) coincide cu a treia ecuaţie de echilibru a sistemului (32), în care se ţine seama de relaţiile (31), (45 b), (58). Relaţiile (60) constituie un sistem de ecuaţii în necunoscutele $\overset{(2)}{\psi}, \overset{(3)}{\psi},\ldots\overset{(2n+1)}{\psi},\ldots$

Deoarece expresiile $\overset{(j)}{(m\,\tau^{\lambda\pi})}$ conţin în cazul general pe $\overset{(j)}{(m\,\tau^{33})}$ sub formă diferenţială (vezi relaţiile (56), (55), (53)), rezolvarea sistemului de ecuaţii (60) devine laborioasă.

În anumite cazuri particulare (cazul plăcii plane) sau în cazul introducerii anumitor ipoteze suplimentare, sistemul de ecuații (60) devine un sistem de ecuații algebric.

Menționăm că, datorită modului de determinare a lui $(\overset{(j)}{m}\ \tau^{33})$, ecuațiile obținute prin multiplicarea succesivă a ecuației (57) cu z, $z^2,\ldots,$ $z^n,\ldots$ și integrarea ei în raport cu z pe intervalul $\left[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right]$ sînt identic satisfăcute.

Aceste ecuații au fost identificate în sistemul (32) printr-un asterisc.

Considerînd cazul cînd sistemul (60) devine un sistem de ecuații algebric, în cazul aproximației de ordinul N a dezvoltării (45. a) ($N=2,3,\ldots$) pe baza sistemului (60), funcțiile $\overset{(2)}{\psi}(x^\alpha),\ldots\overset{(N+1)}{\psi}(x^\alpha)$ pot fi determinate prin intermediul funcțiilor $\overset{(0)}{V_\delta}$, $\overset{(0)}{V_3}$, $\overset{(2)}{\varphi^\rho}(x^\alpha),\ldots,\overset{(N)}{\varphi^\rho}(x^\alpha)$, funcții care constituie necunoscutele de bază ale problemei. În acest caz dispunem de un sistem de $(2N+1)$ ecuații cu derivate parțiale în cele $(2N+1)$ necunoscute indicate mai sus.

6. CAZUL PLĂCII PLANE SUBȚIRI

Vom ilustra dezvoltările făcute anterior pe cazul plăcii plane subțiri.

Considerarea cazului plan implică relațiile (25), (26) și (47).

În cele ce urmează ne vom limita la aproximația de ordinul doi a dezvoltării (45 a). În acest caz vom avea

$$\tau^{\rho 3}=\frac{\overset{(1)}{s^\rho}}{h}+\overset{(0)}{s^\rho}\frac{z}{h}+\overset{(2)}{\varphi^\rho}\left(z^2-\frac{h^2}{4}\right). \tag{61}$$

Din sistemul (60) particularizat pentru acest caz, obținem

$$\overset{(2)}{\psi}=-\frac{1}{2h}\,\overset{\circ}{s}_{(0)/\rho},\qquad \overset{(3)}{\psi}=-\frac{1}{3}\,\overset{(2)}{\varphi}{}^\rho_{/\rho}\ , \tag{62}$$

de unde τ^{33} poate fi exprimat sub forma

$$\tau^{33}=\overset{(0)}{\tau}{}^{33}+z\,\overset{(1)}{\tau}{}^{33}+z^2\,\overset{(2)}{\tau}{}^{33}+z^3\,\overset{(3)}{\tau}{}^{33}, \tag{63}$$

unde

$$\overset{(0)}{\tau}{}^{33}=\frac{p_{(1)}}{h}+\frac{h}{8}\,\overset{\circ}{s}_{(0)/\rho}\ ,\qquad \overset{(1)}{\tau}{}^{33}=\frac{p_{(0)}}{h}+\frac{h^2}{12}\,\overset{(2)}{\varphi}{}^\rho_{/\rho}\ , \tag{64}$$

$$\overset{(2)}{\tau}{}^{33}=-\frac{1}{2h}\,\overset{\circ}{s}_{(0)/\rho}\ ,\qquad \overset{(3)}{\tau}{}^{33}=-\frac{1}{3}\,\overset{(2)}{\varphi}{}^\rho_{/\rho}\ .$$

Să facem următoarea observaţie relativ la expresia (63). În acest scop să pornim de la ecuaţia (57), care pentru cazul plan devine

$$\tau^{3\alpha}_{/\alpha} + \tau^{33}_{,3} = 0. \tag{65}$$

Integrînd această ecuaţie în raport cu z pe segmentul $[O,z]$ şi punînd în mod corespunzător condiţiile pe suprafeţele de mărginire ale învelitorii, se obţine pentru τ^{33} expresia

$$\tau^{33} = \frac{p_{(1)}}{h} - s^{\alpha}_{(1)/\alpha}\frac{z}{h} - \frac{1}{2h}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right)s^{\alpha}_{(0)/\alpha} - \overset{(2)}{\varphi}{}^{\alpha}_{/\alpha}\, z\left(\frac{z^2}{3} - \frac{h^2}{4}\right). \tag{66}$$

Această expresie este identică cu cea dată prin relaţia (63), deşi diferă aparent de aceasta.

Într-adevăr, se poate vedea uşor că diferenţa D dintre cele două relaţii (63) şi (66) este dată de $D = z\left(\frac{p_{(0)}}{h} + \frac{s^{\alpha}_{(1)/\alpha}}{h} - \frac{h^2}{6}\overset{(2)}{\varphi}{}^{\alpha}_{/\alpha}\right)$, expresie care este nulă în virtutea ecuaţiei a treia din echilibru $N^{\alpha}_{(0)/\alpha} + p_{(0)} = 0$ şi a relaţiei (61).

Pornind de la relaţiile (53), (55), obţinem următoarele expresii pentru componentele vectorului deplasare şi ale tensorului deformaţie:

$$\begin{aligned}
&\overset{(1)}{V}_{\omega} = \frac{4}{h}\, s^{\lambda}_{(1)}\overset{(0)}{F}_{\omega 3\lambda 3} - h^2\overset{(0)}{F}_{\omega 3\lambda 3}\,\overset{(2)}{\varphi}{}^{\lambda} - \overset{(0)}{V}_{3,\omega},\\
&\overset{(2)}{V}_{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{h}\, s^{\lambda}_{(0)}F_{\omega 3\lambda 3} - \overset{(1)}{V}_{3,\omega}\right),\quad \overset{(3)}{V}_{\omega} = \frac{1}{3}(4\overset{(0)}{F}_{\omega 3\lambda 3}\,\overset{(2)}{\varphi}{}^{\lambda} - \overset{(2)}{V}_{3,\omega}),\\
&\overset{(4)}{V}_{\omega} = -\frac{1}{4}\overset{(3)}{V}_{3,\omega},\quad \overset{(1)}{V}_{3} = \frac{1}{E^{3333}}(\overset{(0)}{\tau}{}^{33} - \overset{(0)}{E}{}^{33\alpha\beta}\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta}),\\
&\overset{(2)}{V}_{3} = \frac{1}{2E^{3333}}(\overset{(1)}{\tau}{}^{33} - \overset{(0)}{E}{}^{33\alpha\beta}\overset{(1)}{e}_{\alpha\beta}),\quad \overset{(3)}{V}_{3} = \frac{1}{3E^{3333}}(\overset{(2)}{\tau}{}^{33} - \overset{(0)}{E}{}^{33\alpha\beta}\overset{(2)}{e}_{\alpha\beta}),\\
&\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\overset{(0)}{V}_{\alpha/\beta} + \overset{(0)}{V}_{\beta/\alpha}),
\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} = -\overset{(0)}{V}_{3/\alpha\beta} + \frac{2}{h}(\overset{(0)}{F}_{\alpha 3\lambda 3}\, s^{\lambda}_{(1)/\beta} + \overset{(0)}{F}_{\beta 3\lambda 3}\, s^{\lambda}_{(1)/\alpha}) -\\
&\quad - \frac{h^2}{2}(\overset{(0)}{F}_{\alpha 3\lambda 3}\,\overset{(2)}{\varphi}{}^{\lambda}_{/\beta} + \overset{(0)}{F}_{\beta 3\lambda 3}\,\overset{(2)}{\varphi}{}^{\lambda}_{/\alpha}),\quad \overset{(2)}{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{h}(\overset{(0)}{F}_{\alpha 3\lambda 3}\, s^{\lambda}_{(0)/\beta} +\\
&\quad + \overset{(0)}{F}_{\beta 3\lambda 3}\, s^{\lambda}_{(0)/\alpha}) - \frac{1}{2}\overset{(1)}{V}_{3/\alpha\beta},\\
&\overset{(3)}{e}_{\alpha\beta} = \frac{2}{3}(\overset{(0)}{F}_{\alpha 3\lambda 3}\,\overset{(2)}{\varphi}{}^{\lambda}_{/\beta} + \overset{(0)}{F}_{\beta 3\lambda 3}\,\overset{(2)}{\varphi}{}^{\lambda}_{/\alpha}) - \frac{1}{3}\overset{(2)}{V}_{3/\alpha\beta},\\
&\overset{(4)}{e}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}\overset{(3)}{V}_{3/\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Pe baza ecuațiilor tensiunii deformației date de

$$\tau^{\omega\pi} = \overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\, \overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} + z\, \overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\, \overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} + z\, \overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\, \overset{(2)}{e}_{\alpha\beta} +$$

$$+ z^3\, \overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\, \overset{(3)}{e}_{\alpha\beta} + z^4\, \overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\, \overset{(4)}{e}_{\alpha\beta} + \tag{68}$$

$$+ \frac{\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}}{E^{3333}} (\overset{(0)}{\tau}{}^{33} + z\, \overset{(1)}{\tau}{}^{33} + z^2\, \overset{(2)}{\tau}{}^{33} + z^3\, \overset{(3)}{\tau}{}^{33}),$$

se obțin următoarele ecuații fizice :

$$L^{\omega\pi}_{(0)} = \overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta} \left(h\, \overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} + \frac{h^3}{12}\, \overset{(2)}{e}_{\alpha\beta} + \frac{h^5}{80}\, \overset{(4)}{e}_{\alpha\beta} \right) +$$

$$+ \frac{\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}}{E^{3333}} \left(h\, \overset{(0)}{\tau}{}^{33} + \frac{h^3}{12}\, \overset{(2)}{\tau}{}^{33} \right),$$

$$L^{\omega\pi}_{(1)} = \overset{(0)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta} \left(\frac{h^3}{12}\, \overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} + \frac{h^5}{80}\, \overset{(3)}{e}_{\alpha\beta} \right) + \frac{\overset{(0)}{E}{}^{\omega\pi 33}}{E^{3333}} \left(\frac{h^3}{12}\, \overset{(1)}{\tau}{}^{33} + \frac{h^5}{80}\, \overset{(3)}{\tau}{}^{33} \right), \tag{69}$$

$$N^{\circ}_{(0)} = s^{\circ}_{(1)} - \frac{h^3}{6}\, \overset{(2)}{\varphi}{}^{\circ} .$$

Prin satisfacerea ecuațiilor de echilibru

$$L^{\omega\circ}_{(0)/\omega} + s^{\circ}_{(0)} = 0, \qquad N^{\omega}_{(0)/\omega} + p_{(0)} = 0, \tag{70}$$

$$L^{\omega\circ}_{(1)/\omega} - N^{\circ}_{(0)} + s^{\circ}_{(1)} = 0,$$

se obține un sistem de cinci ecuații cu derivate parțiale în funcțiile necunoscute $\overset{(0)}{V}{}_{\delta}$, $\overset{(0)}{V}{}_{3}$, $\overset{(2)}{\varphi}{}^{\delta}$.

Primită la redacție la 9 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. W. T. Koiter, *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic schells.* Proc. of I.U.T.A.M. Symposium on the theory of Thin Elastic Shells. North-Holland Publ. Co. 1959.
2. Н.А. Килчевски, *Обобщение современной теории оболочек.* Прикладная матем. и механика, **II**, *4* (1939).
3. Н.А. Килчевски, *Основни ривнианниа ривноваги пружник оболонок и геиаки методиих интегриваннаиа.* Сбырник прат ин-ту математики АН УССР, *4,5*, *6* (1940).
4. А.И. Лурие, *К теории толстых плит.* Прикладная матем. и механика, **VI**, **V**, *2*, *3* (1942).
5. В.В. Новожилов, П.М. Финкелштеин, *О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек.* Прикладная матем. и механика, **VII**, 51 (1943).

6. A. E. Green, W. Zerna, *The equilibrium of thin elastic shells Quart.* Journal Mech. Appl. Math., **V**, III (1950).
7. E. Reissner, *On bending of elastic plates.* Quart. Appl. Mathematics **5**, *1* (1947).
8. — *Stress Strain Relations in the Theory of thin elastic Shells,* Journ. Math. Phys **XXXI V**, (1952).
9. P. M. Naghdi, *On the theory of thin elastic Shells.* Quart. Appl. Math., **XIV**, *4* (1957).
10. D. Rüdiger, *Zur Theorie elastischer Schalen.* Ingenieur Archiv. *28*, Festschrift Richard Grammel (1959).
11. Х.М. Муштари, И.Г. Терегулов, *К теории оболочек средней толщины.* Доклады Акад. наук СССР, **128**, *6* (1959).
12. Х.М. Муштари, И.Г. Терегулов, *Теория пологих ортотропных оболочек средней толщины.* Известия Акад. наук СССР, Механика и машиностроение, *6* (1959).
13. А.Л. Голденвейзер, *О теории изгиба пластинок Рейсснера.* Изв. АН СССР, ОТН, *4* (1958).
14. А.Л. Голденвейзер, *Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости.* Приклад. матем. и механ. **XXVI**, *4* (1962).
15. А.Л. Голденвейзер, *Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теорий упругости.* Приклад. матем. и механ. **XXVII**, *4* (1963).
16. W. Zerna, *Mathematisch strenge Theorie elastischer Schalen.* Zeitschrift für angewandte Math. und Mech., **42**, *7/8* (1962).
17. Н.А. Килчевски, *Основы аналитической механики оболочек*, Киев, Изд-во АН УССР (1963).
18. С.А. Амбарцумян, *К расчету двухслойных ортотропных оболочек.* Известия АН СССР, ОТН, *7* (1957).
19. С.А. Амбарцумян, *К теории изгиба анизотропных пластинок.* Известия Акад. наук СССР, ОТН, 5 (1958).
20. С.А. Амбарцумян, Д.В. Пестмалджиан, *К теории ортотропных оболочек и пластинок.* Известия Академии наук Армянской ССР, **XII**, *1* (1959).
21. С.А. Амбарцумян, *К общей теории анизотропных оболочек.* Прикладная математика и механ., **XII**, *2* (1958).
22. С.А. Амбарцумян, *К теории изгиба анизотропных и пологих оболочек.* Прикл. матем. и механика. **XXIV** *2* (1960.
23. С.А. Амбарцумян, *Теория анизотропных оболочек.* Физматгиз, Москва, 1961.
24. S.A. Ambartumian, *Contributions to the theory of anizotropic layered shells,* Applied Mechanics Reviews, **15** *4* (1962).
25. A. E. Green, W. Zerna, *Theoretical Elasticity.* Oxford Univ. Press, 1953.

ANGRENAJ CILINDRO-CONIC CU CONTACT LINIAR [1]

de I. SZÉKELY [2]

531.1 : 621.83

În lucrare se studiază un angrenaj cilindro-conic format dintr-o roată dințată conico-evolventică și o roată dințată cilindrică cu dantură neevolventică. Flancul dintelui roții dințate conico-evolventice este o suprafață elicoidalo-evolventică, iar a flancului dintelui roții cilindrice este o înfășurătoare a acestei suprafețe. Contactul dintre flancurile dinților este liniar.

Cu altă ocazie [1] s-a studiat un angrenaj cilindro-conic format dintr-o roată dințată conico-evolventică și o roată dințată cilindrică obișnuită (fixată pe arbori cu axe concurente) la care contactul dintre flancurile dinților era punctiform. De data aceasta se studiază un angrenaj similar, care diferă de cel amintit doar prin aceea că flancul dintelui roții dințate cilindrice nu este o suprafață cilindrico-evolventică, ci o înfășurătoare a suprafeței dintelui roții dințate conico-evolventice, fapt ce asigură un contact liniar.

Determinarea unei astfel de suprafețe înfășurătoare se va face analitic, ceea ce necesită efectuarea unei serii de transformări de coordonate. Cu scopul de a simplifica scrierea formulelor de transformare a coordonatelor este util să se folosească calculul matricial [2, 3].

Să presupunem că avem două sisteme de coordonate carteziene tridreptunghiulare $O\ x\ y\ w$ (sistem vechi) și $O_i\ x_i\ y_i\ w_i$ (sistem nou). Formulele de transformare a coordonatelor, după cum se știe, sînt

$$\left.\begin{aligned} x_i &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}w + a_{14}, \\ y_i &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}w + a_{24}, \\ w_i &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}w + a_{34}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

[1] Publicată în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **10**, *1* (1965) (în lb. germană).

[2] Institutul politehnic Cluj.

unde a_{14}, a_{24}, a_{34} sînt coordonatele noii origini O_i în vechiul sistem, iar a_{kl} (k, l=1, 2, 3) sînt cosinușii directori ai fiecărei axe dintr-un sistem față de axele din celălalt sistem. Astfel, de exemplu, a_{11}, a_{12}, a_{13} sînt cosinușii directori ai axei O_ix_i față de axele Ox, Oy și Ow sau a_{13}, a_{23}, a_{33} sînt cosinușii directori ai axei Ow față de axele O_ix_i, O_iy_i, $O_i\,w_i$.

Sistemul (1) se scrie sub formă matricială

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ w_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Cu scopul de a simplifica scrierea acestei ecuații matriciale se introduc coordonatele omogene

$$\left.\begin{aligned} x_i = \frac{x_i'}{t_i'};\quad y_i = \frac{y_i'}{t_i'};\quad w_i = \frac{w_i'}{t_i'}, \\ x = \frac{x'}{t'};\quad y = \frac{y'}{t'};\quad w = \frac{w'}{t'}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

unde $t_i' = t'$.

Ținînd seama de (3), relațiile (1) devin

$$\left.\begin{aligned} x_i' &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}w' + a_{14}t', \\ y_i' &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}w' + a_{24}t', \\ w_i' &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}w' + a_{34}t', \\ t_i' &= 0 \quad + 0 \quad + 0 \quad + t'. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Este evident că relațiile (4) coincid cu (1) dacă $t_i' = t' = 1$, ceea ce se și presupune în cele ce urmează. Făcînd această presupunere, ecuațiile (4) deci și (1) se pot scrie sub forma matricială

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ w_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Ecuația matricială (5) nu mai conține variabilele de omogenizare, deoarece $t_i' = t' = 1$. Această ecuație generalizează scrierea matricială a unei transformări liniare, în care lipsește translația de componente a_{14}, a_{24}, a_{34}.

Vectorii de poziție ai unui punct M (față de cele două sisteme de coordonate $O_ix_iy_iw_i$ și $Oxyw$), $\bar{r}_i$, respectiv $\bar{r}$, îi vom nota convențional

(folosind notarea vectorilor prin matrice coloană) cu matrice coloană cu patru linii.

$$\bar{\mathbf{r}}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ w_i \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Ţinînd seama de (6), ecuaţia matricială (5) se poate scrie sub forma compactă :

$$\bar{\mathbf{r}}_i = \Phi\, \bar{\mathbf{r}}, \tag{7}$$

unde

$$\Phi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

În această matrice, elementul a_{kl} ($k, l = 1, 2, 3$) reprezintă cosinusul director al axei sistemului nou, avînd numărul k faţă de axa sistemului vechi, cu numărul l. De exemplu, folosind aceste notaţii, avem $a_{23} = \cos(O_i y_i, Ow)$. Elementele a_{14}, a_{24} şi a_{34} sînt coordonatele originii sistemului nou de axe $O_i x_i y_i w_i$ în sistemul vechi de axe $Oxyw$. Ultima linie conţine totdeauna elementele 0, 0, 0, 1.

Revenim acum la rezolvarea problemei puse ţinînd seama de faptul că se cunosc : unghiul dintre axele roţilor δ, raportul de transmitere $i_{12} = \text{const.}$ şi ecuaţiile suprafeţei flancului dintelui roţii dinţate conico-evolventice, care este o suprafaţă elicoidalo-evolventică [5]. Ea se consideră cunoscută şi dată în sistemul de axe $Ox_2y_2w_2$ (fig. 1), în formă parametrică prin ecuaţia vectorială

$$\bar{\mathbf{r}}_2 = \bar{\mathbf{r}}_2(u, \theta), \tag{9}$$

sau prin ecuaţiile parametrice

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= R_{b_2} \sin\theta - u \sin\beta_b \cos\theta, \\ y_2 &= R_{b_2} \cos\theta + u \sin\beta_b \sin\theta, \\ w_2 &= R_{b_2}\, \theta \operatorname{ctg} \beta_b - u \cos\beta_b, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

unde

R_{b_2} este raza cilindrului de bază al roţii dinţate conico-evolventice,

β_b — unghiul de înclinare a elicei de pe cilindrul de bază,

u şi θ — parametrii suprafeţei elicoidalo-evolventice.

Pentru determinarea suprafeței dintelui roții dințate cilindrice ca înfășurătoare a suprafeței dintelui roții conico-evolventice, se aleg următoarele sisteme de axe de coordonate (fig. 1):

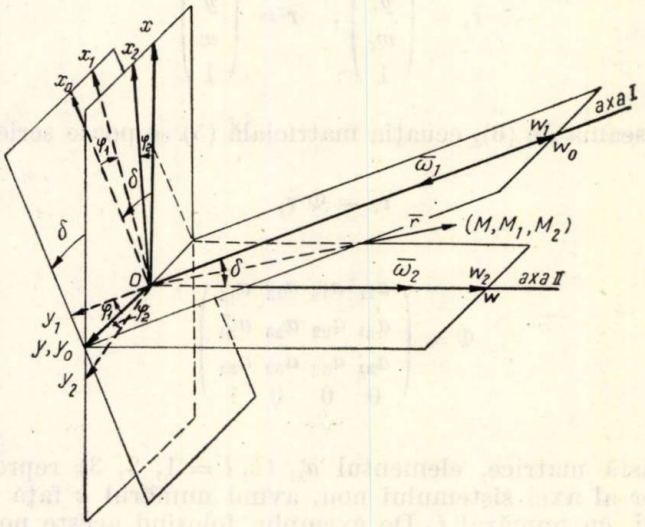


Fig. 1

$Ox_1y_1w_1$ — rigid legat de roata dințată cilindrică;
$Ox_2y_2w_2$ — rigid legat de roata dințată conico-evolventică;
$Oxyw$ — sistem fix de axe.

Originile celor trei sisteme de coordonate sînt toate situate în punctul O de intersecție a axelor celor doi arbori concurenți și care fac între ei unghiul δ.

Formulele de transformare ale sistemelor de coordonate se determină, în conformitate cu cele expuse mai sus, în felul următor:

Trecerea de la sistemul de axe $Ox_2y_2w_2$ (considerat vechi) la sistemul $Oxyw$ (considerat nou) se exprimă prin ecuația vectorială

$$\bar{r} = \Phi_2 \bar{r}_2, \tag{11}$$

unde

$\bar{r}$ este vectorul de poziție a punctului M în sistemul de axe $Oxyw$,
$\bar{r}_2$ — vectorul de poziție al aceluiași punct M în sistemul de axe $Ox_2y_2w_2$,
Φ_2 — o matrice pătratică de forma

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Elementele acestei matrice au semnificații identice cu elementele matricei (8).

Ținînd seama de (12) și de cele expuse mai sus, relația (11) se poate scrie sub forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ w \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ w_2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Din această ecuație se determină formulele de trecere din sistemul de axe $Ox_2y_2w_2$ în $Oxyw$ în felul următor :

$$\left.\begin{aligned} x &= x_2\cos\varphi_2 - y_2\sin\varphi_2 \\ y &= x_2\sin\varphi_2 + y_2\cos\varphi_2 \\ w &= w_2 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Trecerea de la sistemul de axe $Oxyw$ (considerat vechi) la sistemul de axe $Ox_0y_0w_0$ (considerat nou) se exprimă prin relația

$$\bar{r}_0 = S\bar{r}, \tag{15}$$

unde

$\bar{r}_0$ este vectorul de poziție al punctului M în sistemul de axe $Ox_0y_0w_0$,

S — matricea pătratică cu elementele obținute în mod similar ca și elementele matricei (8) :

$$S = \begin{pmatrix} \cos\delta & 0 & -\sin\delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\delta & 0 & \cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Trecerea de la sistemul de axe cartezian $Ox_0y_0w_0$ la $Ox_1y_1w_1$ se exprimă astfel :

$$\bar{r}_1 = \Phi_1\bar{r}_0, \tag{17}$$

unde

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Pentru obținerea formulelor de trecere din sistemul de axe $Oxyw$ în $Ox_1y_1w_1$, se înlocuiește (15) în (17). Astfel avem :

$$\bar{r}_1 = \Phi_1 s\bar{r}. \tag{19}$$

Înlocuind (11) în (19), se determină ecuaţia vectorială care permite trecerea din sistemul de axe $Ox_2y_2w_2$ în $Ox_1y_1w_1$:

$$\bar{r}_1 = \Phi_1 s \Phi_2 \bar{r}_2. \tag{20}$$

Ţinînd seama de (12), (16) şi (18), pe baza relaţiei (20) se determină formulele de transformare a coordonatelor căutate în felul următor :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_2(\cos\delta\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) - \\ &\quad - y_2(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\delta\cos\varphi_1\sin\varphi_2) - w_2\sin\delta\cos\varphi_1 \\ y_1 &= x_2(\cos\delta\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1) + \\ &\quad + y_2(-\cos\delta\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2) - w_2\sin\delta\sin\varphi_1 \\ w_1 &= x_2\sin\delta\cos\varphi_2 - y_2\sin\delta\sin\varphi_2 + w_2\cos\delta. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Pentru determinarea ecuaţiilor suprafeţei dintelui roţii dinţate cilindrice ca înfăşurătoare a suprafeţei dintelui roţii conico-evolventice, se va folosi legea fundamentală a angrenării, care pentru cazul angrenajelor spaţiale se poate enunţa în felul următor :

În punctul de contact M al suprafeţelor reciproc înfăşurătoare ale dinţilor roţilor dinţate, vectorul vitezei relative, $\bar{v}_{M_2M_1}$, trebuie să fie situat într-un plan tangent (în punctul M) la cele două suprafeţe reciproc înfăşurătoare pentru a evita întrepătrunderea sau îndepărtarea dinţilor. Cu alte cuvinte, în punctul de contact M, vectorul vitezei relative trebuie să fie perpendicular pe versorul normalei comune $\bar{n}$. Această condiţie se exprimă astfel :

$$\bar{n}\cdot\bar{v}_{M_2M_1} = 0, \tag{22}$$

ceea ce stabileşte o legătură între parametrii u şi θ ai suprafeţei (2). Deci ecuaţiile tuturor curbelor de pe suprafaţa dată sînt

$$\left.\begin{aligned} \bar{r}_2 &= \bar{r}_2(u, \theta), \\ \bar{n}\cdot\bar{v}_{M_2M_1} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Prima ecuaţie reprezintă suprafaţa dată (în cazul de faţă suprafaţa dintelui roţii conico-evolventice), iar a doua exprimă legea fundamentală a angrenării.

Proiectînd (15) pe cele trei axe de coordonate şi ţinînd seama de (1) şi (2), obţinem

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= R_{b_2}\sin\theta - u\sin\beta_b\cos\theta, \\ y_2 &= R_{b_2}\cos\theta + u\sin\beta_b\sin\theta, \\ w_2 &= R_{b_2}\,\theta\,\operatorname{ctg}\beta_b - u\cos\beta_b, \\ n_{x_2}v^{x_2}_{M_2M_1} &+ n_{y_2}v^{y_2}_{M_2M} + n_{w_2}v^{w_2}_{M_2M_1} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

unde

$v^{x_2}_{M_2M_1}$, $v^{y_2}_{M_2M_1}$, $v^{w_2}_{M_2M_1}$ sînt componentele vectorului vitezei relative,

n_{x_2}, n_{y_2}, n_{w_2} — componentele versorului normalei şi se determină de relaţiile

$$\left.\begin{aligned} n_{x_2} &= \frac{\partial y_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial w_2}{\partial \theta} - \frac{\partial y_2}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial w_2}{\partial u}, \\ n_{y_2} &= \frac{\partial w_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial w_2}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial u}, \\ n_{w_2} &= \frac{\partial x_2}{\partial u}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_2}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial u}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Derivînd parţial ecuaţiile (10), avem :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial u} &= -\sin\beta_b\cos\theta & \frac{\partial x_2}{\partial \theta} &= R_{b_2}\cos\theta + u\sin\beta_b\sin\theta, \\ \frac{\partial y_2}{\partial u} &= \sin\beta_b\sin\theta & \frac{\partial y_2}{\partial \theta} &= -R_{b_2}\sin\theta + u\sin\beta_b\cos\theta, \\ \frac{\partial w_2}{\partial u} &= -\cos\beta_b & \frac{\partial w_2}{\partial \theta} &= R_{b_2}\operatorname{ctg}\beta_b. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Luînd în considerare (26), relaţiile (25) devin

$$\left.\begin{aligned} n_{x_2} &= u\sin\beta_b\cos\beta_b\cos\theta, \\ n_{y_2} &= -u\sin\beta_b\cos\beta_b\sin\theta, \\ n_{w_2} &= -u\sin^2\beta_b. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Pentru determinarea vitezei relative $\bar{v}_{M_2M_1}$, se dă întregului sistem (fig. 1) o rotaţie cu viteza unghiulară $-\bar{\omega}_1$. În consecinţă, axa I se opreşte, iar axa II execută o mişcare de rotaţie de transport cu viteza unghiulară $-\bar{\omega}_1$ în jurul axei I şi o mişcare de rotaţie relativă cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_2$ în jurul axei II. Viteza unghiulară rezultantă este

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1. \tag{28}$$

Viteza liniară relativă se determină pe baza (fig. 1) de relaţia

$$\bar{v}_{M_2M_1} = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

sau, luînd în considerare formula (28), găsim

$$\bar{\mathbf{v}}_{M_2M_1} = \bar{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\boldsymbol{\omega}}_1 . \tag{29}$$

Proiectînd (29) pe cele trei axe ale sistemului de coordonate $Ox_2y_2w_2$, avem

$$\left.\begin{aligned} v^{x_2}_{M_2M_1} &= \omega_{2y_2} r_{w_2} - \omega_{2w_2} r_{y_2} + r_{y_2}\omega_{1w_2} - r_{w_2}\omega_{1y_2} \\ v^{y_2}_{M_2M_1} &= \omega_{2w_2} r_{x_2} - \omega_{2x_2} r_{w_2} + r_{w_2}\omega_{1x_2} - r_{x_2}\omega_{1w_2} \\ v^{w_2}_{M_2M_1} &= \omega_{2x_2} r_{y_2} - \omega_{2y_2} r_{x_2} + r_{x_2}\omega_{1y_2} - r_{y_2}\omega_{1x_2} \end{aligned}\right\} . \tag{30}$$

Din figura 1 rezultă

$$\left.\begin{aligned} \omega_{2x_2} &= 0 & \omega_{1x_2} &= -\omega_1 \sin\delta\cos\varphi_2 & r_{x_2} &= x_2 \\ \omega_{2y_2} &= 0 & \omega_{1y_2} &= \omega_1 \sin\delta\sin\varphi_2 & r_{y_2} &= y_2 \\ \omega_{2w_2} &= \omega_2 & \omega_{1w_2} &= -\omega_1\cos\delta & r_{w_2} &= w_2 \end{aligned}\right\} . \tag{31}$$

Înlocuind (31) în (30), obţinem

$$\left.\begin{aligned} v^{x_2}_{M_2M_1} &= -y_2(\omega_2 + \omega_1\cos\delta) - w_2\omega_1\sin\delta\sin\varphi_2 \\ v^{y_2}_{M_2M_1} &= x_2(\omega_2 + \omega_1\cos\delta) - w_2\omega_1\sin\delta\cos\varphi_2 \\ v^{w_2}_{M_2M_1} &= x_2\omega_1\sin\delta\sin\varphi_2 + y_2\omega_1\sin\delta\cos\varphi_2 \end{aligned}\right\} . \tag{32}$$

Înlocuind (27) şi (32) în (24) şi luînd în considerare că $\omega_1 = \omega_2 i_{12}$, se obţin ecuaţiile liniilor de contact de pe profilul roţii dinţate conico-evolventice în sistemul de axe $Ox_2y_2w_2$:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= R_{b_2}\sin\theta - u\sin\beta_b\cos\theta \\ y_2 &= R_{b_2}\cos\theta + u\sin\beta_b\sin\theta \\ w_2 &= R_{b_2}\,\theta\,\operatorname{ctg}\beta_b - u\cos\beta_b \\ \sin\beta_b\cos\beta_b\cos\theta\,[&-y_2(1+i_{12}\cos\delta) - w_2 i_{12}\sin\delta\sin\varphi_2] - \\ -\sin\beta_b\cos\beta_b\sin\theta\,[&x_2(1+i_{12}\cos\delta) - w_2 i_{12}\sin\delta\cos\varphi_2] - \\ -\sin^2\beta_b(&x_2 i_{12}\sin\delta\sin\varphi_2 + y_2 i_{12}\sin\delta\cos\varphi_2) = 0 \end{aligned}\right\} . \tag{33}$$

Înlocuind valorile x_2, y_2, w_2 din primele trei ecuaţii ale sistemului (33) în ultima ecuaţie a aceluiaşi sistem, se determină relaţia dintre parametrii u şi θ, corespunzătoare punctelor de pe flancul dintelui roţii dinţate conico-evolventice care aparţin liniei de contact. Această relaţie, după

simplificări, are forma :

$$u = -\frac{R_{b_2}\left(\frac{1}{i_{12}} + \cos\delta\right)\cos\beta_b}{\sin\delta\sin(\theta-\varphi_2)} + R_{b_2}\,\theta\sin\beta_b\,\mathrm{ctg}^2\,\beta_b - \\ - \frac{R_{b_2}\sin\beta_b\cos(\theta-\varphi_2)}{\sin(\theta-\varphi_2)}. \tag{34}$$

Fixînd valoarea unghiului de rotaţie φ_2 şi dînd valori diferite parametrului θ, se determină valorile corespunzătoare ale celuilalt parametru u (din relaţia (34)). Înlocuind valorile lui u şi θ astfel obţinute în relaţiile (2), se obţin coordonatele x_2, y_2, w_2 ale unui punct situat pe linia de contact de pe flancul dintelui roţii dinţate conico-evolventice.

Din cele expuse rezultă că liniile de contact de pe profilul dintelui roţii conico-evolventice se pot exprima prin următorul sistem de ecuaţii :

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= R_{b_2}\sin\theta - u\sin\beta_b\cos\theta \\ y_2 &= R_{b_2}\cos\theta + u\sin\beta_b\sin\theta \\ w_2 &= R_{b_2}\,\theta\,\mathrm{ctg}\,\beta_b - u\cos\beta_b \\ u &= -\frac{R_{b_2}\left(\frac{1}{i_{12}} + \cos\delta\right)\cos\beta_b}{\sin\delta\sin(\theta-\varphi_2)} + R_{b_2}\,\theta\sin\beta_b\,\mathrm{ctg}^2\,\beta_b - \\ &\quad - \frac{R_{b_2}\sin\beta_b\cos(\theta-\varphi_2)}{\sin(\theta-\varphi_2)} \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Suprafaţa laterală a dintelui roţii dinţate cilindrice ca înfăşurătoare a suprafeţei dintelui roţii conico-evolventice se determină în felul următor : se transcriu ecuaţiile (10) ale flancului dintelui roţii conico-evolventice în sistemul de axe $Ox_1y_1w_1$, folosind formulele de transformare (21). Astfel se obţin ecuaţiile unei familii de suprafeţe a dintelui roţii conico-evolventice cu parametrul φ_1. Pe fiecare din suprafeţele acestei familii se poate determina linia de contact al suprafeţei respective cu flancul dintelui roţii dinţate cilindrice, impunînd parametrilor u şi θ ai suprafeţei condiţia (34).

Pe baza celor expuse, suprafaţa flancului dintelui roţii dinţate cilindrice, în formă vectorială, se poate scrie astfel :

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}}_2 &= \bar{\mathbf{r}}_2(u,\,\theta) \\ \bar{\mathbf{r}}_1 &= \Phi,\, s\,\Phi_2\bar{\mathbf{r}}_2 \\ f_2(u,\,\theta,\,\varphi_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Prima ecuaţie a sistemului (36) are forma parametrică dată de relaţia (10), a doua ecuaţie este o notaţie simbolică a relaţiilor (21), iar a treia o notaţie simbolică a ecuaţiei (34). Ţinînd seama de aceste notaţii şi înlocuind valorile x_2, y_2, w_2 din (10) în (13), relaţiile (36) se pot scrie astfel :

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= (R_{b_2}\sin\theta - u\sin\beta_b\cos\theta)(\cos\delta\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) - \\
&- (R_{b_2}\cos\theta + u\sin\beta_b\sin\theta)(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\delta\cos\varphi_1\sin\varphi_2) - \\
&- (R_{b_2}\theta\operatorname{ctg}\beta_b - u\cos\beta_b)\sin\delta\cos\varphi_1 \\
y_1 &= (R_{b_2}\sin\theta - u\sin\beta_b\cos\theta)(\cos\delta\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1) + \\
&+ (R_{b_2}\cos\theta + u\sin\beta_b\sin\theta)(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\delta\sin\varphi_1\sin\varphi_2) - \\
&- (R_{b_2}\theta\operatorname{ctg}\beta_b - u\cos\beta_b)\sin\delta\sin\varphi_1 \\
w_1 &= (R_{b_2}\sin\theta - u\sin\beta_b\cos\theta)\sin\delta\cos\varphi_2 - \\
&- (R_{b_2}\cos\theta + u\sin\beta_b\sin\theta)\sin\delta\sin\varphi_2 + \\
&+ (R_{b_2}\theta\operatorname{ctg}\beta_b - u\cos\beta_b)\cos\delta \\
u &= -\frac{R_{b_2}\left(\dfrac{1}{i_{12}} + \cos\delta\right)\cos\beta_b}{\sin\delta\sin(\theta-\varphi_2)} + R_{b_2}\theta\sin\beta_b\operatorname{ctg}^2\beta_b - \\
&\quad - \frac{R_{b_2}\sin\beta_b\sin(\theta-\varphi_2)}{\sin(\theta-\varphi_2)}
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Sistemul de ecuaţii (37) exprimă locul geometric al liniilor de contact în sistemul de coordonate $Ox_1y_1w_1$, rigid legat de roata dinţată cilindrică. Totalitatea acestor linii de contact formează flancul dintelui roţii dinţate cilindrice, care este o înfăşurătoare a suprafeţei dintelui roţii conico-evolventice.

La determinarea ecuaţiilor suprafeţei de angrenare se procedează similar ca în cazul determinării suprafeţei flancului dintelui roţii dinţate cilindrice (expusă mai sus). Diferenţa constă doar în aceea că ecuaţiile (10) trebuie transcrise în sistemul fix de axe $Oxyw$ folosind ecuaţia (11) (adică formulele de transformare (14)). Prin urmare, se poate scrie :

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\mathbf{r}}_2 &= \bar{\mathbf{r}}_2(u, \theta) \\
\bar{\mathbf{r}} &= \Phi_2\bar{\mathbf{r}}_2 \\
f_2(u, \theta, \varphi_2) &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Înlocuind valorile lui x_2, y_2, w_2 din (10) în (14) și luînd în considerare ecuația (34), relația (36) devine

$$\left.\begin{aligned} x &= R_{b_2}\sin(\theta-\varphi_2) - u\sin\beta_b\cos(\theta-\varphi_2)\\ y &= R_{b_2}\cos(\theta-\varphi_2) + u\sin\beta_b\sin(\theta-\varphi_2)\\ w &= R_{b_2}\,\theta\operatorname{ctg}\beta_b - u\cos\beta_b\\ u &= -\frac{R_{b_2}\left(\frac{1}{i_{12}}+\cos\delta\right)\cos\beta_b}{\sin\delta\sin(\theta-\varphi_2)} + R_{b_2}\,\theta\sin\beta_b\operatorname{ctg}^2\beta_b - \\ &\quad - \frac{R_{b_2}\sin\beta_b\cos(\theta-\varphi_2)}{\sin(\theta-\varphi_2)} \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Să determinăm, de exemplu, coordonatele unui punct de pe o curbă care se obține prin intersectarea suprafeței de angrenare cu planul $y = 0$. Egalînd cu zero a doua ecuație din sistemul (39), avem :

$$\operatorname{ctg}(\theta-\varphi_2) = -\frac{u\sin\beta_b}{R_{b_2}}. \tag{40}$$

Transcriem ultima relație a sistemului (39) în felul următor :

$$u = \frac{A}{\sin(\theta-\varphi_2)} + B\theta - R_{b_2}\sin\beta_b\operatorname{ctg}(\theta-\varphi_2), \tag{41}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{R_{b_2}\left(\frac{1}{i_{12}}+\cos\delta\right)\cos\beta_b}{\sin\delta},\\ B &= R_{b_2}\sin\beta_b\operatorname{ctg}^2\beta_b. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Exprimînd $\sin(\theta-\varphi_2)$ și $\cos(\theta-\varphi_2)$ în funcție de $\operatorname{ctg}(\theta-\varphi_2)$ și ținînd seama de egalitatea (32), găsim

$$\sin(\theta-\varphi_2) = \frac{R_{b_2}}{\sqrt{R_{b_2}^2 + u^2\sin^2\beta_b}} \tag{43}$$

$$\cos(\theta-\varphi_2) = -\frac{u\sin\beta_b}{\sqrt{R_{b_2}^2 + u^2\sin^2\beta_b}}. \tag{44}$$

Înlocuind (40) și (43) în (41) și ținînd seama de (42) avem :

$$\theta = \frac{\left(\frac{1}{i_{12}}+\cos\delta\right)}{R_{b_2}\sin\delta\operatorname{ctg}\beta_b}\sqrt{R_{b_2}^2 + u^2\sin^2\beta_b} + \frac{\sin\beta_b}{R_{b_2}}u. \tag{45}$$

Înlocuind (43) şi (44) în expresia lui x din sistemul de ecuaţii (39), avem :

$$x = \sqrt{R_{b_2}^2 + u^2 \sin^2 \beta_b}. \tag{46}$$

Relaţiile care determină coordonatele unui punct de pe o curbă care se obţine prin intersectarea suprafeţei de angrenare cu planul $y = 0$ sînt următoarele :

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{\left(\frac{1}{i_{12}} + \cos\delta\right)}{R_{b_2} \sin\delta \operatorname{ctg}\beta_b} \sqrt{R_{b_2}^2 + u^2 \sin^2\beta_b} + \frac{\sin\beta_b}{R_{b_2}} u \\ x &= \sqrt{R_{b_2}^2 + u^2 \sin^2\beta_b} \\ w &= R_{b_2}\,\theta \operatorname{ctg}\beta_b - u\cos\beta_b \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Aplicînd metoda expusă, se pot determina curbele care apar în secţiunile obţinute prin intersectarea suprafeţei de angrenare sau a suprafeţei flancului dintelui roţii cilindrice cu diferite plane.

Primită la redacţie la 1 august 1964

BIBLIOGRAFIE

1. I. Székely, *Studii asupra unui angrenaj cilindro-conic.* St. cerc. mec. apl. (1963).
2. Ф.Л. Литвин, *К вопросу о методике исследования пространственных зацеплений с линейным касанием поверхностей.* Труды семинара по ТММ. АН СССР, вып. 49, 1952.
3. J. Denavit, R. S. Hartenberg, *A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanisms Based on Matrices.* Journal of Applied Mechanics, vol. **22**, TRANS. ASME., vol. 77, 1955, p. 215–221.
4. I. Székely, *Studii asupra blocului conic dinţat compus din roţi dinţate conico-evolventice.* St. cerc. mec. apl., *5* (1961).

AUTOMATE FINITE CU ELEMENTE MECANICE [1]

de LEON LIVOVSCHI [2]

621.53

În practică se folosesc adesea mecanisme cu funcționare discontinuă, formate din clicheți, tije, pîrghii etc. Aceste mecanisme sînt automate finite cu elemente mecanice. Pentru sinteza lor se pot deci aplica metodele algebrice cunoscute [1, 2, 3].

În lucrare se expune mai întîi modul de descriere al funcționării unor elemente mecanice cu evoluție discontinuă și funcțiile logice pe care le realizează aceste elemente.

Apoi, pe două exemple, se arată cum se rezolvă problema sintezei automatelor finite constituite din elemente mecanice.

Automatele finite sînt cunoscute de multă vreme. La început s-au construit în special automate cu relee (elemente) electromagnetice. În ultimul timp, o dezvoltare mare au luat automatele constituite din elemente electronice : tuburi, tranzistoare, inele magnetice, criotroni, transfluxori, parametroni etc. Se construiesc, de asemenea, automate finite cu elemente pneumatice și hidraulice [2], [3]. Concomitent cu dezvoltarea tehnicii automatelor finite s-a dezvoltat și teoria lor ; aceasta este teoria algebrică a automatelor finite.

O răspîndire mare o au, de asemenea, automatele finite cu elemente mecanice : came, clicheți, pîrghii, tacheți, cruci de Malta etc. Ne propunem să arătăm în cele ce urmează că metodele cunoscute ale teoriei algebrice a automatelor finite [1] sînt aplicabile și la studiul automatelor cu elemente mecanice. Ne ocupăm în această lucrare de problema sintezei.

1. FUNCȚII LOGICE ELEMENTARE

În acest paragraf vom descrie modul în care, cu ajutorul elementelor mecanice, se pot realiza unele funcții logice elementare.

[1] Publicată în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **10**, *1* (1965) (în lb. rusă).
[2] Institutul de petrol, gaze și geologie, București.

FUNCȚIILE AFIRMAȚIE ȘI NEGAȚIE

Fie o tijă menținută într-o anumită poziție cu ajutorul unui arc (fig. 1). Notăm cu A o variabilă bivalentă, care descrie intensitatea forței, și care acționează asupra unuia dintre capetele tijei. Notăm apoi cu a o variabilă bivalentă, care descrie poziția tijei.

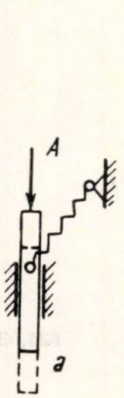


Fig. 1

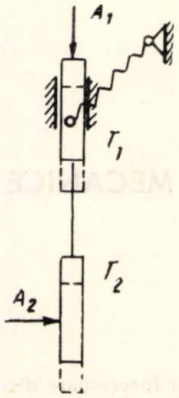


Fig. 2

Tabela 1

Poziția tijei	Valorile variabilelor	
	A	a
Superioară	0	1
Inferioară	1	0

Din tabela 1 deducem: [3])

$$a = A \text{ sau } \left.\begin{matrix} a^0 = A^0, \\ a^1 = A^1. \end{matrix}\right\} \quad (1)$$

unde a^0, a^1, A^0, A^1 sînt variabile bivalente auxiliare utilizate pentru descrierea variabilelor a și A (3).

Evident că nici forma tijei și nici mișcarea pe care o descrie ea nu sînt esențiale. Important este ca poziția tijei să se poată descrie cu ajutorul unei singure coordonate generalizate, care ia valori într-un interval finit,

$$q_1 \leqslant q \leqslant q_2$$

și să existe un arc care menține tija într-una dintre pozițiile extreme.

FUNCȚIA PRODUS LOGIC

Fie două tije legate între ele printr-un arc (fig. 2), prima tijă fiind ghidată. Presupunem ca și mai sus că sistemul celor două tije este menținut într-una dintre pozițiile extreme prin intermediul unui arc. Notăm cu A_1 și A_2 două variabile bivalente care descriu forțele ce acționează asupra tijelor, iar cu a o variabilă cu trei valori pentru descrierea poziției sistemului format din cele două tije.

Tabela 2

Poziția tijelor	Valorile variabilelor		
	A_1	A_2	a
T_1 și T_2 în poziție superioară	0	0 sau 1	0
T_1 jos, T_2 stînga	1	0	1
T_1 jos, T_2 dreapta	1	1	2

[3]) Aici și mai departe valorile variabilelor în dreapta și stînga semnului egal sînt luate la momentele N și $N + 1$

Din tabela 2 deducem :

$$\left.\begin{aligned} a^0 &= A_1^0, \\ a^1 &= A_1^1 A_2^0, \\ a^2 &= A_1^1 A_2^1, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

unde a^0, a^1, a^2, A_1^0, A_1^1, A_2^0 şi A_2^1 sînt variabile bivalente auxiliare utilizate pentru descrierea variabilelor a_1, A_1 şi A_2.

După cum se vede, variabilele a^1 şi a^2 descriu produsele logice $A_1^1 A_2^0$ şi $A_1^1 A_2^1$.

FUNCŢIA DISJUNCŢIE

Fie tija din figura 3. Notăm cu A_1 şi A_2 două variabile bivalente pentru descrierea forţelor de acţiune asupra porţiunii orizontale a lui T, iar cu a o variabilă bivalentă, folosită la descrierea poziţiei tijei T.

Tabela 3

Poziţia tijei	Valorile variabilelor		
	A_1	A_2	a
sus	0	0	0
jos	0	1	1
jos	1	0	1
jos	1	1	1

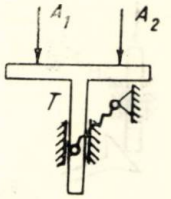


Fig. 3

Din tabela 3 deducem :

$$\left.\begin{aligned} a^0 &= A_1^0 A_2^0, \\ a^1 &= A_1^1 + A_2^1, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

unde variabilele bivalente a^0, a^1, A_1^0, A_1^1, A_2^0 şi A_2^1 au rolul arătat mai sus.

Din (3) rezultă că variabila a^1 descrie disjuncţia $A_1^1 + A_2^1$.

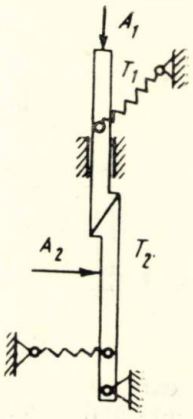


Fig. 4

FUNCŢIA MEMORIE

Considerăm sistemul din figura 4. Notăm, ca de obicei cu A_1 şi A_2 două variabile bivalente definite ca şi cele de mai înainte, ca forţe de acţiune asupra lui T_1 şi T_2, iar cu a o variabilă bivalentă necesară pentru descrierea poziţiei lui T_1.

Din tabela 4 deducem :

Tabela 4

	$A_{1N}A_{2N}$ 00	10	11	01
a_N 0	0	1	1	0
a_N 1	1	1	1	0
	a_{N+1}			

$$\left.\begin{aligned} a^0_{N+1} &= A^0_{1_N}(A^1_{2_N} + a^0_N), \\ a^1_{N+1} &= A^1_{1N} + a^1_N A^0_{2N}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Formulele (4) descriu două funcţii de memorie. Într-adevăr, ele dau valorile variabilelor a^0 şi a^1 la momentul $N+1$ în funcţie de valorile lor la momentul N.

2. INTERACŢIONAREA ELEMENTELOR MECANICE

Interacţionarea elementelor mecanice se împarte de obicei în două etape :

1) punerea elementelor în contact şi
2) deplasarea elementului care efectuează comanda.

În ceea ce priveşte mişcările pe care le execută elementele, natura lor nu este importantă. Aşa, de exemplu, în toate cazurile de mai sus se pot construi elemente cu funcţionare asemănătoare în care mişcările de translaţie sînt înlocuite prin mişcări de rotaţie şi reciproc.

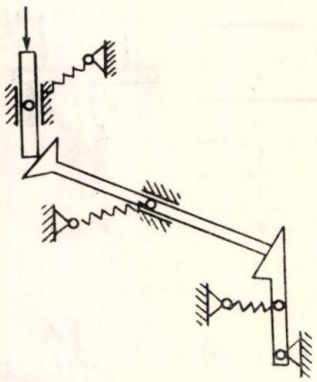


Fig. 5

Adesea, din motive constructive, două elemente care interacţionează sînt aşezate la o asemenea distanţă între ele, încît oricît de mari ar fi deplasările lor, cele două elemente nu pot ajunge în contact. În asemenea cazuri, interacţionarea poate fi asigurată prin tije intermediare (fig. 5). Deoarece tijele intermediare sînt astfel montate încît realizează repetarea unei comenzi, ele pot fi omise în studiul evoluţiei automatului finit din care fac parte.

Mai sus, în paragraful 1, am cercetat funcţionarea unor elemente mecanice şi am dedus ecuaţiile folosite pentru descrierea deplasărilor acestor elemente în funcţie de forţele care acţionează asupra lor.

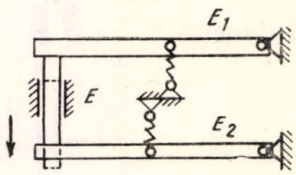


Fig. 6

Se poate pune şi problema inversă, aceea a determinării forţei generalizate care acţionează asupra unui element E în funcţie de deplasările elementelor E_i ce pot acţiona asupra lui E. Mai mult, ne putem pune problema unei asemenea organizări a acţiunii unui element E de către alte elemente E_i, încît forţa care acţionează asupra lui E să fie o funcţie logică cunoscută de deplasările elementelor E_i .

Fie o tijă care acţionează asupra a două elemente, ca în figura 6.

Dacă notăm cu A_1 şi A_2 variabilele bivalente ce descriu forţele F_1 şi F_2 cu care elementul E acţionează asupra elementelor E_i şi cu a variabila bivalentă introdusă pentru descrierea poziţiei tijei E, obţinem:

$$\left.\begin{aligned} A_1^0 &= a^1, \quad A_1^1 = a^0, \\ A_2^0 &= a^0, \quad A_2^1 = a^1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Fie acum două tije ce acţionează asupra unui element (fig. 7).

Dacă notăm cu a_1, a_2 şi A variabilele bivalente care descriu poziţiile celor două tije E_1 şi E_2 şi respectiv, forţa de acţiune asupra lui E, obţinem

$$\left.\begin{aligned} A^0 &= a_1^0 a_2^0, \\ A^1 &= a_1^1 + a_2^1. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

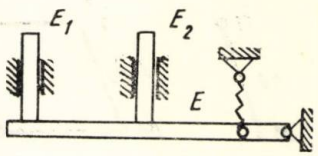


Fig. 7

Fie, în sfîrşit, sistemul de tije din figura 2 care acţionează asupra două elemente D_1 şi D_2 (fig. 8).

Dacă notăm cu a_1, a_2, A_1 şi A_2 variabilele bivalente ce descriu poziţiile elementelor E_1, E_2 şi forţele care acţionează asupra elementelor D_1, D_2, din tabela 5, deducem:

Tabela 5

	$a_1\,a_2$ 00	10	11	01
$A_1\,A_2$	00	10	01	00

$$\left.\begin{aligned} A_1^0 &= a_1^0 + a_2^1, \quad A_1^1 = a_1^1\, a_2^0, \\ A_2^0 &= a_1^0 + a_2^0, \quad A_2^1 = a_1^1\, a_2^1. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

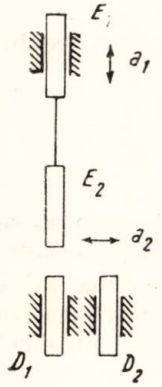


Fig. 8

Prin suprapunerea funcţiilor (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) se pot construi funcţii complexe care descriu poziţiile unui obiect în funcţie de poziţiile altor obiecte şi, reciproc, fiind dată o asemenea funcţie, ea poate fi reprezentată printr-o suprapunere a funcţiilor enumerate mai sus.

În încheiere observăm că forma organelor elementelor mecanice este foarte variată. De aceea recunoaşterea funcţiei logice pe care o realizează un element nu se poate obţine decît în urma analizei funcţionării elementului considerat.

Faptul că forma organelor elementelor poate fi foarte variată permite construirea de foarte multe automate, avînd aceeaşi funcţionare.

3. GRAFURILE CARACTERISTICE ALE ELEMENTELOR

Pentru sinteza automatelor este comodă reprezentarea funcţionării elementelor de automatizare prin graful lor caracteristic [2], [3].

Graful caracteristic reprezintă grafic ecuaţia caracteristică a elementului studiat [2], [3].

Grafurile caracteristice ale elementelor studiate mai sus sînt arătate în figura 9 (în aceste grafuri nu s-au considerat evoluţiile care corespund la schimbarea concomitentă a valorilor a două forţe).

Fiecare nod al grafului caracteristic este notat atît cu valorile comenzilor care asigură trecerea elementului dintr-o stare în alta, cît şi cu

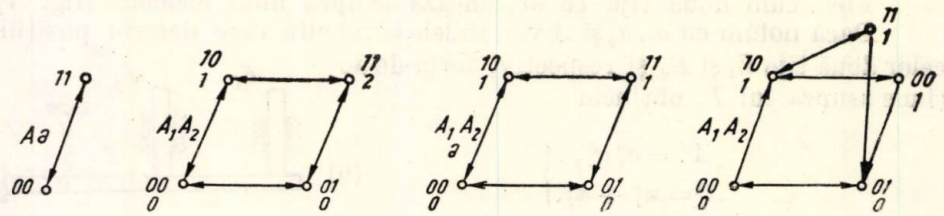


Fig. 9

valoarea variabilă asociată stării în care trece elementul. Arcele grafului caracteristice reprezintă elementele produsului cartezian.

$$(A_1 \times, \ldots, \times A_{n_A} \times a_1 \times, \ldots, \times a_{n_a})\, N \tag{8}$$

dacă facem convenţia de a citi valorile variabilelor A_i din originea arcului şi valorile variabilelor a_j din extremitatea lui.

4. EXEMPLE DE SINTEZĂ

1. Se dau trei butoane A, B şi C şi un organ mobil E. Se cere să se construiască un automat care să funcţioneze după următorul program:

Dacă se acţionează A sau B, E schimbă de poziţie şi rămîne în poziţie schimbată chiar dacă A şi B sînt dezacţionate. Dacă se acţionează C, E revine în poziţia iniţială. Dezacţionarea lui C nu are nici un efect asupra lui E.

Considerăm patru variabile bivalente a, b, c şi e care descriu poziţiile celor trei butoane şi a organului mobil. Programul de funcţionare al automatului poate fi descris cu ajutorul unui graf, graful iniţial al automatului [3]. Nodurile grafului iniţial reprezintă elementele produsului

$$K_N \times W_{N+1}{}^{4}) \tag{9}$$

unde K şi W sînt două variabile care descriu respectiv stările elementelor de comandă şi executive ale automatului. În exemplul studiat se obţine graful din figura 10 *a* (nu s-au considerat evoluţiile corespunzătoare schimbării concomitente a două comenzi).

---

[4]) După cum s-a arătat în [2] se poate scrie convenţional W_N în loc de W_{N+1}.

Notăm acum nodurile grafului inițial cu valorile — presupuse deocamdată distincte — ale unei variabile Z care va descrie „memoria" automatului. Valorile variabilei Z trebuie astfel alese, încît expresiile

$$i = K^i (Z^{i_1} Z^{i_2}, \ldots, Z^{i_{n_i}}), \tag{10}$$

unde K^i și $Z^{i_1}, \ldots, Z^{i_{n_i}}$ reprezintă valorile lui K și Z, respectiv din extremitățile și din originile arcelor convergente în nodul i, să fie distincte [2], [3]. În cazul nostru obținem:

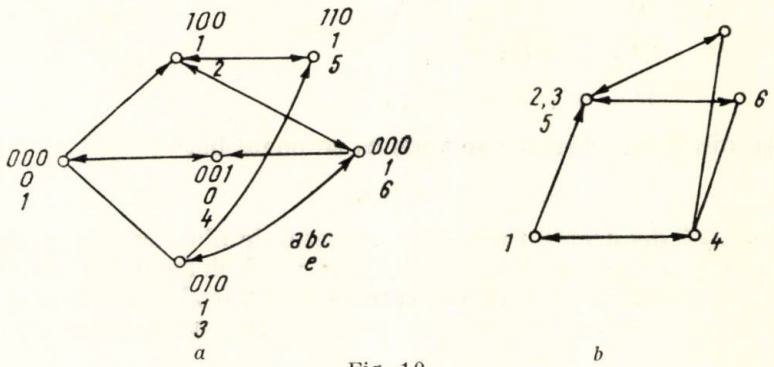


Fig. 10

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 000\ (1,4), & 4 &= 001\ (1,\ 4,\ 6),\\ 2 &= 100\ (1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6), & 5 &= 110\ (1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6),\\ 3 &= 010\ (1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6), & 6 &= 000\ (2,\ 3,\ 5,\ 6). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Rezultă că putem lua

$$1 \sim 4 \neq 2 \sim 3 \sim 5 \sim 6,$$

unde semnul $\sim$ înseamnă „poate fi egal". Este suficient ca variabila Z să aibă două valori distincte. Notăm cu X un element care realizează funcția de memorie.

Funcțiile de lucru ale automatului se pot deduce din tabela 6 care dă valorile lui x și e în funcție de valorile variabilelor a, b și c.

Tabela 6

		000	001	011	a_N b_N c_N 010 110	111	101	100	
x_N	0	00,1	00,4	—	11,3 11,5	—	—	11,2	$x_{N+1} l_{N+1}, n^5)$
	1	11,6	00,4	—	11,3 11,5	—	—	11,2	

[5]) S-au notat cu $n=1, 2 \ldots$ numerele nodacelor grafului din figura 10 *a*.

În tabelă n-au fost completate locurile din dreptul comenzilor care se presupun că nu se dau. Ele pot fi completate cu asemenea valori ale lui x și e, încît funcțiile obținute să fie cît mai simple.

Presupunînd că luăm 11 în toate locurile necompletate, deducem (pentru simplificarea scrierii omitem indicii $N+1$, N):

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= a^0 b^0 c^1 + x^0 a^1 b^0 = a^0 b^0 (c^1 + x^0), \\ x^1 &= a^1 + b^1 + x^1 c^0, \\ e^0 &= a^0 b^0 (c^1 + x^0), \\ e^1 &= a^1 + b^1 + x^1 c^0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Din formulele obținute se vede că se poate lua

$$x = e. \tag{13}$$

Urmează deducerea formulelor structurale ale circuitelor adică formulele care descriu modul de interacționare al elementelor automatului.

Pentru deducerea formulelor care descriu variabilele asociate forțelor ce acționează asupra elementelor automatului, vom aplica procedeul descris în [3].

Urmărind concomitent graful automatului și graful caracteristic al elementului E, deducem valorile necesare ale forțelor, astfel încît automatul să aibă evoluția dorită. Obținem tabela 7.

Tabela 7

		000	001	011	*a b c* 010	110	111	101	100	
e	0	00,1	01,4	(10)	10,3	10,5	(10)	(10)	10,2	$E_1 E_2$, n
	1	00,6	01,4	(10)	10,3	10,5	(10)	(10)	11,2	

Valorile din paranteze corespund la stări care nu apar în timpul funcționării automatului.

Din tabela 7 deducem:

$$\left.\begin{aligned} E_1^0 &= a^0 b^0, \quad E_2^0 = a^1 + b^1 + c^0, \\ E_1^1 &= a^1 + b^1, \quad E_2^1 = a^0 b^0 c^1. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Din (4) (schimbînd notația) și (14) deducem:

$$\left.\begin{aligned} e^0 &= a^0 b^0 \ (a^0 b^0 c^1 + e^0) = a^0 b^0 (c^1 + e^0), \\ e^1 &= a^1 + b^1 + e^1 (a^1 + b^1 + c^1) = a^1 + b^1 + e^1 c^0. \end{aligned}\right\}$$

S-au obținut tocmai formulele (12) (dacă ținem seama de (13)). Ținînd seama de (14), deducem structura automatului din figura 11.

Mai rămîne de verificat că în timpul funcționării automatului sînt parcurse arce ale grafului elementului care realizează memoria (3).

Urmărind concomitent graful caracteristic al lui E (fig. 9 *d*), graful automatului (fig. 10 *a*) şi tabela 7, rezultă parcurgerea din figura 10 *b*, a grafului caracteristic al lui E.

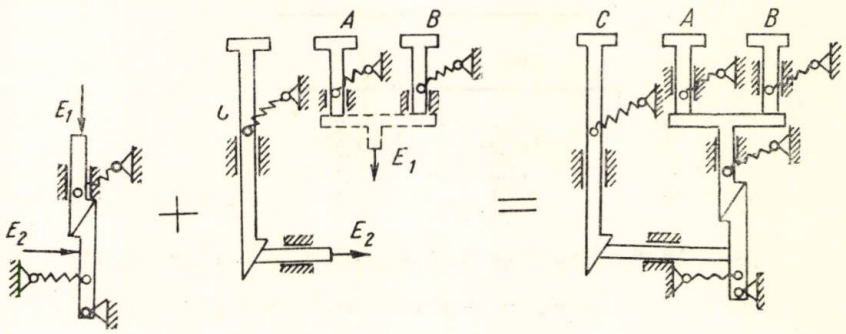
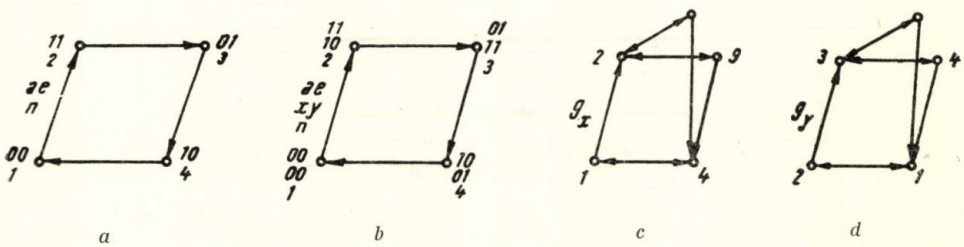


Fig. 11

2. Se dă un buton A şi un element executiv E. Se cere să se construiască un automat care să funcţioneze după următorul program : la prima acţionare asupra lui A, elementul E schimbă de stare ; la a doua acţionare asupra lui A, elementul E revine la starea iniţială.

După cum se vede, este vorba de un contor în baza doi.

Graful iniţial al automatului este arătat în figura 12 *a*.



a *b* *c* *d*

Fig. 12

Expresiile (10) sînt :

$$1 = 0\,(1,4), \quad 2 = 2(\,1,2), \quad 3 = 0\,(2,3), \quad 4 = 1\,(3,4). \tag{15}$$

Deducem :

$$\left.\begin{aligned} 1 \sim 4 \neq 2 \sim 3, \\ 1 \sim 2 \neq 3 \sim 4. \end{aligned}\right\}$$

de unde rezultă

$$1 \neq 2 \neq 3 \neq 4. \tag{16}$$

Pentru asignare sînt necesare, prin urmare, două elemente intermediare (pentru realizarea memoriei). Vom nota aceste elemente cu X şi Y. Graful final este arătat în figura 12 *b*.

Din tabela 8 deducem funcţiile de lucru ale automatului.

Tabela 8

		a_N = 0	a_N = 1	
$x_N\ y_N$	00	000,1	101,2	
	10	111,3	101,2	
	11	111,3	010,4	
	01	000,1	010,4	$x_{N+1}\ y_{N+1}\ e_N,\ n$[6]

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= a^0 x^0 + a^1 y^1,\quad y^0 = a^0 x^0 + a^1 y^0,\quad e^0 = a^0 x^0 + a^1 y^1,\\ x^1 &= a^1 y^0 + a^0 x^1,\quad y^1 = a^0 x^1 + a^1 y^1,\quad e^1 = a^1 x^0 + a^0 y^1. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Se vede că putem lua

$$\left.\begin{aligned} e^0 &= x^0,\\ e^1 &= x^1. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Pentru deducerea formulelor care descriu variabilele asociate forţelor, procedăm ca mai înainte. Obţinem tabela 9.

Tabela 9

		a_N = 0	a_N = 1	
$x_N\ y_N$	00	0θθ0,1	100θ,3	
	10	0010,3	θ0θ0,2	
	11	θ0θ0,3	0100,4	
	01	0θ01,1	00θ0,4	$X_{1N}\ X_{2N}\ Y_{1N}\ Y_{2N},\ n$

Am notat cu θ situaţiile în care o variabilă poate lua atît valoarea 0, cît şi valoarea 1.

Alegînd în loc de θ valorile care permit simplificarea funcţiilor, obţinem :

$$\left.\begin{aligned} X_1^0 &= a^0 + y^1, & Y_1^0 &= a^1 + x^0,\\ X_1^1 &= a^1 y^0, & Y_1^1 &= a^0 x^1,\\ X_2^0 &= a^0 + y^0, & Y_2^0 &= a^1 + x^1,\\ X_2^1 &= a^1 y^1, & Y_2^1 &= a^0 x^0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

[6]) S-au notat cu $n = 1, 2, \ldots$ numerele nodurilor grafului din figura 12 *b*.

După cum se vede, formulele deduse au aceeaşi structură cu formulele (7). Rezultă că pentru realizarea lor vor fi necesare două elemente de tipul din figura 2.

Mai rămîne de verificat dacă formulele (19) sînt corecte. Pentru aceasta eliminăm variabilele care descriu forţele între formulele (19) şi formulele (4) (scrise pentru elementele X şi Y). Obţinem :

$$\left.\begin{aligned}
x^0 &= X_1^0(X_2^1 + x^0) = (a^0 + y^1)(a^1 y^1 + x^0) = a^1 y^1 + x^0 y^1 + a^0 x^0 = \\
&= a^1 y^1 + x^0 y^1 (a^1 + a^0) + a^0 x^0 = a^1 y^1 + a^0 x^0, \\
x^1 &= X_1^1 + x^1 X_2^0 = a^1 y^0 + x^1 (a^0 + y^0) = a^1 y^0 + a^0 x^1 + x^1 y^0 = \\
&= a^1 y^0 + a^0 x^1 + x^1 y^0 (a^0 + a^1) = a^1 y^0 + a^0 x^1, \\
y^0 &= Y_1^0 (Y_2^1 + y^0) = (a^1 + x^0)(a^0 x^0 + y^0) = a^0 x^0 + x^0 y^0 + a^1 y^0 = \\
&= a^0 x^0 + x^0 y^0 (a^0 + a^1) + a^1 y^0 = a^0 x^0 + a^1 y^0, \\
y^1 &= Y_1^1 + y^1 Y_2^0 = a^0 x^1 + y^1 (a^1 + x^1) = a^0 x^1 + x^1 y^1 + a^1 y^1 = \\
&= a^0 x^1 + x^1 y^1 (a^0 + a^1) + a^1 y^1 = a^0 x^1 + a^1 y^1.
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

După cum se vede, s-au obţinut formulele (17).

În sfîrşit, trebuie construite parcurgerile grafurilor caracteristice ale elementelor X şi Y.

Pentru aceasta înlocuim în tabela 9 valorile alese ale variabilelor X_1, X_2, Y_1 şi Y_2. Obţinem tabela 10.

Tabela 10

$x_N y_N$	a_N = 0	a_N = 1	$X_{1_N} X_{2_N} Y_{1_N} Y_{2_N}, n$
00	0001,1	1000,2	
10	0010,3	1000,2	
11	0010,3	0100,4	
01	0001,1	0100,4	

Comparînd tabela 10, graful automatului (fig. 12 *b*) şi grafurile caracteristice ale elementelor X şi Y, obţinem parcurgerile din figura 12 *c*, *d*. După cum se vede, în timpul funcţionării automatului sînt parcurse arce ale grafurilor caracteristice.

Structura automatului şi modul în care ea a fost dedusă sînt arătate în figura 13.

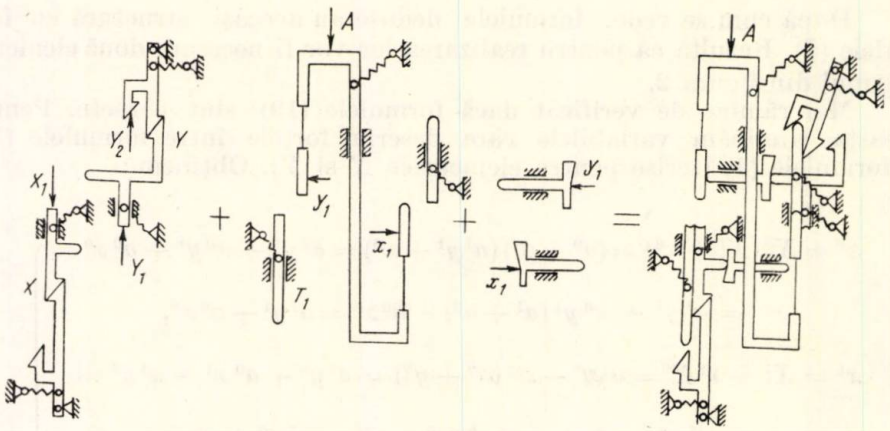


Fig. 13

Un automat mai simplu se obţine eliminînd tijele T_1 şi T_2. Se obţine structura din figura 14.

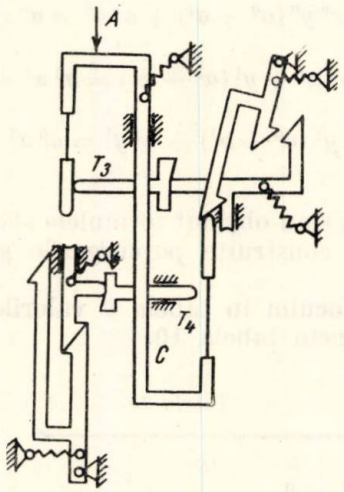


Fig. 14

Menţionăm că automatul cu structura din figura 13 a fost construit şi a funcţionat satisfăcător.

Primită la redacţie la 21 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Gr. C. Moisil, *Teoria algebrică a mecanismelor automate*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1959.
2. L. Livovschi, *Proiectarea mecanismelor hidraulice în elemente bipoziţionale*, St. cerc. mec. apl., *1* (1963).
3. — *Automate finite cu elemente logice pneumatice şi hidraulice*, Bucureşti, Edit. Acad. R.P.R., 1959.

ASPECTE DE UZURĂ ŞI RODAJ LA UNELE STRUCTURI EUTECTICE DE ALUMINIU [1])

de GH. VASILCA, OLGA BIŢĂ şi I. DINCĂ [2])

539.6 ; 621.89.

În condiţii grele de ungere, aliajele antifricţiune sînt supuse la acţiuni severe de frecare şi uzură. Ele trebuie deci să posede proprietăţi favorabile în această direcţie, ceea ce se realizează, în cazul sistemului piston-cilindru de la motoare, cu ajutorul cuplurilor formate din aliaje eutectice de aluminiu şi fontă de cilindri. În cazul de faţă se studiază proprietăţile la alunecare, uzură şi rodaj a trei aliaje eutectice cu siliciu, în pereche cu două tipuri de fonte de cilindru, din care una fără conţinut de cupru. Se analizează fazele principale de structură ale aliajelor, soluţia solidă de aluminiu şi siliciul eutectic şi primar, precum şi rolul lor în procesul uzurii de contact, care este predominant la acest sistem. Rezultatele încercărilor experimentale la uzură şi rodaj se prezintă în bună concordanţă cu concluziile studiului deductiv efectuat în această direcţie asupra constituenţilor şi texturii structurii, precum şi asupra rugozităţii suprafeţelor active ale materialelor.

La unele cupluri de frecare avînd ca material antifricţiune aliaje de aluminiu, se cere, în cazul condiţiilor grele de ungere, ca aliajul să posede proprietăţi favorabile la alunecare şi concomitent o rezistenţă la uzură acceptabilă, deci o duritate relativ ridicată. Astfel de condiţii trebuie să îndeplinească, de exemplu, aliajele de aluminiu, utilizate pe o scară largă la fabricarea pistoanelor de la motoarele de automobil şi tractor, la motoarele cu piston pentru avioane etc..

Faţă de consideraţiile admise pînă în prezent cu privire la tipul de structură favorabil pentru condiţiile grele de ungere, apare indicată în cazul de faţă structura de material formată dintr-o matrice semidură

[1]) Publicată în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **10**, *1* (1965) (în lb. germană).

[2]) Institutul de mecanică aplicată al Academiei.

în care este înglobat un constituent mai dur. Cerința cu privire la o duritate mai ridicată a aliajului poate fi satisfăcută printr-o structură eutectică. Un tip de aliaj de aluminiu care poate îndeplini în același timp ambele cerințe de bază menționate mai sus este aliajul eutectic cu siliciu. Poate apărea astfel interesant de examinat comportarea la uzură și rodaj a unor aliaje eutectice de aluminiu din această categorie.

Aliajele de aluminiu pentru pistoane trebuie să îndeplinească și unele condiții legate de factorii termochimici de combustie și de solicitare mecanică, ca, de exemplu, rezistența la coroziune și modificarea redusă a rezistenței mecanice cu temperatura. La acestea se adaugă condiții în legătură cu factori tehnologici : turnarea, prelucrarea mecanică etc. Pentru a răspunde acestor numeroase condiții, materialele pentru pistoane au devenit aliaje complexe de aluminiu, în a căror compoziție intră în general numeroase alte elemente, și anume siliciu, cupru, mangan, magneziu, nichel, titan, fier, zinc etc.

Pentru cercetările de față s-au folosit trei astfel de aliaje [3]), și anume unul (A) ușor hipereutectic, pentru a urmări influența siliciului primar în procesele de frecare și uzură, și două (B și C) ușor hipoeutectice fără siliciu primar în structură. În ceea ce privește siliciul și cuprul, aceste trei aliaje au următoarea compoziție chimică :

		Si	Cu
Aliajul	A	% 13,4	1,2
„	B	„ 10,6	2,7
„	C	„ 10,7	3,3

Mai poate fi remarcat că cele trei aliaje conțin Mg, Mn și Fe în cantități comparabile, aliajul C nu conține Ni și Zn. Aliajul B nu conține Ti, iar conținutul de nichel este de circa 30% față de cel al aliajului A. Aliajul A este standardizat (STAS 201-59) și se consideră în cele ce urmează ca aliaj de referință.

Aliajele menționate au fost conjugate pentru încercări cu două fonte aliate de cilindru (F_1 și F_2) conținînd Si, Mn, Cr, Cu, V, S și P. Din punctul de vedere al proprietăților de frecare și uzură, cele două materiale se deosebesc între ele prin faptul că F_2 conține 0,4—0,6% Cu, în timp ce fonta F_1 este lipsită de acest element. Mai poate fi remarcat că F_1 conține 0,1—0,2% V, iar F_2 nu conține acest element și că F_2 conține 0,25—0,4% Cr, față de numai jumătate din acest element, cît are fonta F_1. Ambele fonte conțin carbon în proporție de 3—3,5%, siliciu 2—2,4% și mangan 0,6—0,9% ; de asemenea sulf și fosfor limitate la 0,1, respectiv 0,5%.

Duritatea aliajelor de aluminiu și a fontelor încercate se prezintă astfel :

Aliajul	A (la 20° C, în stare tratat)	HB = 124
„	B (idem)	„ = 125
„	C (idem)	„ = 125
Fonta	F_1 (necălită superficial)	„ = 240
„	F_2 (idem)	„ = 256

[3]) Aliajele încercate au fost realizate în condiții tip producție, B și C fiind studiate din punct de vedere metalurgic, al proprietăților mecanice, fizice etc. de către ICEM, iar A fiind un aliaj standardizat.

Din punctul de vedere al ungerii, frecării şi uzurii interesează mai ales structura materialului în suprafaţa activă a cuplului, în care are loc procesul de frecare. În acest proces, parametrii de structură pot interveni în mod nemijlocit, mai ales în regimurile de ungere semifluide, caracteristice cuplului piston-cilindru cu mişcare de alunecare liniară alternativă. Constituţia materială a suprafeţei active, care poate fi formată din constituenţii de structură ai aliajului, precum şi din alte produse rezultate ca urmare a proceselor fizico-chimice care însoţesc fenomenul frecării, poate fi deci considerată ca un parametru ce caracterizează materialul antifricţiune respectiv. În funcţie de microgeometrie şi de rezistenţa mecanică şi chimică ale stratului superficial al suprafeţei active, un material antifricţiune poate poseda deci proprietăţi favorabile sau se poate comporta mai puţin corespunzător în exploatare.

Ca urmare, caracteristica de structură în masa materialului, care este un parametru metalurgic şi tehnologic, se examinează în lucrarea de faţă numai în limita apreciată strict necesară punerii în evidenţă a constituenţilor principali, în vederea urmăririi lor în componenţa stratului superficial al suprafeţii active.

1. STRUCTURA ÎN MASA ALIAJELOR

Din punctul de vedere al conţinutului de siliciu, cele trei aliaje de aluminiu încercate au structuri apropiate, prezentînd în principal o fază eutectică în stare denaturată [1]. În această stare, cei doi componenţi ai eutecticului nu mai apar sub formă de lamele fine alternînd cu regularitate. Astfel, faza care predomină din punct de vedere cantitativ se separă în asemenea cazuri, formînd zone compacte lipsite de elementul al doilea al eutecticului. În cazul de faţă, structura eutecticului denaturat constă din zone de aluminiu compact şi din zone alcătuite din siliciu, în general lamelar însă mai grosier, cu intercalaţii de aluminiu. La aliajele uşor hipoeutectice apărînd şi o cristalizare primară a fazei de bază în jurul centrelor de cristalizare alcătuite de această fază, formarea zonelor compacte de aluminiu este favorizată şi mai mult.

Cele trei aliaje studiate fiind complexe din punctul de vedere al compoziţiei chimice, componentul de bază al eutecticului nu va fi aluminiu curat, ci o soluţie solidă de aluminiu. Pentru simplificarea vorbirii, zonele de eutectic se vor nota în continuare sub forma Al + Si, înţelegîndu-se prin Al soluţia solidă de aluminiu.

Astfel, datorită proprietăţii particulare a eutecticului Al-Si de a se solidifica în stare denaturată, la aceste eutectice se poate vorbi de fapt despre o structură formată dintr-o matrice, predominantă din punct de vedere cantitativ, şi o fază mai dură de siliciu.

Din punctul de vedere al frecării şi uzurii este important că pe această cale se obţine o structură Charpy, atît la scară macroscopică (dendrite de aluminiu + siliciu eutectic dur), cît şi la scară microscopică (zonele de lamele de siliciu eutectic despărţite de aluminiu). La aliajele numai cu

eutectice normale, nedenaturate, zonele cu matricea în formă de dendrite lipsesc.

Soluția solidă de aluminiu formează matricea cu duritate mai redusă a aliajului și se prezintă sub formă dendritică la toate cele trei aliaje studiate (fig. 1, 2 și 3). Grăunții dendritici dezvoltați și orientați cu axa mare în planul secțiunii prin metal constituie în suprafața activă porțiuni cu concentrații mai mari de soluție solidă, ceea ce imprimă acestei suprafețe starea de neomogenitate în ceea ce privește repartiția fazei. Atacarea probelor pentru punerea în evidență a acestor aspecte de structură s-a făcut cu o soluție apoasă de 10% NaOH.

Faptul că matricea este o soluție solidă de aluminiu rezultă și din microduritatea ei, care la cele trei aliaje are următoarele valori :

Aliajul *A* ..... 151 kgf/mm²
„ *B* ..... 162 „
„ *C* ..... 172 „

Se constată că matricea acestor aliaje este aproape la fel de dură, un ușor spor putînd fi semnalat o dată cu creșterea mai ales a conținutului de cupru [1]. Microduritatea s-a obținut în zona compactă a matricei, în dendrite, sub sarcina de 10 g, cu durata de apăsare de 15 s, diagonalele amprentelor fiind măsurate la mărirea de 487 : 1.

În ceea ce privește eutecticul Al + Si, se constată că aliajul *A* este ușor hipereutectic, deoarece siliciul apare și sub forma de fază primară în cuburi (fig. 5 și 8), ceea ce este în concordanță și cu conținutul de 13,4% Si, care este mai mare decît valoarea de 11,7% Si corespunzătoare eutecticului din diagrama de echilibru a aliajului binar Al—Si [2]. Separări primare de siliciu nu au putut fi constatate la aliajele *B* și *C*, de altfel ușor hipoeutectice și după compoziția chimică.

În zonele eutectice, siliciul se prezintă în general sub formă de particule lamelare, unele chiar globulare, însă rotunjite și fără colțuri (fig. 8, 10 și 23), ceea ce arată că pentru obținerea acestei forme îmbunătățite a siliciului s-a utilizat o tehnologie de modificare, ca, de exemplu, cu sodiu.

Zonele cu siliciu eutectic nu sînt uniform distribuite și nici siliciul în interiorul acestor zone, putînd fi constatate porțiuni cu concentrații mai mari de particule din acest element (fig. 4, 12 și 19). Figurile 5, 8, 10, 13, 20 și 23 prezintă astfel de aglomerări la mărirea 600 : 1 în cazul acestor trei aliaje. Ca și în cazul soluției solide de aluminiu, în suprafața activă a acestor aliaje vor apărea deci zone mai concentrate și zone mai sărace în siliciu eutectic .

Constituenții de structură compuși definiți, mai mult sau mai puțin complecși și nedizolvați în soluția solidă, precum și eutecticul ternar rezultați din conținuturile de siliciu, cupru, magneziu, mangan, fier și nichel, sînt reprezentați în structură în cantități reduse. Pe de altă parte, prezența lor în suprafața activă a cuplurilor de frecare nu a putut fi constatată cu mijloacele optice și chimice folosite în cazul acestor cercetări. Din această cauză, efectele acestor faze asupra proceselor de frecare și uzură nu au fost urmărite.

Comportarea la frecare și uzură a aliajelor încercate se consideră deci a fi determinată în mod precumpănitor de către cele două faze principale, reprezentate din punct de vedere cantitativ în mod predominant, și anume soluția solidă de aluminiu și siliciul eutectic (și primar în cazul aliajului *A*). Considerată astfel, structura celor trei aliaje se compune deci dintr-o matrice mai moale — soluția solidă de aluminiu — în care sînt înglobate particule dure, relativ fine, de siliciu eutectic, iar în cazul aliajului *A* siliciul mai apare și sub formă de cristalite primare. Repartiția în suprafața de lucru a aliajelor, atît a soluției solide, cît și a siliciului, nu este perfect uniformă, iar soluția solidă prezintă o ușoară deosebire de microduritate de la un aliaj la altul.

2. STRUCTURA ȘI MICROGEOMETRIA ÎN SUPRAFAȚA ACTIVĂ A ALIAJELOR

În procesele de frecare care au loc în cazul regimurilor de ungere semifluide, precum și în regimurile de frecare uscată, sub acțiunea presiunilor locale mari și a căldurii rezultate din frecare în contactele metal-metal, constituentul de structură mai maleabil și cu temperatura de topire mai coborîtă trece prin două transformări mai principale [3]. Mai întîi se înmoaie și curge plastic, acoperind denivelările din jur. În al doilea rînd, datorită sudurilor formate în punctele de contact cu vîrfurile asperităților de pe suprafața conjugată, suduri care se rup din cauza mișcării relative a suprafețelor în partea materialului cu rezistența la forfecare mai mică, această fază suferă un proces de uzură. Un astfel de proces are loc și datorită așchierii produse de particulele dure antrenate între suprafețele în mișcare. Procesul de uzură va fi cu atît mai intens, cu cît faza respectivă are duritate mai redusă și cu cît intră cantitativ în proporție mai mare în constituția suprafeței active de frecare.

Faza dură, prezentă în structura suprafeței active sub formă de incluziuni, este apăsată în asemenea procese de frecare mai adînc în faza matrice susținătoare și poate acționa abraziv asupra suprafeței conjugate a cuplului. Sub acțiunea sarcinilor dinamice și a impulsurilor particulelor dure străine ajunse între suprafețe, faza dură a aliajului poate fi chiar fărîmată și dislocată din locașurile respective, particulele colțuroase rezultate devenind, la rîndul lor, agenți abrazivi pentru suprafețele în mișcare.

În cazul celor trei aliaje studiate, dacă se iau ca referință fazele de structură ale aliajului *A*, rezultă în lumina celor de mai sus următorul tablou cu privire la comportarea la uzură a acestor materiale : soluția solidă a aliajului *B* fiind puțin mai dură, iar a aliajului *C* și mai dură, materialul *B* trebuie să aibă o rezistență la uzură puțin mai favorabilă decît *A*, iar aliajul *C* și mai favorabilă. Luînd însă în considerație și proporția cantitativă în care această fază este prezentă în suprafața activă, rezultă că materialul *A* trebuie să posede o rezistență la uzură mai mare, deoarece are procentul de siliciu cel mai ridicat și cu aproximație procentul de soluție solidă de aluminiu cel mai redus.

În procesul de uzură, siliciul acționează în mod predominant asupra piesei conjugate. Acțiunea abrazivă asupra matricei proprii în care este înglobat, datorită particulelor smulse din locașuri și antrenate printre suprafețele în mișcare, poate fi apreciată mai mult calitativ. În acest caz, fărîmăturile smulse rezultate din spargerea particulelor de siliciu pot fi considerate mai active și efectul procesului de abraziune în proporție cu numărul acestora. Plusul de siliciu pe care îl are aliajul A este însă în mare parte sub formă de cristalite mari, rezultate din separarea primară la solidificare, deci mai rezistente la smulgerea din locașul lor decît particulele mici de siliciu din eutectic. În consecință, o uzură abrazivă proprie, mai accentuată la aliajul A datorită plusului de conținut de siliciu, nu apare absolut certă. Din punctul de vedere al uzurii abrazive proprii datorită siliciului, cele trei aliaje ar trebui deci să se comporte practic suficient de asemănător.

Aliajele mai pot suferi o acțiune abrazivă proprie și datorită particulelor de soluție solidă sudate și rupte, care de obicei sînt mai dure decît materialul de bază. În acest caz, efectul unei asemenea acțiuni trebuie să fie cel mai redus la aliajul A, deoarece conținutul său de soluție solidă este cel mai redus.

Din aceste considerente de structură rezultă că uzura cea mai mică trebuie s-o prezinte aliajul A. Diferențele dintre cele trei aliaje în ceea ce privește microduritatea și conținutul de soluție solidă de aluminiu fiind mici, comportarea la uzură a acestor materiale nu poate fi sensibil diferită.

Toate aceste procese, precum și altele similare, care afectează integritatea suprafețelor de frecare, exercită atît asupra structurii, cît și asupra microgeometriei suprafețelor respective o acțiune specifică.

Pentru urmărirea acțiunii acestor procese asupra structurii în suprafața activă a aliajelor studiate au fost examinate probele din fiecare material care au lucrat conjugat cu eșantioanele de fontă F_1 și F_2. S-a considerat că structura normală în suprafața activă a aliajului s-a realizat pe deplin, după ce prin procesul de frecare și uzură cu fonta respectivă urmele de prelucrare de pe suprafața activă a probei de aliaj au dispărut.

Structura în suprafața activă a aliajului de referință A, rezultată din funcționarea conjugată cu fonta F_2, se arată în figurile 6, 7 și 9. Din aceste figuri se poate vedea că în suprafața activă cei doi constituenți cantitativ predominanți în aliaj, și anume soluția solidă de aluminiu și siliciul, se mențin. Aspectul de curgere plastică a soluției solide poate fi identificat, de asemenea, sub formă de pete albe în figurile 6 și 7, cu suprafața neatacată. Această curgere cu acoperirile corespunzătoare de denivelări dispar prin atacarea suprafeței (fig. 9), efect care se produce și în cazul atacării probelor care au șlif metalografic obișnuit (fig. 5 și 8).

Siliciul, cu zone de concentrație mai mare (fig. 6 și 7), continuă de asemenea să rămînă în suprafața activă chiar sub acțiunea procesului de frecare și uzură. Forma particulelor apare însă puțin schimbată (fig. 9), cea mai accentuată modificare suferind-o cristalitele primare, care nu au mai putut fi regăsite sub forma obișnuită de cuburi din masa aliajului (fig. 5 și 8). Bucățelele mai mari de siliciu rămase în suprafața activă prezintă apoi particularitatea că au conturul mai neregulat (fig. 9), rezultat din procesul de uzură. De asemenea apar în suprafața de lucru mai puține

Fig. 1. — Aliajul *A*, soluție solidă dendritică de aluminiu, cu atac, 130 : 1.

Fig. 2. — Aliajul *B*, soluție solidă dendritică de aluminiu, cu atac, 130 : 1.

Fig. 3. — Aliajul *C*, soluție solidă dendritică de aluminiu, cu atac, 130 : 1.

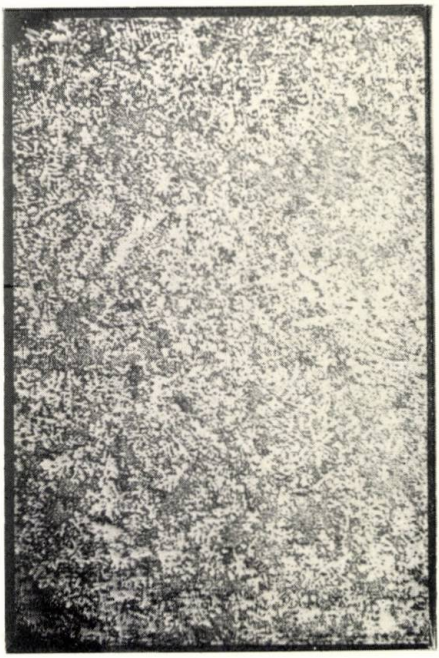


Fig. 4. — Aliajul *A*, repartiția în zone a soluției solide și a siliciului, fără atac, 25 : 1.

Fig. 5. — Aliajul *A*, siliciul primar și eutectic, fără atac. 600 : 1.

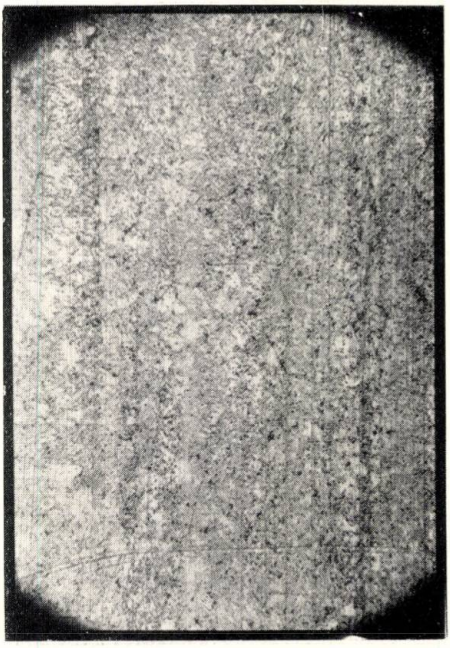


Fig. 6. — Aliajul *A*, suprafața activă, cu fonta F_2, fără atac, 100 : 1.

Fig. 7. — Aliajul *A*, suprafața activă, cu fonta F_2, fără atac, 600 : 1.

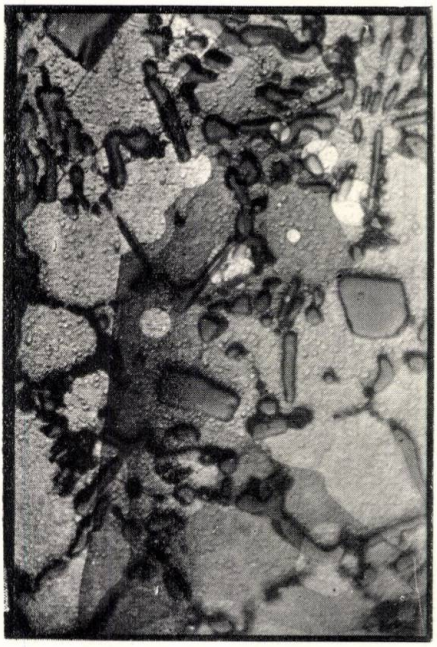


Fig. 8. — Aliajul *A*, siliciul primar și eutectic, cu atac, 600 : 1.

Fig. 9. — Aliajul A, suprafaţa activă, cu fonta F_2, cu atac, 600 : 1.

Fig. 10. — Aliajul B, siliciul eutectic, cu atac, 600 : 1.

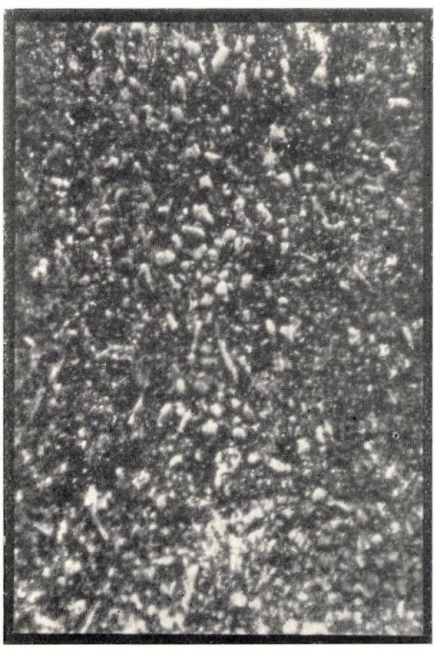


Fig. 11. — Aliajul B, suprafaţa activă, cu fonta F_1, fără atac, 600 : 1.

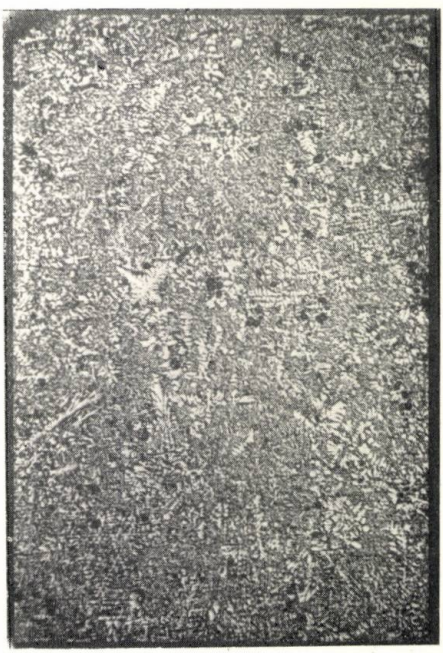


Fig. 12. — Aliajul B, repartiţia în zone a soluţiei solide şi a siliciului, fără atac, 25 : 1.

Fig. 13. — Aliajul B, siliciul eutectic, fără atac, 600 : 1.

Fig. 14. — Aliajul B, suprafața activă, cu fonta F_1, fără atac, 100 : 1.

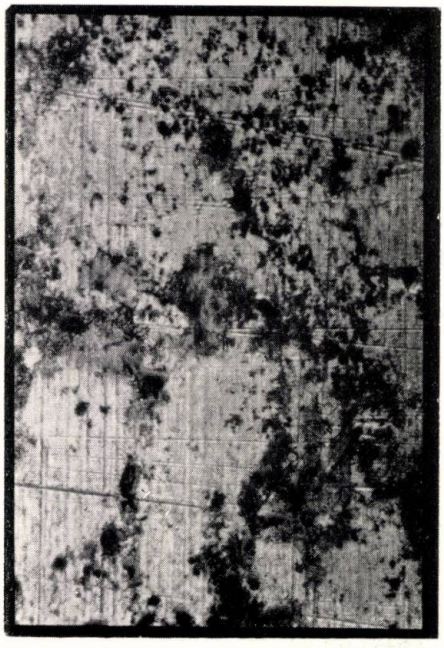


Fig. 15. — Aliajul B, suprafața activă, cu fonta F_1, fără atac, 600 : 1.

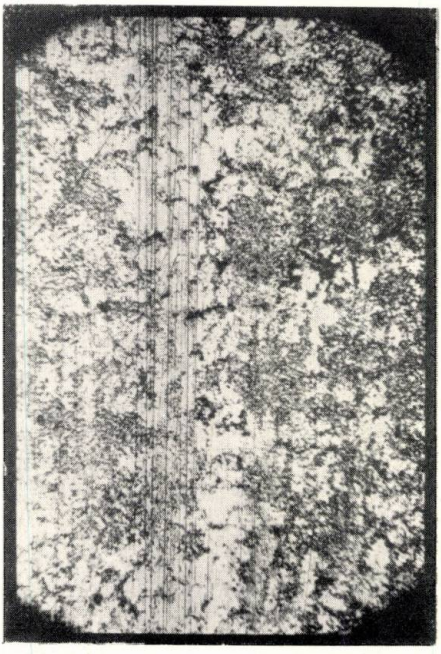


Fig. 16. — Aliajul B, suprafața activă, cu fonta F_2, fără atac, 100 : 1.

Fig. 17. — Aliajul *B*, suprafața activă, cu fonta F_2, fără atac, 600 : 1.

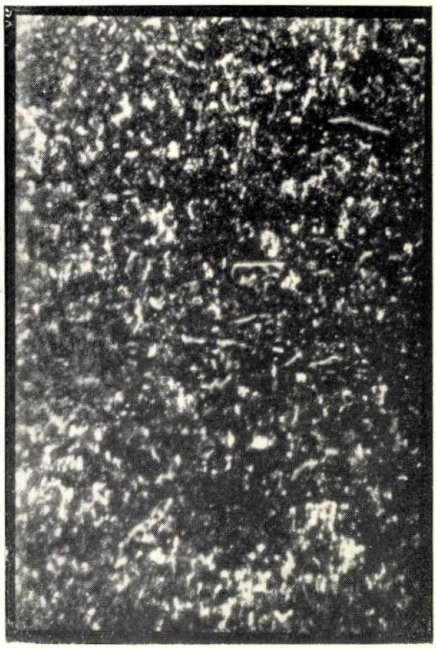


Fig. 18. — Aliajul *B*, suprafața activă, cu fonta F_2, cu atac, 600 : 1.

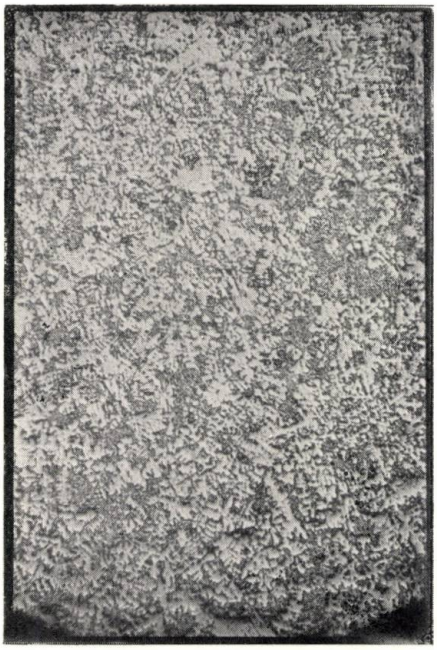


Fig. 19. — Aliajul *C*, repartiția în zone a soluției solide și a siliciului, fără atac, 25 : 1.

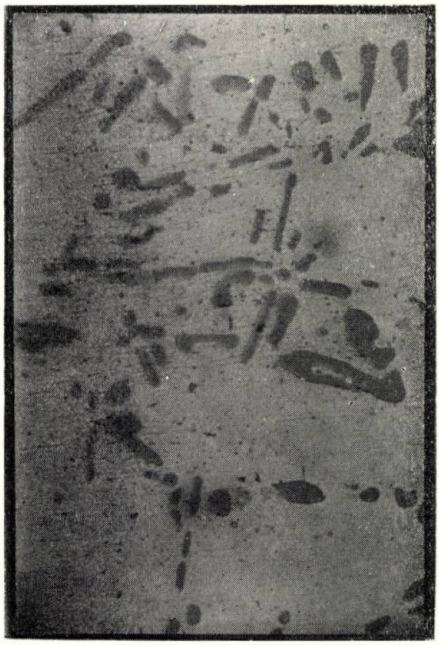


Fig. 20. — Aliajul *C*, siliciul eutectic, fără atac, 600 : 1.

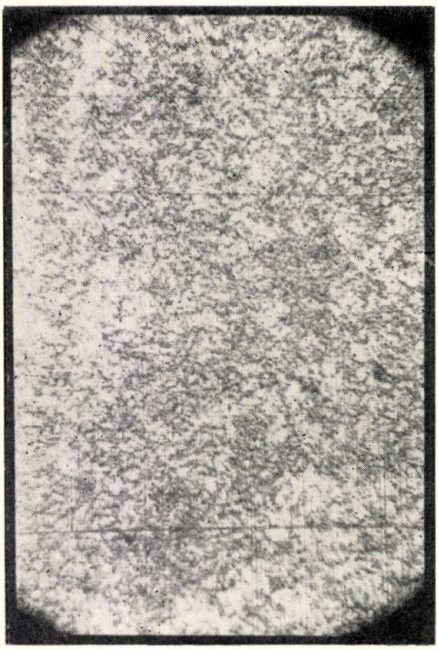


Fig. 21. — Aliajul *C*, suprafața activă, cu fonta F_1, fără atac, 100 : 1.

Fig. 22. — Aliajul *C*, suprafața activă, cu fonta F_1, fără atac, 600 : 1.

Fig. 23. — Aliajul *C*, siliciul eutectic, cu atac, 600 : 1.

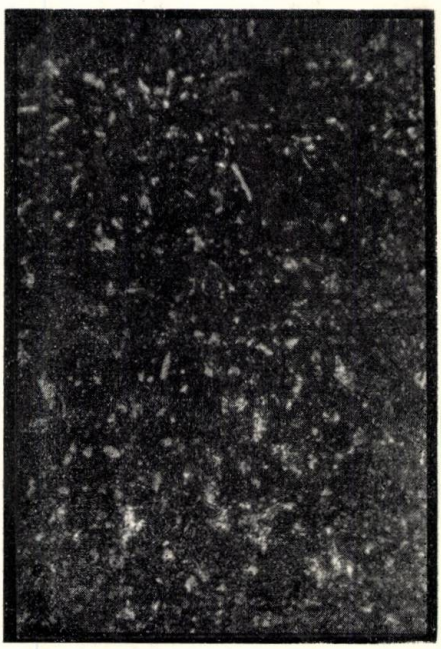


Fig. 24. — Aliajul *C*, suprafața actviă, cu fonta F_1, cu atac, 600 : 1.

particule de siliciu din eutectic, sub formă de bețe, un indiciu că prin uzura de ansamblu a aliajului asemenea bețe sînt fărîmate (fig. 9).

Particularitățile de structură în suprafața activă a aliajului *A*, arătate mai sus în cazul conjugării cu fonta F_2, pot fi constatate și în cazul încercării acestui aliaj într-un cuplu cu fonta F_1, ceea ce permite să se conchidă că fontele cu durități apropiate produc în procesul de uzură efecte asemănătoare asupra structurii din suprafața activă a aliajului antifricțiune.

Aspectele de structură în suprafața activă a aliajului *B*, rezultate din încercarea pe fonta F_1, sînt prezentate în figurile 14, 15 și 11. Efectele procesului de frecare și uzură asupra structurii aliajului sînt în general similare cu cele constatate în cazul aliajului *A*. Astfel, în structură poate fi semnalată prezența celor două faze principale, și anume soluția solidă de aluminiu și siliciul din eutectic. Curgerea plastică a soluției solide, mai accentuată (fig. 14 și 15) pe suprafață la grăunții orientați cu axa mare a dendritelor în planul de alunecare, se prezintă sub formă de pete albe. Caracterul superficial al acestei curgeri apare din faptul că prin atac ea dispare (fig. 11).

Zonele cu concentrații mai mari de siliciu eutectic (fig. 12) se păstrează pe suprafețele de frecare și după ce au acționat asupra lor factorii de uzură (fig. 14). Acele sau lamelele de siliciu (fig. 10) sînt și în acest caz fărîmate parțial prin uzură, după cum se poate vedea în figura 11.

Structura în suprafața activă a aliajului *B*, care a lucrat cuplat cu fonta F_2, este prezentată în figurile 16, 17 și 18. Practic nu poate fi constatată vreo diferență apreciabilă în felul cum arată structura în suprafața activă în cazul acesta față de funcționarea în cuplaj cu fonta F_1, cu duritatea puțin mai redusă.

În figurile 21, 22 și 24 se prezintă structura în suprafața activă a aliajului *C* după funcționarea conjugată cu fonta F_1. Ea se caracterizează prin zone de curgere plastică comparativ mai numeroase, reprezentate de petele albe din figura 21, reflectînd aspectul cu dendrite mai numeroase din masa aliajului (fig. 19). Siliciul se prezintă, de asemenea, mai fărîmițat în suprafața activă (fig. 22 și 24) față de forma pe care o are în masa aliajului (fig. 21 și 23).

În ceea ce privește microgeometria în suprafețele active, din examinarea ca aspect a acestor suprafețe în cazul celor trei aliaje cercetate a rezultat că microgeometria suprafețelor active se prezintă modificată față de aceea rezultată din prelucrare. Ca efect al procesului de rodaj și al funcționării obișnuite a rezultat în suprafețele active o microgeometrie specifică împerecherii de materiale a cuplului de frecare [4]. Din figurile 6, 14, 16 și 21 se poate vedea că suprafața activă rezultată din funcționarea cuplului de frecare este relativ striată. Mărimea striurilor ca lățime și adîncime nu este prea uniformă, ceea ce face să se poată deosebi cu greu acelea care se datoresc impurităților dure mai mari din lubrifiant de acelea rezultate în mod normal, dar specifice felului în care se produce procesul de uzură la cuplul de materiale respectiv. O caracterizare dimensională a microgeometriei suprafeței active la aceste cupluri de materiale apare deci insuficient de precisă și prea puțin concludentă. Pentru caracterizare

ar putea rămîne deci aspectul calitativ, și anume că aceste trei tipuri de aliaje formează, conjugate în fontele F_1 și F_2, o suprafață activă macroscopică cu ușoare rizuri. Fasciculul de asemenea rizuri, mai pronunțate, care apare în figura 16 la cuplul aliajul C-fontă F_2, poate fi atribuit efectului abraziv al unor particule dure exterioare, vehiculate prin intermediul lubrifiantului între suprafețele conjugate.

3. COMPORTAREA LA UZURĂ ȘI RODAJ A ALIAJELOR

Tipurile de uzură care se întîlnesc în general în cazul cuplului de frecare piston-cilindru de la motoarele cu ardere internă sînt :

— uzura adezivă sau de contact, care poate evolua într-un gripaj al suprafețelor cînd procesul este violent,

— uzura corosivă,

— uzura abrazivă.

Severitatea condițiilor de funcționare a acestui cuplu, care poate provoca apariția tipurilor de uzură menționate, rezultă din asocierea următorilor factori mai importanți [5] :

a) viteza de alunecare ridicată : 5—10 m/s ;

b) presiuni specifice importante între segmenți și cilindru și între segmenți și canalele acestora din piston ;

c) temperaturi ridicate datorită contactului intim cu gazele calde de combustie ;

d) ungere mai slabă, datorită :

— reducerii voite a alimentării cu lubrifiant pentru a diminua trecerea și arderea uleiului în camera de ardere și a reduce astfel consumul de lubrifiant,

— volatilizării uleiului în contact cu gazele de ardere,

— regimului specific de funcționare a acestui cuplu (mișcare liniară alternativă), care nu permite asigurarea continuă a unui regim hidrodinamic de ungere ;

e) contactul cu o ambianță corozivă rezultată din combustie și din produsele provenite din alterarea lubrifiantului ;

f) contactul cu abrazivi proveniți din aerul de combustie și aduși de lubrifiant.

Enunțarea acestor multipli factori de uzură face să apară mai pregnant complexitatea fenomenului rezultant și dificultatea de a stabili practic, cantitativ, efectele uzurii adezive, corozive și abrazive.

Practic, efectele acestor factori sînt menținute în limite acceptabile prin realizarea ungerii sub formă de ceață a cuplului piston-segmenți-cilindru. Regimul acesta de lubrifiere nu asigură însă decît o ungere la limită, în care predomină uzura adezivă. În consecință, studiile în legătură cu comportarea la uzură a celor trei aliaje încercate se vor referi mai ales la determinarea rezistenței la uzură în condițiile contactului direct cu fonta cămășii cilindrului în cazul unei ungeri deficiente, cu ceață [6].

Studiul uzurii a fost efectuat în laborator pe cupluri de epruvete, una din piese avînd forma de segment ($4 \times 5 \times 30$ mm) confecționat din

aliaj de aluminiu reprezentînd pistonul, epruveta conjugată reprezentînd cilindrul fiind din fontă și avînd lățimea de 30 mm, iar lungimea de 150 mm.

Încercările cu cuplurile de frecare formate din epruvete au fost efectuate pe un dispozitiv monocilindru tip I.M.A., arătat schematic în figura 25. În acest dispozitiv, segmentul format din aliajul de aluminiu de încercat și epruveta din fonta respectivă de cilindru se fixează cum se arată în figură. Presiunea segmentului pe cilindru se obține cu ajutorul unui resort, iar mișcarea rectilinie alternativă se realizează prin intermediul mecanismului bielă-manivelă.

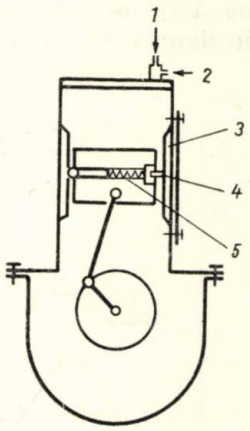


Fig. 25. — Schema monocilindrului experimental tip I.M.A. :
1 — ulei, *2* — aer, *3* — epruveta din fontă, *4* — epruveta din aliaj, *5* — resort.

Caracteristicile funcționale ale dispozitivului experimental au fost în cazul de față următoarele :

— viteza de deplasare a pistonului = 3 m/s,

— presiunea specifică medie a segmentului de aliaj pe epruveta de fontă = 4 kgf/cm^2,

— lungimea cursei pistonului = 100 mm,

— ungerea cu ceață de ulei, obținută prin menținerea constantă a unui debit de ulei de 20 de picături pe minut și presiunea aerului de pulverizare la aproximativ 1 atm.

— temperatura epruvetei de fontă = 250°C la peretele exterior, realizată cu ajutorul unei rezistențe electrice montate chiar în suportul epruvetei-cămașă.

Încercările s-au efectuat la temperatură ridicată, pentru a avea aproximativ condițiile termice cît mai apropiate de acelea existente în partea superioară a pistonului de la motoarele cu ardere internă.

Uleiul folosit a fost tipul 408 pentru încercările cu fonta F_1 și tipul 405 pentru încercările cu fonta F_2, ambele STAS 751—49.

Epruvetele de fontă au fost rodate timp de 12 ore cu un segment din fontă, după care s-a trecut la experimentările propriu-zise în pereche cu aliajele de aluminiu. Acest rodaj s-a dovedit a fi necesar ca urmare a uzurilor excesive produse la încercările directe a aliajelor de aluminiu pe epruvetele de fontă nerodate.

Uzura sub formă globală, în care predomină însă uzura adezivă, s-a urmărit numai la aliajele de aluminiu, pe cale gravimetrică, efectuîndu-se cîntăriri înainte și după o oră de funcționare a cuplului. Epruvetele de aluminiu au lucrat alternativ în pereche cu aceeași epruvetă de fontă, pentru a putea folosi în acest studiu și metoda comparației.

Durata de o oră a unei încercări a fost repetată pînă ce s-a constatat o stabilizare a vitezei de uzură la epruveta de aluminiu. În general, un regim de uzură stabilizat de acest fel s-a obținut după 7 la 9 etape uniorare.

Pentru fiecare din cele trei aliaje de aluminiu s-au experimentat mai multe epruvete. Rezultatele obținute fiind afectate de împrăștieri relativ mari, pentru obiectivul urmărit în lucrarea de față au fost reținute datele a trei epruvete (I, II și III), care au prezentat o comportare la uzură mai concludentă.

Mai trebuie menționat că fontele F_1 și F_2 au prezentat ca structură un fond perlitic fin, cu grafitul lamelar mai fin și mai uniform repartizat în cazul fontei F_2. Datorită conținutului de fosfor puțin mai ridicat, la fonta F_1 eutecticul fosforos apare în cantitate mai mare și repartizat uniform în masa de perlită, în timp ce la fonta F_2 conținutul de acest eutectic este mai redus și concentrat în puncte.

Rezultatele încercărilor cu privire la uzura globală a celor trei tipuri de aliaje de aluminiu, obținute în condițiile arătate mai sus, sînt prezentate în figurile 26, 27 și 28, sub aspectul evoluției uzurii în perioada de început a funcționării cuplului. Deoarece această perioadă a fost prelungită pînă ce s-a obținut o stabilizare a vitezei de uzură, ea poate fi considerată și ca perioadă de rodaj efectuat în regim de funcționare constant. În figura 29 se prezintă uzurile medii normale ale aliajelor, considerate drept valorile obținute la vitezele de uzură stabilizate. În figura 26, de exemplu, s-a notat cu $A-F_1$ evoluția uzurii la cuplul de frecare format din aliajul A conjugat cu fonta F_1, linia I referindu-se la epruveta I, iar linia II la epruveta II, ambele din același material A.

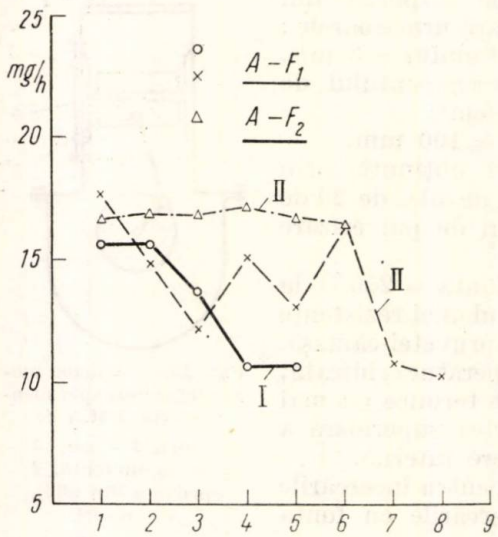


Fig. 26. — Evoluția uzurii în perioada de rodaj la cuplul format din aliajul A cu fonta $F_1(A-F_1)$ și cu fonta F_2 $(A-F_2)$.

Din examinarea acestor figuri reiese că, în pereche cu fonta F_1, cele trei aliaje încercate prezintă o comportare foarte asemănătoare în ceea ce privește uzura globală normală, stabilizată. Această asemănare se poate constata și la funcționarea aliajelor A și B conjugate cu fonta F_2. Experiențele confirmă astfel că în regimul de funcționare semifluid, în care predomină uzura de contact, soluția solidă de aluminiu, ca fază semidură și predominantă cantitativ în structura aliajelor studiate, influențează în mod hotărîtor comportarea la uzură a acestor materiale. Diferența mică dintre microduritate și proporția cantitativă în structură a acestei faze în cazul celor trei aliaje a condus de asemenea la diferențe mici în ceea ce privește rezistența lor la uzură. Faptul că în diagrame poate fi constatată o ușoară superioritate la uzură a aliajului A și o rezistență ceva mai mică la uzură a aliajului B trebuie interpretat în principal prin împrăștierea pe care o prezintă rezultatele, împrăștiere care este de același ordin de mărime ca și diferențele dintre valorile uzurii la celei trei aliaje. Rezistența la uzură ușor superioară a aliajului A mai poate fi interpretată și în sensul că dintre cei doi parametri mai activi în uzura de contact ai soluției solide, și anume microduritatea și proporția cantitativă a fazei în structură,

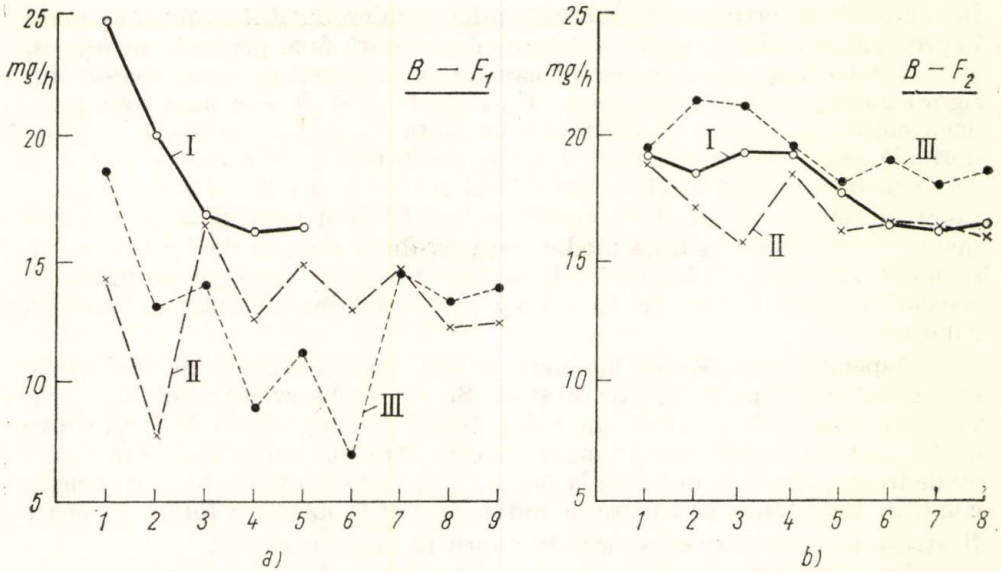


Fig. 27. — Evoluția uzurii în perioada de rodaj la cuplul format din aliajul B cu fonta F_1 ($B - F_1$) și cu fonta F_2 ($B - F_2$).

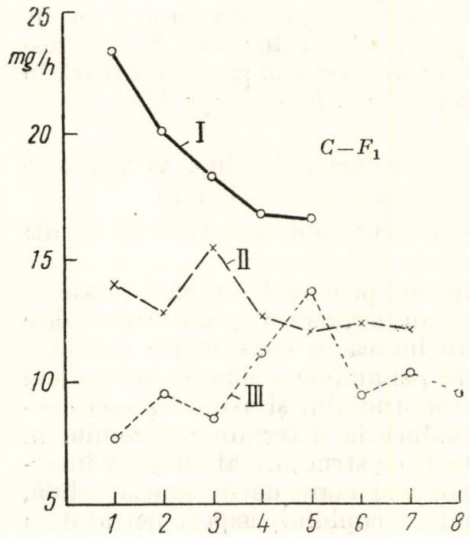


Fig. 28. — Evoluția uzurii în perioada de rodaj la cuplul format din aliajul C cu fonta F_1 ($C - F_1$).

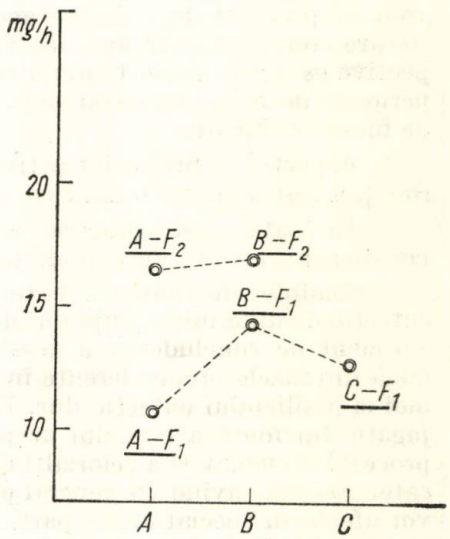


Fig. 29. — Uzurile medii normale ale aliajelor A, B, C în pereche cu fontele F_1 și F_2.

în condițiile încercate și la diferențe mici de microduritate, rolul mai mare în procesul de uzură l-a avut cantitatea din această fază prezentă în proces.

Tot în legătură cu aspectul cantitativ al uzurii se poate vedea din figura 29 că, în pereche cu fonta F_2, aliajele A și B s-au uzat mai mult decît conjugate în cupluri de frecare cu fonta F_1. Această creștere a uzurii normale se datorește atît unei durități puțin mai mari a fontei F_2, cît și rugozității mai pronunțate a suprafeței active la această fontă. Rugozitatea fontei F_1, măsurată cu profilometrul PC-3 și exprimată în abatere medie pătratică de la linia medie, a avut, după rodajul de 12 ore cu un segment de fontă, valoarea NSK $= 1{,}2 \div 1{,}4$ μ, în timp ce la fonta F_2 această valoare a fost de $1{,}6 \div 1{,}8$ μ după rodajul efectuat în aceleași condiții.

Aspectul suprafețelor de lucru la cele două epruvete de fontă este evidențiat mai bine în figurile 30 și 31. Se poate observa că suprafața epruvetei din fontă F_1 a suferit un rodaj destul de bun, dîrele de prelucrare dispărînd în măsură relativ mare. Aceste dîre au rămas însă mult mai evidente în suprafața de lucru la fonta F_2 după rodajul efectuat în aceleași condiții. Rezistența mai mare la rodaj, deci și la uzură, a fontei F_2 poate fi atribuită conținutului sporit de cupru în acest material.

Dacă proprietatea de a se roda a aliajelor se definește prin durata de funcționare a cuplului pînă ce se atinge stabilizarea vitezei de uzură, care în cazul de față se traduce prin numărul etapelor de funcționare indicate prin numerele de ordin 1, 2, 3... din figurile 26, 27 și 28, se constată că aliajul B se rodează, în condiții identice de lucru, puțin mai greu decît celelalte două. Diferența de comportare la rodaj nu are însă nici în acest caz vreo importanță practică deosebită. Din figurile 26 și 27 *b* mai rezultă apoi că procesul de rodaj se accelerează dacă rugozitatea suprafeței de frecare conjugată este mai accentuată (fonta F_2) și duritatea fontei respective este mai mare. Uzura aliajelor fiind în acest caz mai accentuată în perioada de rodaj, se recomandă o prelucrare mai fină a suprafeței piesei de fontă conjugate.

Aspectul suprafețelor active ale aliajelor încercate, după perioada de rodaj, a fost analizat o dată cu prezentarea figurilor 6, 14 și 16.

În toate aceste procese de frecare și uzură pot interveni și ceilalți constituenți de structură ai aliajelor.

Studiile efectuate în cazul de față în principal asupra aliajului eutectic de aluminiu a cuplului de frecare au permis totuși o caracterizare suficient de concludentă a acestora prin luarea în considerare numai a două din fazele preponderente în structură, și anume a soluției solide mai moi și a siliciului eutectic dur. Extinderea studiului și asupra piesei conjugate din fontă a cuplului ar putea conduce la determinarea rolului în procesul de uzură și a celorlalți constituenți de structură ai aliajelor încercate. Aceștia, avînd în general o duritate mai mare decît soluția solidă, vor afecta în special uzura părții din fontă a cuplului, aspect netratat în lucrarea de față.

Primită la redacție la 17 iulie 1964

Fig. 30. — Fonta F_1, aspectul suprafeţei de lucru după rodaj, 25 : 1.

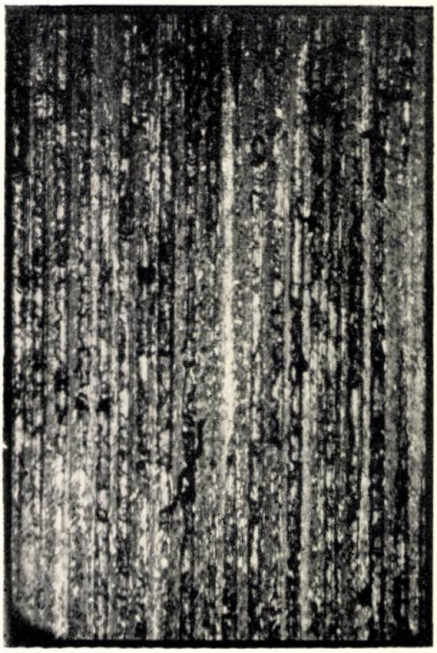


Fig. 31. — Fonta F_2, aspectul suprafeţei de lucru după rodaj, 25 : 1.

BIBLIOGRAFIE

1. H. Schumann, *Metalurgie fizică*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1962, p. 169, 559 şi 565.
2. M. Hansen, *Constitution of Binary Alloys*, New York, Mc.Grow-Hill, 1958, p. 133.
3. F. P. Bowden, D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solids*, Oxford, 1954.
4. Gh. Vasilca, Al. Nica, *Aspecte de structură în suprafaţa activă la unele materiale pentru lagăre*, SCMA, **XIII** (1963), 2, p. 311.
5. A. Schilling, *Les huiles pour moteurs et le graissaje des moteurs*, vol. II, Paris, Technip, 1962.
6. N. Tipei, O. Biţă, I. Dincă, I. Stan, *Studiul uzurii ansamblului segment-cilindru la motoarele diesel*, I.M.A., memoriu, 1960 (lucrare nepublicată).

SCURGERILE TURBULENTE ÎN DÎRA SURSELOR TERMICE ŞI DE DIFUZIUNE [1])

de W. SZABLEWSKI [2])

532

Cu ajutorul teoremei lui Prandtl despre tensiunea de frecare pentru fenomenele turbulenţei libere, teoremă care presupune un amestec constant într-o secţiune perpendiculară pe direcţia generală a scurgerii, se descriu explicit — ca o extindere a rezultatelor cunoscute — cîmpurile asimptotice ale vitezei, temperaturii şi concentraţiei din dîra plană şi dîra axial-simetrică. Rezultatele obţinute se compară cu măsurătorile existente.

1. INTRODUCERE

Prezenta lucrare se referă la dîra în scurgere turbulentă, care se găseşte la o *distanţă mai mare* după un corp axial-simetric (axa în direcţia scurgerii) şi al cărei cîmp de mărimi de stare medie poate fi descris prin legi de similaritate.

După cum se ştie, repartiţia vitezei medii a fost descrisă în repetate rînduri. Pe baza ipotezei lui Prandtl despre lungimea de amestec, cazul plan a fost tratat teoretic în mod amănunţit de H. Schlichting [1]; L. M. Swain [2] a calculat cazul axial simetric. Cu ajutorul noii teoreme a lui Prandtl [3] despre tensiunea de frecare pentru fenomenele turbulenţei libere, teoremă care presupune un amestec constant în secţiunile duse perpendicular pe direcţia generală a scurgerii, H. Görtler [4] a descris dîra plană. Prezenta lucrare completează aceste cercetări prin descrierea completă a dîrei axial simetrice cu ajutorul teoremei noi a lui Prandtl, care, după toate aparenţele, nu s-a făcut pînă acum [3]).

---

[1]) Publicat în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée" **9**, *2* (1964) (în lb. germană).

[2]) Academia Germană de Ştiinţe, Berlin, Institutul de matematică aplicată şi mecanică.

[3]) Date izolate se găsesc răzleţe în literatura de specialitate.

Pentru modelele menționate luăm în considerație cazul general, în care — privit asimptotic — corpul care provoacă dîra reprezintă o sursă termică și de difuziune în scurgere, și calculăm apoi cîmpurile de repartiție ale temperaturilor și concentrațiilor medii.

Sursa termică se poate imagina ca produsă prin încălzirea (respectiv răcirea) corpului; dar, în cazul unor viteze mari ale scurgerilor, ea poate să fie o consecință a undelor de șoc a disipației materialului din stratul-limită care formează dîra. O sursă de difuziune va apărea în cazul unui amestec sau al unei arderi.

După cum este uzual, presiunea statică p va fi considerată constantă în cîmpul de amestec.

În ceea ce privește măsurătorile, există cîteva rezultate mai vechi pentru dîra plană. Dîra axial simetrică a fost măsurată în cîteva lucrări mai noi, care reclamă însă o serie de noi cercetări experimentale. Legile similarității cuprinse în teorie sînt confirmate în cazul unor distanțe mai mari de la corp. În cazul dîrei plane, pentru coeficientul k_1 al teoriei, la citirea lățimii de amestec a profilului standard al vitezei între limitele 0,95 și 0,05 rezultă $k_1 \approx 0{,}087$ (dîra plană după cilindri circulari).

În sfîrșit, am extins teoria dîrei plane după o grilă de bare încălzite, prin calcularea cîmpului de temperatură, comparînd rezultatele cu unele măsurători.

II. DÎRA AXIAL SIMETRICĂ

Insistăm ceva mai amănunțit asupra acestui caz.

În coordonatele cilindrice x,r (x direcția generală a scurgerii) și în componentele corespunzătoare ale vitezei u, v, ecuațiile cîmpului de amestec [4]) pentru mărimile de stare medii sînt:

impulsul

$$r\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\varepsilon(x)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \tag{1}$$

masa

$$\frac{\partial ru}{\partial x}+\frac{\partial rv}{\partial r}=0. \tag{2}$$

Aici

$$\varepsilon(x)=x_1 b_1(x_1)(u_1-u_A(x)) \tag{3}$$

descrie, după Prandtl, viscozitatea cinematică aparentă u_1, respectiv $u_A(x)$, înseamnă viteza curentului, respectiv viteza din axa dîrei; $b_1(x)$ este *jumătate* din lățimea de amestec a cîmpului vitezei; k_1 un coeficient empiric.

[4]) Din ecuațiile generale ale cîmpurilor de amestec turbulente ale gazelor cu densități puternic variabile, rezultă ecuațiile generale date pentru asimptotă (vezi W. Szablewski [6]).

În continuare avem cu $\vartheta = T - T_1$ (T temperatura absolută, T_1 temperatura scurgerii neperturbate) ecuaţia energiei :

$$r\left(u\frac{\partial c_p\vartheta}{\partial x} + v\frac{\partial c_p\vartheta}{\partial r}\right) = E(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial c_p\vartheta}{\partial r}\right). \tag{4}$$

E este aici o măsură pentru faptul că pentru proprietăţile substanţiale, ca, de exemplu, temperatura, există altă „lungime de amestec" decît pentru viteza expusă la variaţii de presiune în timpul schimbului turbulent.

În sfîrşit, cu concentraţia c (componenta masă în unitatea de volum) a unui amestec, avem difuziunea

$$r\left(u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial r}\right) = E\varepsilon(x)\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial c}{\partial r}\right). \tag{5}$$

În cele următoare, linearizăm, pentru scurgerile dîrelor ecuaţia conform asimptotei $u \approx u_1$.

1. CÎMPUL DE VITEZĂ

În variabilele de similaritate

$$\xi = \frac{x}{r_0}, \quad \eta = \frac{r/r_0}{(x/r_0)^n} \tag{6}$$

(r_0 lungimea caracteristică a corpului), luăm

$$\left.\begin{aligned} &\frac{b_1}{r_0} = B\xi^n; \\ &\frac{u}{u_1} = 1 - \frac{u_1 - u}{u_1} = 1 - \frac{u_1 - u_{\mathcal{A}}(x)}{u_1}\frac{u_1 - u}{u_1 - u_{\mathcal{A}}(x)} = 1 - U\xi^m\varphi(\eta), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

în care $U\xi^m = \dfrac{u_1 - u_{\mathcal{A}}(x)}{u_1}$ este diferenţa relativă a vitezei faţă de scurgerea exterioară în axa dîrei :

$$\frac{v}{u_1}\xi^p\psi(\eta).$$

B şi U sînt coeficienţii constanţi adimensionali. Considerînd

$$\left.\frac{\partial}{\partial x/r_0}\right|_{\frac{r}{r_0}} = \left.\frac{\partial}{\partial\xi}\right|_{\eta} + \left.\frac{\partial}{\partial\eta}\right|_{\xi}\left(-n\frac{\eta}{\xi}\right),$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial r/r_0}\right|_{\frac{r}{r_0}} = \left.\frac{\partial}{\partial\eta}\right|_{\xi}\frac{1}{\xi^n},$$

obţinem din (1) şi (2) :
impulsul

$$\xi^{m-1}\left(m\varphi - n\eta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\eta}\right) + U\xi^{p+m-n}\psi(\eta)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\eta} = \varkappa_1 BU\xi^{2m-n}\left(\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\eta}\right), \tag{8}$$

masa

$$U\xi^{m-1}\left(m\varphi - n\eta\frac{d\varphi}{d\eta}\right) - \xi^{p-n}\frac{d\psi}{d\eta} - \xi^{p-n}\frac{\psi}{\eta} = 0. \tag{9}$$

Facem uz de teorema integralei impulsului, care este legată de rezistența W a corpului:

$$W = 2\pi\int_0^\infty \rho_1 u_1^2 r dr - 2\pi\int_0^\infty \rho_1 u^2 r dr \approx 4\pi\rho_1 u_1\int_0^\infty (u_1 - u)\, r dr$$

sau

$$c_W = 8U\xi^{m+2n}\int_0^\infty \varphi(\eta)\,\eta d\eta, \tag{10}$$

unde

$$c_W = \frac{W}{(\rho_{1/2})\, u_1^2\, \pi r_0^2}$$

este coeficientul adimensional al rezistenței (r_0 raza suprafeței frontale).

Identificarea exponenților dă

$$n = \frac{1}{3}; \quad m = -\frac{2}{3}; \quad p = -\frac{4}{3}. \tag{11}$$

În consecință, (8) și (9) dau asimptotic

$$-\frac{2}{3}\varphi - \frac{1}{3}\eta\frac{d\varphi}{d\eta} = \varkappa_1 BU\left(\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{d\varphi}{d\eta}\right), \tag{12}$$

$$U\left(-\frac{2}{3}\varphi - \frac{1}{3}\eta\frac{d\varphi}{d\eta}\right) - \frac{d\psi}{d\eta} - \frac{1}{\eta}\psi = 0. \tag{13}$$

Condițiile la limită sînt

$$\left.\begin{aligned}\varphi(0) = 1,\ \varphi(+\infty) = 0;\\ \psi(0) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Ca soluții se obține

$$\varphi = e^{-(\sigma\eta/2)}, \quad \sigma\psi = -\frac{U}{3}\sigma\eta e^{-(\sigma\eta)^2}, \tag{15}$$

cu factorul de modificare

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{6\varkappa_1 BU}}. \tag{16}$$

Introducerea lui (15) în (16) dă relația independentă de coeficientul empiric $\varkappa_1$

$$U = \frac{c_W}{4}\sigma^2, \tag{17}$$

care poate să servească la determinarea lui c_w.

Coeficienţii U, B şi factorul de modificare σ pot fi determinaţi din (16) şi (17) cu lăţimea σB a profilului vitezei $\varphi(\sigma\eta)$, care poate fi dedusă din (15) :

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\varkappa_1 c_W\right)^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{(\sigma B)^{\frac{1}{3}}} \\ U &= \frac{1}{6}\frac{1}{\varkappa_1}\left(\frac{3}{2}\varkappa_1 c_W\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{(\sigma B)^{\frac{2}{3}}} \\ B &= \left(\frac{3}{2}\varkappa_1 c_W\right)^{\frac{1}{3}} (\sigma B)^{\frac{4}{3}}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Formulele reprezintă în mod sinoptic influenţa coeficientului de rezistenţă c_w asupra caracteristicilor cîmpului.

2. CÎMPUL DE TEMPERATURĂ

Cu teorema de similaritate

$$\frac{\vartheta}{T_1} = \frac{T_A(x) - T_1}{T_1} \frac{T - T_1}{T_A(x) - T_1} = \Theta \xi^m \cdot \chi(\eta), \tag{19}$$

în care $\Theta\xi^m \cdot = \dfrac{T_A(x) - T_1}{T_1}$ descrie diferenţa relativă de temperatură faţă de temperatura exterioară din axa dîrei, iar prin Θ se notează un coeficient constant, (4) dă mai întîi asimptotic

$$m_* \chi - \frac{1}{3}\eta \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\eta} = E\varkappa_1 BU\left(\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\eta}\right). \tag{20}$$

Teorema integrală a energiei este, după cu rezultă din integrarea lui (4) în raport cu r în ipoteza îndeplinită aici,

$$\lim_{r\to\infty} r\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = 0, \qquad \text{(vezi (25))}$$

$$Q = 2\pi\rho_1 u_1 c_p \int_0^\infty \vartheta r \,\mathrm{d}r,$$

unde Q înseamnă intensitatea sursei termice. Cu coeficientul adimensional al sursei termice

$$c_q = \frac{Q/(\pi r_0^2)}{\rho_1 u_1 c_p T_1}$$

putem scrie şi

$$c_q = 2\,\Theta\,\xi^{m_*+\frac{2}{3}}\int_0^\infty \chi\eta\,\mathrm{d}\eta. \tag{21}$$

Rezultă

$$m_* = -\frac{2}{3}, \tag{22}$$

respectiv pentru (20)

$$-\frac{2}{3}\chi - \frac{1}{3}\eta\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\eta} = E\varkappa_1 BU\left(\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\eta}\right), \tag{23}$$

cu condiţiile la limită

$$\chi(0) = 1,\ \chi(\pm\infty) = 0 \tag{24}$$

şi cu soluţia [5])

$$\chi = \varphi^{\frac{1}{E}} = e^{-\frac{1}{E}(\sigma\eta)^2}. \tag{25}$$

Expresia (25) introdusă în (21) dă relaţia

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= \frac{c_q}{E}\sigma^2 \\ \text{sau după (18),}\quad \Theta &= \frac{1}{E}\,\frac{c_q}{\left(\frac{3}{2}\varkappa_1 c_W\right)^{\frac{2}{3}}}\,\frac{1}{(\sigma B)^{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Formula (26) reprezintă dependenţa caracteristicii H a cîmpului de temperatură în funcţie de coeficientul de rezistenţă c_w şi de coeficientul c_q al sursei termice.

Comparîndu-se (26) cu (17), rezultă formula independentă de coeficientul empiric $\varkappa_1$

$$\frac{\Theta}{U} = \frac{4}{E}\,\frac{c_q}{c_W}. \tag{27}$$

Introducînd o temperatură medie T_m a sursei termice, putem să formulăm cu $\vartheta_0 = T_m - T_1$

$$St = \frac{E}{4}\,\frac{\Theta}{U}\,\frac{c_W}{\vartheta_0/T_1}, \tag{28}$$

unde St este numărul lui Stanton:

$$St = \frac{Q/(\pi r_0^2)}{\rho_1 u_1 c_p \vartheta_0}\ \text{ist.} \tag{29}$$

---

[5]) Vezi şi H. Reichardt [5].

3. CÎMPUL DE DIFUZIUNE

Din punct de vedere formal, calculul este identic cu cel al cîmpului de temperatură

$$c = \Gamma \xi^{m_{**}} \gamma(\eta). \tag{30}$$

(5) se scrie asimptotic

$$m_{**}\gamma - \frac{1}{3}\eta\frac{d\gamma}{d\eta} = E\varkappa_1 B\Gamma\left(\frac{d^2\gamma}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta}\frac{d\gamma}{d\eta}\right). \tag{31}$$

Teorema conservării amestecului concentrat

$$\left.\begin{aligned} D &= 2\pi\rho_1 u_1 \int_0^\infty cr\,dr, \\ c_d &= \frac{D/(\pi r_0^2)}{\rho_1 u_1}, \\ c_d &= 2\Gamma\xi^{m_{**}+\frac{2}{3}} \int_0^\infty \gamma\eta\,d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

cu intensitatea D a sursei de difuziune, cu coeficientul adimensional al sursei de difuziune

iar forma

Rezultă

$$m_{**} = -\frac{2}{3}. \tag{33}$$

Ecuaţia (31) se rezolvă cu condiţiile la limită

$$\gamma(0) = 1,\ \gamma(\pm\infty) = 0 \tag{34}$$

prin

$$\gamma = \chi = \varphi^{\frac{1}{E}} = e^{-\frac{1}{E}(\sigma\eta)^2}. \tag{35}$$

Introducînd (35) în (32), avem relaţia

$$\Gamma = \frac{c_d}{E}\sigma^2 \tag{36}$$

sau, în raport cu (18),

$$\Gamma = \frac{1}{E}\frac{c_d}{\left(\frac{3}{2}\varkappa_1 c_W\right)^{\frac{2}{3}}}\frac{1}{(\sigma B)^{\frac{2}{3}}}. \tag{37}$$

Rezultă expresiile

$$c_d = \frac{E}{4}\frac{\Gamma}{U}c_W \tag{38}$$

şi

$$c_d = \frac{\Gamma}{\Theta}c_q. \tag{39}$$

Reprezentarea cîmpului de temperatură şi cea a cîmpului de difuziune sînt identice din punct de vedere formal.

III. DÎRA PLANĂ

Ca ecuaţii ale cîmpului de amestec avem, în coordonatele carteziene x, y (x direcţia generală a curgerii), pentru mărimile de stare medii :

impulsul
$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\varepsilon(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{40}$$

masa
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{41}$$

cu viscozitatea cinematică aparentă
$$\varepsilon(x)=\varkappa_1 b_1(x)\,(u_1-A(x)). \tag{42}$$

(pentru semnificaţia simbolurilor vezi cap. II)

energia
$$u\frac{\partial \vartheta}{\partial x}+v\frac{\partial \vartheta}{\partial y}=E\varepsilon(x)\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}, \tag{43}$$

difuziunea
$$u\frac{\partial c}{\partial x}+v\frac{\partial c}{\partial y}=E\varepsilon(x)\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \tag{44}$$

Tratarea cazului asimptotic $u\approx u_1$ se face după schema din capitolul al II-lea, astfel încît expunerea noastră poate să fie succintă.

1. CÎMPUL DE VITEZĂ

Cîmpul de viteză a fost calculat de H. Görtler [4]. Descrierea lui se dă aici atît din cauza legăturii sale cu cîmpul de temperatură şi cu cel de difuziune, cît şi în scopul deducerii noilor formule (54).

Teorema similitudinii

$$\left.\begin{aligned}&\xi=\frac{x}{l_0}\qquad \eta=\frac{y/l_0}{(x/l_0)^n}\\ &\frac{b_1(x)}{l_0}=B\xi^n;\\ &\frac{u}{u_1}=1-U\xi^m\varphi(\eta),\\ &\frac{v}{u_1}=\xi^p\psi(\eta).\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

(l_1 lungimea caracteristică a corpului)

După (40) şi (41) rezultă :
impulsul

$$\xi^{m-1}\left(m\varphi - n\eta\frac{d\varphi}{d\eta}\right) + \xi^{p+m-n}\psi\frac{d\varphi}{d\eta} = \varkappa_1 BU\xi^{2m-n}\frac{d^2\varphi}{d\eta^2}, \tag{46}$$

masa

$$U\xi^{m-1}\left(m\varphi - n\eta\frac{d\varphi}{d\eta}\right) - \xi^{p-n}\frac{d\psi}{d\eta} = 0, \tag{47}$$

teorema integrală a impulsului

$$\left.\begin{aligned} W &\approx 2\rho_1 u_1\int_{-\infty}^{\infty}(u_1 - u)dy, \\ c_W &= \frac{W}{(\rho_1/2)\,u_1^2 l.1} \\ c_W &= 4U\xi^{m+n}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

respectiv cu

Rezultă pentru exponenţii

$$n = \frac{1}{2}\ ;\ m = -\frac{1}{2},\ p = -1. \tag{49}$$

Cu condiţiile la limită

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 1,\ \varphi(\pm\infty) &= 0, \\ \psi(0) &= 0, \end{aligned} \tag{50}$$

rezultă atunci din (46) şi (47) soluţiile

$$\varphi = e^{-(\sigma\eta)^2},\quad \sigma\psi = -\frac{U}{2}\sigma\eta e^{-(\sigma\eta)^2}, \tag{51}$$

cu factorul de modificare

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{4\varkappa_1 BU}}. \tag{52}$$

(48) dă mai departe relaţia dependentă de coeficientul empiric $\varkappa_1$

$$U = \frac{c_W}{4\sqrt{\pi}}\sigma. \tag{53}$$

Cu lățimea σB a profilului vitezei $\varphi(\sigma\eta)$, dedusă din (51), se determină coeficienții U, B și factorul de întindere σ, adică

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{(\varkappa_1 c_W/\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(\sigma B)^{\frac{1}{2}}},\\ U &= \frac{1}{4\varkappa_1}\left(\frac{\varkappa_1 c_W}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(\sigma B)^{\frac{1}{2}}},\\ B &= \left(\frac{\varkappa_1 c_W}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}(\sigma B)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

2. CÎMPUL DE TEMPERATURĂ

$$\frac{\vartheta}{T_1} = \Theta\,\xi^{m_*}\cdot\chi(\eta) \tag{55}$$

dă asimptotic pentru (43)

$$m_*\chi - \frac{1}{2}\eta\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\eta} = E\varkappa_1 BU\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}\eta^2}. \tag{56}$$

Teorema integrală a energiei

$$Q = 2\rho_1 u_1 c_p\int_0^\infty \vartheta\,\mathrm{d}y$$

(Q intensitatea sursei termice) se scrie cu coeficientul adimensional

$$\left.\begin{aligned} c_q &= \frac{Q/(l.1)}{\rho_1 u_1 c_p T_1},\\ q &= 2\Theta\,\xi^{m_*+\frac{1}{2}}\int_0^\infty \chi\,\mathrm{d}\eta. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Rezultă

$$m_* = -\frac{1}{2}. \tag{58}$$

Cu condițiile la limită

$$\chi(0) = 1,\quad \chi(\pm\infty) = 0, \tag{59}$$

soluția lui (56) este, după Reichardt [7],

$$\chi = \varphi^{\frac{1}{E}} = e^{-\frac{1}{E}(\sigma\eta)^2} \tag{60}$$

şi obţinem din (57) relaţia

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= \frac{c_q}{\sqrt{E}\sqrt{\pi}}\sigma, \\ \text{respectiv după (54)} \qquad \Theta &= \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{c_q}{(\varkappa_1 c_W/\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(\sigma B)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Alte formule :

$$c_q = \frac{\sqrt{E}}{4}\frac{\Theta}{U}c_W \tag{62}$$

şi

$$St = \frac{\sqrt{E}}{4}\frac{\Theta}{U}\frac{c_W}{(\vartheta_0/T_1)}, \tag{63}$$

în care cu temperatura medie T_m a sursei termice şi cu $\vartheta_0 = T_m - T_1$ numărul lui Stanton este

$$St = \frac{Q/(l\cdot 1)}{\rho_1 u_1 c_p \vartheta_0} \text{ ist.} \tag{64}$$

3. CÎMPUL DE DIFUZIUNE

Identitatea formală cu cîmpul de temperatură :

Cu

$$c = \Gamma\xi^{-\frac{1}{2}}\gamma(\eta) \tag{65}$$

şi cu coeficientul adimensional al sursei de difuziune

$$c_d = \frac{D/(l\cdot 1)}{\rho_1 u_1} \tag{66}$$

rezultă

$$\gamma = \chi = \varphi^{\frac{1}{E}} = e^{-\frac{1}{E}(\sigma\eta)^2} \tag{67}$$

şi

$$\left.\begin{aligned} \Gamma &= \frac{c_d}{\sqrt{E}\sqrt{\pi}}\sigma, \\ \text{respectiv} \qquad \Gamma &= \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{c_d}{(\varkappa_1 c_W/\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}(\sigma B)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Apoi

$$c_d = \frac{\sqrt{E}}{4}\frac{\Gamma}{U}c_W \tag{69}$$

şi

$$c_d = \frac{\Gamma}{\Theta} c_q. \tag{70}$$

IV. DÎRA PLANĂ DUPĂ O REŢEA DE BARE INCĂLZITE

Se presupune o reţea de bare cilindrice paralele şi echidistante. Fie distanţa dintre ele $2\,b_0$.

În coordonatele carteziene x, y (x direcţia generală a scurgerii), avem ecuaţiile (40), (41) şi (43). Fie punctul zero al sistemului de coordonate situat în interiorul planului reţelei, la mijlocul distanţei dintre două bare.

Cîmpul de viteză a fost calculat de H. Görtler [4]. Într-o notaţie puţin diferită, scriem pentru viscozitatea cinematică aparentă

$$\varepsilon(x) = \varkappa_1 b_0 [u(x, 0) - u(x, b_0)]. \tag{71}$$

Coordonatele de similaritate sînt

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{b_0}, \quad \eta = \frac{y}{b_0}\cdot \\ \text{Atunci teorema} \\ \frac{u}{u_1} = 1 + \frac{u(x,0) - u_1}{u_1} \frac{u - u_1}{u(x,0) - u_1} &= 1 + U\xi^m \varphi(\eta), \\ \frac{v}{u_1} &= \xi^p \psi(\eta) \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

cu viteza *medie* u_1 a dîrei dă asimptotic din (40) şi (41) mai întîi impulsul

$$m\xi^{m-1}\varphi(\eta) + \xi^{m+p}\psi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\eta} = \varkappa_1 U\xi^{2m}[\varphi(0) - \varphi(1)]\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\eta^2}, \tag{73}$$

masa

$$Um\xi^{m-1}\varphi(\eta) + \xi^p\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\eta} = 0. \tag{74}$$

Rezultă pentru exponenţi

$$m = -1, \quad p = -2. \tag{75}$$

Dacă luăm în consideraţie $\varphi(0) - \varphi(1) = 2$, (73) se reduce la

$$-\varphi(\eta) = 2\varkappa_1 U\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\eta^2}. \tag{76}$$

Soluţia periodică $\varphi = \cos(\pi\eta)$ dă prin introducere în (76)

$$U = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\varkappa_1}, \tag{77}$$

astfel încît

$$\frac{u-u_1}{u_1}=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\varkappa_1}\left(\frac{x}{b_0}\right)^{-1}\cos(\pi\eta). \tag{78}$$

Pentru componenta transversală rezultă atunci din (74)

$$\left.\begin{aligned}\psi&=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi^3}\frac{1}{\varkappa_1}\sin(\pi\eta),\\ \text{respectiv}\qquad\\ \frac{v}{u_0}&=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi^3}\frac{1}{\varkappa_1}\left(\frac{x}{b_0}\right)^{-2}\sin(\pi\eta).\end{aligned}\right\} \tag{79}$$

Soluţia

$$\frac{\vartheta}{T_1}=\frac{\vartheta_A(x)}{T_1}\frac{\vartheta}{\vartheta_A(x)}=\Theta\xi^{m_*}\cdot\chi(\eta) \tag{80}$$

cu temperatura medie T_1 a dîrei dă atunci asimptotic din (43)

$$m_*\chi(\eta)=E\varkappa_1 2U\frac{\mathrm{d}^2\chi}{\mathrm{d}\eta^2}, \tag{81}$$

iar din soluţia periodică $\chi=-\cos(\pi\eta)$ rezultă

$$-m_*=E\varkappa_1 2\pi^2 U,$$

respectiv după (77)

$$m_*=-E, \tag{82}$$

astfel încît avem

$$\frac{T-T_1}{T_1}=-\Theta\left(\frac{x}{b_0}\right)^{-E}\cos(\pi\eta)\qquad(\Theta>0). \tag{83}$$

Coeficientul constant Θ rămîne aici nedeterminant în teoria primei aproximaţii.

V. COMPARAŢIA CU MĂSURĂTORILE

Conform cu caracterul asimptotic al teoriei, pornim cu precădere de la rezultatele obţinute la distanţe mai mari.

A. DÎRA PLANĂ

Măsurătorile se referă la cilindrii circulari; d este aici diametrul cercului.

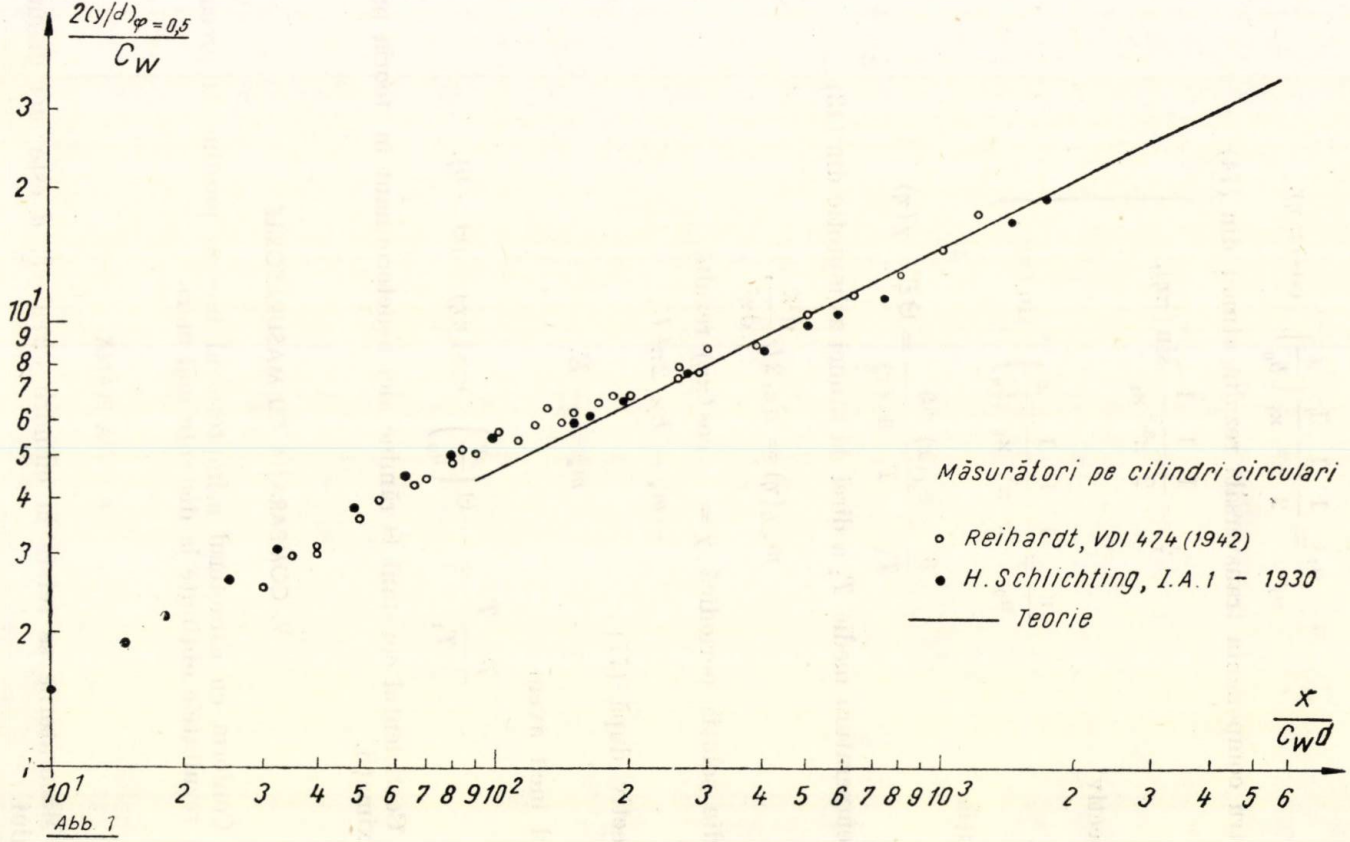


Fig. 1. — Dîra plană.

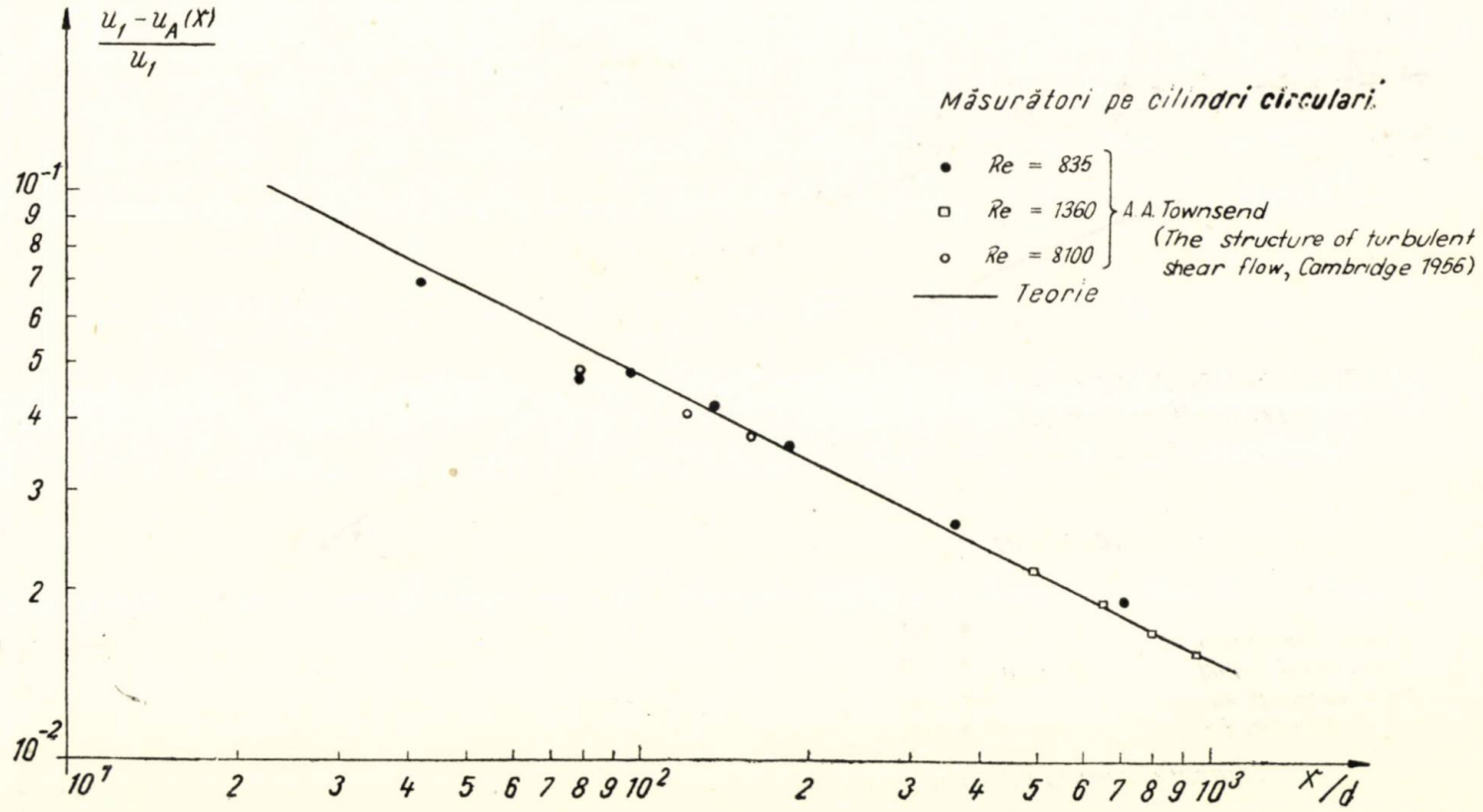


Fig. 2. — Dîra plană.

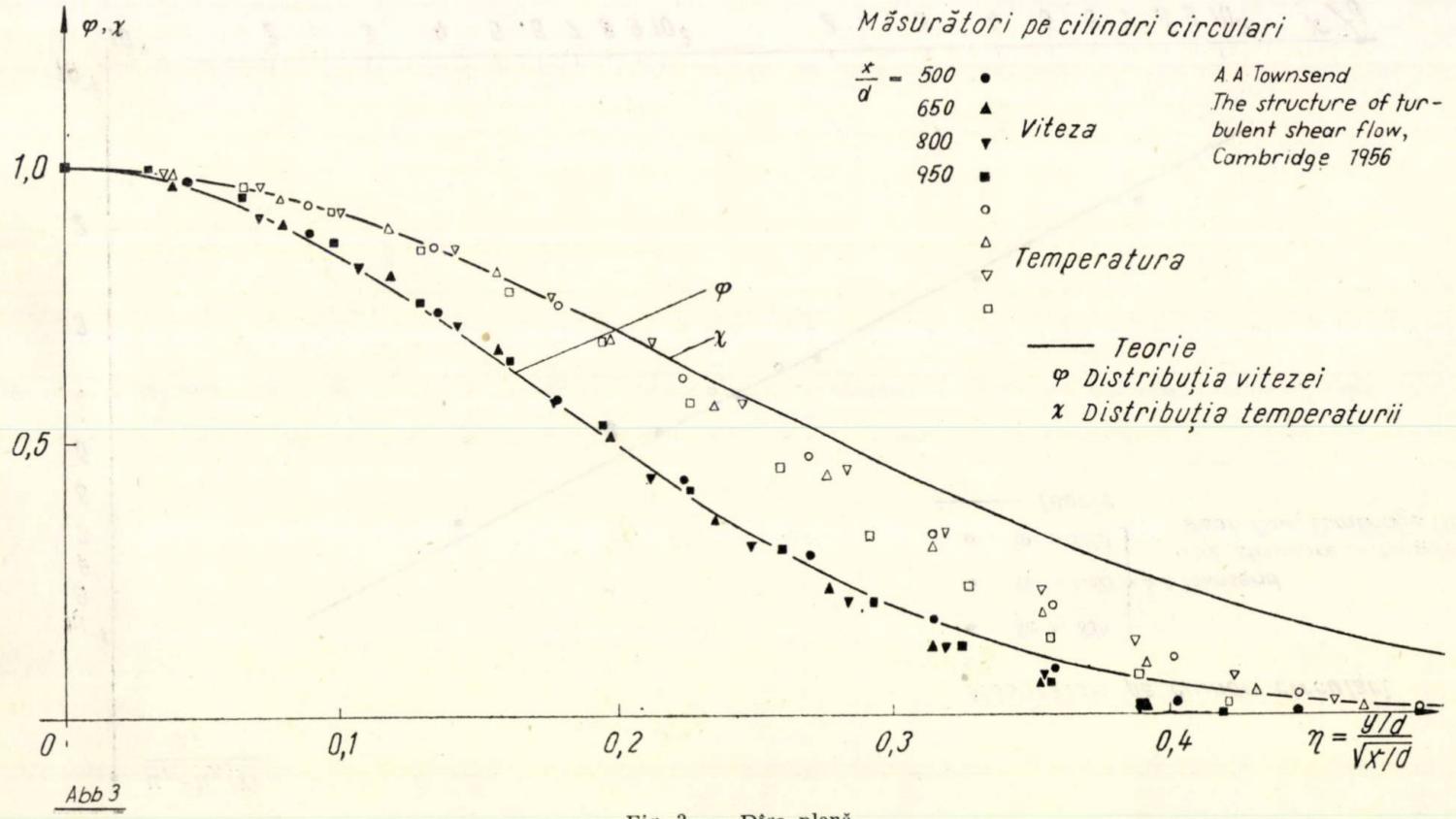


Fig. 3. — Dîra plană.

1. Figura 1 conține dezvoltarea în lățime a dîrei plane după măsurătorile efectuate de Schlichting [1] și H. Reichardt [8], reprezentate după alura lui $\left(\frac{y}{d}\right)_{\varphi=0,5}$ în raport cu $\frac{xc_W}{d}$.

Dreapta înscrisă în figura 1, conform cu legea puterilor creșterii în lățime, dă

$$\frac{2(y/d)_{\varphi=0,5}}{c_W} = 0,475\left(\frac{xc_W}{d}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{84}$$

Teoretic avem, după (51), pentru $\varphi = 0,5$

$$(\sigma\eta)^2 = 0,693 \text{ mit } \eta = \frac{y/d}{\sqrt{x/d}}, \tag{85}$$

ar după (54)

$$\sigma^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{\varkappa_1 c_W}\frac{1}{\sigma B}. \tag{86}$$

Rezultă

$$\frac{2(y/d)_{\varphi=0,5}}{c_W} = 2\left(\frac{0,693\,\sigma B}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\varkappa_1}\left(\frac{xc_W}{d}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{87}$$

Lățimea de amestec σB a cîmpului de viteză descris de funcția normală a distribuției $\varphi(\sigma\eta)$ se deduce, aici și în cele ce urmează, între limitele 0,95 și 0,05, ceea ce dă după (51)

$$\sigma B = 1,5. \tag{88}$$

Din (84) și (87) rezultă apoi pentru coeficientul empiric

$$\varkappa_1 \approx 0,096.$$

2. Din figura 2, care conține măsurătorile lui A. A. Townsend [9] de-a lungul axei dîrei, reiese că pentru $\frac{x}{d} > 100$ este bine îndeplinită legea similarității pentru funcția pe axă. Din figura 2 deducem că

$$1 - \frac{u_A(x)}{u_1} \approx \frac{0,48}{\sqrt{x/d}}. \tag{89}$$

Figura 3 reprezintă funcțiile normate ale distribuției vitezei și temperaturii [9], [10]. În curba teoretică înscrisă după (51), factorul de modificare a fost determinat cu

$$\sigma \approx 4,22.$$

Curba teoretică redă destul de bine distribuția experimentală a vitezei pînă la distanțe mai mari de axă, unde apar apoi abaterile cunoscute.

Distribuţiile experimentale ale temperaturii şi vitezei îndeplinesc destul de bine relaţia (60)

$$\chi = \varphi^{\frac{1}{E}}, \tag{90}$$

în care $E = 2$.

În schimb, din cauza abaterilor sus-menţionate ale distribuţiei teoretice a vitezei, distribuţia teoretică a temperaturii prezintă abateri mai mari de la alura experimentală.

În mod teoretic avem după (54), respectiv (53),

$$\sigma = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\varkappa_1 c_W}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(\sigma B)^{\frac{1}{2}}}, \tag{91}$$

respectiv

$$c_W = \frac{4\sqrt{\pi}\, U}{\sigma}. \tag{92}$$

Rezultă pentru coeficientul empiric

$$\varkappa_1 = \frac{1}{4}\,\frac{1}{U}\,\frac{1}{\sigma}\,\frac{1}{\sigma B}$$

ceea ce dă cu valorile numerice de mai sus

$$\varkappa_1 \approx 0{,}082.$$

Măsurătorile considerate în [1 şi 2] dau valori care se abat puţin de la celelalte ale coeficientului $\varkappa_1$:

$$\varkappa_1 \approx 0{,}087. \tag{93}$$

pentru dîra plană în urma cilindrilor circulari.

B. DÎRA AXIAL SIMETRICĂ

Pentru distanţe mai mari de la corp există aici cîteva măsurători americane, în care s-a calculat pe cale optică lăţimea dîrei după proiectilele lansate cu viteză supersonică.

R. E. Slattery şi W. G. Clay [11] găsesc că în cazul corpurilor în formă de sferă se confirmă legea puterilor de $\frac{1}{3}$ a teoriei similitudinilor pentru creşterea în lăţime a dîrei. Este remarcabil faptul că această lege se manifestă la distanţe de aproximativ $\frac{x}{d} > 50$, în timp ce la distanţe mai mici creşterea în lăţime se face după alte puteri.

Într-o lucrare ulterioară [12] a aceloraşi autori se comunică şi măsurătorile dîrei după proiectile conice, măsurători din care rezultă de asemenea creşterea lăţimii după legea puterilor de $\frac{1}{3}$. Este regretabil că nu sînt indicaţi şi coeficienţii de rezistenţă c_W ai corpurilor.

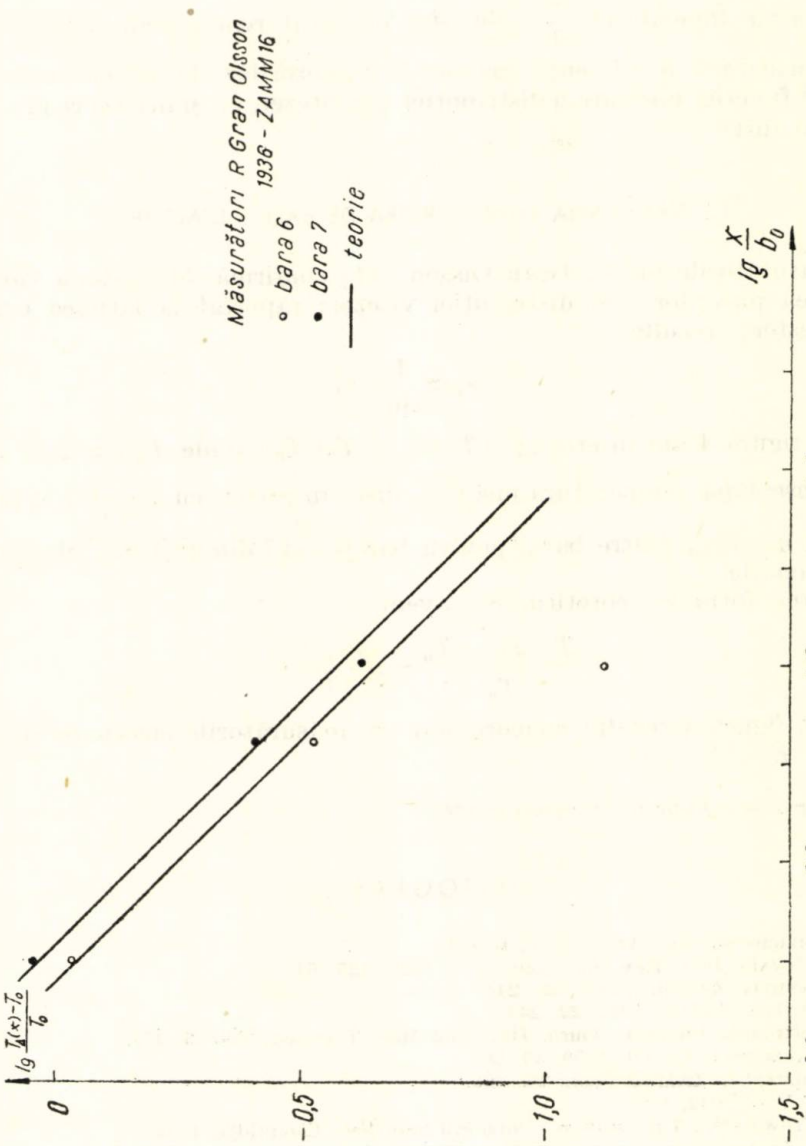


Fig. 4. — Dîra plană după o rețea de bare încălzite.

Măsurătorile efectuate de C. H. Murphy şi E. R. Dickinson [13] asupra lăţimii dîrei dispersează puternic, fapt condiţionat de dificultatea determinării lăţimii pe cale optică.

Cele mai recente măsurători ale lui H. Reichardt [5], care se extind asupra unui domeniu de $\frac{x}{d} < 60$, sînt cu totul remarcabile prin faptul că demonstrează o influenţă marcantă a factorilor de formă, atît sub raportul funcţiei normate a distribuţiei φ a vitezei, cît şi în ceea ce priveşte creşterea dîrei.

C. DÎRA PLANĂ DUPĂ O REŢEA DE BARE ÎNCĂLZITE

Măsurătorile lui R. Gran Olsson [14] confirmă bine, după Görtler [4], legea puterilor (78) distribuţiei vitezei; raportat la lăţimea exactă de amestec, rezultă

$$\varkappa_1 \approx \frac{1}{30},$$

În figura 4 am înscris lg $[(T_A(x) - T_0)/T_0]$, unde T_0 ($\approx 2{,}27$ diviziuni) înseamnă temperatura medie a dîrei în raport cu lg $\left(\frac{x}{b_0}\right)$ (b_0 jumătate din distanţa dintre bare) pentru barele 6 şi 7 din mijlocul dispoziţiei experimentale.

După formula teoretică (83) avem

$$\frac{T_A(x) - T_0}{T_0} \sim \left(\frac{x}{b_0}\right)^{-E}.$$

Din figura 4 rezultă concordanţa cu măsurătorile efectuate cu alte modele: $E = 2$.

Primit la redacţie la 18 octombrie 1963.

BIBLIOGRAFIE

1. H. Schlichting, Ing. Arch., 1930, **1**, 533.
2. L. M. Swain, Proc. Roy. Soc. London A, 1929, **125**, 647.
3. L. Prandtl, ZAMM, 1942, **22**, 241.
4. H. Görtler, ZAMM, 1942, **22**, 244.
5. H. Reichardt, Internat. Journ. Heat and Mass Transfer, 1962, **5**, 251.
6. W. Szablewski, ZAMM, 1959, **39**, 50.
7. H. Reichardt, ZAMM, 1944, **24**, 268.
8. — VDI, 1942, **414**.
9. A. A. Townsend, *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge, 1956.
10. — Austral. Journ. of Scient, Res., 1948, 1, 451.
11. R. E. Slattery. W. G. Clay, Phys. of Fluids, 1961, **4**, 1199.
12. — Phys. of Fluids, 1962, **5**, 849.
13. C. H. Murphy, E. R. Dikcinson, AIAA, Journ., 1963, **1**, 339.
14. R. Gran Olsson, ZAMM, 1936, **16**, 257.

MIŞCAREA STAŢIONARĂ A JETULUI LAMINAR AL UNUI LICHID VÎSCOS INCOMPRESIBIL DINTR-UN ORIFICIU CIRCULAR ÎNTR-UN SEMISPAŢIU LA NUMERE REYNOLDS MICI

de J. FÖRSTE [1])

532

Se consideră mişcarea staţionară a unui lichid vîscos incompresibil dintr-un orificiu circular care se găseşte într-un perete plan infinit. Problema la limita corespunzătoare mişcării se formulează pentru ecuaţia lui Stokes şi se rezolvă prin introducerea unei funcţii de curent.

1. PUNEREA PROBLEMEI

Fie $r \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ coordonatele cilindrice din semispaţiul $x \geqslant 0$, fie v_r componenta vitezei de curgere în direcţia r, v_x în direcţia x, p presiunea şi $\mathcal{R}_e$ numărul Reynolds [2]). Atunci mişcarea menţionată în titlu este descrisă din semispaţiul $x > 0$ prin problema la limită :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{\mathcal{R}_e}\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2}\right), \tag{1}$$

pentru $x > 0$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\mathcal{R}_e}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$v_x(0, r) = f_1(r), \quad v_r(0, r) = f_2(r), \tag{4}$$

$$\lim_{\rho \to \infty} v = 0, \quad \lim_{\rho \to \infty} v_x = 0, \quad \rho^2 = x^2 + r^2. \tag{5}$$

[1]) Institutul de matematică aplicată şi mecanică al Academiei Germane de Ştiinţe, Berlin.

[2]) $\mathcal{R}_e = \dfrac{R f_1(0)}{r}$.

Presupunem că există un număr $R > 0$, astfel încît pentru orice $r \geqslant 0$, $f_1(r)$ şi $f_2(r)$ sînt funcţii H-continue, care se anulează pentru $r \in [O, R]$.

Dacă $v_x(x, r)$ şi $v_r(x, r)$ sînt soluţii ale sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale (1), (2), (3), atunci există, cu aproximaţia unei constante aditive, o funcţie univocă :

$$\psi(x, r) = \int_{(x_0\, r_0)}^{(x,\, r)} [(-v_r \cdot r)\, dr + (v_x \cdot r)\, dr], \quad \begin{matrix} x \geqslant 0,\ r \geqslant 0 \\ x_0 \geqslant 0,\ r_0 \geqslant 0 \end{matrix} \tag{6}$$

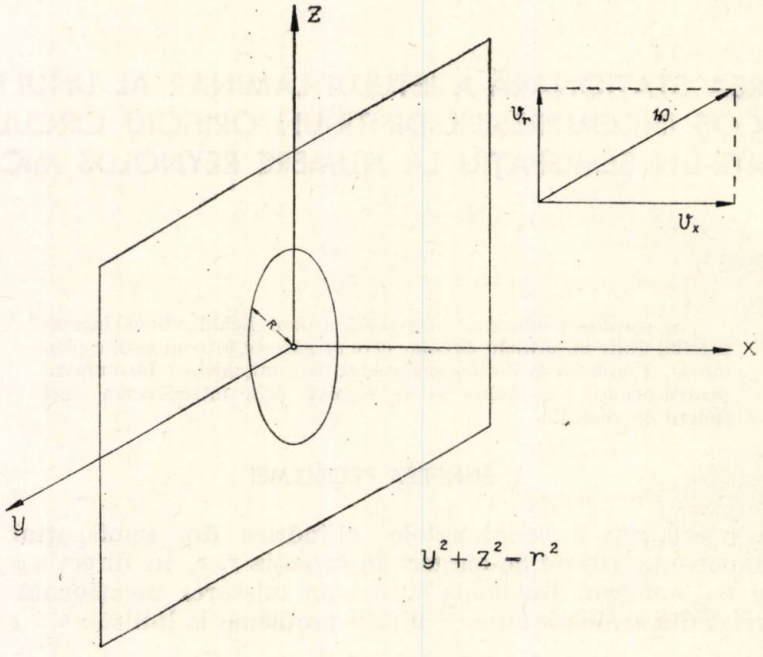


Fig. 1

astfel încît avem pentru $x \geqslant 0$

$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v_x = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \tag{7}$$

iar pentru $x > 0$

$$L^2_{-1}\, \psi = 0, \quad L_{-1} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}. \tag{8}$$

Invers, pentru orice soluţie $\psi(x, r)$ a ecuaţiei cu derivate parţiale (8) există o funcţie univocă $p(x, r)$, astfel încît sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale (1), (2), (3) este satisfăcut punînd

$$v_1 = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad v_x = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{8a}$$

Această funcție poate fi găsită prin integrarea diferențialei totale

$$dp = \frac{1}{\mathcal{R}_e}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} L_{-1}\psi\right)dx + \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x} L_{-1}\psi\right)dr\right] \tag{9}$$

și este determinată univoc, cu excepția unei constante aditive.

Astfel, problema la limită (1)—(5) este echivalentă cu următoarea:

$$L^2_{-1}\psi = 0 \text{ pentru } x > 0,\ r \geqslant 0, \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{x=0} = rf_1(r),\quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{x=0} = -rf_2(r);\quad \lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \tag{11}$$

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0. \tag{12}$$

2. DOUĂ TEOREME AJUTĂTOARE

În continuare avem nevoie de următoarele două teoreme:

1. Dacă funcția $\psi(x, r)$ este pentru $x > 0$, $r \geqslant 0$, soluția ecuației cu derivate parțiale

$$L^2_{-1}\psi = 0,$$

ea poate fi pusă în forma

$$\psi(x, r) = \psi_0(x, r) + x\,\psi_1(x, r), \tag{13}$$

în care ψ_0 și ψ_1 sînt, pentru $x > 0$, $r \geqslant 0$, soluțiile ecuației cu derivate parțiale

$$L_{-1}\psi_k = 0,\ k = 0,1. \tag{14}$$

Invers, fiecare funcție (13) este soluția ecuației cu derivate parțiale

$$L^2_{-1}\psi = 0,$$

dacă ψ_0 și ψ_1 sînt soluțiile lui (14) (vezi [1]).

2. Dacă funcția $\psi_k(x, r)$ este, pentru $x > 0$, $r \geqslant 0$, soluția ecuației cu derivate parțiale

$$L_{-1}\psi_k = 0,$$

atunci există, cu aproximația unei constante aditive, o funcție $\varphi_k(x, r)$, definită pentru $x > 0$, $r \geqslant 0$, legată cu $\psi_k(x, r)$ prin relațiile

$$r\frac{\partial\varphi_k}{\partial x} = \frac{\partial\psi_k}{\partial r},\quad r\frac{\partial\varphi_k}{\partial r} = -\frac{\partial\psi_k}{\partial x}, \tag{14 a}$$

și este soluția ecuației cu derivate parțiale

$$L_1\varphi_k = \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_k}{\partial r} \neq 0. \tag{b}$$

Invers, oricărui φ_k îi corespunde un ψ_k (vezi [2]).

3. REDUCEREA PROBLEMEI LA LIMITĂ DE ORDINUL 4 LA DOUĂ PROBLEME LA LIMITĂ DE ORDINUL 2

Reducem problema la limită (10), (11) la două probleme la limită ale ecuației cu derivate parțiale

$$L_{-1}\,\psi_k = 0\,;\; k = 0,\; 1,$$

din care determinăm ψ_0 și ψ_1. Condițiile (12) le vom considera mai tîrziu.

Prin derivarea parțială a lui (13) obținem

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + x\frac{\partial \psi_1}{\partial r},\quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \psi_1 + x\frac{\partial \psi_1}{\partial x}. \tag{15}$$

Dacă $\left.\frac{\partial \psi_1}{\partial r}\right|_{x=0}$ și $\left.\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right|_{x=0}$ sînt mărginite, se obține, prin introducerea lui (15) în (11),

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial r}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \psi_0}{\partial r}\right|_{x=0} = r f_1(r),\quad \left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \psi_1\right)\right|_{x=0} = -r f_2(r). \tag{16}$$

Atunci condițiile pentru $\psi_0\,(x,\, r)$ sînt

$$L_{-1}\,\psi_0 = 0,\ \text{pentru}\ x > 0,\ r \geqslant 0, \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial \psi_0}{\partial r}\right|_{x=0} = r f_1(r),\ \text{pentru}\ r \geqslant 0. \tag{18}$$

Dacă $\left.\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\right|_{x=0} = -\,r f_0(x)$ există și este H-continuă, ceea ce se va demonstra ulterior, condițiile pentru $\psi_1\,(x,\, r)$ sînt

$$L_{-1}\,\psi_1 = 0,\ \text{pentru}\ x > 0,\ r \geqslant 0, \tag{19}$$

$$\psi_1(0, r) = r\,[f_0(r) - f_2(r)] = f_3(r),\ \text{pentru}\ r \geqslant 0. \tag{20}$$

4. REZOLVAREA PROBLEMELOR LA LIMITĂ DE ORDINUL 2

Considerăm problema la limită (17), (18); în conformitate cu a doua teoremă ajutătoare, ea este echivalentă cu următoarele:

$$L_1\,\psi_0 = 0, \tag{21}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\right|_{x=0} = f_1(r), \tag{22}$$

(21), (22) constituind o problemă a lui Neumann din teoria potențialului pentru semispațiu, cu soluția

$$\varphi_0\,(x,\, r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{t f_1(t)\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,\varphi}{\sqrt{x^2 + r^2 + t^2 - 2rt\cos\varphi}} \tag{23}$$

(vezi [3], p. 187).

Deoarece, conform enunțului, avem $f_1(t) = 0$, pentru $t \geqslant R$ (23) se poate înlocui prin φ

$$\varphi_0(x, r) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{tf_1(t)\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,\varphi}{\sqrt{x^2 + r^2 + t^2 - 2rt\cos\varphi}}. \tag{24}$$

Pentru $x > 0$ (24) are derivate parțiale continue în raport cu x și r, care se obțin prin derivarea sub integrală :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial r} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial x} = \frac{x}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{tf_1(t)\,\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,\varphi}{[x^2 + r^2 + t^2 - 2rt\cos\varphi]^{3/2}}, \tag{25}$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} \frac{(r - t\cos\varphi)\,f_1(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi}{[x^2 + r^2 + t^2 - 2rt\cos\varphi]^{3/2}}. \tag{26}$$

Funcția ψ_0 (x,r) este reprezentată de integrala independentă de drum

$$\psi_0 = \int_{x_0 r_0}^{x, r}\left[\left(-r\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\right)\mathrm{d}x + \left(r\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)\mathrm{d}r\right], \begin{matrix} x, x_0 > 0 \\ r, r_0 \geqslant 0. \end{matrix} \tag{27}$$

Să demonstra că

$$\left.\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\right|_{x=0} = f_0(r) \tag{d}$$

există ca funcție H-continuă pentru orice r și că pentru valori mari ale lui r avem

$$f_0(r) = 0\left(\frac{1}{r^2}\right),\ f_0'(r) = 0\left(\frac{1}{r^3}\right),$$

(24) este potențialul de simplu strat cu densitatea de repartiție H-continuă $f_1(t)$ pe suprafața cercului K $(x = 0, t \leqslant R)$. Completăm pe K ca să devină o suprafață închisă Liapunov S, astfel încît completarea $S - K$ să se situeze complet în semispațiul $x > 0$, și luăm, pe $S - K$, $f_1 = 0$. Atunci în (25) se poate efectua integrarea pe S. Punctele $x = 0$, $r > R$ ale spațiului se găsesc în exteriorul lui S; în consecință, după teorema lui Liapunov, (vezi [4], p.66), pentru ele există derivata $\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}$ H-continuă. Punctele $x = 0$, $t \leqslant R$ se găsesc pe S; ca o consecință a celei de-a doua teoreme a lui Liapunov [4], există limita interioară

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial r},$$

funcție H-continuă de r; ea se definește ca derivata căutată în punctele lui K $(x = 0, r \leqslant R)$.

Vom pune

$$\left.\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\right|_{x=0} = f_0(r). \tag{e}$$

Fiind derivată a unui potențial de simplu strat cu densitatea de repartiție H-continuă, $f_0(r)$ satisface, pentru r mare, relația

$$f_0(r) = 0\left(\frac{1}{r^2}\right), \tag{f}$$

iar pentru r mare $f_0(r)$ este, la rîndul său derivabil și avem

$$f_0'(r) = 0\left(\frac{1}{r^3}\right). \tag{g}$$

În consecință, valorile la limită (20) există și sînt funcții H-continue de r.

Vom arăta că problema la limită (19), (20) are soluția [3])

$$\psi_1(x,r) = \frac{x}{4\pi}\int_0^\infty \int_0^\pi \frac{f_3(t).t.\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\alpha}{[x^2 + r^2 + t^2 - 2rt\cos\alpha]^{3/2}} \tag{28}$$

Pentru aceasta trebuie să se demonstreze că funcția (28)
1° îndeplinește ecuația cu derivate parțiale (19),
2° pentru $x \to 0$ ia valorile la limita (20).
1°. Avem, pentru $x > 0$,

$$\int_0^\pi \frac{-x\mathrm{d}\alpha}{[x^2 + r^2 + t^2 - 2rt\cos\alpha]^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\rho \frac{\mathrm{d}\alpha}{[x^2 + r^2 + t^2 - 2rt\cos\alpha]^{1/2}}. \tag{29}$$

$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\alpha}{[x^2 + r^2 + t^2 - 2rt\cos\alpha]^{1/2}}$ este soluția ecuației cu derivate parțiale (19) (vezi [2]), astfel încît și (29) este soluția lui (19). Urmează că și (28) este o soluție a ecuației cu derivate parțiale

$$L_{-1}\psi_1 = 0 \text{ pentru } x > 0.$$

2°. Din considerațiile făcute în [3, p. 181—183], rezultă că funcția (28) ia valorile la limită prescrise.

Funcțiile ψ_0 și ψ_1 sînt determinate prin (27) și (28), iar v_x, v_r și p sînt calculabile. În felul acesta, problema enunțată la început poate fi considerată ca rezolvată în mod teoretic [4]),

$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x} + \psi_1 + x\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right),$$
$$v = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial r} + x\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right), \tag{h}$$

dacă putem să demonstrăm că condițiile (12), respectiv (5) sînt și ele îndeplinite la infinit.

[3]) Integrala există în ipoteza: $f_3(r) = o(1)$, $f_3'(r) = o(r^{-2})$ pentru r mare. Această condiție este îndeplinită pe baza proprietăților lui $f_0(r)$ și $f_2(r)$.

[4]) Se poate ușor observa că este îndeplinită condiția de mărginire a lui

$$\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right|_{x=0} \text{ și } \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial r}\right|_{x=0}.$$

5. CONDIȚIILE LA LIMITĂ LA INFINIT

Pentru a demonstra că sînt îndeplinite și condițiile la limită (5), respectiv (12), observăm că pentru ρ mare avem :

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial r} = 0\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \tag{i}$$

deoarece $\frac{\partial \psi_0}{\partial r}$ este derivata potențialului de simplu strat ;

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0\left(\frac{1}{\rho^3}\right), \tag{j}$$

deoarece $\frac{\partial \psi_1}{\partial r}$ este derivata derivației potențialului de simplu strat ;

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial x} = 0\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \tag{k}$$

deoarece $\frac{\partial \psi_0}{\partial x}$ este derivata potențialului de simplu strat ;

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0\left(\frac{1}{\rho^3}\right), \tag{l}$$

deoarece $\frac{\partial \psi_1}{\partial x}$ este derivata derivatei potențialului de simplu strat.

Din aceste relații rezultă

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \tag{m}$$

deci condițiile (12) sînt îndeplinite.

6. DEMONSTRAREA UNICITĂȚII SOLUȚIEI

Fie B un domeniu spațial mărginit, iar frontiera sa F fie formată din semisfera $x^2 + \rho^2 = R^2$, $x \geqslant 0$ și planul $x = 0$.

Fiecare soluție regulată în B a ecuațiilor lui Stokes se poate scrie în forma

$$u_k(P^{(0)}) = \frac{1}{8\pi\mu}\int_F \left\{ t_{jk}\left(\mu \frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}n} - p n_j\right) - u_j\left(\frac{\mathrm{d}t_{jk}}{\mathrm{d}n} - p_k u_j\right)\right\} \mathrm{d}S, \tag{n}$$

($P^{(0)} \in B$, $k = 1, 2, 3$; în raport cu j se va suma de la 1 la 3). Fie t_{jk}, p_k soluțiile fundamentale ale ecuațiilor lui Stokes [6].

Dacă se efectuează trecerea la limită $R \to \infty$ în ipoteza $u_j = 0$ (1), $j = 1, 2, 3$, integrala calculată pe jumătatea de sferă se anulează și rezultă

că fiecare soluție regulată a ecuațiilor lui Stokes în semispațiul $H(x > 0)$ și care se anulează la infinit se poate pune în forma

$$u_k(P^{(0)}) = \frac{1}{8\pi\mu}\int_S \left\{ t_{jk}\left(\mu\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}n} - pn_j\right) - u_j\left(\frac{\mathrm{d}t_{jk}}{\mathrm{d}n} - p_k n_j\right)\right\}\mathrm{d}S, \qquad (+)$$

unde S este planul $x = 0$.

Dacă este posibil să se găsească un tensor Green T_{jk} și un vector Green P_k [5]), atunci din $(+)$ se poate obține

$$u_k(P^{(0)}) = -\frac{1}{8\pi\mu}\int_S u_j\left(\frac{\mathrm{d}T_{jk}}{\mathrm{d}n} - P_k n_j\right)\mathrm{d}S\,. \qquad (++)$$

Pentru semispațiu s-au determinat T_{jk}, P_k, atunci dacă se ia

$$T_{jk} = t_{jk} - \tau_{jk} \qquad P_k = p_k - \pi_k\,,$$

τ_{jk} și π_k sînt date prin condițiile lui Oseen [6, p. 114].

Dacă $u_j = U_j$ sînt condițiile pe contur H-continue, date pe S, diferite de zero numai pe o porțiune mărginită a lui S, se poate demonstra, după exemplul lui R. Finn și W. Noll [7], teorema următoare:

Ecuațiile lui Stokes au cel mult o soluție în H, care pe S primește valorile la limită U_j și se anulează la infinit.

BIBLIOGRAFIE

1. L. E. Payne, Journ. Math. Phys., *38*, 145–149, 1959.
2. A. Weinstein, Trans. Amer. Math. Soc., *63*, 242–254, 1948.
3. W. L. Levin, J. I. Grosberg, *Differentialgleichungen der mathematischen Physik*, Verlag Technik, Berlin, 1952.
4. N. M. Günther, *Potentialtheorie*, Leipzig, 1957.
5. G. Birkhoff, E. H. Zarantonello, *Jets, wakes and cavities*, New York, 1957.
6. C. W. Oseen, *Neuere Methoden und Ergebnisse der Hydrodynamik*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1927.
7. R. Finn, W. Noll, Arch. Rat. Mech. and Anal. *1*, 97–106, 1957/1958.

[5]) Fie deci T_{jk} P_k soluțiile problemei la limită omogene ale ecuațiilor lui Stokes pentru semiplanul H.

ASUPRA STABILITĂȚII MENISCURILOR SEPARÎND DOUĂ FAZE IMISCIBILE ÎN TUBURI CILINDRICE VERTICALE ÎN CONDIȚII „STATICE" [1]

de G. MANOLESCU [2]

În legătură cu mecanismul de acțiune al agenților tensioactivi în fenomenele de deslocuire a țițeiului dintr-un mediu poros de către o altă fază fluidă imiscibilă cu el, s-a simțit necesitatea cercetării stabilității meniscurilor separînd două fluide imiscibile situate în poziție gravitațional anormală (faza cea mai ușoară dedesubtul celei mai grele) într-un tub cilindric vertical. Pe cale experimentală s-au determinat condițiile de pierdere a stabilității, influențate de raza tubului, de greutățile specifice ale fluidelor, de tensiunea interfacială dintre ele, de unghiul de contact al meniscului cu peretele tubului și, neașteptat de mult, de histereza unghiului de contact. Se propune un criteriu de stabilitate bazat pe un parametru adimensional grupînd factorii citați, a cărui valoare supraunitară corespunde unei stabilități a meniscului permanentă sau tranzitorie, după cum valoarea histeretică a unghiului de contact conservă sau nu în timp valoarea supraunitară a parametrului propus ca criteriu.

Necesitatea măsurării tensiunilor interfaciale apă-țiței în prezența agenților tensioactivi care o reduc uneori la valori de 10^{-1}—10^{-2} dyn/cm, ca și necesitatea elucidării unor fenomene de o remarcabilă complexitate [1], [2], [3] — [6], asociată cu deslocuirea țițeiului de către apă în medii poroase, ne-a condus la constatarea necesității de a se elucida condițiile de stabilitate ale meniscurilor apă-țiței și ne-a determinat încercarea acestei elucidări, pentru început, într-un caz cu caracteristice geometrice standardizate și în condiții de aproximativă reproductibilitate. În acest scop s-au limitat, inițial, investigațiile la cazul unui menisc de formă geo-

[1] Publicată în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **10**, *1* (1965) (în lb. ranceză).

[2] Institutul de petrol, gaze și geologie București.

metrică regulată [3]) (cu simetrie de rotaţie, practic o calotă sferică), separînd o fază apoasă de una uleioasă, total imiscibile [4]), într-un tub cilindric circular aşezat vertical (în cîmpul gravitaţional terestru), în care cele două faze se află în repaus în secţiuni îndepărtate de menisc, de unde şi precizarea „în condiţii statice" din titlu.

În cazul cînd faza mai densă este situată dedesubtul celeilalte, meniscul ce le separă este, evident, în echilibru stabil de îndată ce s-a atins starea de echilibru de udare a suprafeţei solide de către cele două faze, ceea ce, în unele cazuri, poate necesita durate de timp apreciabile. Convenţional se vor considera aici asemenea meniscuri ca „total stabile".

În cazul însă cînd faza mai densă este situată deasupra celeilalte, meniscul se găseşte, pe de o parte, sub acţiunea forţelor gravitaţionale, care tind să inverseze poziţia reciprocă a celor două faze, iar pe de altă parte sub acţiunea forţelor de interfaţă (mai exact „de contact trifazic"), care tind să conserve această poziţie reciprocă. Este evident că în cazul cînd ultimele prevalează meniscul se găseşte în echilibru şi că, în lipsă de fenomene secundare, acest echilibru este nestabil, deoarece la o înclinare mică a meniscului (cauzată fie de o rotire a tubului, fie de curenţi locali) se produce amorsarea fenomenului de inversare a poziţiilor celor două faze.

Considerîndu-se că în stadiul actual analiza acestei instabilităţi nu ar fi realizabilă decît cu preţul unor simplificări (neglijarea unor factori fizici efectiv activi) care i-ar răpi utilitatea practică, s-a păşit la cercetarea experimentală a acestei instabilităţi.

Experienţele au fost efectuate pe segmente de tuburi de sticlă de diferite naturi (Turingia, Jena, Pyrex, organică : poli- metil- metacrilat) şi de diferite raze în gama 0,5—6 mm. În afara acestei game nu s-au efectuat decît cîteva determinări izolate (care de altfel au confirmat în linii generale rezultatele din gama citată), din cauza dificultăţilor experimentale ivite în afara acestei game, în general conducînd cel puţin la o sporire considerabilă a duratei lucrărilor. Necesitatea urmăririi vizuale a meniscurilor a impus limitarea la tuburi din materiale transparente, deşi se puteau concepe şi dispozitive simţitor mai complicate care să permită detecţia pierderii stabilităţii chiar în tuburi din material opac.

Experienţele au fost efectuate cu o variată gamă de lichide :

faze uleioase : un ţiţei relativ uşor, cu densitatea $D_4^{20} = 0{,}8531$, parafinos,
un ţiţei mediu, cu $D_4^{20} = 0{,}8680$, parafinos-naftenic,
un ţiţei mediu, cu $D_4^{20} = 0{,}8692$, parafinos-naftenic-aromatic
ulei de parafină medicinal;

---

[3]) În astfel de condiţii de încărcare prin adsorbţia eventuală de substanţe tensioactive, străine celor două faze, la suprafaţa internă a cilindrului, încît simetria de rotaţie a meniscului să nu fie alterată.

[4]) Sau, mai exact, ajunse la echilibrul de solubilitate reciprocă şi deci mai departe imiscibilec, în cazul (aproape general) cînd componenţii celor două faze prezintă iniţial o oarecare solubilitate reciprocă.

faze apoase : apă distilată,
apă de conductă din rețeaua orașului București,
ape sărate (apă distilată cu 4—8% NaCl),
apă distilată alcalinizată cu NH_4OH,
apă distilată alcalinizată cu KOH,
soluție de dodecilbenzensulfonat de Na 0,5%,
soluție de octilfenol-polietoxilat 0,1—0,5%.

În cîteva cazuri izolate, pentru sondajul criteriului de stabilitate într-o gamă de diferențe de densitate și de tensiuni interfaciale mult mai extinsă, s-a folosit și perechea de fluide apă distilată-mercur.

Aparatura și procedura folosită au fost următoarele : în fiecare caz în parte s-a luat un segment de tub de sticlă obturat la extremitatea inferioară, care a fost încărcat pînă la aproximativ jumătatea înălțimii cu faza mai densă (apă, respectiv Hg), după care încărcătura a fost completată cu faza ușoară. După astuparea extremității superioare, cu grija de a se elimina complet aerul, s-a lăsat în repaus tubul durate de timp variind între 1 și 72 de ore, în dorința de a se atinge la periferia meniscului valoarea „de echilibru" a unghiului de contact. În acest timp s-au efectuat determinările de tensiune interfacială prin metoda picăturii suspendate (aparat IPGG și în foarte puține cazuri sub 0,5 dyn/cm, cu o balanță Lecomte de Noüy cu inel de Pt), precum și determinarea unghiului de contact, prin metode adecvate fiecărui caz. Astfel, în cazul unghiurilor obtuze, cu menisc vizibil prin faza apoasă (puține de altfel), s-a preferat metoda lamei înclinate (fig. 1 și 2) (aparat IPGG), în celelalte prin metoda picăturii așezate (Benner-Bartell) și, în cazul unora dintre ultimele determinări, printr-o metodă ad-hoc, determinarea în chiar tubul de încercare, metodă principial mult mai indicată, însă cu oarecare limitări de aplicabilitate [7].

După această perioadă de așteptare, tubul a fost întors cu capetele în poziție inversă și s-a observat meniscul, notîndu-se durata de așteptare pînă la pierderea stabilității. În cazurile cînd această durată a fost foarte scurtă în comparație cu durata răsturnării, rezultatele au fost consemnate sub calificativul „menisc inițial instabil", apreciere evident inexactă, însă deocamdată imposibil de ocolit, iar din această cauză rezultatele respective nu au mai fost introduse în diagrama din figura 3 decît în cazul cînd au putut fi incluse în calculul unei medii în care din cinci valori cel mult una s-a situat în această categorie.

Într-adevăr, dacă nestabilitatea meniscului nu ar fi frînată de unii factori întîrzietori, procedeul nici nu ar fi putut fi folosit, deoarece meniscul ar găsi condiții de nestabilitate încă mai accentuate înainte de atingerea noii poziții verticale cu faza grea în sus, poziție în care un echilibru nestabil este posibil. În realitate, atît forțele derivînd din viscozitățile fluidelor prezente sau din caracterul nenewtonian al lor (țițeiurile prezintă adesea, mai ales cele asfaltenice, o tixotropie, ce e drept, foarte slabă, însă detectabilă și adesea măsurabilă), cît mai ales cele derivînd din atracțiile intermoleculare în apropierea regiunilor de separație între faze, și în special a curbei de contact trifazic, exercită o sensibilă acțiune de frînare. În marea majoritate a cazurilor investigate, din cele trei genuri

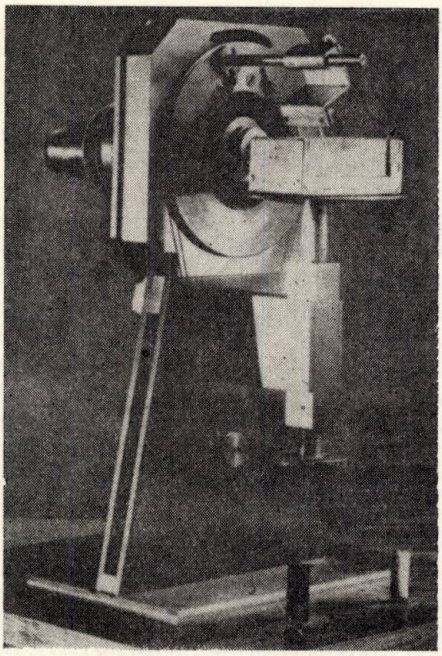


Fig. 1. — Aparat pentru măsura unghiului de contact trifazic prin metoda lamei înclinate (IPGG).

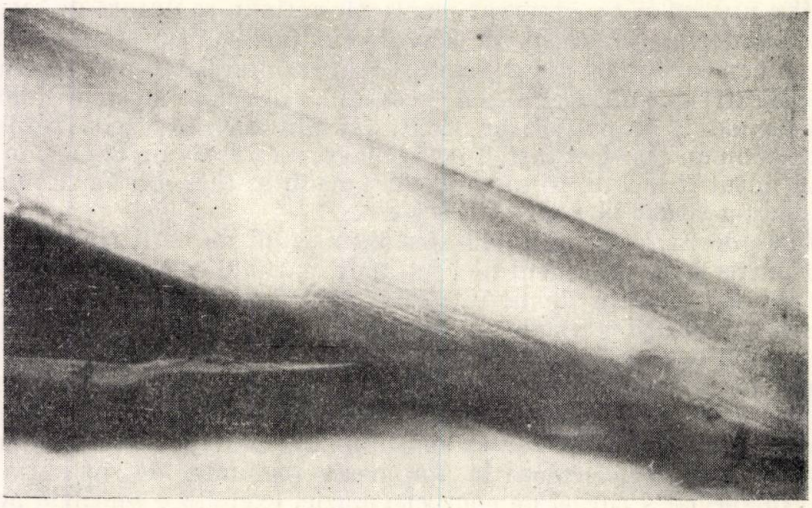


Fig. 2. — Microfotografie a contactului trifazic (mărire cca × 50).

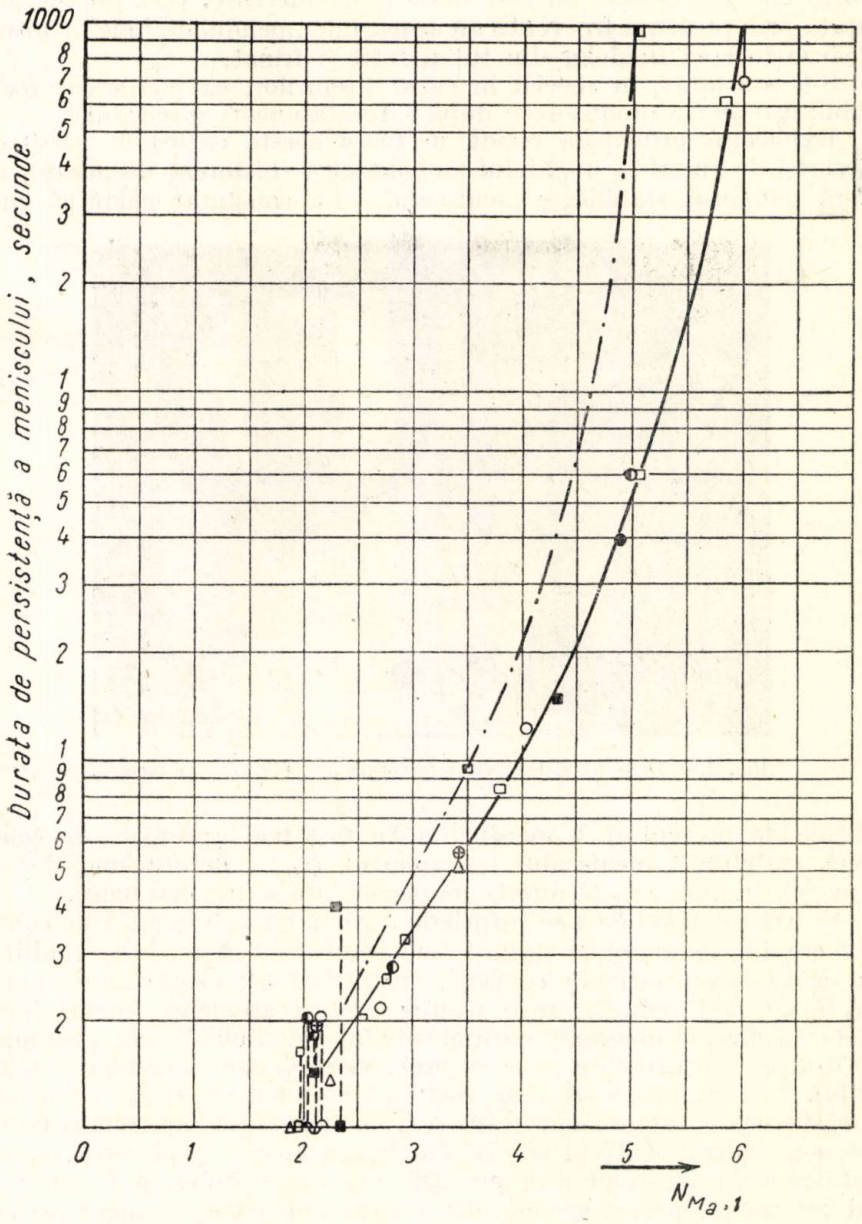


Fig. 3. — Diagramă de corelație între parametrul de stabilitate $N_{Ma,1}$ și durata de stabilitate tranzitorie a meniscului în poziție gravitațional anormală.

de forţe citate, ultimele au fost mult preponderente, ceea ce s-a putut constata prin prezenţa frecventă de mişcări de „pendulare" ale meniscului din cauza inerţiei fluidelor din tubul rotit şi frînat.

S-a constatat, în special în cazul ţiţeiurilor, că pierderea efectivă a stabilităţii nu s-a produs decît după o durată uneori apreciabilă.

Explicaţia principală rezidă în toate aceste cazuri în persistenţa unei astfel de valori a unghiului de contact θ (histereză de udare), încît conferă temporar stabilitate meniscului. S-a constatat chiar că cu cît

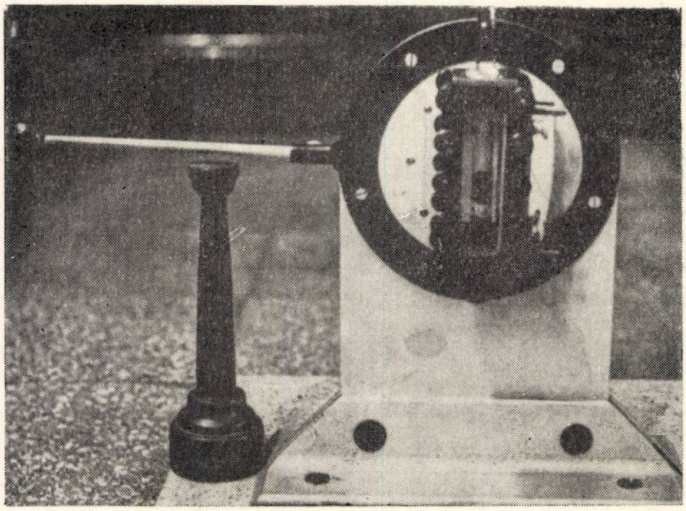


Fig. 4.— Dispozitiv de răsturnare controlată a tubului cu menisc.

condiţiile de prezentare a meniscului au fost mai apropiate de cele ce conferă stabilitate meniscului (parametrul $N_{Ma,1}$, definit mai departe, mai mare), cu atît această durată de persistenţă a fost mai mare.

Există interesul de a se surprinde o gamă cît mai îngustă de condiţii de trecere din domeniul de stabilitate a meniscului în cel de nestabilitate, adică de a lucra în astfel de condiţii încît persistenţa echilibrului meniscului să fie cît mai redusă. Întotdeauna însă în asemenea cazuri inerţia fluidelor la sfîrşitul inversării poziţiei tubului contribuie la scoaterea meniscului din echilibru înainte de a se putea verifica existenţa unui echilibru nestabil. Pentru minimalizarea efectului forţelor de inerţie, îndeosebi prin răsturnarea tubului cu viteză şi pe o traiectorie controlată cît mai strîns, s-a realizat stativul special din figura 4, care permite o reducere simţitoare a acceleraţiilor şi deceleraţiilor impuse tubului, astfel încît s-au putut realiza răsturnări acceptabile ale tubului (fără pierdere rapidă a echilibrului) în circa 1″ şi persistenţe ale meniscului de acelaşi ordin de mărime.

Se întrevede posibilitatea unei blocări temporare a meniscului prin congelare sau cel puţin printr-o răcire suficientă pentru o sporire a viscozităţii uneia din faze, precum şi a construirii unui aparat în care acceleraţiile

impuse în cursul răsturnării să nu conducă la pierderea echilibrului. În primul caz însă durata unei reveniri uniforme a temperaturii (indispensabilă pentru evitarea curenților de convecție) este mult superioară duratei de persistență a meniscului, ceea ce exclude posibilitatea determinării chiar aproximative a acesteia. În cazul al doilea, proiectarea și construcția aparatului respectiv pun probleme de o dificultate deosebită. În această situație s-a considerat suficient pentru tragerea concluziilor cu caracter preliminar ce urmează, lotul de informații rezultînd din realizarea, cu

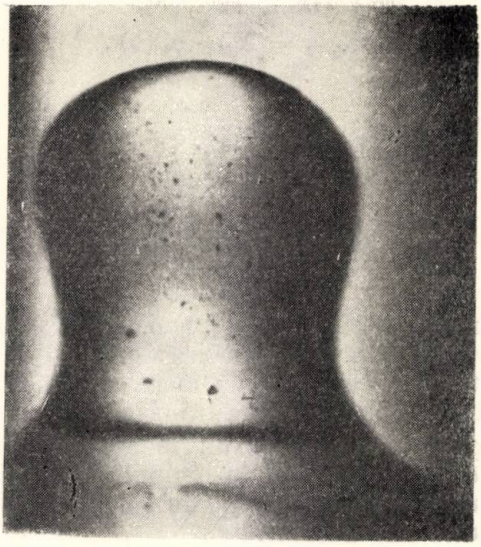


Fig. 5. — Menisc instabil (cu stabilitate tranzitorie) în poziție gravitațional anormală.

precauțiile și în condițiile citate, a peste 200 de operații de răsturnare. Din cauza împrăștierii (explicabile din motivele analizate) apreciabile a rezultatelor, s-au reprezentat în figura 3 nu rezultatele individuale ale fiecărei răsturnări, ci media duratelor fiecărui grup (în general cinci operații), efectuată în aceleași condiții.

În aceste condiții, cu tensiuni interfaciale eșalonate între 28 și 0,12 dyn/cm, cu diferențe de greutate specifică eșalonate între 0,163 și 0,127, mergînd în cazuri particulare pînă la peste 12, cu unghiuri de contact cuprinse între 8° și 35° (în cazuri particulare și în gama 106°—120°) și cu raze de tub cuprinse între 0,4 și 6 mm, rezultatele, reprezentate în figura 5, ne-au permis :

a) tragerea următoarelor concluzii calitative :

1) stabilitatea meniscului este micșorată de creșterea diferenței de greutate specifică dintre fazele în contact ;

2) stabilitatea meniscului este micșorată de contrastul de umidibilitate a solidului (peretelui tubului) de către fazele în contact, respectiv

de diferența de umidivitate prezentată de fiecare dintre aceste faze fluide față de solidul citat;

3) stabilitatea meniscului este micșorată de creșterea razei tubului;

4) stabilitatea meniscului este mărită de creșterea tensiunii interfaciale;

5) durata de stabilitate aparentă a meniscului este sporită la creșterea amplitudinii histerezei de udare;

b) propunerea unui criteriu de persistență în echilibru nestabil a meniscului, bazat pe parametrul adimensional:

$$N_{Ma,1} = N_{Ma} \cdot \varphi_1(\theta), \tag{1}$$

unde

$$N_{Ma} = \frac{2\sigma}{\Delta\gamma \cdot r^2} \tag{2}$$

și

$$\varphi_1(\theta) \cong \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}, \tag{3}$$

unde

σ este tensiunea interfacială în menisc, în dyn/cm,
$\Delta\gamma$ — diferența greutăților specifice ale celor două faze, în dyn/cm^3,
r — raza tubului ce limitează meniscul, în cm,
θ — unghiul de contact cu latura-origine în suprafața apă-sticlă.

Criteriul propus postulează că un menisc separînd două faze imiscibile într-un tub cilindric vertical în cîmpul gravitațional, cu faza mai densă situată deasupra celeilalte, se poate găsi în echilibru nestabil dacă parametrul $N_{Ma,1}$ este supraunitar.

Din cauza factorilor perturbanți citați nu s-a putut verifica valabilitatea acestui criteriu pînă la valoarea $N_{Ma,1} = 1$, echilibrul nestabil neputînd fi în prealabil realizat. Faptul că pe măsură ce valoarea acestui parametru s-a apropiat (prin valori superioare) de unitate durata de persistență a echilibrului s-a redus cu regularitate îndreptățește ipoteza că valoarea-limită a acestui parametru este 1.

La analiza valabilității acestei ipoteze nu trebuie scăpat din vedere că în parametrul citat valoarea unghiului θ din (3) este *cea tranzitorie*. Numai astfel se pot explica corect împrăștierile rezultatelor experimentale din figura 3 și, mai ales, persistența uneori remarcabilă, contrazicînd în aparență în acest caz, criteriul enunțat.

CONCLUZII

În urma experiențelor cu diferite țițeiuri și soluții apoase cu și fără adaos de agenți modificatori de tensiune interfacială și unghi de contact, se emite ipoteza unui criteriu de persistență în echilibru nestabil a meniscurilor separînd două faze imiscibile într-un tub vertical, criteriu potrivit căruia inegalitatea $N_{Ma,1} > 1$ conferă persistența unui echilibru princi-

pial nestabil (putînd, de fapt, simula un echilibru stabil din cauza fenomenelor de histereză a adsorbției-desorbției în cazul valorilor foarte mari ale parametrului citat), iar inegalitatea contrarie este principial incompatibilă cu păstrarea echilibrului.

Verificarea experimentală a putut fi împinsă pînă în gama $1 < N_{Ma,1} < 2$, în interiorul căreia ea pune probleme de realizare experimentală mai dificile și în care valoarea-limită a parametrului citat ar mai putea fluctua.

Se întrevede posibilitatea elucidării pe această bază a multor probleme de deslocuire a țițeiului de către apă în medii poroase, îndeosebi în problemele de așa-zisă deslocuire spontană și în cele de analiză a modului de acțiune a agenților tensioactivi, destul de imperfect cunoscute la scară microscopică.

Sînt de asemenea de așteptat aplicații ale criteriului citat și în unele probleme de determinare a tensiunii interfaciale prin metoda picăturii suspendate în gama valorilor foarte mici, precum și unele aplicații în anumite procese industriale, făcînd uz de dispersia fazelor imiscibile prin orificii sau canale cu viteze mici.

Primită la redacție la 13 iulie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Amyx W. J., Bass M. D., Whiting R. L., *Petroleum reservoir engineering.* Mc Graw Hill, New York, 1960.
2. Бабалиан А. Гр. и др., *Применение поверхностно активных веществ в нефтяной промышленности.* Гостоптехиздат, 1960—1962—1964.
3. Benner F. C., Dodd C. G., Bartell F. E., *Evaluation of effective displacement pressures for petroleum oil-water-silica systems.* Drilling and Production Practice API, 169—1942.
4. Bobeck J. E., Mattax C. C., Denekas M. D., *Reservoir rock wettability.* Trans., AIME, **213**, 155—160 (1958).
5. Гиматудинов С. К., *Физика нефтяного пласта.* Гостоптехиздат, 1963.
6. Manolescu G., *Curs de fizica zăcămintelor de hidrocarburi.* București, Edit. didactică și pedagogică, 1964.
7. Manolescu G., *Asupra posibilităților de a măsura unghiul de contact oferite de metoda caracteristicelor geometrice ale meniscului într-un capilar cilindric.* Bul. I.P.G.G., vol. XI, 131—141 (1964).

RECENZII

ŞT. ENACHE, D. DRAGU şi M. SIMIONESCU, *Tehnologia sculelor aşchietoare*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1964, 551 p.

Împărţită în 13 capitole, lucrarea tratează problema tehnologiei fabricării sculelor aşchietoare clasice şi speciale.

Astfel, în capitolul 1 se prezintă rolul şi importanţa fabricaţiei sculelor aşchietoare, particularităţile specifice fabricaţiei acestora, precum şi unele noţiuni şi definiţii fundamentale cu privire la tehnologie.

În capitolul al 2-lea se tratează precizia de prelucrare, rugozitatea suprafeţelor prelucrate, alegerea bazelor de prelucrare la maşini-unelte şi dispozitive. Se dau o serie de indicaţii referitoare la adaosurile de prelucrare, la dimensiunile şi la toleranţele interoperaţionale.

Capitolul al 3-lea tratează despre materialele şi semifabricatele utilizate la fabricarea sculelor ; se acordă prioritate materialelor romîneşti, dar se dau unele corespondenţe cu materiale din alte ţări străine.

În capitolul al 4-lea se prezintă principalele tipuri de maşini-unelte, dispozitivele şi instalaţiile folosite în fabricaţia sculelor aşchietoare. Se fac aprecieri asupra funcţionării optime şi reglării acestora.

Capitolul al 5-lea tratează despre parametrii geometrici, constructivi, şi metodele pentru controlul acestor parametri.

În capitolul al 6-lea se analizează metodele de bază ale prelucrării sculelor aşchietoare, începînd cu turnarea şi terminînd cu ascuţirea şi netezirea tăişului sculelor.

Capitolul al 7-lea se ocupă de diverse operaţii de tratament termic. Aici se dau multe indicaţii concrete privind regimul de tratament termic, utilaje folosite şi o serie de procese tehnologice pentru mai multe tipuri de scule.

Partea centrală a lucrării o constituie capitolele 8, 9, 10 şi 11, care se ocupă efectiv de tehnologia de prelucrare a sculelor aşchietoare. Se dau cele mai reprezentative procese tehnologice, care, cu oarecare schimbări, pot fi aplicate la fabricarea altor scule asemănătoare, dar diferite ca complexitate şi volum de producţie.

În capitolul al 12-lea se tratează recondiţionarea sculelor aşchietoare, fapt ce vizează îndeosebi realizarea de economii la materialele deficitare.

Ultimul capitol prezintă o serie de consideraţii şi date utile referitoare la eficacitatea proceselor tehnologice proiectate şi la măsurile de micşorare a preţului de cost de fabricaţie.

În general la redactarea lucrării s-a căutat să se prezinte cele mai moderne metode şi procedee tehnologice ce se aplică actualmente în tehnica mondială. Acolo unde a fost cazul, s-au prezentat unele particularităţi specifice fabricaţiei sculelor aşchietoare.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 18. nr. 1 p. 211–216 Bucureşti 1965

Organizarea și prezentarea originală a materialului dau lucrării o deosebită importanță pentru inginerii și tehnicienii care lucrează în această specialitate.

Ing. *M. P. Popov*
Cand. șt. tehnice

W. FLÜGGE, editor, *Handbook of engineering mechanics* (Manual de mecanică aplicată), New York, Mc. Graw-Hill Book Co., 1962, 1 632 p.

Sub titlul scurt al lucrării cu greu s-ar putea întrezări imensul și valorosul material cuprins referitor la problemele ingineriei mecanice. O scurtă înșiruire de date — 1 632 de pagini 1 024 de ilustrații, diagrame, tabele etc., șapte capitole de bază ale ingineriei mecanice; „Matematica", „Mecanica corpului solid", „Teoria structurilor", „Elasticitate", „Plasticitate și vîscoelasticitate", „Vibrații", „Mecanica fluidelor", prelucrate de 88 de profesori experți în domeniile respective — atestă înalta factură științifică a lucrării. Fiecare din subcapitolele cărții prezintă un maxim de conținut sub forma cea mai condensată posibilă, fără a fi totuși numai o simplă înșiruire de formule. Sînt prezentate calcule, metode, teorii etc. pentru domeniul larg care merge de la mecanica solidelor la mecanica fluidelor.

Desigur că dezvoltările diferitelor secțiuni ar fi putut fi mai strînse sau, din contra, lărgite în raport cu nevoile unuia sau altuia dintre cititori, dar se consideră că totuși proporțiile, care au fost date prin munca deosebită a editorului W. Flügge, sînt juste și mulțumesc pe deplin majoritatea celor ce o întrebuințează în activitatea lor. Se poate întîmpla ca prin lărgirea domeniului pe care-l cuprinde să nu fie necesar în totalitate aceluiași cititor, dar în schimb îi pune la dispoziție cunoștințe suficient de valoroase pentru domeniile conexe ale activității sale. Într-un domeniu de specialitate, cartea poate să pară restrînsă, deși prezintă toate problemele principale însoțite de multe probleme anexe, derivate, expuse amănunțit. Credem că în felul acesta cartea cuprinde un material destul de mare și valoros, constituind pentru cercetători chiar surse de inspirație pentru atacarea unor noi probleme, deși, desigur, există în literatura de specialitate diferite cărți și reviste cuprinzînd articole mai detaliate. Pe de altă parte, lucrarea pune la îndemîna inginerului proiectant destul de multe cunoștințe sistematizate, ușor de utilizat în activitatea sa. Este semnificativă afirmația editorului în prefața lucrării: „Această carte nu a fost scrisă pentru cititori, ci pentru cei care o utilizează, și locul ei nu este în rafturile bibliotecii, ci pe masa de lucru".

Nu poate fi considerată ca o scădere a lucrării faptul că nu cuprinde rezultate experimentale, căci prezentarea lor ar fi mărit volumul și ar fi îngreuiat cercetarea ei. Totuși, în unele părți, rezultatele teoretice au fost susținute de descrierile experimentale.

În lucrare, matematica este scrisă exclusiv pentru ingineri care o utilizează numai ca instrument. Mecanica solidului tratează aspectele clasice și include probleme speciale variaționale și probleme ale giroscopului. Teoria structurii are multe detalii privind aplicațiile. Elasticitatea, plasticitatea și vîscoelasticitatea cuprind, pe lîngă teoria generală, și multe probleme mari aplicative. Capitolul de vibrații prezintă subiecte speciale. Mecanica fluidelor cuprinde de asemenea de la concepțiile de bază la problemele speciale, scurgerea supersonică, lubrificația, stratul-limită etc.

Materialul strîns este pus de acord cu cele mai recente lucrări în domeniile respective. Lucrarea constituie un ajutor foarte prețios tuturor cercetătorilor, inginerilor, profesorilor, studenților care lucrează în domeniul larg al mecanicii aplicate.

Chr. Pelecudi

Н. И. КОЛЧИН, М. С. МОВНИН, *Теория механизмов и машин* (Teoria mecanismelor și a mașinilor), Судпромгиз, Ленинград, 1962, 616 p.

Cartea prof. N. I. Kolcin și M. S. Movnin cuprinde întreg materialul necesar învățămîntului tehnic superior, constituind totodată și un ajutor prețios pentru inginerii din institutele de proiectare.

Sistematizată pe secțiunile clasice : a) Structura mecanismelor, b) Cinematica mecanismelor și c) Dinamica mașinilor, cartea utilizează metodele de analiză și de sinteză pentru rezolvarea unui mare număr de probleme variate ale acestui domeniu. În mare parte se ocupă de mecanismele plane și într-o măsură mai redusă de mecanismele spațiale, cu came, cu roți dințate, iar dintre cele cu cuple inferioare de mecanismul articulat sferic, de articulația universală, de mecanismele elicoidale.

Prima parte cuprinde capitolele de structură și de formare a mecanismelor complexe după Assur-Artobolevski, precum și unele probleme ale mecanismului fundamental cu patru elemente articulate.

În partea a doua se expun metodele grafice generale pentru determinarea parametrilor cinematici, traiectorii, viteze, accelerații, precum și metodele analitice aplicate pe cîteva cazuri particulare de mecanisme cu cuple de rotație și de translație. Se evidențiază capitolul de mecanisme cu came, dată fiind importanța lor în automatizarea proceselor tehnologice, și capitolul de transmisii prin roți dințate, foarte bine încadrat de o varietate mare de probleme a căror rezolvare epuizează situațiile întîlnite obișnuit în practică. De la formele geometrice ale angrenajelor la relațiile cinematice se tratează transmisiile cilindrice, conice, elicoidale, trenurile de roți dințate, mecanismele planetare. Partea de cinematică cuprinde deci separat problemele mecanismelor cu cuple inferioare de cele cu cuple superioare, ceea ce corespunde atît metodelor de tratare specifice cît și problemelor caracteristice cazurilor respective.

Ultima parte, dinamica mașinilor, include de fapt și cinetostatica mecanismelor, ocupîndu-se de forțele care acționează în mașini, de determinarea mișcării mașinii, de regimurile de funcționare, de probleme de echilibrare și de reglare a mașinilor. Se încheie cu numeroase rezolvări ale problemelor de frecare, de alunecare și de rostogolire.

Desfășurarea conținutului lucrării este rațională, iar problemele și rezolvările sînt sistematizate și în mod clar expuse.

Chr. Pelecudi

А. И. ТАЙНОВ, *Новые виды зубчатых передач* (Noi tipuri de angrenaje). Изд-во Академии Наук Белорусской ССР, Минск, 1960, 188 p.

Lucrarea lui A. I. Tainov reprezintă o monografie care sintetizează căutările actuale în problema îmbunătățirii condițiilor de lucru ale profilurilor dinților roților dințate. Se prezintă

și o serie de contribuții teoretice valoroase ale autorului (o teorie nouă a angrenajelor cu dinți înclinați, la care se reduce la minimum frecarea în elementele cuplelor cinematice superioare).

Lucrarea cuprinde un amănunțit studiu teoretic asupra condițiilor de lucru ale profilurilor dinților diferitelor tipuri de angrenaje, ținîndu-se seama de frecare și de uzură. În legătură cu aceasta, în monografie se face o amplă și profundă analiză a angrenajelor cu axe paralele formate din roți dințate cilindrice cu dinți drepți și înclinați din punctul de vedere al alunecărilor profilurilor conjugate, repartizarea tensiunilor de contact maxime și a caracterului uzurii porțiunilor active ale flancurilor dinților în evolventă și cicloidă. Pe baza acestei analize se formulează avantajele roților dințate cu dinți înclinați față de cele cu dinți drepți. Se arată, totodată, că și la roțile dințate cu dinți înclinați mai rămîn o serie de neajunsuri, care pînă în prezent n-au putut fi remediate. Astfel, de exemplu, la roțile dințate cu dinți înclinați are loc o repartizare neuniformă a tensiunilor de contact maxime atît în lungul liniei de angrenare, cît și a liniei de contact a flancurilor reciproc înfășurătoare. De asemenea, la roțile dințate cu dinți înclinați rodate, aproape întreaga sarcină utilă e suportată numai de porțiuni înguste ale flancurilor dinților, situate în lungul liniei polilor de angrenare (bandă lată de circa 0,3—0,7 m_f—m_f, modulul frontal al roților dințate), pe cînd porțiunile capului și piciorului dintelui nu sînt folosite aproape de loc.

Cu aceste probleme de analiză se ocupă primele două capitole ale monografiei. Cu toate că acestea sînt în general cunoscute din diferite lucrări dispersate scrise de diferiți autori, totuși în forma în care sînt prezentate au o valoare, deoarece în monografie ele sînt redate concis și într-o interpretare ușor accesibilă.

În următoarele capitole (III—VI), pe baza analizei făcute în primele două, se stabilesc căile principale pentru îmbunătățirea condițiilor de lucru ale profilurilor angrenajelor liniare: la angrenajele cicloidale — utilizarea roților dințate cu dinți înclinați cu înălțime redusă (dinți în formă de caneluri) cu angrenare extrapolară (ante- sau postpolară); la angrenajele în evolventă — utilizarea roților dințate cu profiluri nedeplasate sau deplasate cu dinți înclinați cu înălțime redusă (în formă de caneluri elicoidale în evolventă). Tot în grupa transmisiilor cu roți dințate cu dinți de înălțime redusă se cuprind și angrenajele punctiforme, la care profilurile frontale ale dinților sînt circulare (sau apropiate de arcul de cerc). La toate aceste angrenaje se reduc substanțial pierderile prin frecare dintre dinții în angrenare și, ca urmare a solicitării mai favorabile a dinților de înălțime redusă, capacitatea de încărcare a noilor angrenaje este cu mult mai ridicată decît a angrenajelor standard. Roțile dințate cu dinți înclinați în formă de caneluri exclud și alte neajunsuri existente la roțile dințate cu dinți înclinați obișnuite. De exemplu, aceste roți nu prezintă fenomene de subtăiere sau de ascuțire a dinților, numărul de dinți al roții mici poate fi ales cu mult mai mic decît la roțile obișnuite, timpul pentru execuția acestor danturi e mult mai redus ca urmare a volumului de metal îndepărtat sub formă de așchii de 2—3 ori mai mic, se pretează bine la executarea prin rulare a dinților etc.

Problemelor proiectării transmisiilor cu roți dințate cu dinți înclinați de înălțime redusă (determinarea parametrilor geometrici ai danturii roților, calculul de rezistență a dimensiunilor de bază) li se acordă atenție destul de mare, cu tot volumul restrîns al lucrării. Totuși trebuie observat că soluțiile prezentate de autor, pe deplin justificate teoretic și care au ca bază observații efectuate în exploatarea angrenajelor standard, de la analiza critică a cărora s-a ajuns la propunerea unor noi angrenaje, și clarificarea tuturor problemelor pe care le ridică noile transmisii sînt chestiuni la care studiul teoretic trebuie să fie dublat de vaste cercetări experimentale. Dar acestea, așa cum arată și autorul lucrării, este o problemă de viitor, la care trebuie să-și dea concursul uzinele și laboratoarele pentru încercarea roților dințate.

Lucrarea de mai sus, cu toate că se adresează în primul rînd inginerilor din institutele de cercetări științifice în roți dințate, poate fi utilizată, prin detaliata prezentare a problemelor

de proiectare a noilor angrenaje, şi de inginerii şi tehnicienii din industria constructoare de maşini.

Lucrarea a fost tradusă şi în limba romînă de către Institutul de documentare tehnică (1962). Aceasta dovedeşte şi mai mult interesul major pe care îl trezeşte.

Gheorghe Miloiu

G. BERNDT und H. TRUMPOLD, *Winkelmessungen* (Măsurarea unghiurilor), ed. a 3-a, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1964, 111 figuri, 68 p.

În cadrul colecţiei Werkstattbücher (cărţi pentru atelier), editată de H. Haake, editura Springer pune la îndemîna cititorilor caietul nr. 18 cu titlul de mai sus. Autorii, prof. dr. ing. G. Berndt şi prof. dr. ing. H. Trumpold prezintă această lucrare într-o a treia ediţie (ediţia I în 1925), complet revizuită. Faptul că specialişti cu o calificare atît de ridicată cum sînt autorii au apreciat util să prezinte măsurarea unor parametri geometrici de felul unghiurilor într-o colecţie de cărţi tehnice pentru atelier, deci de largă răspîndire, arată cerinţele faţă de precizie pe care le formulează producţia, precum şi dificultăţile legate de măsurarea unor parametri de acest fel. Dacă se consultă lucrarea, se poate constata într-adevăr că verificarea şi determinarea toleranţelor cu care sînt executate unghiurile la cele mai comune instrumente de verificare, cum sînt echerul de 90° şi altele, apoi măsurarea unghiurilor la unele din cele mai răspîndite elemente de asamblare în organele de maşini, cum sînt conurile şi alezajele conice etc., toate aceste măsurători şi determinări ale toleranţelor de execuţie sînt legate, în ceea ce priveşte efectuarea lor, de dificultăţi importante. Studierea celor mai simple metode de măsurare şi utilizarea celor mai adecvate instrumente de măsură a unghiurilor în condiţiile în care alţi parametri geometrici ai pieselor mecanice, cum sînt lungimile şi rugozitatea suprafeţelor pieselor, se măsoară cu toleranţe de 1/1 000 mm — iată ce apare din lucrare că a fost ţinta urmărită de autori în lucrarea care face obiectul acestei recenzii.

Autorii grupează în patru capitole materialul tratat, dispuse într-o ordine recunoscută în general ca logică. Astfel, în capitolul 1, „Introducere", se arată mai întîi că în tehnică determinarea unghiurilor este rămasă în urmă faţă de măsurarea lungimilor, atît în ceea ce priveşte instrumentele, cît şi eroarea de măsură. Pe de altă parte, unele măsurători de unghiuri ale căror laturi nu sînt materializate prin suprafeţe, ci prin linii, ca, de exemplu, la piesele conice, sînt mult mai dificil de executat decît măsurarea lungimilor. În continuare se tratează problema calculului erorilor de măsură în cazul erorilor sistematice şi a celor întîmplătoare, arătînd prin exemple numerice cum se aplică formulele şi se interpretează rezultatele. În capitolul al 2-lea, „Unităţi de măsură pentru unghiuri", se arată care sînt aceste unităţi şi submultiplii lor, iar în tabele se prezintă transformarea gradelor sexagezimale în grade centezimale. Instrumentele de măsură sînt tratate în capitolul al 3-lea, împărţindu-le în instrumente fixe de măsură şi instrumente şi instalaţii bazate pe principiul citirii mărimii măsurate. Din prima categorie fac parte, printre altele, echerele şi cepurile conice, precum şi riglele de sinus şi de tangente ca instrumente reglabile. Din a doua categorie de instrumente, autorii se ocupă şi de cele complicate, cum sînt microscopul de măsură, teodolitul, geniometrul, capul divizor mecanic şi optic etc. În capitolul al 4-lea, „Exemple de măsurători de unghiuri", autorii arată modul cum se verifică instrumentele pentru măsurarea unghiurilor, şi anume pentru echerul de 90°, capul divizor, calibre conice şi nivelele cu bulă de aer. Apoi se prezintă exemple de măsurare a unghiurilor mici, ghidaje, para-

lelisme etc. Măsurării unghiurilor la conuri exterioare și interioare i se acordă o atenție deosebită. În încheierea acestui capitol, ca aplicații, se prezintă cîteva cazuri de punere la punct și reglare a unghiurilor la unele mașini-unelte.

Cu ajutorul a 53 de formule de calcul și a 111 figuri, constînd din schițe și fotografii, autorii ușurează înțelegerea și înlesnesc aplicarea metodelor combinate de măsură și calcul, precum și folosirea judicioasă a instrumentelor și instalațiilor existente pentru măsurarea unghiurilor.

Gh. Vasilca

R. H. GALLAGHER, A *Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis* (Un studiu corelativ al metodelor analizei matriceale a structurilor), Oxford, Pergamon Press; New York, Macmillan Co., 1964, XII + 114 p.

Lucrarea cuprinde șase capitole, o bibliografie de 35 de titluri, un indice de autori și un apendice, în care se arată stadiul calculului structurilor cu ajutorul mașinilor de calcul în Europa occidentală și în S.U.A.

După o scurtă introducere se trece la metodele analizei matriceale a structurilor : metoda forțelor (a flexibilității) și metoda deplasărilor (a rigidității). În capitolul al 3-lea se dau metode de calcul al proprietăților (rigiditate, flexibilitate etc.) diferitelor elemente componente ale structurilor. Relațiile de reciprocitate joacă un rol important în această direcție.

Analiza structurilor multicelulare se face în capitolul al 4-lea, folosind diferite idealizări analitice. În capitolul următor se dau rezultate numerice și sub formă de diagrame. Ultimul capitol cuprinde o recomandare de program pentru mașinile electronice de calcul ; de asemenea se trec în revistă diferite probleme care rămîn de rezolvat (probleme de ordin matematic, de idealizare a structurilor, de sisteme elastice neliniare, de anelasticitate).

Volumul de mai sus prezintă interes în proiectarea structurilor de avioane și poate fi folosit cu succes de toți cercetătorii științifici în această direcție.

P. P. Teodorescu

PUBLICAȚII PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE

— Trudî Tbilisskogo Matematiceskogo Instituta, XXIX, Tbilisi, 1964.

— Teploobmen i topocinîe protessî, Sbornik statei. — Trudî Tallinskogo Politehniceskogo Instituta, Seria A, nr. 206, 1963.

— Trudî po elektrotehnike i avtomatike. — Trudî Tallinskogo Politehniceskogo Instituta, Seria A, nr. 207, 1963.

— Sudovîe silovîe ustanovki i sudostroenie. — Trudî Tallinskogo Politehniceskogo Instituta, Seria A, nr. 208, 1963.

— Proceedings of the Eighteenth Industrial Waste Conference 1963. Engineering Bulletin of Purdue University. Extension Series nr. 115, 1964.

S. A. Gordon Flow of low density air over a heated flat plate at Mach no. 0.5. UTIAS Report nr. 92/1964.

B. W. Gowans Experimental study of the aerodynamic characteristics of a model of an air cushion vehicle in hovering flight. UTIAS Technical Note nr. 74/1964.

A. Benoit An experimental investigation of spherical combustion for the UTIAS implosion driven launcher. UTIAS Technical Note nr. 71/1964.

J. Seddon Low-speed wind-tunnel tests on the characteristics of leading-edge air intakes in swept wings. Aeronautical Research Council Reports and Memoranda nr. 3353, 1964.

E. Silberman Experiments on a jet flap in supercavitating flow. University of Minneosta, St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory, Technical Paper nr. 46, Series B, 1964.

C. S. Song Two-dimensional supercavitating plate oscillating under a free-surface. University of Minnesota, St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory Technical Paper nr. 47, 1963.

— Jahrbuch der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luft- und Raumfahrt, Braunschweig, 1963.

W. D. Groeber Untersuchungen über Mischrohre zur Schubverstärkung bei Strahlantrieben. Institut für Strömungslehre, Karlsruhe, 1964.

F. Debeauvais Contribution à l'étude de la désagrégation des jets liquides dans l'air en mouvement. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, Paris, no. 406/1964.

P. R. Sethna Dynamics of a four wheeled vehicle and the effects of suspension geometry. Proceedings of the Automobile Division nr. 6/1962—63.

D. Sinclair Torque transfer in automotive brakes. Proceedings of the Automobile Division nr. 8/1962—63.

Disertații de la Institutul Politehnic Karlsruhe

G. Vogt Die erzwungenen Schwingungen eines Kreisringes und ihre Stabilität unter pulsierenden Streckenlasten. 88 p. 1964.

H. Keller Zum Problem der kinetischen Stabilität der rotierenden, axial pulsierend belasteten unrunden Welle. 1964. 137 p.

Disertații de la Institutul Politehnic Braunschweig

J. Eibl Zur Stabilitätsfrage des Zweigelenkbogens mit biegeweichem Zugband und schlaffen Hängestangen.

N. Sükrü Akalin Der Zeitenfluß bei instabilem Verhalten eines Straßenfahrzeuges. 1964. 33 p.

E. Heringhaus Entwicklung spezieller elektronischer Meßverfahren für die Fahrzeugtechnik. 1964. 128 p.

R. Frielinghaus Ultraschallmessungen an Grauguß. 1964. 45 p.

F. Goes Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Beurteilung der Wirkung von Schwingungsdämpfern im Fahrzeug. 1964. 151 p.

W. Rehwald Kinematik und Kinetik der Viergelenkgetriebe in analytischer Darstellung. 1964. 30 p.

W. Pechau Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der kompressiblen Grenzschicht mit kontinuierlich verteilter Absaugung. 1964. 41 p.

O. Parr Untersuchungen der dreidimensionalen Grenzschicht an rotierenden Drehkörpern bei axialer Anströmung. 1964. 21 p.

G. Wonsak Untersuchungen über die Strömungsverhältnisse in einer partiell beaufschlagten, radialen Gleichdruckkreiselpumpe. 1963. 7 p.

H. Seeler Studien zum Elektronenstrahlschweißen. Verfahren und Werkstoffe. 1963. 11p.

H. Försching Über die Einflüsse der elastischen Stützung auf das Standschwingungsverhalten von Flugzeugen, 1963. 21 p.

K. Jacob Berechnung der Potentialstömung um Profile mit Absaugung und Ausblasen. 1963. 15 p.

T. F. Olk Beanspruchungen von Höhenflugzeug-Druckkammern im Bereich der Versteifungsringe 1961. 31 p.

K. J. Bauermeister Über den Einfluß der Schaufelbelastung auf die Sekundärströmung in geraden Turbienen- und Verdichtergittern.

Cărți de la Editura tehnică București

— Buzdugan Gh. — Măsurarea vibrațiilor mecanice.

— Ianu A., Cerbu A., Dinescu A., — Calcule și probleme în practica chimică.

— Novacu V., Culegere de probleme de electrodinamică.

— Stoenescu Al., Introducere în teoria relativității.

Cărți de la alte edituri

— B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, — Ingenieur Taschenbuch Bauwesen, Band IV, 1964, —1572 p. Hochbau, Teil 1, Grundlagen Fertigung und Fügung.

— Elsevier Publishing Company Amsterdam, London, New York, P. J. Bryant, M. Lavik and G. Salomon : Mechanisms of Solid Friction, 1964, 224 p.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 18, nr. 2 1965

SUMAR

STUDII Pag.

N. TIPEI, Asupra mecanicii mediilor continue ne-newtoniene 221

AL. NICA, Asupra calculului sistemelor de ungere cu lubrifianţi fluizi 235

OLGA BIŢĂ şi I. DINCĂ, Aspecte ale frecării şi uzurii în cazul lubrifierii cu bisulfură de molibden 247

H. PASCAL, Asupra curgerii tranzitorii a gazelor prin conducte magistrale 261

L. V. WOLFERSDORF, Scurgerea magnetohidrodinamică printr-un canal în cazul comportării electrice neomogene a pereţilor săi 285

ELIE CARAFOLI şi DAN MATEESCU, Asupra unei clase de aripi delta avînd incidenţa sau panta variabilă după funcţii omogene, în regim supersonic 299

CHR. PELECUDI, Metoda acceleraţiilor compuse în lanţurile cinematice plane . . . 315

FL. DUDIŢĂ, Existenţa manivelei la mecanismele patrulatere sferice 355

V. MANEA, Asupra ecuaţiilor plăcilor plane subţiri elastice în aproximaţia neliniară, în teoria fără ipoteza Love-Kirchhoff 377

SOÓS EUGEN, Despre determinarea stării de tensiune şi de deformaţie în problema plană a elastodinamicii corpurilor anizotrope 395

VICTOR GIONCU, Paraboloidul de rotaţie pleoştit, pe contur dreptunghiular, cu diferite rezemări pe contur. Aplicaţie pentru margini încastrate 407

VALERIU PETCU, Criterii de soluţionare a ecuaţiei de echilibru plastic a plăcilor dreptunghiulare de beton armat 429

TOMA PANĂ, Calculul pulsaţiilor proprii ale vibraţiilor de încovoiere-răsucire, la barele cu pereţi subţiri avînd profilul închis 455

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

OCTAVIAN POPA, Conferinţa de maşini hidraulice, Timişoara, 23—26 septembrie 1964 467

CHR. PELECUDI, Conferinţa de tehnica mecanismelor, Karl-Marx-Stadt, 1964, privind problemele dinamice şi rezultatele experimentale în domeniul tehnicii mecanismelor, 1—3 octombrie 1964 473

RECENZII 477

LUCRĂRI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 485

St. cerc. mec. apl. Tom. 18 Nr. 2 p. 219—486 Bucureşti 1965

ASUPRA MECANICII MEDIILOR CONTINUE NE-NEWTONIENE[1])

de N. TIPEI
membru corespondent al Academiei R.P.R.

532 : 539.1

Se urmăreşte extinderea legii de forfecare a lui Newton, tensiunile fiind exprimate cu ajutorul unei ecuaţii de tip general:

$$q_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{ijrs}^{(n)} \overset{n}{\eta}{}^{rs},$$

în care $\{\overset{n}{\eta}{}^{rs}\}$ reprezintă o matrice tensorială depinzînd de derivatele vitezelor.

Se iau în consideraţie medii cu proprietăţi de forfecare complexe şi se deduc componentele tensorului tensiunilor pentru corpuri omogene izotrope într-un sistem de coordonate ortogonale.

Noţiunea de viscozitate este de asemenea extinsă prin introducerea viscozităţilor de ordinul n, avînd dimensiunile $ML^{-1}T^{n-2}$.

În aceste condiţii, viscozitatea de ordinul 1 corespunde viscozităţii newtoniene, obişnuite. Ecuaţiile de tip Navier-Stokes sînt deduse astfel sub o formă nouă, aplicabilă la corpuri cu proprietăţi de forfecare mai complexe. Se iau în consideraţie cazurile particulare ale fluidelor incompresibile şi ale mişcărilor staţionare. Se fac aplicaţii la cazuri simple: mişcarea în tuburi sau între suprafeţe solide paralele.

Aceste aplicaţii conduc, ca forme particulare ale formulelor generale obţinute, la rezultate în bun acord cu cele găsite de alţi autori (Paslay şi Slibar, Milne etc.).

Prin generalizarea propusă se obţine posibilitatea unui calcul direct şi unitar al mişcării diverselor medii continue de o mare importanţă practică, cum ar fi unsorile, siliconii, metalele topite. Pe de altă parte, probleme practice şi tehnice (lubrificaţia, laminarea metalelor, fluajul etc.) pot fi abordate cu această metodă.

Se admite, în genere, că pentru fluidele vîscoase există o legătură liniară şi omogenă între tensiunile anizotrope q_{ij} şi tensorul vitezelor de

[1]) Prezentată la conferinţa anuală internaţională ASME—ASLE, Washington, 13—16 octombrie 1964, şi publicată în „Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering".

deformație $\{\eta_{rs}\}$, fie $q_{ij} = \mu_{ijrs}\,\eta^{rs}$. Tensorul cvadruplu $\{\mu_{ijrs}\}$ depinde de viscozitate și, pentru mediile izotrope, este simetric în raport cu primii și cu ultimii doi indici, iar $\{q_{ij}\}$ și $\{\eta^{rs}\}$ sînt de asemenea tensori simetrici în acest caz. Considerînd mișcarea pe o singură direcție x^1, pentru fluide

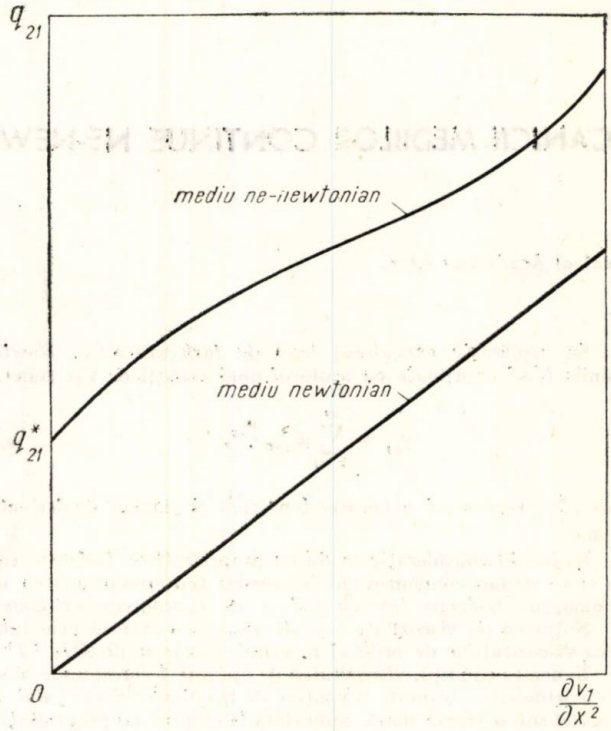


Fig. 1

newtoniene rezultă legea cunoscută $q_{21} = \mu \dfrac{\partial v_1}{\partial x^2}$, dacă x^2 este normala la viteza v_1 a curentului. Pentru o serie de corpuri viscoplastice se constată însă că diagrama tensiunilor în funcție de vitezele de deformație are o alură mai complicată (fig. 1).

În acest caz, legătura amintită ascultă de legi complexe, uneori foarte depărtate de o relație liniară. Pentru asemenea situații se poate pune sub o formă generală:

$$q_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{(n)}_{ijrs}\, \overset{n}{\eta}{}^{rs}. \qquad (1)$$

Tensorul $\{\overset{n}{\eta}^{rs}\}$, legat de vitezele de deformație, are componentele covariante într-un sistem oarecare de coordonate:

$$\overset{n}{\eta}_{rs} = \frac{1}{2^n} B_{rs} (v_{r/s} + v_{s/r})^n = \frac{1}{2^n} B_{rs} \left(\frac{\partial v_r}{\partial x^s} + \frac{\partial v_s}{\partial x^r} - 2v_j \left\{ \begin{matrix} j \\ r\ s \end{matrix} \right\} \right),$$
$$B_{rs} = S_{rs} \cdot (a_{rr})^{\frac{1-n}{2}} (a_{ss})^{\frac{1-n}{2}}, \tag{2}$$

iar $\left\{ \begin{matrix} j \\ r\ s \end{matrix} \right\}$ sînt simbolurile lui Christoffel de a doua specie. În relația (1) s-au notat prin $\overset{n}{\eta}^{rs}$ componentele contravariante ale acestui tensor, iar însumarea se face și în raport cu indicii r, s. Factorul $\mu^{(n)}_{ijrs}$ depinde de proprietățile de deformare ale mediului, ca și $\mu^{(1)}_{ijrs}$, care este legat de vîscozitate. Valorile a_{rr} și a_{ss} sînt componentele tensorului fundamental pe direcțiile r și s, iar S_{rs} reprezintă sign $(v_{r/s} + v_{s/r})$ pentru n par și $S_{rs} = 1$ pentru n impar. Se remarcă că factorii care conțin a_{rr} și a_{ss} au fost introduși spre a ține seama de metrica sistemului.

Fie

$$a_{ij} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^j} \quad \text{și} \quad a^{ik} = \frac{\delta^k_j}{a_{ij}} \tag{3}$$

coeficienții metricei (componentele tensorului fundamental) în sistemul covariant și contravariant, $d\mathbf{P}$ un vector reprezentînd o deplasare infinitezimală oarecare, iar δ^k_j simbolurile lui Kronecker [1], [2]. În sisteme de coordonate ortogonale, $a_{ij} = a^{ij} = \delta^i_j = 0$ pentru $i \neq j$ și $\delta^i_j = 1$ pentru $i = j$. Se reamintește apoi că între coeficienții metricei și coeficienții lui Lamé H_i există relațiile $a_{ii} = H_i^2$. Componentele contravariante $\overset{n}{\eta}^{rs}$ sînt legate de cele covariante prin formulele cunoscute:

$$\overset{n}{\eta}^{rs} = a^{ir} a^{js} \overset{n}{\eta}_{ij}. \tag{4}$$

Fie

$$\mu^{(n)}_{ijrs} = -\lambda_n a_{ij} a_{rs} - \mu_n (a_{ir} a_{js} + a_{is} a_{jr}). \tag{5}$$
$$\chi_n = a_{rs} \overset{n}{\eta}^{rs}, \quad \chi_1 = \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Din (1) rezultă, făcînd înlocuirile,

$$q_{ij} = -\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_n a_{ij} \chi_n + 2\mu_n \overset{n}{\eta}_{ij}), \tag{6}$$

$\{q_{ij}\}$ fiind partea anizotropă a tensorului vitezelor de deformație și avînd invariantul nul [1]:

$$q_{ij} a^{ij} = 0. \tag{7}$$

Din (6) se deduce astfel, deoarece $a_{ij}a^{ij} = n$, numărul dimensiunilor spaţiului considerat :

$$(3\lambda_n + 2\mu_n)\chi_n = 0\,; \quad \lambda_n = -\frac{2}{3}\mu_n\,. \tag{8}$$

La $n = 1$ se regăsesc relaţiile binecunoscute pentru mediile newtoniene [3]. Se observă de asemenea că în cazul general (6) μ_n poate fi pozitiv sau negativ pentru $n \neq 0$.

Dezvoltarea (1), (2), conducînd la introducerea unor puteri de ordin superior, poate fi însă dezavantajoasă pentru efectuarea calculelor numerice. De aceea este uneori preferabilă o dezvoltare de aceeaşi formă cu (1), în care tensorul de ordinul al doilea $\{\overset{n}{\eta}_{rs}\}$ este

$$\begin{aligned}\left\{\overset{n}{\eta}_{rs}\right\} &= \left\{\frac{1}{2}\left[B_{rs}(v_{r/s})^n + B_{sr}(v_{s/r})^n\right]\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{2}\left[B_{rs}\left(\frac{\partial v_r}{\partial x^s} - v_j\left\{\begin{matrix} j \\ r\ s\end{matrix}\right\}\right)^n + B_{sr}\left(\frac{\partial v_s}{\partial x^r} - v_j\left\{\begin{matrix} j \\ s\ r\end{matrix}\right\}\right)^n\right]\right\}.\end{aligned} \tag{9}$$

Utilitatea acestei dezvoltări apare mai ales la folosirea sistemelor carteziene, unde termenii conţinînd simbolurile lui Cristoffel se anulează. Termenul obţinut pentru $n = 1$ corespunde, ca şi pentru (2), cazului obişnuit al dependenţei liniare a tensiunilor faţă de vitezele de deformaţie. În continuare, formulele (4)—(8) rămîn valabile dacă se consideră pentru $\overset{n}{\eta}{}^{rs}$ valorile componentelor date de (9). Se remarcă că (6) îndeplineşte condiţia generală de a se anula în repaus. Dacă fluidul se mişcă ca un corp solid, q_{ij} este de asemenea nul; dezvoltarea (9) nu mai satisface direct această condiţie în toate cazurile, dar din (6) rezultă o relaţie între coeficienţii λ_n şi μ_n, care poate fi satisfăcută într-un număr oricît de mare de puncte, corespunzător gradului de aproximaţie dorit. Totuşi, pentru sistemele carteziene, (6) şi (9) îndeplinesc exact şi condiţia a doua.

Dacă p este un scalar pozitiv reprezentînd presiunile care se propagă uniform în toate direcţiile, se poate scrie complet tensorul tensiunilor pornind de la expresia (6) pentru ambele cazuri considerate :

$$p_{ij} = pa_{ij} + q_{ij}\,. \tag{10}$$

Această formulă dă direct valoarea tensiunilor în cazul coordonatelor carteziene. Pentru alte sisteme, valoarea corespunzătoare se obţine imediat [1], [4] :

$$\Pi_{ij} = \frac{p_{ij}}{\sqrt{a_{ii}}\sqrt{a_{jj}}}\,. \tag{11}$$

Coeficientul μ_n poate fi o funcţie de coordonate, şi în acest caz el se descompune în doi termeni :

$$\mu_n = \mu_{1n} + \mu_{2n}\,, \tag{12}$$

dintre care primul este o constantă pentru mediile omogene; pentru $n = 1$ el coincide cu coeficientul de viscozitate dinamică $\mu_{11} = \mu$. Al doilea termen, funcţie de coordonate şi de timp, depinde, în afară de natura

mediului considerat, și de eforturile locale. Admițînd că invariantul pătratic al tensorului eforturilor plastice $\{r_{ij}\}$ rămîne constant, se poate scrie, notînd cu h constanța de plasticitate,

$$r_{ij} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{2n} \left(\frac{2}{3} a_{ij} \chi_n - 2 \overset{n}{\eta}_{ij} \right)$$
$$r_{ij} r^{ij} = h^2 \tag{13}$$

sau, dacă

$$\mu_{21} \neq 0, \ \mu_{2n} = 0 \quad (n \neq 1), \ [1],$$
$$\mu_{21}^2 (v_{i/j} v^{i/j} + v_{i/j} v^{j/i}) = h^2. \tag{14}$$

În general, coeficienții μ_{1n} și μ_{2n} pot fi denumiți coeficient de viscozitate dinamică de ordinul n și coeficient de plasticitate de ordinul n. Coeficienții μ_{1n} au fost presupuși constanți; în realitate, și aceștia sînt variabili cu temperatura, care, în genere, este o funcție de coordonate. Totuși, în multe cazuri, ipoteza admisă poate fi aplicată cu suficientă exactitate.

La deducerea relației (14) s-a presupus $\chi_1 = 0$, adică viteza de dilatație cubică nulă; această ipoteză este adevărată, de obicei, pentru corpurile incompresibile, a căror densitate ρ este constantă.

Ecuația de mișcare a mediului considerat va fi, după o direcție x^j [1], [4] dacă F_j este componenta forțelor exterioare $\mathbf{F}$,

$$\rho \dot{v}_i = F_j - p_{ij}/^i \tag{15}$$

sau, sub formă vectorială,

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} - \mathbf{p}_i/^i, \tag{16}$$

în care $\mathbf{p}_i$ este tensiunea ce se exercită pe un element de suprafață $\mathrm{d}A^i$ normal la axa x^i și care este rezultanta tensiunilor normale și tangențiale pe suprafața respectivă (indicele i indică însumarea).

Din expresiile (6) și (10) se deduce, introducînd în (15),

$$\rho \dot{v}_j = F_j - p/_j + q_{ij}/^i = F_j - p/_j +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} [\lambda_n \chi_{n/j} + \chi_n \lambda_{n/j} + 2 (\mu_n \overset{n}{D}_j'' + \mu_{n/j} \overset{n}{\eta}_{ij})]. \tag{17}$$

În această formulă, $\overset{n}{\eta}_{ij}$ reprezintă suma în raport cu i a componentelor după axa x^j ale tensorului $\{\overset{n}{\eta}_{ij}\}$, iar $\overset{n}{D}_j''$ este divergența aceluiași tensor

$$\overset{n}{D}_j'' = \overset{n}{\eta}_{ij}/^i = \overset{n}{\eta}_{ij/k} a^{ki} = \left(\frac{\partial \overset{n}{\eta}_{ij}}{\partial x^k} - \overset{n}{\eta}_{il} \left\{ \begin{matrix} l \\ j\ k \end{matrix} \right\} - \overset{n}{\eta}_{lj} \left\{ \begin{matrix} l \\ i\ k \end{matrix} \right\} \right) a^{ki}$$
$$\left\{ \begin{matrix} l \\ j\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{js}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{ks}}{\partial x^j} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^s} \right) a^{sl} \tag{18}$$
$$\left\{ \begin{matrix} l \\ i\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{is}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{ks}}{\partial x^i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x^s} \right) a^{sl}$$
$$i, k, l, s = 1, 2, 3.$$

Aplicații. Se va considera pentru exemplificare scurgerea unui mediu de tip Bingham, pentru care μ_0 și μ_1 sînt constante diferite de zero, iar $\mu_n = 0$ $(n > 1)$. În cazul coordonatelor cilindrice rezultă din (18):

$$x^1 = \theta, \quad x^2 = r, \quad x^3 = x_3$$

$$a_{\theta\theta} = r^2, \quad a_{rr} = 1, \quad a_{33} = 1$$

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ \theta\,\theta \end{matrix} \right\} = -r, \left\{ \begin{matrix} l \\ \theta\,\theta \end{matrix} \right\} = 0 \quad (l = \theta, x_3); \left\{ \begin{matrix} l \\ r\,r \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} l \\ 3\,3 \end{matrix} \right\} = 0 \quad (l = \theta, r, x_3).$$

$$\left\{ \begin{matrix} \theta \\ r\,\theta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}, \left\{ \begin{matrix} \theta \\ 3\,\theta \end{matrix} \right\} = 0, \left\{ \begin{matrix} \theta \\ r\,3 \end{matrix} \right\} = 0, \tag{19}$$

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ r\,\theta \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}, \left\{ \begin{matrix} r \\ 3\,\theta \end{matrix} \right\} = 0, \left\{ \begin{matrix} r \\ r\,3 \end{matrix} \right\} = 0,$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ r\,\theta \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3\,\theta \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ r\,3 \end{matrix} \right\} = 0; \left\{ \begin{matrix} l \\ j\,k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} l \\ k\,j \end{matrix} \right\}.$$

1. *Mișcarea în tuburi.* Mișcarea este presupusă staționară și de aici viteza axială v_3 = constantă, $v_\theta = v_r = 0$. Datorită simetriei mișcării staționare, $\frac{\partial v_3}{\partial \theta} = 0$. Relațiile (2) și (18) dau

$$\overset{n}{\eta}_{i3} = \frac{S_{r3}}{2^n}\left(\frac{\partial v_3}{\partial r}\right)^n = \overset{n}{\eta}_{r3}; \quad \overset{0}{\eta}_{r3} = S_{r3}; \quad \overset{1}{\eta}_{r3} = \frac{1}{2}\frac{\partial v_3}{\partial r};$$

$$\overset{n}{D}{}_3'' = S_{r3}\left[\frac{1}{2^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v_3}{\partial r}\right)^n + \frac{1}{2^n}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_3}{\partial r}\right)^n\right]; \quad \overset{0}{D}{}_3'' = \frac{S_{r3}}{r}; \quad \overset{1}{D}{}_3'' = \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_3). \tag{20}$$

În cazul mișcării staționare $\dot{v}_3 = 0$, și ecuația (17) se scrie, dacă rezultanta forțelor exterioare este nulă și se ține seamă de condiția de continuitate și de faptul că S_{r3} este negativ pentru $n = 0\left(\frac{\partial v_3}{\partial r} < 0\right)$,

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = \mu_1 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_3}{\partial r}\right) - \frac{2\mu_0}{r}. \tag{21}$$

Ecuațiile de mișcare după rază și după cercurile concentrice dau $\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial r} = 0$, deci $\frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x_3}$, presiunile nedepinzînd decît de x_3. Integrînd (21), rezultă

$$v_3 = \frac{r^2}{4\mu_1}\frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{2\mu_0}{\mu_1}r + C_1 \ln r + C_2. \tag{22}$$

Tensiunile de forfecare rezultă imediat din (6), (11) și (20):

$$\Pi_{r3} = 2\mu_0 - \mu_1 \frac{\partial v_3}{\partial r}. \tag{23}$$

La o anumită rază $r = r^*$, efortul Π_{r3} atinge valoarea $2\mu_0$, iar $\frac{\partial v_3}{\partial r} = 0$. De la axul tubului și pînă la această rază mediul se mișcă în bloc, fără

deplasări relative între straturile concentrice. Constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile $\left(\frac{\partial v_3}{\partial r}\right)_{r=r^*} = 0$ și $v_3 = 0$ pentru $r = R$, adică pe pereții tubului.
Rezultă astfel

$$v_3 = \frac{1}{4\mu_1}\frac{dp}{dx_3}(r^2 - R^2) - \frac{2\mu_0}{\mu_1}(R - r) - \left(\frac{r^*}{2\mu_1}\frac{dp}{dx_3} + \frac{2\mu_0}{\mu_1}\right) r^* \ln\frac{r}{R}. \quad (24)$$

Dacă se consideră echilibrul unui cilindru de rază r și lungime dx_3, se obține, ținînd seama că normala interioară este în sensul negativ pe direcția razei,

$$\pi r^2 \frac{dp}{dx_3} = -2\pi r\,\Pi_{r3} = 2\pi r\left[\frac{r}{2}\frac{dp}{dx_3}\left(1 - \frac{r^{*2}}{r^2}\right) - 2\mu_0\frac{r^*}{r}\right]. \quad (25)$$

Din aceasta rezultă imediat

$$r^* = -\frac{4\mu_0}{\frac{dp}{dx_3}} \quad (26)$$

și viteza

$$v_3 = \frac{1}{4\mu_1}\frac{dp}{dx_3}(r^2 - R^2) - \frac{2\mu_0}{\mu_1}(R - r), \quad (27)$$

relație cunoscută pentru mișcarea în tuburi în cazul considerat și care a fost dedusă, pe alte căi, în lucrările [5], [6].

2. *Mișcarea între doi cilindri coaxiali.* Fie R_1 și R_2 razele celor doi cilindri și ω_1, ω_2 vitezele unghiulare corespunzătoare. Neglijînd efectele de la capete, se poate considera $v_r = v_3 = 0$ și, pentru mișcări staționare, $\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial x_3} = 0$.

Din relația (11), care se aplică în genere tuturor mărimilor, deci și vitezelor, rezultă că, notînd cu v_θ valoarea reală a componentei vitezei pe direcția θ, va trebui să se considere în expresiile tensoriale (2) mărimea rv_θ pe această direcție. Rezultă astfel, ținînd seama de (2), (17), și (19),

$$\overset{n}{\eta}_{i\theta} = \frac{1}{2^n}\left[\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - 2v_\theta\right]^n B_{r\theta} = \frac{1}{2^n}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - v_\theta\right)^n r^{1-n} S_{r\theta} = \overset{n}{\eta}_{r\theta}$$

$$\overset{0}{\eta}_{r\theta} = rS_{r\theta}\,;\ \overset{1}{\eta}_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - v_\theta\right)$$

$$\overset{n}{D}{}''_\theta = \frac{\partial \overset{n}{\eta}_{r\theta}}{\partial r} - \left(\begin{Bmatrix}\theta\\ \theta\ r\end{Bmatrix} + \frac{2}{r^2}\begin{Bmatrix} r\\ \theta\ \theta\end{Bmatrix}\right)\overset{n}{\eta}_{r\theta} = \frac{\partial \overset{n}{\eta}_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\overset{n}{\eta}_{r\theta}}{r} = \quad (28)$$

$$= \frac{1}{2^n} S_{r\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r} r\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)^n + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)^n\right],$$

$$\overset{0}{D}{}''_\theta = 2S_{r\theta}\,;\ \overset{1}{D}{}''_\theta = \frac{1}{2} r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_\theta)}{\partial r}\right].$$

Ecuațiile de mișcare pe cele trei direcții sînt astfel, ținînd seama de (6), (11) și (17),

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 4S_{r\theta}\mu_0 + \mu_1 r \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r}\right]$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{2}{r^2}(\mu_0 \overset{0}{\eta}_{\theta r} + \mu_1 \overset{1}{\eta}_{\theta r}) = \frac{1}{r}\left[2S_{r\theta}\mu_0 + \mu_1\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)\right] = -\frac{\Pi_{\theta r}}{r} \tag{29}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = 0.$$

Din cauza simetriei, $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$. Prima ecuație (29) dă astfel valoarea vitezei, cu condițiile pe contur $(v_\theta)_{r=R_1} = R_1\omega_1$, $(v_\theta)_{r=R_2} = R_2\omega_2$

$$v_\theta = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\left(\omega_1 - \omega_2 + 2S_{r\theta}\frac{\mu_0}{\mu_1}\ln\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{1}{r} - \left\{2S_{r\theta}\frac{\mu_0}{\mu_1}\ln r + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{R_2^2 - R_1^2}\left[R_1^2\left(\omega_1 + 2S_{r\theta}\frac{\mu_0}{\mu_1}\ln R_1\right) - R_2^2\left(\omega_2 + 2S_{r\theta}\frac{\mu_0}{\mu_1}\ln R_2\right)\right]\right\} r. \tag{30}$$

Tensiunile tangențiale vor fi (6), (11)

$$\Pi_{r\theta} = -2S_{r\theta}\mu_0 - \mu_1\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right) = \frac{2C_2}{r^2}, \tag{31}$$

în care constanta C_2 corespunde momentelor exterioare M_1, $-M_2$, aplicate la razele R_1 și R_2 pe unitatea de lungime :

$$C_2 = \frac{M_1}{4\pi} = -\frac{M_2}{4\pi} = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\mu_1\left(\omega_1 - \omega_2 + 2S_{r\theta}\frac{\mu_0}{\mu_1}\ln\frac{R_1}{R_2}\right). \tag{32}$$

Fie $\omega_2 = 0$ și R_2 raza cilindrului exterior. Dacă $M_1 > 0$, rezultă de asemenea $\omega_1 \geqslant 0$. Se găsește apoi

$$(\overset{1}{\eta}_{r\theta})_{r=R_1} = \frac{R_1}{2}\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)_{r=R_1} =$$

$$= -\frac{2R_2^2 R_1}{R_2^2 - R_1^2}\left(\frac{\omega_1}{2} - S_{r\theta}\frac{\mu_0}{\mu_1}\ln\frac{R_2}{R_1}\right) - S_{r\theta}\frac{\mu_0}{\mu_1}R_1. \tag{33}$$

Semnul lui $(\overset{1}{\eta}_{r\theta})_{r=R_1}$, deci și $S_{r\theta}$, depinde aparent de ω_1. Fie acest semn pozitiv. Rezultă

$$\omega_1 < 2\frac{\mu_0}{\mu_1}\ln\frac{R_2}{R_1}. \tag{34}$$

Dar, în acest caz, din (32) se deduce $M_1 < 0$. Deci $S_{r\theta}$ este negativ, ca și $\overset{1}{\eta}_{r\theta}$ pe suprafața $r = R_1$. Rezultatul este de altfel adevărat și dacă $\omega_2 \neq 0$, dar $\omega_1 > \omega_2$. Dacă M_1 este dat, se obține viteza de rotație

$$\omega_1 = \frac{R_2^2 - R_1^2}{4\pi\mu_1 R_1^2 R_2^2} M_1 - \frac{2\mu_0}{\mu_1} \ln \frac{R_2}{R_1}. \tag{35}$$

În continuare se poate ușor vedea că, dacă $\overset{1}{\eta}_{r\theta} = 0$ pentru o rază r cuprinsă între R_1 și R_2, începînd de la aceasta și pînă la $r = R_2$ mediul rămîne imobil, deoarece pe porțiunea respectivă $\Pi_{r\theta} \leqslant 2\mu_0$ tensiunile nu depășesc valoarea ordonatei $q^*_{r\theta}$ corespunzătoare stării de repaus. O discuție mai amplă asupra acestei aplicații a fost dată în lucrarea [6], care tratează acest caz particular.

Din a doua ecuație (29) se deduce ușor variația presiunilor cu raza. Dacă se ține seama de (31), rezultă valoarea

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{C_2}{r^2} = p_1 - C_2\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{r^2}\right) \\ p_1 &= p_0 + \frac{C_2}{R_1^2}, \end{aligned} \tag{36}$$

obținută în cazul cînd se neglijează efectele de la capete.

3. *Mișcarea între două plăci paralele.* Fie x_1 direcția deplasării, x_2 normala la aceasta și V viteza uneia din plăci, cealaltă fiind în repaus, (fig. 2). Mișcarea este considerată plană, suprafețele întinzîndu-se inde-

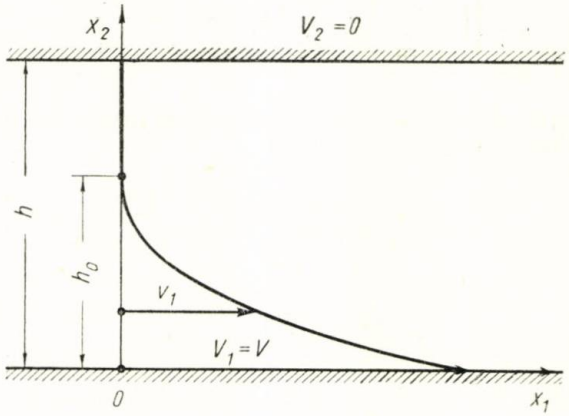


Fig. 2

finit pe normala la planul Ox_1x_2. Formulele precedente (2), (6), (17), (18) permit scrierea imediată a ecuației de mișcare și a expresiei tensiunilor

Pentru aceasta se consideră mișcarea în straturi paralele $v_2 = 0$. Coeficienții metricei sînt $a_{ii} = 1$ $(i = 1, 2)$. Considerînd și termenul de ordinul 2 al tensorului $\{q_{ij}\}$, rezultă

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \mu_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} - \frac{1}{2}\mu_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \tag{37}$$

$$\Pi_{21} = 2\mu_0 - \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\mu_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2.$$

Se observă că $\Pi_{21} = 2\mu_0$ pentru $\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0$, corespunzător unei valori $x_2 = h_0$, iar dincolo de această distanță (fig. 2) mediul rămîne imobil.

Din prima ecuație (37), cu condițiile la limită $x_2 = 0$, $v_1 = V$ și $x_2 = h_0$, $v_1 = 0$, $\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} = 0$, rezultă pentru $0 \leqslant x_2 \leqslant h_0$, $\dfrac{dp}{dx_1} > 0$

$$v_1 = V + \frac{\mu_1}{\mu_2} x_2 + \frac{\mu_1^3}{3\mu_2^2 \dfrac{dp}{dx_1}} \left\{ \left[1 - 2\frac{\mu_2}{\mu_1^2} \frac{dp}{dx_1} (x_2 - h_0) \right]^{\frac{3}{2}} - \right.$$

$$\left. - \left(1 + 2\frac{\mu_2}{\mu_1^2} \frac{dp}{dx_1} h_0 \right)^{\frac{3}{2}} \right\}. \tag{38}$$

Valoarea lui h_0 este dată de ecuația

$$-\frac{\mu_1^3}{3\mu_2^2 \dfrac{dp}{dx_1}} \left[\left(1 + 2\frac{\mu_2}{\mu_1^2} \frac{dp}{dx_1} h_0 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] - \frac{\mu_1}{\mu_2} h_0 = V. \tag{39}$$

Dacă $h_0 > h$, derivata vitezei nu se mai anulează și $v_1 = 0$ pentru $x_2 = h$. Se obține astfel

$$v_1 = V - \frac{\mu_1}{\mu_2} x_2 + \frac{\mu_1^3}{3\mu_2^2 \dfrac{dp}{dx_1}} \left\{ \left[1 + 2\frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\frac{1}{\mu_1} \frac{dp}{dx_1} x_2 - C_1 \right) \right]^{\frac{3}{2}} - \right.$$

$$\left. - \left(1 - 2\frac{\mu_2}{\mu_1} C_1 \right)^{\frac{3}{2}} \right\}, \tag{40}$$

în care C_1 rezultă din relația

$$V = \frac{\mu_1}{\mu_2} h - \frac{\mu_1^3}{3\mu_2^2 \dfrac{dp}{dx_1}} \left\{ \left[1 + 2\frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\frac{1}{\mu_1} \frac{dp}{dx_1} h - C_1 \right) \right]^{\frac{3}{2}} - \left(1 - 2\frac{\mu_2}{\mu_1} C_1 \right)^{\frac{3}{2}} \right\}. \tag{41}$$

Cînd $h > h_0$, mişcarea rămîne aceeaşi, indiferent de valoarea lui h. Astfel, pentru $h \to \infty$, porţiunea cuprinsă între $0 \leqslant x_2 \leqslant h_0$ se aseamănă cu stratul limită, cu deosebirea că aici nu s-a ţinut seama de forţele de inerţie şi că h_0 rămîne constant.

În exemplul studiat s-a considerat scurgerea de tip Poisseuille; dacă gradientul de presiune este nul, mişcarea nu diferă de cazul cunoscut, cu toate că tensiunile de forfecare au valori deosebite. În cazul cînd tensorul tensiunilor, în afară de termenul de ordinul 0, mai are un singur termen de grad n oarecare, ecuaţia de mişcare este

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x_1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \mu_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_2}\left(\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}x_2}\right)^n. \tag{42}$$

Rezultă din aceasta

$$v_1 = \frac{n}{n+1}\left[\left(\frac{n+1}{n} V\right)^{\frac{n}{n+1}} - \left(\frac{2^{n-1}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x_1}}{\mu_n}\right)^{\frac{1}{n+1}} x_2\right]^{\frac{n+1}{n}} = V\left(1 - \frac{x_2}{h_0}\right)^{\frac{n+1}{n}}$$

$$h_0 = \left[\frac{\mu_n\left(\frac{n+1}{n} V\right)^n}{2^{n-1}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x_1}}\right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant h_0 < h \tag{43}$$

$$v_1 = 0, \quad h_0 \leqslant x_2 \leqslant h$$

pentru $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x_1} > 0$. Profilul vitezelor este dat deci de o parabolă de gradul $\frac{n+1}{n}$, după cum se vede din figura 3. Dacă gradientul de presiune este negativ, se obţine în mod analog

$$v_1 = V - \frac{n}{n+1}\left[\left(\frac{n+1}{n} V\right)^{\frac{n}{n+1}} - \left(\frac{-2^{n-1}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x_1}}{\mu_n}\right)^{\frac{1}{n+1}} (h - x_2)\right]^{\frac{n+1}{n}} =$$

$$= V\left[1 - \left(1 - \frac{h - x_2}{h - h_0}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right], \quad h_0 = h - \left[\frac{\mu_n\left(\frac{n+1}{n} V\right)^n}{-2^{n-1}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x_1}}\right]^{\frac{1}{n+1}}, \tag{44}$$

$$h_0 \leqslant x_2 \leqslant h$$

$$v_1 = V, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant h_0.$$

Pentru studiul complet al acestui ultim caz se consideră și situația cînd $\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \neq 0$ pe intervalul $0 \leqslant x_2 \leqslant h$. Condițiile pe frontiere privesc

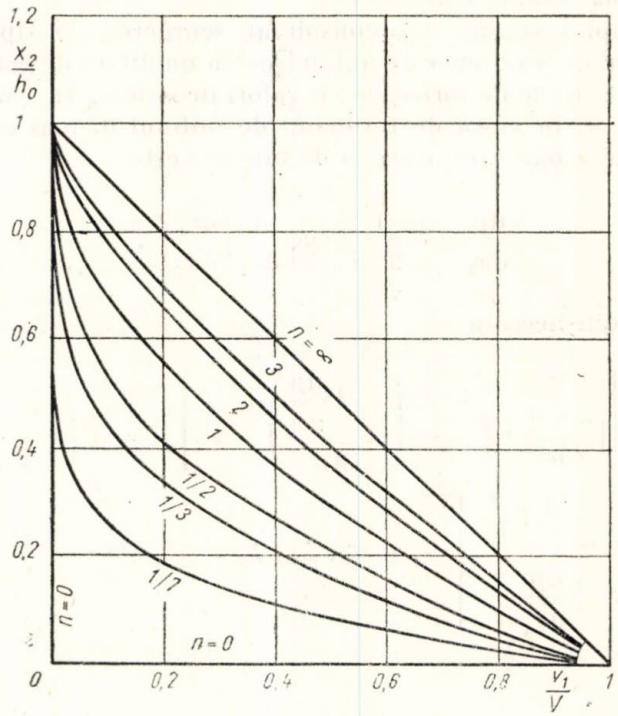


Fig. 3

numai valoarea vitezei pe suprafețele solide, iar viteza într-un punct oarecare este

$$v_1 = \frac{\mu_n}{2^{n-1}\frac{dp}{dx_1}} \frac{n}{n+1} \left\{ \left[\frac{2^{n-1}\frac{dp}{dx_1}}{\mu_n} (h_0 - x_2) \right]^{\frac{n+1}{n}} - \left[\frac{2^{n-1}\frac{dp}{dx_1}}{\mu_n} (h_0 - h) \right]^{\frac{n+1}{n}} \right\}, \tag{45}$$

unde $h_0 > h$ pentru $\frac{dp}{dx_1} > 0$ și $h_0 < 0$ dacă $\frac{dp}{dx_1} < 0$. Valoarea acestei constante este dată de condiția

$$V = \frac{\mu_n}{2^{n-1}\frac{dp}{dx_1}} \frac{n}{n+1} \left\{ \left(\frac{2^{n-1}\frac{dp}{dx_1}}{\mu_n} h_0 \right)^{\frac{n+1}{n}} - \left[\frac{2^{n-1}\frac{dp}{dx_1}}{\mu_n} (h_0 - h) \right]^{\frac{n+1}{n}} \right\}. \tag{46}$$

★

În dezvoltarea (1) s-a considerat $\overset{n}{\eta}_{rs}$ ca fiind proporțional cu puterea n a componentelor tensorului $\overset{1}{\eta}_{rs}$. În realitate, această îngrădire nu este necesară. Fie f_n o funcție oarecare de $\overset{1}{\eta}_{rs}/\sqrt{a_{rr}}\sqrt{a_{ss}}$ continuă și derivabilă în tot domeniul de variație al derivatelor. $v_{r/s}$. În mod analog se poate pune

$$\overset{n}{\eta}_{rs} = B^{*}_{rs} f_n\left(\frac{\overset{1}{\eta}_{rs}}{\sqrt{a_{rr}}\sqrt{a_{ss}}}\right), \qquad (47)$$

$$B^{*}_{rs} = S_{rs}\sqrt{a_{rr}}\sqrt{a_{ss}}\,.$$

Toate formulele precedente, (3)—(8) și (10) — (18), rămîn valabile, cu observația că pentru fiecare gen de dezvoltare, viscozitățile de ordinul $n(\mu_n)$ au altă valoare și altă semnificație din punct de vedere dimensional. Acest lucru este, de altfel, adevărat și pentru termenii diferiți ai aceleiași dezvoltări. De exemplu, se evidențiază că în cazul seriilor de puteri μ_n este de forma $ML^{-1}T^{n-2}$.

Primită la redacție la 10 decembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. B. Finzi, M. Pastori, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, N. Zanichelli, Bologna, 1949.
2. P. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N. Y., 1953.
3. N. Tipei, *Theory of Lubrication*. Stanford University Press Stanford, Calif., 1962.
4. N. E. Kocin, *Calculul vectorial și introducere în calculul tensorial*. Ed. tehnică, București, 1954.
5. А. Ф. Казимов, А. Х. Мирзаджанзаде, *Различные формы уравнений движения вязко-пластических жидкостей и закон гидродинамического подобия*. ПММ., **XIX**, *3*, 384—352 (1955).
6. P. R. Paslay, A. Slibar, *Die Fliessbedingung und das Verformungsgesetz viskoser plastischer Stoffe*. Oesterreichischisches Ingenieur — Archiv, **10**, Heft 4, Springer Wien, 1956.

ASUPRA CALCULULUI SISTEMELOR DE UNGERE CU LUBRIFIANȚI FLUIZI[1])

de AL. NICA
Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R. P. R., București

621.89

După expunerea unei metode pentru stabilirea pierderilor de energie în conductele sistemelor de ungere cu lubrifianți fluizi se consideră cîteva cazuri constructive simple (conducte în serie, conducte în paralel), dîndu-se relații pentru calculul parametrilor caracteristici.

În continuare se dă o metodă de calcul a debitelor în rețelele de conducte, cu aplicabilitate generală.

Lucrarea se încheie cu exemple de calcul numeric.

O deosebită actualitate în practica modernă a ungerii o prezintă sistemele centralizate de ungere, semiautomate sau automate; aceste sisteme, prin complexitatea lor, impun cunoașterea unor metode corespunzătoare de calcul în vederea unei proiectări și construcții judicioase.

De obicei sistemele centralizate au un mare număr de puncte de utilizare a lubrifiantului, alimentate de la o instalație de pompare unică, ceea ce conduce, evident, la o rețea complexă de conducte [1].

În funcție de necesitățile privind debitul și presiunea de alimentare cu lubrifiant la punctele de utilizare trebuie stabilite pierderile de presiune în sistemul de conducte pentru determinarea parametrilor funcționali ai dispozitivelor de alimentare.

În vederea determinării pierderilor de presiune într-o conductă se va considera separat cazul curgerii laminare și al curgerii turbulente. În primul caz, pentru debitul de lubrifiant dintr-o conductă circulară se poate scrie relația [2]

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\mu} \cdot \frac{p_1 - p_2}{L}, \tag{1}$$

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. techn. — Mecanique appliquée", **10**, 2 (1965).

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 18 NR. 2 P. 235–246 BUCUREȘTI 1965

în care Q este debitul de lubrifiant în unitatea de timp, r — raza conductei, μ — viscozitatea lubrifiantului, p_1 — presiunea lubrifiantului la intrarea în conductă, p_2 — presiunea la ieşirea din conductă şi L — lungimea conductei. Pentru cazurile practice se poate considera că rugozitatea pereţilor conductei nu influenţează curgerea laminară.

Relaţia (1) se poate exprima în funcţie de diferenţa coloanelor de fluid h_1 şi h_2, corespunzătoare presiunilor p_1 şi p_2 sub forma

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\mu} \cdot \frac{\rho g (h_1 - h_2)}{L}, \tag{2}$$

în care ρ este densitatea lubrifiantului, iar g acceleraţia gravitaţiei.

Notînd panta hidraulică prin $i = \frac{h_1 - h_2}{L}$, relaţia (2) devine

$$Q = \frac{\pi r^4}{8\mu} \rho g i, \tag{3}$$

din care se deduce

$$i = \frac{8\mu Q}{\pi \rho g r^4}. \tag{4}$$

Aceste relaţii sînt valabile de la valoarea zero pentru debit, respectiv pentru viteza v de curgere a lubrifiantului prin conductă, pînă la o valoare critică $v_c = \mathrm{Re}\frac{\mu}{\rho r}$, după care curgerea devine turbulentă. Valoarea numărului Reynolds în cazul conductelor circulare folosite de obicei pentru sistemele de ungere este de aproximativ 1 000.

Pînă în prezent, legile exprimînd rezistenţele în cazul curgerii turbulente au un caracter mai mult experimental.

S-a stabilit astfel că rezistenţa întîmpinată de un fluid curgînd printr-o conductă este în acest caz proporţională cu secţiunea, cu densitatea fluidului şi cu viteza medie de curgere la o putere ceva mai mică decît 2. Notînd prin v_m viteza medie, se poate deci scrie [2].

$$\pi r^2 (p_1 - p_2) = 2\pi r L k \rho v_m^n \tag{5}$$

şi mai departe

$$i = \frac{h_1 - h_2}{L} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g L} = \frac{2 k v_m^n}{g r}. \tag{6}$$

Prin definiţie, $v_m = \frac{Q}{\pi r^2}$, rezultînd

$$i = \frac{2 k Q^n}{\pi^n g r^{2n+1}} \tag{7}$$

sau

$$i = K \frac{Q^n}{r^{2n+1}}, \tag{8}$$

în care $K = \frac{2k}{\pi^n g}$ și exponentul n trebuie determinați experimental pentru conducte de diverse dimensiuni, materiale și rugozități ale suprafețelor interioare.

S-a constatat că valoarea lui n depinde, de fapt, de raportul dintre mărimea rugozităților și diametrul conductei, apropiindu-se, în cazul suprafețelor foarte rugoase, de valoarea 2, iar în cazul suprafețelor foarte netede de valoarea 1,7.

Factorul K a fost găsit constant pentru variații mari ale debitului în cazul unei conducte date, dar prezintă variații importante în funcție de dimensiunile conductei și de valoarea rugozității.

Dacă se admite pentru n valoarea 2, ecuația (8) capătă forma

$$i = K \frac{Q^2}{r^5}, \tag{9}$$

din care reiese pentru Q valoarea

$$Q = r^{2,5} \sqrt{\frac{i}{K}}. \tag{10}$$

Se remarcă astfel faptul că în cazul curgerii turbulente debitul este proporțional cu raza la puterea 2,5, pe cînd în cazul curgerii laminare era proporțional cu r^4, după cum reiese din relația (3).

Pentru prezentarea grafică este comod să se pună sub formă logaritmică relațiile exprimînd panta hidraulică i. Utilizînd relația (4), rezultă pentru regimul laminar expresia

$$\log i = \log Q + \log \mu + \log \frac{8}{\pi \rho g} - 4 \log r, \tag{11}$$

iar pentru regimul turbulent relația (8) capătă forma

$$\log i = n \log Q + \log K - (2n + 1) \log r. \tag{12}$$

În figura 1 se reprezintă grafic aceste relații pentru două conducte oarecare și se poate constata dependența lineară dintre $\log Q$ și $\log i$.

Dreapta corespunzătoare curgerii laminare este înclinată cu 45° față de orizontală, iar aceea corespunzătoare curgerii turbulente cu un unghi determinat de valoarea lui n; în acest caz s-a dat lui n valoarea 1,75.

Porțiunile pline ale dreptelor $i = f(Q)$ reprezintă valorile corespunzătoare fenomenelor reale: pînă la punctele de intersecție I, I' regimul de curgere este laminar, iar după aceste puncte este turbulent.

Pentru o gamă de diametre a conductelor, punctele de intersecție vor defini un loc geometric, respectiv o dreaptă.

În cazurile practice este mai util să se traseze separat diagramele pentru regimul la-

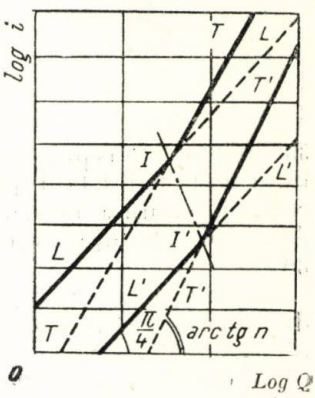


Fig. 1

minar față de cele corespunzătoare regimului turbulent. Astfel, în figura 2 este reprezentată panta hidraulică i în funcție de produsul $Q.\mu$ pentru o gamă întreagă de diametre de conducte [2]. În felul acesta se evită repetarea aceleiași diagrame pentru diferite valori ale viscozității μ.

Dreptele mai pline corespund densității $\rho = 1$, iar cele mai subțiri lui $\rho = 0{,}9$. Punctele critice de tranziție de la regimul laminar la cel

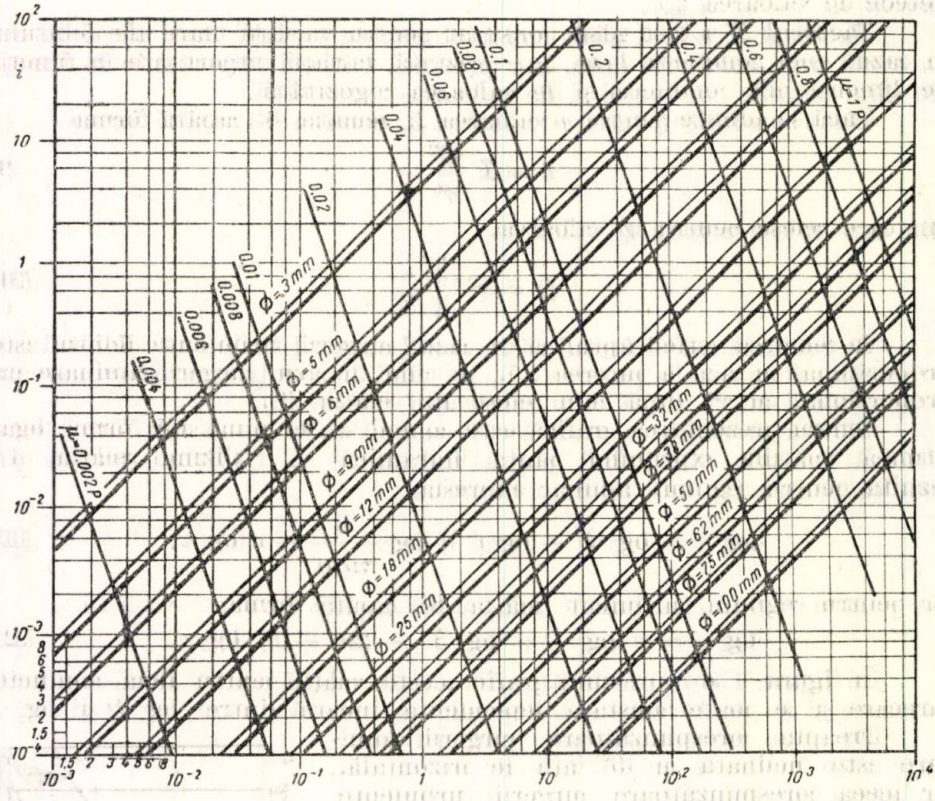


Fig. 2

turbulent sînt reprezentate prin dreptele corespunzătoare unor valori ale lui μ de la 0,001 la 1 poise. Conform observațiilor făcute anterior, pentru regimul laminar se consideră valorile aflate pe porțiunile liniilor $i = f(Q.\mu)$ pînă la intersecția lor cu aceste drepte, după care se trece la regimul turbulent.

În figura 3 se reprezintă relația dintre panta hidraulică i și debitul de lubrifiant Q în cazul curgerii turbulente; această diagramă se bazează atît pe date teoretice, cît și experimentale [2].

Datele experimentale au fost obținute cu ajutorul unor conducte avînd suprafețele interioare netede și curate, similare celor utilizate la

sistemele de ungere. Dreptele corespunzătoare diferitelor dimensiuni de conducte sînt trasate după datele experimentale obținute de diferiți cercetători pentru mai multe materiale. În cazul curgerii turbulente, relația dintre i și Q nu mai depinde nici de densitatea lubrifiantului, nici de viscozitatea lui.

După ce s-au stabilit pierderile de energie pentru conducte și celelalte părți componente ale sistemului de ungere, se pune problema cumu-

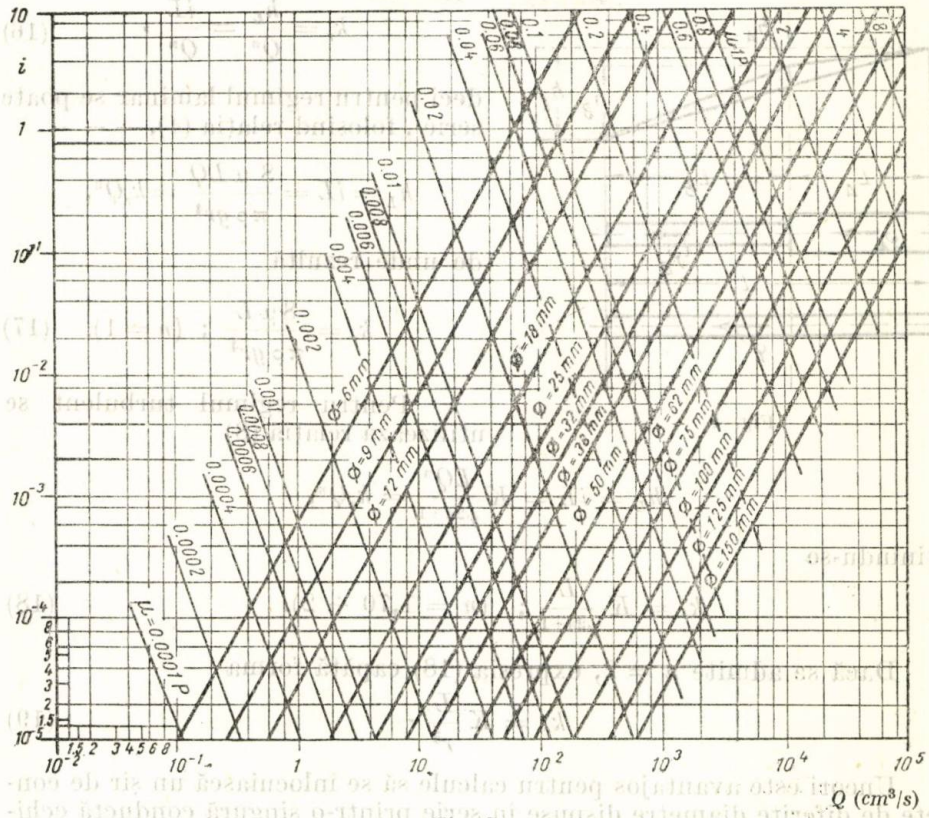


Fig. 3

lării lor pentru întregul sistem, considerîndu-se debitele și presiunile necesare la diferitele puncte de utilizare a lubrifiantului. Deoarece sistemele centralizate de ungere sînt de obicei instalații complexe, trebuie schițate metode de calcul pentru întreg ansamblul.

Conducte în serie. În acest caz (fig. 4), pierderea totală de energie se poate obține prin simpla adiție a pierderilor pentru fiecare conductă [3]:

$$h_L = (k_r Q^n)_A + (k_r Q^n)_B + \ldots + (k_r Q^n)_N = \sum_{i=1}^{N} (k_r Q^n)_i . \qquad (13)$$

Debitul rămînînd, conform principiului continuităţii, acelaşi în toate conductele :

$$Q = Q_A = Q_B = \ldots = Q_N , \tag{14}$$

rezultă

$$k_r = (k_r)_A + (k_r)_B + \ldots + (k_r)_N = \sum_{i=1}^{N} (k_r)_i . \tag{15}$$

Conform relaţiei sale de definiţie,

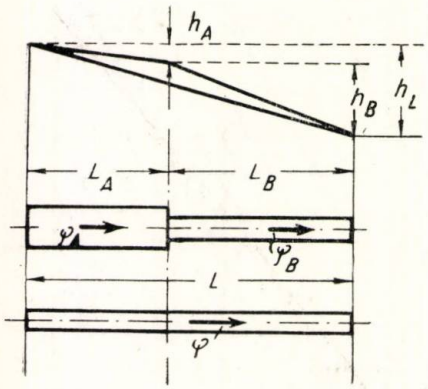


Fig. 4

$$k_r = \frac{h_L}{Q^n} = \frac{iL}{Q^n} , \tag{16}$$

deci pentru regimul laminar se poate scrie , folosind relaţia (4),

$$h_L = iL = \frac{8\,\mu LQ}{\pi \rho\, gr^4} = k_r Q^n ,$$

de unde rezultă

$$k_r = \frac{8\,\mu L}{\pi \rho\, gr^4} \; ; \; (n = 1). \tag{17}$$

Pentru regimul turbulent se utilizează relaţia (8)

$$h_L = iL = K \frac{LQ^n}{r^{2n+1}} = k_r Q^n ,$$

obţinîndu-se

$$k_r = K \frac{L}{r^{2n+1}} \; ; \quad (n = 1{,}70 \div 2). \tag{18}$$

Dacă se admite $n = 2$, expresia (18) capătă forma

$$k_r = K \frac{L}{r^5} . \tag{19}$$

Uneori este avantajos pentru calcule să se înlocuiască un şir de conducte de diferite diametre dispuse în serie printr-o singură conductă echivalentă, astfel încît debitul şi pierderea de energie să rămînă neschimbate.

În acest caz, pentru pierderea de energie se poate utiliza relaţia (15) împreună cu relaţiile (17) şi (18) ; pierderile de energie pentru fiecare conductă în parte se pot determina de asemenea cu ajutorul diagramelor redate în figurile 2 şi 3, metodă recomandabilă mai ales pentru regimul turbulent de curgere. Debitul conductei echivalente rămîne egal cu cel al conductelor — relaţia (14) —, iar lungimea sa va fi egală cu suma lungimilor conductelor considerate :

$$L = L_A + L_B + \ldots + L_N = \sum_{i=1}^{N} Li . \tag{20}$$

După stabilirea pierderii totale de energie prin însumarea pierderilor pentru fiecare conductă în parte se poate determina raza conductei echivalente cu ajutorul relațiilor (17) sau (19), din prima rezultînd pentru regimul laminar expresia

$$r = \sqrt[4]{\frac{8\mu L}{\pi\rho g k_r}} \tag{21}$$

și din a doua pentru regimul turbulent expresia

$$r = \sqrt[5]{\frac{KL}{k_r}}\,. \tag{22}$$

O verificare a acestor calcule se poate realiza determinîndu-se panta hidraulică i din relația

$$i = \frac{h_L}{L} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(h)_i}{\sum_{i=1}^{N} L_i} \tag{23}$$

și apoi deducîndu-se dimensiunile conductelor din figura 2 pentru cazul laminar în funcție de produsul $Q \cdot \mu$ sau din figura 3 pentru cazul turbulent în funcție de Q.

Conducte în paralel. În practica sistemelor de ungere se întîlnește adeseori cazul unor conducte de diferite diametre dispuse în paralel, alimentate de la o sursă comună (fig. 5). În acest caz pierderea de energie este identică pentru fiecare conductă [3]:

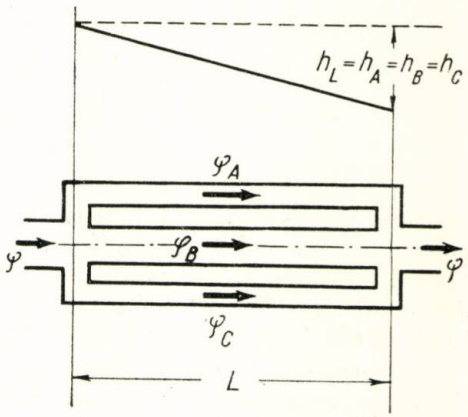


Fig. 5

$$h_L = k_r Q^n = (k_r Q^n)_A = (k_r Q^n)_B = \ldots = (k_r Q^n)_N\,, \tag{24}$$

iar debitul total va fi egal cu suma debitelor din conductele derivate :

$$Q = Q_A + Q_B + \ldots + Q_N = \sum_{i=1}^{N} Q_i\,, \tag{25}$$

rezultînd

$$\left(\frac{1}{k_r}\right)^{1/n} = \left(\frac{1}{k_r}\right)_A^{1/n} + \left(\frac{1}{k_r}\right)_B^{1/n} + \ldots + \left(\frac{1}{k_r}\right)_N^{1/n} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{k_r}\right)_i^{1/n}. \tag{26}$$

Lungimea conductelor se consideră, evident, constantă:

$$L = L_A = L_B = \ldots = L_N. \tag{27}$$

Adesea este necesar să se cunoască debitul de lubrifiant care trece prin fiecare conductă în parte. Se poate considera în acest caz un debit fictiv pentru una din conducte, Q'_i, cu ajutorul căruia se stabileşte h_L (sau i) comun tuturor conductelor, ceea ce se poate realiza foarte rapid cu ajutorul diagramelor din figurile 2 şi 3.

Apoi, în funcţie de i sau h_L găsit, se calculează toate debitele (fictive) ale conductelor: Q'_A, Q'_B, Q'_C, ... etc. Raportîndu-se debitul real total Q la debitele fictive găsite în modul arătat, se deduc debitele reale Q_A, Q_B, Q_C, ... etc. [4]:

$$\left.\begin{aligned} Q_A &= \frac{Q'_A \times Q}{\sum_{i=1}^{N} Q'_i} \\ Q_B &= \frac{Q'_B \times Q}{\sum_{i=1}^{N} Q'_i} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ Q_N &= \frac{Q'_N \times Q}{\sum_{i=1}^{N} Q'_i} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Se determină apoi pentru fiecare conductă în parte pierderea de energie h_L sau panta hidraulică i în funcţie de debitele Q_A, Q_B, ... etc. Dacă diferenţele dintre valorile obţinute sînt neglijabile înseamnă că problema este rezolvată; în caz contrar se repetă calculul, considerîndu-se drept debite fictive Q''_i, debitele Q_A, Q_B, ... etc.

Procedeul se repetă pînă cînd diferenţele găsite la calculul pierderilor de energie sînt suficient de mici.

Reţele de conducte. Adeseori sistemele de ungere pot avea o structură complicată datorită numeroaselor puncte de alimentare cu lubrifiant, fiind astfel necesară elaborarea unei metode generale de calcul, aplicabilă oricărui sistem, indiferent de complexitatea lui.

Prin aplicarea metodei lui Cross de încercări succesive controlate [3] la cazul fluidelor vîscoase, se poate obţine o astfel de metodă generală de calcul.

Se notează prin ΔQ diferenţa dintre debitul real Q dintr-o conductă oarecare şi un debit fictiv Q_0, adică

$$Q = Q_0 + \Delta Q, \tag{29}$$

astfel încît suma pierderilor într-o buclă a sistemului compusă din conductele AB, BC etc. (fig. 6) se poate scrie sub forma

$$\sum_{i,j=1}^{N} [k_r (Q_0 + \Delta Q)^n]_{i,j} = 0. \quad (30)$$

După dezvoltare se reţin primii doi termeni, presupunînd că ΔQ este suficient de mic, ceea ce conduce la relaţia

$$\sum_{i,j=1}^{N} (k_r Q_0^n + n k_r Q_0^{n-1} \Delta Q)_{i,j} = 0, \quad (31)$$

din care rezultă ΔQ :

$$\Delta Q = - \frac{\sum_{i,j=1}^{N} (k_r Q_0^n)_{i,j}}{\sum_{i,j=1}^{N} (n k_r Q_0^{n-1})_{i,j}}. \quad (32)$$

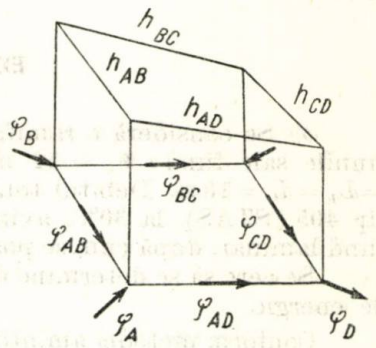


Fig. 6

Valoarea lui ΔQ astfel obţinută se introduce în relaţia (29), rezultînd debitul Q, mai apropiat de valoarea reală decît debitul fictiv Q_0. Se repetă procedeul, considerîndu-se de fiecare dată drept debite fictive $Q_{0i,j}$ debitele $Q_{i,j}$ rezultate din calcul, pînă se obţine o valoare suficient de mică pentru ΔQ. Valorile k_r se pot determina fie în modul arătat, cu ajutorul diagramelor $i = f(Q.\mu)$ sau $i = f(Q)$ (fig. 2 şi 3), considerîndu-se debitele fictive iniţiale, fie cu ajutorul a diverse relaţii teoretice sau date experimentale. Valorile iniţiale deduse pentru pierderi, chiar dacă sînt aproximative, se pot păstra pînă la sfîrşitul calculului, deoarece ele afectează atît numărătorul, cît şi numitorul expresiei (32), şi, în consecinţă, se obţine practic aceeaşi corecţie pentru ΔQ. Dacă este necesar, după obţinerea debitelor $Q_{i,j}$ cu suficientă precizie, se pot recalcula pierderile în funcţie de aceste valori reale ale debitelor.

Pentru aplicaţiile numerice trebuie respectate următoarele reguli :

a) Relaţiile pentru fiecare buclă se scriu în sensul acelor de ceasornic, termenii ecuaţiei (30) fiind pozitivi cînd debitul are acest sens şi negativi în caz contrar.

b) Satisfacerea principiului continuităţii impune, la conductele pentru care termenii exprimînd pierderile de energie sînt negativi, ca ΔQ să fie de asemenea negativ. În consecinţă, numitorul ecuaţiei (32) va fi o sumă de valori absolute, iar semnul lui ΔQ va fi determinat de semnul numărătorului, care va fi o sumă algebrică.

c) Deoarece ΔQ are aceeaşi valoare pentru toate conductele dintr-o buclă a sistemului considerată separat, reiese că vor exista conducte care fac parte alternativ din două bucle. În acest caz, valoarea lui Q, dată de relaţia (29), va fi modificată de ambele valori ale lui ΔQ rezultate pentru cele două bucle şi care se vor aplica succesiv conductei respective.

d) Se va considera pentru regimul laminar $n = 1$ şi pentru cel turbulent $n = 1{,}7 \div 2$.

În toate cazurile considerate s-au neglijat pierderile la racordări, presupunînd existența unor construcții îngrijite care fac aceste pierderi neglijabile.

EXEMPLE DE CALCUL

a) Se consideră o ramificație triplă (fig. 5) a unei conducte, dimensiunile sale fiind: $\vartheta_A = 12$ mm; $\vartheta_B = 8$ mm; $\vartheta_C = 18$ mm; $L = L_A = L_B = L_C = 10$ m. Debitul total $Q = 100$ cm³/s. Uleiul utilizat este uleiul tip 405 (STAS), la 30°C, avînd deci $\mu = 0{,}9$ P [5]. Regimul de curgere fiind laminar, după cum se poate constata și din figura 2, $n = 1$.

Se cere să se determine debitele în ramificațiile A, B, C și pierderea de energie.

Conform metodei amintite, se consideră debitul fictiv $Q_A = 30$ cm³/s, pentru care se găsește, cu ajutorul diagramelor din figura 2, $i_A = 0{,}5$. Deoarece, conform relației (24), $h_{L_A} = h_{L_B} = h_{L_C}$ și cum $L_A = L_B = L_C$, rezultă $i_A = i_B = i_C = 0{,}5$.

Pentru $i = 0{,}5$, tot din figura 2 rezultă pentru $\vartheta_c = 18$ mm, $Q'_c = 100$ cm³/s, deci $Q' = Q'_A + Q'_B + Q'_C = 138$ cm³/s.

Cu ajutorul relațiilor (28) se găsesc:

$$Q_A = \frac{Q'_A \times Q}{Q'} = \frac{30 \times 100}{138} \cong 22 \text{ cm}^3/\text{s},$$

$$Q_B = \frac{Q_B \times Q}{Q'} = \frac{8 \times 100}{138} \cong 6 \text{ cm}^3/\text{s},$$

$$Q_C = \frac{Q'_C \times Q}{Q'} = \frac{100 \times 100}{138} \cong 72 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

Pentru aceste debite, rezultă în continuare din figura 2: $i_A = 0{,}4$; $i_B = 0{,}39$; $i_C = 0{,}38$.

Deoarece valorile pentru pierderi sînt foarte apropiate, calculul se poate considera încheiat, valoarea medie pentru pierderea de coloană fiind

$$h_L = i \cdot L = 0{,}39 \times 10 = 3{,}9 \text{ m},$$

iar pierderea de presiune corespunzătoare $\Delta p = 0{,}35$ kg/cm².

Dacă este necesară o precizie mai mare a calculului, valoarea Q_A obținută se consideră drept o nouă valoare fictivă Q''_A și calculul se repetă pentru $i = 0{,}4$.

b) Se consideră rețeaua de conducte din figura 7, avînd următoarele caracteristici: $\vartheta_{AB} = 12$ mm; $\vartheta_{AC} = 18$ mm; $\vartheta_{BC} = 10$ mm; $\vartheta_{BD} = 18$ mm; $\vartheta_{CD} = 12$ mm; $L_{AB} = L_{AC} = L_{BD} = L_{CD} = 5$ m; $L_{BC} = 8$ m. În sistem circulă ulei tip 302 (STAS) la temperatura de 60°C, deci $\mu = 0{,}046$ P [5].

Se cere să se găsească valorile debitelor în conductele sistemului, știind că debitul total de intrare, respectiv de ieșire din sistem este $Q = 1200$ cm³/s.

Considerînd o repartiție oarecare a debitului conform figurii 7 *a*, adică $Q_{0AB} = Q_{0BC} = Q_{0CD} = 400$ cm³/s; $Q_{0AC} = Q_{0BD} = 800$ cm³/s, din

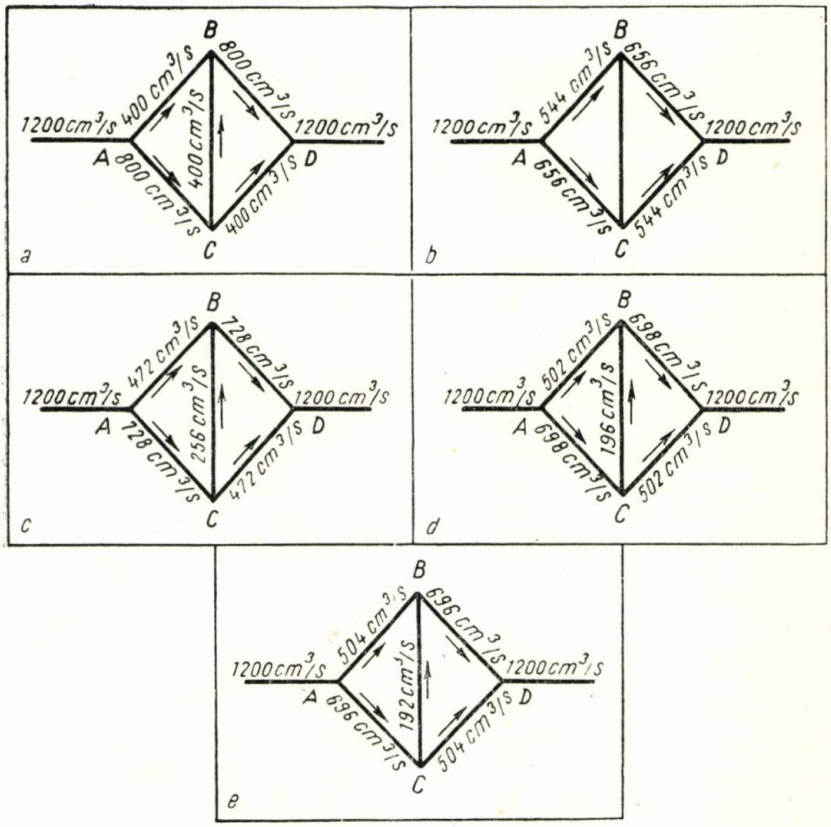


Fig. 7

diagramele reprezentate în figura 3 (curgerea este turbulentă, după cum se poate constata examinînd diagramele, deci $n = 2$) se găsesc următoarele valori pentru panta hidraulică: $i_{AB} = 1$; $i_{AC} = 0{,}6$; $i_{BC} = 3$; $i_{CD} = 1$; $i_{BD} = 0{,}6$.

Din relația (16) se deduc valorile lui k_r:

$$k_{rAB} = \frac{i_{AB} L_{AB}}{Q_{0AB}^2} = \frac{1 \times 500}{400^2} = 0{,}31 \times 10^{-2} \text{ s/cm}^2.$$

În mod similar se găsesc: $k_{rAC} = k_{rBD} = 0{,}47 \times 10^{-3}$ s/cm²; $k_{rBC} = 1{,}5 \times 10^{-2}$ s/cm²; $k_{rCD} = 0{,}31 \times 10^{-2}$ s/cm².

Aplicîndu-se apoi metoda prin încercări succesive controlate expusă anterior, se stabileşte cu ajutorul relaţiei (32) valoarea lui ΔQ pentru bucla ABC din sistem:

$$\Delta Q = -\frac{k_{rAB} \times Q_{0AB}^2 - k_{rAC} \times Q_{0AC}^2 - k_{rBC} \times Q_{0BC}^2}{n\,(k_{rAB} \times Q_{0AB} + k_{rAC} \times Q_{0AC} + k_{rBC} \times Q_{0BC})} =$$

$$= -\frac{0{,}31 \times 10^{-2} \times 400^2 - 0{,}47 \times 10^{-3} \times 800^2 - 1{,}5 \times 10^{-2} \times 400^2}{2\,(0{,}31 \times 10^{-2} \times 400 + 0{,}47 \times 10^{-3} \times 800 + 1{,}5 \times 10^{-2} \times 400)} =$$

$$= +144 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

Pentru bucla BCD se obţine în mod identic $\Delta Q = -144$ cm³/s.

Aplicînd aceste corecţii sistemului conform relaţiei (29) şi regulilor stabilite, se găsesc debitele reprezentate în fig. 7 *b*, adică $Q_{AB} = Q_{CD} = 544$ cm³/s; $Q_{AC} = Q_{BD} = 656$ cm³/s; $Q_{BC} = 112$ cm³/s.

Considerînd acum aceste debite drept debite fictive, dar păstrîndu-se valorile pentru k_r, se repetă calculul şi se găseşte: $\Delta Q = -72$ cm³/s pentru bucla ABC şi $\Delta Q = +72$ cm³/s pentru bucla BCD.

Cu ajutorul acestor corecţii se obţin debitele reprezentate în figura 7 *c* şi, repetînd procedeul, rezultă $\Delta Q = +30$ cm³/s pentru bucla ABC şi $\Delta Q = -30$ cm³/s pentru bucla BCD, debitele corespunzătoare fiind reprezentate în figura 7 *d*. În fine, considerînd şi aceste valori drept debite fictive, rezultă $\Delta Q = +2$ cm³/s pentru bucla ABC şi $\Delta Q = -2$ cm³/s pentru bucla BCD, debitele devenind (fig. 7*e*): $Q_{AB} = Q_{CD} = 504$ cm³/s, $Q_{AC} = Q_{BD} = 696$ cm³/s; $Q_{BC} = 192$ cm³/s.

Date fiind valorile mici ale lui ΔQ din ultima etapă, calculul se poate considera încheiat.

Primită la redacţie la 17 noiembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Al. Nica, *Sisteme noi de ungere a utilajelor industriale.* I.D.T., Bucureşti, 1960.
2. A. G. M. Michell, *Lubrication,* Blackie and Son, London, 1950.
3. V. L. Streeter, *Handbook of Fluid Dynamics.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1961.
4. H. Rouse, *Engineering Hydraulics,* John Wiley, New York, 1950.
5. N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al. Nica, O. Biţă, *Lagăre cu alunecare.* Edit. Acad.R.P.R., Bucureşti, 1961.

ASPECTE ALE FRECĂRII ŞI UZURII ÎN CAZUL LUBRIFIERII CU BISULFURĂ DE MOLIBDEN[1])

OLGA BIŢĂ şi I. DINCĂ

Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R., Bucureşti

539.6

Eficacitatea bisulfurii de molibden (MoS_2) folosită ca lubrifiant este puternic influenţată de puritatea şi de omogenitatea granulaţiei produsului folosit.

În lucrarea de faţă se prezintă unele observaţii şi rezultate experimentale privind influenţa MoS_2 naturală şi sintetică, cu calităţi diferite în ceea ce priveşte puritatea şi granulaţia, asupra frecării şi uzurii suprafeţelor metalice, încercate în condiţiile de variere a parametrilor funcţionali: viteză, sarcină şi temperatură.

Performanţele maşinilor actuale implică, pentru anumite detalii ale acestora în frecare, condiţii de funcţionare care depăşesc domeniile de eficacitate ale lubrifianţilor obişnuiţi.

Din acest fapt a izvorît necesitatea investigaţiilor pentru găsirea unor substanţe cu proprietăţi speciale care să completeze sortimentele actuale de lubrifianţi, prin folosirea lor ca atare sau ca adaosuri menite să îmbunătăţească calităţile naturale ale uleiurilor şi unsorilor pentru domenii în care acestea nu mai pot face faţă condiţiilor grele de funcţionare ale organelor de maşini.

Dintre produsele naturale sau sintetice corespunzătoare necesităţii amintite, bisulfura de molibden, datorită proprietăţilor sale, este folosită pe scară din ce în ce mai largă ca lubrifiant solid de extremă presiune şi temperatură.

Lucrarea de faţă cuprinde unele observaţii şi rezultate experimentale referitoare la eficacitatea bisulfurii de molibden.

---

[1]) Publicată şi în „Rev. roum. sci. techn. — Mecanique appliquée", **10**, 2 (1965).

GENERALITĂȚI

Pentru ca un material solid să acționeze satisfăcător ca lubrifiant, trebuie să posede, printre altele, două proprietăți importante [1]:

— tensiune de forfecare scăzută și

— afinitate puternică față de suprafețele metalice cu care vine în contact.

Bisulfura de molibden (MoS_2) reprezintă un asemenea lubrifiant solid, de calitate superioară, care își menține proprietățile într-un domeniu larg de condiții de funcționare, în special în cazul ungerii la limită sau uscată, formînd filme aderente și foarte rezistente pe suprafețele metalice.

Adeziunea puternică justifică folosirea ei chiar în cazul regimului de ungere hidrodinamică al cuplurilor de frecare. Ocazional pot apărea și în acest caz sarcini locale ce depășesc cu mult rezistența peliculei lubrifianților obișnuiți, favorizînd astfel crearea punților de sudură. Fie că este vorba despre un regim permanent la limită, fie de o perturbare ocazională a regimului hidrodinamic, în aceste situații devin preponderente proprietățile de onctuozitate ale lubrifianților. Forțele de coeziune moleculară sau forțele Van der Waals nu asigură decît legături slabe între lubrifianți și metal, legături mai puternice obținîndu-se prin atracția electrostatică care rezultă din caracterul polar al moleculelor lubrifiantului.

Structura cristalină și natura legăturilor bisulfurii de molibden îi determină atît tensiunea de forfecare scăzută, cît și proprietăți de polaritate foarte pronunțate. Rețeaua MoS_2 este o rețea stratificată, hexagonală. Legăturile dintre planurile paralele realizate prin atomii de sulf, fiind foarte slabe (de natură Van der Waals), permit forfecarea cu ușurință a MoS_2 și deplasarea după planuri de clivaj [2].

Prezența atomilor de sulf imprimă capacitatea de polarizare electrostatică puternică a particulelor de MoS_2 și deci aderarea la suprafețele metalice.

Aceste caracteristici permit să se obțină, în cazul folosirii MoS_2, coeficienți de frecare scăzuți și asigură capacitatea peliculei de a rezista la presiuni specifice cu mult superioare celor admise pentru majoritatea lubrifianților cunoscuți [2], [3], [4].

Bisulfura de molibden este o combinație stabilă termic pînă la 450—500°C, nedeterminînd sensibil variații ale coeficientului de frecare și ale rezistenței peliculei, însă peste aceste valori se descompune rapid cu formarea oxizilor, de preferință MoO_3, care este abraziv și eliberarea SO_2, care poate coroda suprafețele metalice. În mediu inert, MoS_2 își menține proprietățile lubrifiante pînă la 1 100°C [1], [3]. În general, MoS_2 are o bună stabilitate chimică. În anumite reacții chimice, totuși acționează ca bun catalizator, proprietate ce trebuie luată în considerație atunci cînd se folosește cu diferiți lianți sau în prezența altor aditivi. Efectul acestora se poate manifesta fie prin reacția chimică cu MoS_2 (acidul ortofosforic), fie prin anihilarea sau accentuarea proprietăților

molecular-superficiale ale acesteia, prin efecte fizice. Astfel, prezența acidului oleic sau a altor acizi superficial-activi pare să micșoreze aderarea MoS_2 la suprafețele metalice, pe cînd prezența aditivilor alcalini (trietanolamina) este favorabilă aderării [5].

Încercări comparative cu lubrifianți solizi de același gen, ca grafit coloidal, bisulfură de tungsten, iodură de cadmiu, au evidențiat comportarea calitativ superioară a MoS_2 atît în ceea ce privește coeficientul de frecare, cît și a rezistenței peliculei în timp [1], [3].

Bisulfura de molibden folosită ca lubrifiant trebuie să prezinte anumite calități în ceea ce privește puritatea și granulația:

— puritatea minimă admisă este de 98,5% MoS_2 [6]; deosebit de dăunătoare sînt impuritățile de SiO_2, care nu trebuie să depășească 0,02%. Recomandările privind conținutul în sulf liber și în fier nu sînt unanim acceptate;

— în privința granulației, literatura indică valori cuprinse între 1 și 60 μ [2], cu mărimea medie a particulelor de ~ 5 μ [7], [8]; firmele producătoare limitează totuși mărimea granulelor la 90 μ.

Majoritatea experimentărilor făcute asupra comportării MoS_2 ca lubrifiant solid sub diferite forme în care s-au obținut rezultate bune au folosit MoS_2 cu granulația între 5 și 7 μ [4], [7], [8], [9]. Nerespectarea condițiilor de granulație și de puritate poate micșora sau chiar anula complet proprietățile lubrifiante ale produsului. Astfel, prezența SiO_2 peste proporția amintită, precum și prezența fierului, conduce la uzuri nedorite prin abraziune, iar impuritățile de Na_2SO_4 sau de sulf liber peste 0,016%, rezultate în procesul de elaborare în cazul MoS_2 sintetică, suprapun efectelor abrazive uzura prin coroziune.

Bisulfura de molibden se folosește ca lubrifiant sub diferite forme: pulbere ca atare depusă pe suprafețele metalice, pastă, adaos în uleiuri și unsori etc.

Sub formă de pulbere ca atare se aplică pe suprafețele metalice prin frecare, prin intermediul unor lichide volatile sau prin intermediul lianților: rășini organice pentru temperaturi joase, substanțe anorganice (oxizi, silicați, fosfați sau alte substanțe similare cu temperatură de descompunere convenabilă) pentru temperaturi mai ridicate. Rezultate bune s-au obținut folosind amestecul de MoS_2 cu silicon lichid [2], care a permis formarea unei pelicule lubrifiante foarte rezistente în timp.

Unsorile conțin între 10 și 20%, iar pastele minimum 60% pudră de MoS_2, acestea din urmă conținînd procente variabile de substanțe pentru mărirea aderenței.

Ca adaos în uleiuri, concentrația MoS_2 variază între 2,5 și 10%. În acest caz, stabilitatea coloidală a suspensiilor este esențială, în special la motoarele cu ardere internă, unde sub efectul temperaturii și al circulației se poate separa prin centrifugare. De asemenea, în cazul dispersiei necorespunzătoare, particulele sînt reținute de către filtrele de ulei. În vederea asigurării granulației corespunzătoare și a stabilității, uleiurile cu MoS_2 conțin și substanțe dispersante și stabilizatoare.

DATE EXPERIMENTALE
CONDIȚII DE LUCRU

Studiul experimental efectuat a avut ca scop asigurarea condițiilor de funcționare, din care, pe baza unor criterii bine stabilite, să rezulte comportarea ca lubrifiant a MoS_2.

Încercările s-au efectuat pe instalația experimentală I.M.A. de tip sabot-tambur [10], în următoarea gamă de variație a parametrilor funcționali :

— viteza : 1,6 ; 3,2 ; 6,4 m/s,
— sarcina : 60 kgf/cm^2,

considerați corespunzători unui regim moderat de funcționare, și

— viteza : 1,6 ; 3,2 ; 6,4 m/s,
— sarcina : 2 200 — 7 800 kgf/cm^2,

corespunzînd unui regim de funcționare sever, pentru aprecierea eficacității MoS_2, în special ca lubrifiant de extremă presiune.

Pentru regimul moderat, cuplul de frecare a constat dintr-un tambur de oțel carbonitrurat cu $H_B \cong 600$ și sabotul din bronz de plumb, contactul dintre piesele conjugate făcîndu-se pe o suprafață aparentă de $\sim 2{,}7$ cm^2; pentru regimul sever tamburul a fost confecționat din oțel carbonitrurat și sabotul din OLC 45 călit cu $H_B \cong 500$, contactul între piesele de frecare fiind liniar pe o lungime de ~ 14 mm. Sarcina maximă în cazul contactului liniar s-a determinat după formula lui Hertz pentru situația contactului cilindru-plan la materiale cu același modul de elasticitate :

$$p^2_{max} = \frac{0{,}175\ PE}{r\ l},$$

în care

p_{max} este sarcina maximă, în kgf/cm^2,
l — lungimea de contact, în cm,
r — raza cilindrului, în cm,
P — sarcina aplicată, în kgf,
E — modulul de elasticitate al materialelor, în kgf/cm^2.

Ungerea în cazul folosirii ca lubrifiant a uleiului cu adaos de MoS_2 pulbere în diferite concentrații s-a făcut în baie de ulei, temperatura mediului de ungere variind între 30 și 170°C ; în cazul folosirii sub formă de pastă, aceasta s-a folosit prin aplicarea ei pe suprafețele de frecare.

Temperatura s-a măsurat cu un termocuplu montat la 0,5 mm de suprafața activă (de frecare) a sabotului.

Temperatura limită maximă a fost de $\sim 300-350$°C în cazul regimului moderat (cu sabot din BzPb) și $\sim 380 - 400$°C pentru cazul sabotului de oțel.

REZULTATE

Ca parametri de apreciere a eficacității MoS_2 s-au considerat :
— coeficientul de frecare,
— uzura cuplului de frecare,
— rezistența peliculei de lubrifiant la sarcini mari.

REGIM MODERAT DE LUCRU

Coeficientul de frecare. Curbele din figura 1 reprezintă valorile coeficientului de frecare și evoluția acestora în funcție de viteză pentru temperatura mediului de ungere de 34,5°C, corespunzînd valorii de 140°C, măsurată cu termocuplul la 0,5 mm de suprafața activă a sabotului.

Valorile cele mai mici ale coeficientului de frecare s-au obținut în cazul folosirii adaosului de 10% MoS_2 naturală în ulei sub formă coloidală. În funcție de viteză, acesta scade de la treapta de 1,6 m/s la cea de 3,2 m/s, menținîndu-se apoi constant.

Curbele reprezentînd coeficientul de frecare în cazul folosirii uleiului 311 curat și cu adaos de 10% MoS_2 naturală și sintetică au, în general, evoluții asemănătoare, cu micșorări ale valorii de la treapta de 1,6 m/s la cea de 3,2 m/s și apoi ușoare creșteri spre treapta de 6,4 m/s.

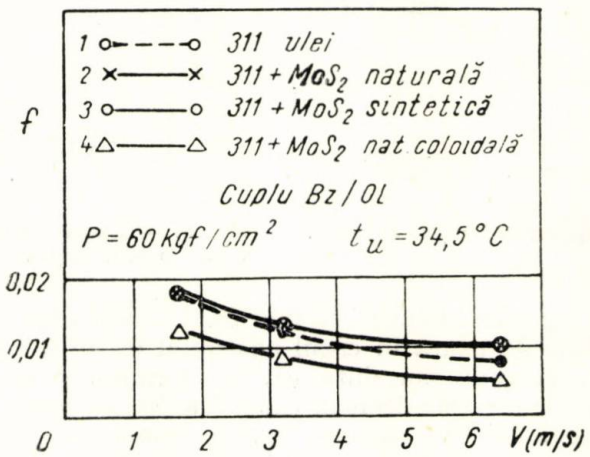


Fig. 1. — Variația coeficientului de frecare în funcție de viteza de alunecare, pentru un regim moderat de funcționare.

Deși pentru anumite valori ale abscisei (reprezentînd viteza) diferențele ordonatelor sînt foarte mici, uneori insensibile, totuși, comparativ, o ordine a calității lubrifianților din acest punct de vedere situează în primul rînd uleiul cu MoS_2 coloidală, uleiul curat și apoi uleiul cu MoS_2 naturală și sintetică, ale căror curbe se suprapun.

Uzura. Dinamica uzurii cu viteza, în condițiile de sarcină și temperatură precizate anterior, este ilustrată de curbele din figurile 2 și 3, primele reprezentînd uzura specifică în timp, iar celelalte (fig. 3) reprezentînd uzura pentru un parcurs determinat (1000 m).

Se remarcă valoarea mică a uzurilor atît pentru sabot, cît și pentru tambur și menținerea la valori aproximativ constante, pentru diferite

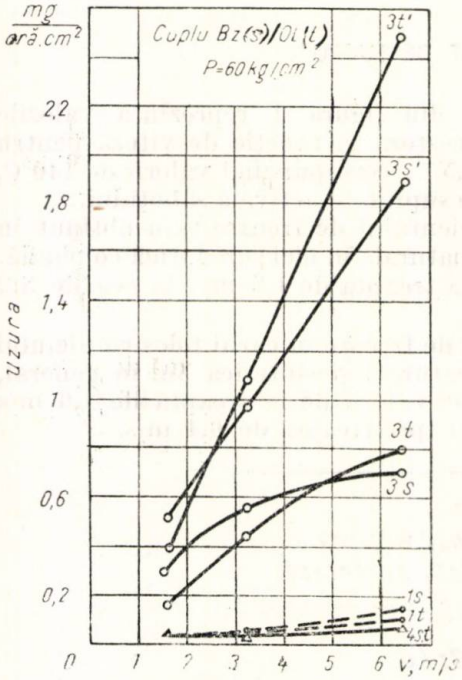


Fig. 2. — Uzura cuplului în funcție de viteză.

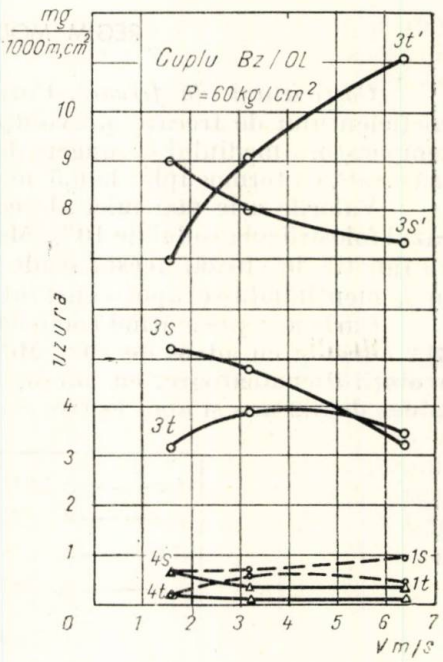


Fig. 3. — Uzura cuplului în funcție de viteză pentru un parcurs fix de 1 000 m.

trepte de viteze, în cazul folosirii ca lubrifiant a MoS_2 naturală sub formă coloidală. Curbele de uzură în cazul adaosului de 10% MoS_2 de granulație sub 63 μ, naturală sau sintetică, se suprapun și arată în general, valori mai mari ale acesteia decît în cazul folosirii ca lubrifiant a uleiului 311 curat. Curbele 3′ din aceeași figură reprezintă valori ale uzurii tamburului și sabotului la folosirea adaosului de MoS_2 sintetică sub formă de pulbere nesortată granulometric. După cum se vede, uzurile în această situație sînt sensibil mai mari decît în cazurile precedente.

Deosebirile diferitelor sorturi de lubrifiant în ceea ce privește uzura cuplului sînt mai nete decît cele ilustrate de coeficientul de frecare, situîndu-se în ordine, din acest punct de vedere, uleiul cu MoS_2 coloidală, uleiul cu adaos de MoS_2 naturală, cel de MoS_2 sintetică, ambele cu granulații sub 63 μ, și, în sfîrșit, uleiul cu MoS_2 sintetică nesortată, cu dimensiunea granulelor de la 0—100 μ și peste această valoare.

În explicarea rezultatelor privind coeficientul de frecare şi uzura, o primă observaţie se referă la depunerile în ulei, atît ale MoS_2 sintetice, cît şi ale celei naturale, mai accentuate însă la prima, precum şi existenţa în MoS_2 sintetică a unor impurităţi rezultate din tehnologia de elaborare a produsului.

O a doua observaţie se referă la o mai pronunţată neomogenitate a granulaţiei de asemenea la MoS_2 sintetic.

Analiza granulometrică, ale cărei rezultate sînt cuprinse în tabela 1, indică predominarea fracţiunilor cu granulaţie mare mai ales la MoS_2 sintetică, care explică existenţa depunerilor mai accentuate ale acestui produs.

Tabela 1

Dimensiunile ochiurilor sitei	Cantitatea de praf trecută prin sită, %	
	MoS_2 naturală	MoS_2 sintetică
0,100 mm	95	71,5
0,071 ,,	73,6	60,5
0,063 ,,	60,5	56,0

Studiul la microscop al celor două sortimente sub formă de pulbere, a scos în evidenţă prezenţa particulelor de MoS_2 individualizate, fine, dimensiunile granulelor variind între 2 şi 50 μ, mai grosiere peste 100μ şi prezenţa unor aglomerări de MoS_2 peste 300 μ. În plus, s-au observat impurităţi individualizate de dimensiuni variabile, cu predominarea celor peste 50 μ la cea sintetică, şi de asemenea impurităţi de dimensiuni între 5 şi 30 μ, ataşate grăunţilor de MoS_2, atît la cea sintetică, cît şi la cea naturală.

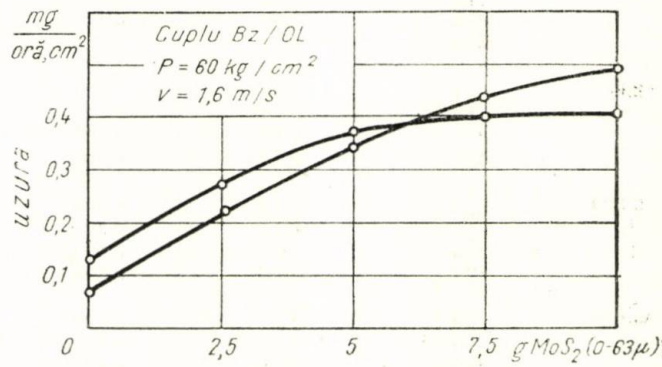


Fig. 4. — Influenţa concentraţiei MoS_2 sintetică asupra uzurii cuplului de frecare.

Prezenţa acestor impurităţi — după natura chimică Na_2SO_4, oxizi de molibden şi compuşi de siliciu şi fier — poate reduce considerabil eficacitatea MoS_2, să-i anuleze complet efectul sau chiar s-o facă abrazivă.

Variaţia curbei de uzură a cuplului de frecare în funcţie de concentraţia uleiului în MoS_2 relevă tocmai acest aspect (fig. 4).

Deși ar fi fost de așteptat ca o dată cu creșterea concentrației uzura să se micșoreze, în realitate efectul a fost contrar. Influența negativă a impurităților a avut o pondere mai mare decît efectul MoS_2 asupra comportării uleiului cu adaos, rezultatul global fiind uzura sporită atît a sabotului, cît și a tamburului.

Așa cum rezultă din figurile 2 și 3, constatarea este valabilă și pentru MoS_2 naturală.

REGIM SEVER DE LUCRU

Folosirea MoS_2 sub formă de adaos în ulei. Deoarece utilizarea MoS_2 este indicată în special pentru condiții severe de lucru, mai ales în ceea ce privește sarcina specifică a suprafețelor active, studiul s-a extins într-un domeniu de sarcini a cărui limită inferioară a fost de 2 200 kgf/cm^2.

Tabela 2 prezintă valorile coeficientului de frecare într-un domeniu cuprins între 2 200 și 4 000 kgf/cm^2, la viteza de 1,6 m/s, pentru patru trepte de temperatură ale mediului de ungere (25, 80, 125, 170°C), folosind ca adaos MoS_2 sintetică sau naturală, nesortată granulometric.

Tabela 2

Sarcina kgf/cm^2	Temperatura °C	Coeficient de frecare, f_{med}	
		311 + MoS_2 naturală	311 + MoS_2 sintetică
2 200	24	0,16	0,13
	80	0,16	0,13
	125	0,16	0,13
	170	0,16	0,135
2 800	25	0,108	0,108
	80	0,136	0,127
	125	0,136	0,127
	170	0,108	0,109
3 500	25	0,108	0,108
	80	0,129	0,122
	125	0,129	0,109
	170	0,108	0,108
4 000	25	0,1	0,108
	80	0,125	0,122
	125	0,125	0,109
	170	0,108	0,109

Compararea valorilor coeficientului de frecare relevă o comportare asemănătoare a MoS_2 naturală și sintetică. Din același tabel rezultă că variațiile de temperatură ale mediului între 25 și 170°C, corespunzînd domeniului de temperaturi ale cuplului pe suprafețele active de 250—400°C, nu produce variații sensibile ale coeficientului de frecare.

Curbele de variaţie a coeficientului de frecare cu sarcina — pentru $v = 1{,}6$ mm/s şi temperatura de contact de 380—400°C (fig. 5) — indică o suprapunere a valorilor acestuia pentru cele trei sortimente de MoS_2: sintetică şi naturală în proporţie de 10% în ulei, cu granulaţia sub 63 μ, şi MoS_2 coloidală. Pînă la sarcina de 4 500 kgf/cm² valorile sînt apropiate

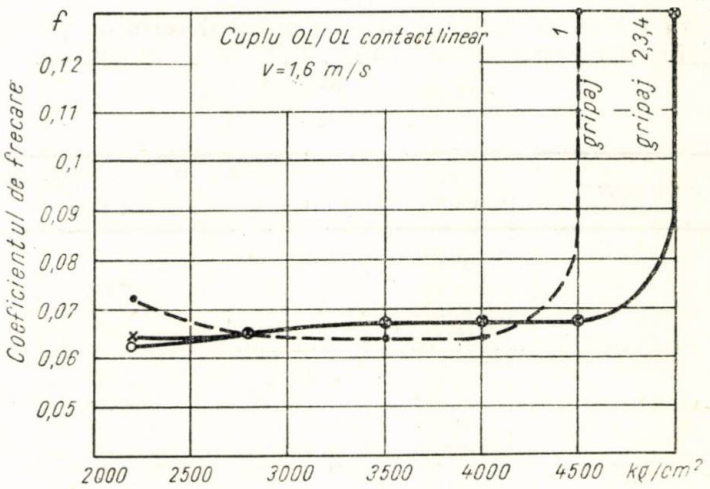


Fig. 5. — Variaţia coeficientului de frecare în funcţie de sarcina, în cazul unui regim sever de funcţionare.

de cele obţinute la folosirea ca lubrifiant a uleiului 311 fără adaos. La această sarcină, în cazul folosirii uleiului curat, se produce gripajul, valorile coeficientului de frecare pentru uleiul cu adaos menţinîndu-se constante pînă la 5 000 kgf/cm², valoare la care s-a produs de asemenea gripajul.

Din compararea valorilor coeficientului de frecare cuprinse în tabela 2 cu cele din figura 5 se remarcă o comportare sensibil diferită a MoS_2 de granulaţie sub 60 μ faţă de acelaşi produs nesortat (valori de granulaţie 0—100 μ sau chiar >). Uzurile foarte mici, constatate în cazul contactului liniar, nu au permis obţinerea gravimetric a unor valori concludente pentru compararea atît între ele a sortimentelor de MoS_2 folosite cît şi faţă de situaţia folosirii uleiului curat.

O imagine mai corespunzătoare privind variaţiile coeficientului de frecare ale cuplului oţel-oţel în funcţie de sarcină şi viteză o oferă tabela 3. Se remarcă astfel, pe de o parte, constanţa sau variaţia mică a coeficientului de frecare cu viteza şi sarcina, iar pe de altă parte — ceea ce de fapt este esenţial — că MoS_2 ca adaos permite obţinerea de coeficienţi de frecare acceptabili la sarcini superioare, care depăşesc domeniul de eficacitate al uleiului curat.

Coeficienții de frecare ai cuplului oțel-oțel, cuprinși în tabela 3, reprezintă valorile medii pentru un parcurs fix căruia îi corespund timpii de funcționare de :

— o oră pentru $v = 1{,}6$ m/s,
— 30′ pentru $v = 3{,}2$ m/s,
— 15′ pentru $v = 6{,}4$ m/s.

Pentru viteza de 3,2 m/s nu s-au putut determina valori medii ale coeficientului de frecare obținute după un timp de funcționare al cuplului

Tabela 3

Mediul de ungere	Sarcina kgf/cm²	Coeficient de frecare, $f_{med.}$		
		$v = 6{,}4$ m/s	$v = 3{,}2$ m/s	$v = 1{,}6$ m/s
311	2 200	0,05	0,05	0,064
	2 800	—	0,076	0,065
	3 500	—	—	0,064
	4 000	—	—	0,064
311 + 10 % MoS_2 naturală	2 200	0,05	0,054	0,064
	2 800	0,064	0,064	0,065
	3 500	0,064	0,085	0,068
	4 000	0,06	0,083	0,068
311 + 10 % MoS_2 sintetică	2 200	0,05	0,054	0,063
	2 800	0,06	0,071	0,065
	3 500	0,6	0,083	0,068
	4 000	0,62	0,083	0,068
MoS_2 coloidală în ulei	2 200	0,05	0,052	0,062
	2 800	0,055	0,06	0,062
	3 500	0,06	0,08	0,65
	4 000	0,06	0,08	0,065

de 30′ în cazul uleiului curat, deoarece suprafețele au gripat după o perioadă de timp mai scurtă : 10′ pentru sarcina de 3 500 kgf/cm². Pentru viteza de 6,4 m/s, în cazul aceluiași ulei, gripajul s-a produs după 8′ la o sarcină de 2 800 kgf/cm².

Explicația constă în atingerea regimului termic limită pentru cuplul încercat, la folosirea ca lubrifiant a uleiului curat, în perioade de timp mai mici decît pentru situația folosirii uleiului cu MoS_2 și relevă și sub acest aspect oportunitatea și necesitatea folosirii MoS_2 pentru regimuri de sarcină și temperatură superioare celor posibile în cazul folosirii uleiului curat.

Tabela 4 cuprinde valorile maxime ale rezistenței peliculei lubrifiante pentru cele trei trepte de viteze. Ca rezistență a peliculei s-a considerat sarcina la care coeficientul de frecare are o valoare limită, determinată experimental, a cărei depășire în condițiile experimentale arătate, marca creșterea rapidă a coeficientului de frecare și amorsarea gripajului. Din același motiv, acela al realizării regimului termic limită pentru sarcini

cu atît mai mici cu cît viteza este mai mare, se observă reducerea simţitoare a limitei de rezistenţă cu viteza, avînd însă pentru fiecare treaptă de viteză valori superioare în cazul folosirii adaosului de MoS_2.

Tabela 4

Mediul de ungere	Sarcina maximă suportată, kgf/cm²		
	1,6 m/s (f_{max} = 0,13)	3,2 m/s (f_{max} = 0,167)	6,4 m/s (f_{max} 0,185)
311 + MoS_2 naturală	5 000	4 200	3 350
311 + MoS_2 sintetică	5 000	4 200	3 350
311	4 500	3 500	2 800

Folosirea MoS_2 sub formă de pastă. Pentru aprecierea eficacităţii MoS_2 în concentraţii mai mari în ulei, o primă serie de încercări au constat în determinarea rezistenţei maxime a peliculei de pastă conţinînd

Tabela 5

Mediul de ungere	Sarcina maximă suportată, kgf/cm² 1,6 m/s (f = 0,13)	Temperatura la suprafaţa de contact °C
Pastă naturală	6 000	350
Pastă sintetică	6 000	350
Pastă naturală*)	7 800	380
Pastă sintetică*)	7 800	380

*) Pentru un contact liniar de 5 mm lungime.

60% MoS_2 în ulei. Încercările comparative, ale căror rezultate sînt prezentate în tabela 5, au arătat valori identice de rezistenţă a peliculei din pastă cu MoS_2 naturală şi sintetică de 6 000 kgf/cm² la contactul liniar de 14 mm, şi de 7 800 kgf/cm², la contactul liniar de 5 mm, în ambele cazuri viteza fiind de 1,6 m/s. Piesele în frecare au funcţionat înecate în pastă. Cu toate că transmisiunea căldurii este mai puţin eficace în acest caz, valorile depăşesc cu 1 000 kgf/cm² rezistenţa peliculei de ulei cu 10% MoS_2 şi cu 1 500 kgf/cm² rezistenţa peliculei de ulei fără adaos, în aceleaşi condiţii de funcţionare.

O altă serie de încercări se referă la determinarea rezistenţei peliculei de MoS_2 sub formă de pastă aplicată pe suprafeţe, prin cronometrarea perioadei de menţinere a acesteia pînă la atingerea unor valori limită ale coeficientului de frecare determinate experimental, sarcina fiind de 4 000 kgf/cm² şi temperatura maximă a suprafeţelor active de 400°C.

Rezultatele acestor încercări sînt cuprinse în tabela 6. Comparativ, se constată că timpii obţinuţi în cazul utilizării pastei de MoS_2 sintetică, pentru ambele viteze (1,6 şi 3,2 m/s) sînt inferiori celor obţinuţi la folosirea pastei cu MoS_2 naturală, apreciind că diferenţele se datorează granulaţiei diferite a celor două sortimente, aşa cum rezultă din tabela 1 :

o granulație mai fină și relativ omogenă permite atît o dispersie mai bună în ulei a MoS_2, cît și polarizarea electrostatică mai pronunțată și, în consecință, aderența mai bună la suprafețele metalice.

Tabela 6

Mediul de ungere	Sarcina kgf/cm²	Coeficient de frecare, f		Timp maxim de lucru	
		$v = 1{,}6$ m/s	$v = 3{,}2$ m/s	$v = 1{,}6$ m/s	$v = 3{,}2$ m/s
Pastă MoS_2 naturală	4 000	0,082+ 0,13	0,07+ 0,12	10′45″ 8′30″ 8′45″	2′10″ 2′35″ 2′30″
Pastă MoS_2 sintetică	4 000	0,092+ 0,13	0,07+ 0,12	4′30″ 6′30″ 6′30″	1′15″ 1′35″ 1′35″

Pentru confirmare s-a procedat la elaborarea de paste din MoS_2 sintetică cuprinzînd diferite fracțiuni ale granulelor și efectuarea din nou a unor încercări comparative, ale căror rezultate sînt cuprinse în tabela 7.

Tabela 7

Mediu de ungere	Sarcina medie kgf/cm²	Timp de funcționare pînă la $f = 0{,}13$
Pastă (0—63 μ)	4 000	15′25″
Pastă (63—71 μ)	4 000	7′15″
Pastă (73—100 μ)	4 000	2′30″

Timpii de funcționare pînă la atingerea valorii de 0,13 a coeficientului de frecare indică o comportare superioară a pastei de granulație 0—63 μ și comportarea cea mai slabă a pastei de granulație 71—100 μ.

★

Rezultatele expuse reprezintă aspecte parțiale de studiu asupra comportării MoS_2 ca lubrifiant. S-a urmărit cu precădere influența purității și granulației produsului asupra eficacității sale în două regimuri de sarcină :

— moderat, cuplul de frecare fiind constituit în acest caz dintr-o pereche de materiale din care unul (sabotul) a avut duritatea mică (BzPb), iar celălalt (tamburul) duritatea ridicată, și

— sever, cuplul de frecare fiind constituit din piese de aceeași duritate, valoarea acestuia fiind de $\sim 500—600$ H_B.

S-a considerat că primul regim ar corespunde condițiilor de frecare și de uzură ale cuplului arbore-cuzinet în cazul diferitelor lagăre, iar celălalt condițiilor de lucru ale camelor și tacheților, angrenajelor sau altor organe de mașini sever solicitate din punctul de vedere al sarcinii specifice pe suprafețele active.

Lucrări ulterioare vor completa studiul experimental cu noi aspecte în vederea formării unei imagini cuprinzătoare asupra proprietăților MoS_2 și domeniilor posibile de folosire cu succes ale acesteia ca adaos în alți lubrifianți sau ca lubrifiant ca atare.

Primită la redacție la 8 iulie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. B. C. Stupp, H. Plating, *Molybdenum Disulfide and related Solid Lubricants.* Lubr. Engineering, **14**, *1*, (1958).
2. I. I. Alsit, E. M. Oparina, *Experiența folosirii MoS_2 ca lubrifiant.* Lucrările Conf. a III-a Unională a I.M. al Acad. de Șt. a U.R.S.S. — Moscova, 1958, I.D.T., **II** (1962).
3. A. J. Stock, *Graphite, Molybdenum Disulfide and P.T.F.E.* Lubr. Engineering, **19**, *8*, (1963).
4. M. J. Devine, E. R. Lawson, L. Stallings, *MoS_2 Diester Lubricating Greases.* Scientific Lubrication, *2* (1964).
5. D. Scott, D. Jamieson, *Molybdenum Disulfide as Lubricant. Additives in rolling Contact — study of compatibility with other Additives.* Inst. of Petroleum. **48**, 460 (1962).
6. B. Barabash, *Production of Pure Molybdenum Disulfide.* Com. Min. J-nal, **32**, *8* (1961).
7. Calhom, Murphy, *Effects of Additives upon greases.* Scient. Lubrification, *7* (1963).
8. — *MoS_2 Lubricants. The many forms.* Lubrication Engineering, *5* (1963).
9. W. Hirst, J. K. Lancaster, *Solid Lubricants for Gear Teeth.* Scient. Lubrication, *2* (1961).
10. Gh. Marin, *Aparat pentru calorimetrarea proceselor de uzură.* St. cerc. mec. apl., **11**, *2* (1960).

ASUPRA CURGERII TRANZITORII A GAZELOR PRIN CONDUCTE MAGISTRALE[1])

de H. PASCAL
Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia"
al Academiei R. P. R., București

533.517.9

În lucrările anterioare [1], [2], [3] am examinat problema curgerii tranzitorii a gazelor prin conducte magistrale pentru cîteva situații întîlnite în transportul gazelor la distanțe mari.

Pentru descrierea matematică a curgerii nestaționare a fost necesar să introducem unele ipoteze care au permis liniarizarea ecuațiilor, obținîndu-se în acest mod o primă aproximație a soluției.

În lucrarea de față vom relua studiul problemelor considerate în lucrările [1], [2], [3], eliminînd, pe cît posibil, unele ipoteze utilizate în lucrările menționate.

1. ECUAȚIILE CURGERII NESTAȚIONARE PRIN CONDUCTE MAGISTRALE

Dacă admitem că viteza este constantă pe secțiunea conductei, avînd o valoare medie, și considerăm curgerea în regim turbulent, atunci, în cazul evoluției izotermice, curgerea nestaționară a gazelor prin conducte magistrale este descrisă de sistemul de ecuații

$$\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda \rho v^2}{2d} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

și

$$\rho = bp\,;\; b = \frac{1}{\bar{z} R \bar{T}} = \frac{\rho_0}{p_0} \frac{z_0}{\bar{z}},$$

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. techn. — Mecanique appliquée", **10**, 2 (1965).

unde s-a notat cu p — presiunea, v — viteza medie pe secțiunea conductei, d — diametrul conductei, ρ — masa specifică, $\bar{z}$ — coeficientul de abatere de la legea Boyle-Mariotte, exprimat la temperatura și presiunea medie, $\bar{T}$ — temperatura absolută medie, R — constanta universală a gazelor și λ — coeficientul de frecare hidrodinamic.

Dacă introducem notația $c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{1}{b}$, c — fiind viteza de propagare a sunetului, atunci se obține din (1) pentru ecuația de mișcare

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} - v\left(\rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda \rho v^2}{2d} = 0 \tag{2}$$

și dacă ținem seama de relația

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = b \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{3}$$

rezultă

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} - \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda \rho v^2}{2d} = 0. \tag{2'}$$

În ceea ce privește ecuația de continuitate, aceasta poate fi scrisă sub forma

$$\rho \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{3'}$$

Dat fiind faptul că în cazul conductelor magistrale pierderea de presiune datorită variației energiei cinetice este relativ mică comparativ cu cea datorită frecării, termenul inerțial $v \frac{\partial v}{\partial x}$ poate fi neglijat. Pe de altă parte, curgerea gazelor în conducte magistrale fiind subsonică, întrucît viteza este mult inferioară vitezei sunetului, rezultă că raportul $\frac{v^2}{c^2}$ este neglijabil în raport cu unitatea. În consecință, pentru descrierea matematică a curgerii se poate considera cu o bună aproximație sistemul de ecuații

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\lambda \rho v^2}{2d} = 0\,; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

și

$$\rho = bp.$$

Este ușor de observat, introducînd funcția

$$H = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} \tag{4_0}$$

că sistemul (3) devine

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda v^2}{2d} = 0 \text{ și } \frac{\partial v}{\partial x} + b\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \tag{4'}$$

unde $H = \frac{1}{b}\ln\frac{p}{p_0}$, p_0 fiind presiunea de referință. Prin urmare, pentru obținerea funcțiilor necunoscute $p\,(x,\ t)$ și $v\ (x,\ t)$ trebuie să rezolvăm sistemul de ecuații neliniare (4').

Din sistemul (4') se obține, după cîteva transformări simple,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = b\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\lambda b}{d} v\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{5}$$

unde, după introducerea notației $q = \rho v = bpv$, q fiind debitul masic pe unitatea de secțiune, rezultă ecuația

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = b\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\lambda}{d}\frac{q}{p}\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{6}$$

care este neliniară de tip hiperbolic.

Deoarece determinarea distribuției presiunii de-a lungul conductei la anumite momente de timp, necesită cunoașterea funcției $q\,(x,\ t)$, care este necunoscută, va trebui să presupunem într-o primă aproximație o valoare constantă q_0 corespunzătoare regimului staționar.

Pe de altă parte, trebuie menționat, în ceea ce privește funcția $q\,(x,\ t)$, că în practică se poate cunoaște variația discretă în timp a debitului masic numai în punctul de consum. În acest caz, soluția ecuației (6) se obține admițînd pentru debitul masic o valoare medie ponderată după timp, definită de relația

$$q_{\text{med}} = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} q_i\,\Delta t_i}{\sum_{i=0}^{i=n} \Delta t_i}, \tag{7}$$

q_i fiind valoarea debitului masic în punctul de consum, corespunzătoare intervalului de timp Δt_i, convenabil ales.

Din prima ecuație a sistemului (4'), respectiv din ecuația de mișcare, scrisă sub forma

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{2d}\frac{q_{\text{med}}}{bp} v + \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

putem stabili variația vitezei gazului dacă din (6) se determină funcția $H\,(x,\ t)$.

Ecuația (8) fiind linară, soluția acesteia va fi

$$v = A\,(x)\int \exp\left[-\frac{\lambda}{2db}\frac{q_{\text{med}}}{p}\right]\mathrm{d}\tau - \int\left[\frac{\partial H}{\partial x}\exp\left[\frac{\lambda}{2db}\frac{q_{\text{med}}}{p}\right]\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\tau, \tag{9}$$

$A\,(x)$ fiind o funcție care se determină utilizînd condiția inițială.

În transportul gazelor prin conducte magistrale se produc în general variaţii mici ale mărimilor caracteristice curgerii, debit şi presiune, într-un interval de timp suficient de mare, şi, în consecinţă, influenţa termenului inerţial $\frac{\partial v}{\partial t}$ este practic neglijabilă, mai ales în cazul conductelor magistrale a căror lungime este de ordinul sutelor de kilometri. Acest aspect al problemei va fi analizat mai departe.

Faţă de cele arătate mai sus putem considera în aplicaţiile practice următorul sistem de ecuaţii :

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -b\frac{\partial p}{\partial t}; \quad \frac{\partial p^2}{\partial x} = -\frac{\lambda}{bd}q^2 \tag{10}$$

sau, dacă introducem funcţia $H(p) = \int_0^p \rho \mathrm{d}p = \frac{bp^2}{2}$ (10′)

vom avea

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -b\frac{\partial p}{\partial t}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{p}\frac{\partial H}{\partial t}; \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2d}q^2, \tag{11}$$

respectiv

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2H}}\frac{\partial H}{\partial t}; \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2d}q^2. \tag{12}$$

Este uşor de observat acum că din (12) rezultă pentru determinarea presiunii, cînd condiţiile la limită şi iniţiale sînt cunoscute pentru funcţia $p(x, t)$, următoarea ecuaţie :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\lambda\sqrt{b}}{2{,}8\,d}\frac{q}{\sqrt{H}}\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{13}$$

Cînd sînt cunoscute condiţiile de limită şi iniţiale pentru debitul masic, respectiv pentru funcţia $q(x, t)$, atunci vom avea ecuaţia

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{H}\frac{\partial q}{\partial x}\right) = \frac{\lambda}{2d}\frac{\partial q^2}{\partial t}. \tag{14}$$

Din sistemul (10) şi (11) rezultă de asemenea următoarele relaţii :

$$p(x, 0) - p(x, t) = \frac{1}{b}\int_0^t \frac{\partial q(x, \tau)}{\partial x}\mathrm{d}\tau, \tag{15}$$

$$H(0, t) - H(x, t) = \frac{\lambda}{2d}\int_0^x q^2(\lambda, t)\,\mathrm{d}\lambda, \tag{16}$$

$$q(x, 0) - q(x, t) = b\int_0^x \frac{\partial p}{\partial t}\mathrm{d}\lambda, \tag{16′}$$

care permit să obținem variația presiunii $p\ (x,\ t)$, dacă cunoaștem variația debitului masic $q\ (x,\ t)$ sau invers.

Introducînd variabilele adimensionale

$$\overline{H} = \frac{H}{H_k};\ \xi = \frac{x}{l};\ \overline{q} = \frac{q}{q_0} \text{ și } \theta = \frac{2d\,p_k t}{\lambda l^2 q_0}, \tag{17}$$

sistemul de ecuații (12) devine

$$\frac{\partial \overline{q}}{\partial \xi} = -\frac{a}{\sqrt{\overline{H}}}\frac{\partial \overline{H}}{\partial \theta};\ \frac{\partial \overline{H}}{\partial \xi} = -K\overline{q}^2, \tag{18}$$

care este independent de caracteristicile conductei și de proprietățile fizice ale gazelor,

$$\text{unde } a = \frac{d \cdot b p_k^2}{\lambda l q_0^2} \quad \text{și } K = \frac{\lambda l q_0^2}{d b p_k^2}. \tag{18'}$$

Eliminînd din (18) debitul masic pe unitatea de secțiune $q\ (x,\ t)$, obținem

$$\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \xi^2} = \frac{\overline{q}}{\sqrt{\overline{H}}}\frac{\partial \overline{H}}{\partial \theta}, \tag{19}$$

p_k fiind valoarea presiunii în punctul de alimentare $x = l$, corespunzătoare regimului staționar, iar q_0 — debitul masic pe unitatea de secțiune, corespunzător de asemenea curgerii staționare, care se obține din relația

$$q_0 = \sqrt{\frac{2d}{\lambda}\frac{H_k - H_0}{l}} = \sqrt{\frac{b \cdot d}{\lambda}\frac{p_k^2 - p_0^2}{l}}, \tag{20}$$

unde p_0 este presiunea în punctul de consum $x = 0$.

Rezolvarea ecuației (19) implică cunoașterea funcției $\overline{q}\ (\xi,\ \theta)$. Deoarece în transportul gazelor putem dispune numai de variația în timp a debitului masic q în punctul de consum sau de alimentare, care se determină din graficul de perspectivă al consumului, atunci ecuația (19) trebuie scrisă sub forma

$$\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\sqrt{\overline{H}}}\frac{\partial \overline{H}}{\partial \theta}, \tag{21}$$

unde timpul adimensional se exprimă astfel:

$$\theta = \frac{2dp_k}{\lambda l^2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{q(\tau)}. \tag{22}$$

Cînd graficul de perspectivă al consumului poate fi aproximat printr-o funcție analitică relativ simplă, efectuarea integralei (22) devine posibilă și, prin urmare, timpul adimensional este determinat.

În acest mod, problema stabilirii funcțiilor tranzitorii ale presiunii și a debitului masic conduce la rezolvarea unor ecuații de tip parabolic

neliniare, cu condiţii la limită şi iniţiale întîlnite în transportul gazelor prin conducte foarte lungi.

În cazul propagării undelor de presiune, unde variaţiile mărimilor caracteristice curgerii sînt mari şi se produc într-un timp foarte mic, pentru obţinerea funcţiei $p\,(x,\ t)$ trebuie să rezolvăm ecuaţia (5), care este de tip hiperbolic, de asemenea neliniară. În afară de aceasta, ecuaţia (5) permite să stabilim influenţa inerţiei asupra variaţiei presiunii în cazul curgerii gazelor prin conducte magistrale.

Ecuaţiile (5), (13) şi (14), stabilite mai sus, sînt neliniare şi de aceea rezolvarea analitică a acestora nu poate fi efectuată exact. Din acest motiv, pentru obţinerea unor soluţii aplicabile în practică apare necesar să recurgem la rezolvarea aproximativă. În acest scop va trebui să examinăm în cele ce urmează posibilitatea liniarizării acestora.

Cînd ne referim la cazul evoluţiei izotermice, atunci ecuaţia de stare termodinamică poate fi scrisă sub forma

$$\rho = bp = b\,[p_0 - (p_0 - p)] = bp_0\left[1 - \frac{p_0 - p}{p_0}\right], \tag{23}$$

unde p_0 este presiunea de referinţă.

Dacă intervalul de variaţie a presiunii este convenabil ales, atunci ecuaţia de stare (23) poate fi pusă sub forma [4]

$$\rho \cong b\,p_0\,e^{-\frac{p_0-p}{p_0}} \cong \rho_0\,e^{-\frac{p_0-p}{p_0}}. \tag{24}$$

În general se poate considera pentru variaţia masei specifice cu presiunea următoarea ecuaţie:

$$\rho = \beta\,e^{\alpha p}. \tag{25}$$

Ecuaţia de stare termodinamică scrisă sub această formă aproximează mult mai exact variaţia reală a masei specifice cu presiunea, dacă coeficienţii α şi β sînt determinaţi din condiţia ca în extremităţile intervalului de variaţie a presiunii, $p_0 < p < p_k$, masele specifice corespunzătoare variaţiei liniare şi exponenţiale să fie egale. Din această condiţie avem $bp_0 = \beta\,e^{\alpha p_0}$ şi $bp_k = \beta\,e^{\alpha p_k}$, de unde rezultă

$$\alpha = \frac{\log \dfrac{p_k}{p_0}}{p_k - p_0}; \quad \beta = b\,p_0\,e^{-\alpha p_0} = b\,p_k\,e^{-\alpha p_k}. \tag{26}$$

Pe de altă parte, coeficientul β mai poate fi determinat şi din condiţia ca suprafeţele delimitate de cele două curbe în intervalul $p_0 < p < p_k$ să fie egale. Astfel vom avea în acest caz

$$\beta \int_{p_0}^{p_k} e^{\alpha p}\,dp = b \int_{p_0}^{p_k} p\,dp,$$

de unde

$$\beta = \frac{b\alpha(p_k^2 - p_0^2)}{2(e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p_0})} \text{ şi } \alpha = \frac{1}{p_0} \log \frac{b p_0}{\beta}. \tag{27}$$

Admiţînd că variaţia masei specifice cu presiunea se efectuează după ecuaţia (25), este uşor de remarcat, introducînd funcţia $H = \int \rho \, dp + C$, că avem următoarele relaţii :

$$\rho \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}; \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial p}{\partial x}\right), \tag{28}$$

care, introduse în (10), conduc la sistemul de ecuaţii

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2d} q^2; \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{d\rho}{dH} \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{29}$$

Pe de altă parte, ţinînd seama şi de relaţia (25), obţinem

$$\frac{d\rho}{dH} = \alpha \rho \frac{dp}{dH} = \alpha = \text{const.} \tag{30}$$

şi în consecinţă sistemul (29) devine

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2d} q^2; \frac{\partial q}{\partial x} = -\alpha \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{31}$$

Prin urmare, din (31) obţinem pentru determinarea funcţiei $p\,(x,\ t)$ ecuaţia

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\lambda \alpha q}{2d} \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{32}$$

a cărei rezolvare ne obligă să considerăm, de asemenea, pentru debitul masic o valoare medie ponderată după timp, definită de relaţia (4).

Funcţia $H\,(p)$ avînd în acest caz următoarea expresie

$$H(p) = \int_{p_0}^{p} \rho \, dp = \beta \int_{p_0}^{p} e^{\alpha p} \, dp = \frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha p} - e^{\alpha p_0}), \tag{33}$$

pentru determinarea funcţiei $q\,(x,\ t)$ obţinem ecuaţia

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\lambda \alpha}{2d} \frac{\partial q^2}{\partial t} \text{ sau } \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{\lambda \alpha}{d} q \frac{\partial q}{\partial t}. \tag{34}$$

Ecuaţiile stabilite mai sus se referă la situaţia cînd curgerea gazelor se efectuează în regim turbulent, unde pentru determinarea pierderilor de presiune datorită frecării este valabilă legea pătratică. În majoritatea cazurilor întîlnite în practică, cifra Reynolds are valori care ne situează în domeniul unde coeficientul de frecare hidrodinamic este dependent

numai de rugozitatea conductei. Datorită acestui fapt, în calcule λ poate fi considerat constant și independent de parametrul Reynolds.

Deoarece pentru curgerea laminară avem $\lambda = \frac{64}{\mathcal{R}_e} = \frac{64\mu}{v d \rho}$, atunci sistemul (10) devine

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{64\mu}{2d^2} v; \quad \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = -b\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{35}$$

de unde obținem pentru presiune

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{32 b \mu}{d^2}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{36}$$

μ fiind viscozitatea dinamică a gazelor.

Dacă introducem de asemenea funcția $H = \int_0^p \rho \, dp$ și ținem seama de relația (6), rezultă

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{32\mu b}{d^2}\left(\frac{dp}{dH}\right)\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{32\mu}{d^2 p}\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{37}$$

Este ușor de observat că, utilizînd ecuația de stare aproximativă (25), putem liniariza ecuația (37).

În acest caz vom obține pentru presiune

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{32\mu\alpha}{d^2}\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{38}$$

iar pentru debitul masic

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \frac{32\mu\alpha}{d^2}\frac{\partial q}{\partial t}. \tag{38'}$$

2. REZOLVAREA APROXIMATIVĂ A ECUAȚIILOR CURGERII NESTAȚIONARE A GAZELOR PRIN CONDUCTE MAGISTRALE

După cum s-a arătat mai sus, rezolvarea problemelor întîlnite în practica transportului gazelor la distanțe mari, în cazul curgerii nestaționare, se reduce la stabilirea soluției unei ecuații neliniare de tip parabolic, cu anumite condiții la limită și inițiale.

În ceea ce privește condițiile la limită și inițiale, acestea sînt foarte variate, iar cunoașterea lor este condiționată de numeroși factori impuși de necesitățile practice de exploatare a conductei. Astfel, în transportul gazelor prin conducte magistrale, întîlnim în general două regimuri de curgere, și anume: curgerea în regim tranzitoriu și în regim variabil periodic.

Primul regim se referă la cazul cînd se trece de la o curgere staționară la alta, de exemplu golirea sau umplerea parțială a unei conducte prin schimbarea debitului la un moment dat în punctele de consum sau de alimentare. Al doilea regim apare atunci cînd debitul

în punctul de consum prezintă o variație periodică în timp. În acest caz, stabilirea comportării parametrilor curgerii, debit și presiune, poate fi efectuată fără a ține seama de condițiile inițiale, întrucît influența acestora este importantă numai în primele momente ale curgerii, după un interval de timp relativ mic acestea devenind neglijabile.

În cele ce urmează, vom aplica pentru rezolvarea ecuației (19) metoda perturbațiilor în cazul unor condiții la limită și inițiale generale, de unde putem obține soluțiile pentru condițiile la limită și inițiale frecvent întîlnite în practică. Astfel considerăm cazul alimentării conductei la o presiune variabilă în timp, unde putem avea, din punctul de vedere al cunoașterii condițiilor la limită, două situații în punctul de consum, și anume: fie o presiune variabilă în timp, fie un debit variabil în timp.

În ceea ce privește condiția inițială, admitem că în momentul inițial, $t = 0$, curgerea se efectua în regim staționar și, în consecință, debitul și presiunea sînt invariabile în timp în toate punctele conductei. Prin urmare, pentru obținerea funcției tranzitorii a presiunii vom avea de rezolvat ecuația

$$\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \xi^2} = \frac{\overline{q}_{med}}{\sqrt{\overline{H}}} \frac{\partial \overline{H}}{\partial \theta}, \tag{39}$$

cu următoarele condiții la limită și inițiale:

$$\theta > \begin{cases} \overline{H}(0,\ \theta) = \varphi_0(\theta) \\ \overline{H}(1,\ \theta) = \varphi_1(\theta) \end{cases}; \quad \theta = 0,\ \overline{H}(\xi,\ 0) = \varphi_2(\xi), \tag{40}$$

unde $\overline{q}_{med}$ reprezintă valoarea medie ponderată după timp a debitului masic adimensional, definită de relația (4).

Pe de altă parte, în transportul gazelor întîlnim situația cînd în punctul de alimentare se cunoaște variația în timp a debitului masic, care rezultă din graficul de perspectivă al consumului. În acest caz vom avea de rezolvat ecuația (39), cu următoarele condiții la limită și inițiale, exprimate în mărimi adimensionale:

$$\theta > 0 \begin{cases} \overline{H}(1,\ \theta) = \psi_0(\theta), \\ \left.\dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \psi_1(\theta), \end{cases} \tag{41}$$

$$\theta = 0;\ \overline{H}(\xi,\ 0) = \psi_2(\xi),$$

unde $\psi_2(\xi)$ reprezintă distribuția presiunii, exprimată în mărimi adimensionale, în regim staționar.

Pentru rezolvarea ecuației (39), cu metoda perturbațiilor, este necesar ca în prealabil să introducem funcția $\overline{H} = 1 - \mu f$, care permite transformarea ecuației (39) sub forma

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{1 - \mu f}}{\overline{q}_{med}} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}, \tag{42}$$

unde μ este un parametru auxiliar.

La condițiile la limită și inițiale (40) corespund pentru funcția $f(\xi, \theta)$ condițiile

$$\theta > 0 \begin{cases} f(0, \theta) = \dfrac{1 - \varphi_0(\theta)}{\mu} \\ f(1, \theta) = \dfrac{1 - \varphi_1(\theta)}{\mu} \end{cases} \qquad (43)$$

$$\theta = 0, f(\xi, 0) = \frac{1 - \varphi_2(\xi)}{\mu},$$

iar la (41) corespund pentru $f(\xi, \theta)$ condițiile

$$\theta > 0 \begin{cases} f(1, \theta) = \dfrac{1 - \psi_0(\theta)}{\mu} \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \dfrac{1 - \psi_1(\theta)}{\mu} \end{cases} \qquad (44)$$

$$\theta = 0, f(\xi, 0) = \frac{1 - \psi_2(\xi)}{\mu}.$$

În conformitate cu metoda perturbațiilor putem căuta soluția ecuației (42) sub forma unei serii de puteri :

$$f(\xi, \theta) = f_0(\xi, \theta) + \mu f_1(\theta, \xi) + \frac{\mu^2}{2!} f_2(\theta, \xi) + \ldots + \frac{1}{n!} \mu^n f_n(\theta, \xi). \qquad (45)$$

Pentru determinarea funcțiilor $f_0, f_1, \ldots, f_n$ vom proceda în felul următor. Dezvoltăm termenul $\sqrt{1 - \mu f}$ din ecuația (42) în serie, după puterile lui μ, și înlocuim în ecuația (42) astfel transformată pe $f(\theta, \xi)$ cu seria (45). Identificînd acum coeficienții puterilor lui μ, obținem pentru determinarea funcțiilor $f_0, f_1, \ldots, f_n$ următorul sistem de ecuații :

$$\overline{q}_{\text{med}} \frac{\partial f_0}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2}$$

$$\overline{q}_{\text{med}} \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} f_0 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2}$$

$$\overline{q}_{\text{med}} \frac{1}{2!} \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} f_0 \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \left(f_1 + \frac{1}{2.2!} f_0^2 \right) \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2} \qquad (45')$$

$$\overline{q}_{\text{med}} \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial \theta} = \frac{1}{3!} \frac{\partial^2 f_3}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2!} \frac{1}{2} f_0 \frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \left(f_1 + \frac{1}{2.2!} f_0^2 \right) \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} -$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} f_2 + \frac{1}{2!} f_0 f_1 + \frac{1.3}{4.3!} f_0^3 \right) \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2}.$$

În felul acesta, stabilirea soluției ecuației neliniare (39) s-a redus la rezolvarea sistemului de ecuații liniare (45′), cu următoarele condiții la limită și inițiale :

$$\theta > 0 \begin{cases} f_0(0, \theta) = \dfrac{1 - \varphi_0(\theta)}{\mu} \\ f_0(1, \theta) = \dfrac{1 - \varphi_1(\theta)}{\mu} \end{cases} \qquad (46)$$

$$\theta = 0,\ f(\xi, 0) = \frac{1 - \varphi_2(\xi)}{\mu}$$

și

$$\theta > 0 \begin{cases} f_i(0, \theta) = 0 \\ f_i(1, \theta) = 0 \end{cases} \qquad (47)$$

$$\theta = 0\ f_i(\xi, 0) = 0 \qquad \text{(pentru } i = 1, 2, 3, \ldots)$$

în cazul condițiilor (43).

Pentru condițiile (44′), sistemul de ecuații (45′) se rezolvă cu următoarele condiții :

$$\theta > 0 \begin{cases} f_0(1, \theta) = \dfrac{1 - \psi_0(\theta)}{\mu} \\ \left.\dfrac{\partial f_0}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = -\dfrac{\psi_1(\theta)}{\mu} \end{cases} \qquad (46')$$

$$\theta = 0,\ f_0(\xi, 0) = \frac{1 - \psi_2(\xi)}{\mu}$$

și

$$\theta > 0 \begin{cases} f_i(1, \theta) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial f_i}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = 0 \end{cases} \qquad (47')$$

$$\theta = 0,\ f_i(\xi, 0) = 0 \qquad \text{(pentru } i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Trebuie să menționăm că în aplicațiile practice ne putem limita, cu o aproximație satisfăcătoare, numai la primii doi termeni din seria (45), determinînd deci pe f_0 și f_1.

Soluția primei ecuații din sistemul (45′), cu condițiile (46), poate fi scrisă sub forma

$$f_0(\xi, \theta) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2\pi^2\bar{q}_{med}\theta} \sin m\pi\xi \left[\int_0^1 \frac{1 - \varphi_2(\lambda)}{\mu} \sin m\pi\lambda\, d\lambda + \right.$$
$$\left. + m\pi\bar{q}_{med} \int_0^\theta e^{m^2\pi^2\bar{q}_{med}} \left(\frac{(1 - \varphi_0(\lambda)}{\mu} - (-1)^m \frac{1 - \varphi_1(\lambda)}{\mu} \right) d\lambda \right]^{2)}. \qquad (48)$$

[2]) În cele ce urmează se va considera $\bar{q}_{med} = \dfrac{1}{\bar{q}_{med}}$.

Dat fiind că în momentul inițial am presupus curgerea staționară, rezultă $\left.\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \xi^2}\right|_{\theta=0} = 0$, respectiv pentru condiția inițială

$$\overline{H}(\xi, 0) = \varphi_2(\xi) = C_1 \xi + C_2, \tag{49}$$

unde constantele C_1 și C_2 se obțin din condițiile la limită, existente în curgerea staționară, valorile funcției $\overline{H}$ la extremitățile conductei fiind independente de timp.

Ținînd seama de (49), vom obține din (48) pentru $f_0(\xi, 0)$ următoarea funcție:

$$f_0(\xi, 0) = \frac{2}{\mu} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m^2\pi^2\overline{q}_{med}\theta} \sin m\pi\xi \left[[C_1 + (1 - C_2)((-1)^m - 1)] \frac{(-1)^m}{m\pi} + \right.$$

$$\left. + m\pi\overline{q}_{med} \int_0^{\theta} e^{m^2\pi^2\overline{q}_{med}\theta} [1 - \varphi_0(\lambda) - (-1)^m (1 - \varphi_1(\lambda))] \, d\lambda \right]. \tag{50}$$

Observăm aici că funcția $f_0(\xi, \theta)$ este de forma $f_0(\xi, \theta) = \frac{1}{\mu} \overline{f}_0(\xi, \theta)$, unde $\overline{f}_0(\xi, \theta)$ nu depinde de parametrul μ.

Cunoscînd funcția $f_0(\xi, \theta)$, putem trece la determinarea funcției $f_1(\xi, \theta)$ din ecuația neomogenă:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial \theta} = \overline{q}_{med} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi^2} + \Phi_0(\xi, \theta), \tag{51}$$

cu condițiile (47) pentru $i = 1$, unde am notat

$$\Phi_0 = -\frac{\overline{q}_{med}}{2} f_0 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{2} f_0 \frac{\partial f_0}{\partial \theta}. \tag{52}$$

După cum s-a arătat în [5], soluția ecuației (51) cu condițiile (47) poate fi scrisă sub forma

$$f_1(\xi, \theta) = \int_0^{\theta} \int_0^1 G(\xi, \lambda, \theta - \tau) \Phi_0(\lambda, \tau) \, d\lambda \, d\tau, \tag{53}$$

unde $G(\xi, \lambda, \theta - \tau)$ reprezintă funcția lui Green, avînd următoarea expresie:

$$G(\xi, \lambda, \theta - \tau) = 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} e^{-m^2\pi^2\overline{q}_{med}(\theta - \tau)} \sin m\pi\xi \sin m\pi\lambda. \tag{54}$$

Ținînd seama de valoarea funcției $f_0(\xi, \theta)$, observăm că $\Phi_0(\xi, \tau)$ conține în factor pe $\frac{1}{\mu^2}$ și, conform formulei (53), $f_1(\xi, \theta)$ este de forma $f_1(\xi, \theta) = \frac{1}{\mu^2} \overline{f}_1(\xi, \theta)$, unde $\overline{f}_1(\xi, \theta)$ nu depinde de parametrul μ.

Dacă notăm cu Φ_{k-1} termenul liber al ecuației neomogene de ordinul k din sistemul (45'), atunci rezultă pentru $f_k(\xi, \theta)$ următoarea expresie :

$$f_k(\xi, \theta) = \int_0^{\theta} \int_0^1 G(\xi, \lambda, \theta - \tau)\, \Phi_{k-1}(\lambda, \tau)\, d\lambda\, d\tau, \tag{55}$$

unde funcția $G(\xi, \lambda, \theta - \tau)$ este de asemenea dată de relația (54).

Din aproape în aproape se constată că Φ_{k-1} conține în factor pe $\frac{1}{\mu^{k+1}}$. Prin urmare, din relația (55) rezultă și pentru $f_k(\xi, \theta)$ forma $f_k(\xi, \theta) = \frac{1}{\mu^{k+1}} \bar{J}_k(\xi, \theta)$, unde $\bar{J}_k(\xi, \theta)$ nu depinde de parametrul μ.

Pe de altă parte, este ușor de remarcat că funcția $\bar{H}(\xi, \theta) = 1 - \mu f(\xi, \theta)$ nu depinde de parametrul μ, deoarece funcția $f(\xi, \theta)$ este de forma

$$f(\xi, \theta) = \frac{1}{\mu}\left[\bar{J}_0(\xi, \theta) + \bar{J}_1(\xi, \theta) + \frac{1}{2!}\bar{J}_2(\xi, \theta) + \ldots \frac{1}{n!}\bar{J}_n(\xi, \theta)\right]. \tag{56}$$

Dat fiind că în general funcțiile $\varphi_0(\theta)$ și $\varphi_1(\theta)$, respectiv condițiile la limită (40), sînt cunoscute în practică prin valorile lor discrete, rezultă că determinarea efectivă a funcției $f_0(\xi, \theta)$ din (50) necesită aplicarea formulelor de cuadratură numerică, care permite efectuarea integralelor din (50). În cazul cînd acestea pot fi aproximate prin funcții analitice relativ simple, cu ajutorul procedeelor cunoscute, atunci integralele din expresia lui $f_0(\xi, \theta)$ pot fi calculate. Chiar și în acest caz, pentru determinarea funcțiilor $f_k(\xi, \theta)$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ apar dificultăți matematice foarte mari, condiționate mai ales de aspectul termenului liber $\Phi_{k-1}(\xi, \tau)$ din ecuațiile neomogene (45'). Din acest motiv, rezolvarea problemelor referitoare la curgerea nestaționară a gazelor, cînd condițiile la limită sînt funcții de timp, implică aplicarea metodelor numerice pentru obținerea funcțiilor $f_1, f_2, \ldots, f_k \ldots$, de exemplu metoda dreptelor sau metoda diferențelor finite.

Rezultatele obținute mai sus permit acum să examinăm, în particular, curgerea tranzitorie a gazelor prin conducte magistrale în cazul condițiilor la limită care au valori constante.

În acest scop, vom considera problema studiată în lucrarea [1], referitoare la creșterea presiunii în punctul de consum după închiderea ventilului, presupunînd că înaintea închiderii ventilului, respectiv în momentul inițial, curgerea era staționară. În ceea ce privește presiunea în punctul de alimentare, admitem că aceasta este constantă după întreruperea consumului de gaze. În consecință, conducta va fi alimentată în acest caz la presiune constantă.

După cum s-a arătat în lucrarea [2], această problemă este echivalentă cu problema curgerii gazelor printr-o conductă pusă în exploatare din starea de reapaus, la un debit constant, dacă este în continuare alimentată la presiune constantă. În această situație presiunea va scădea

în timp, în punctul de consum, după aceeași ecuație ca și creșterea presiunii în același punct după întreruperea consumului.

Astfel, vom considera cazul cînd în momentul inițial presiunea are aceeași valoare în toate punctele conductei, iar în punctul de consum, $x = 0$, conducta este pusă în exploatare, prin deschiderea instantanee a ventilului, cu un debit masic pe unitatea de secțiune constant și egal cu q_0. În ceea ce privește alimentarea conductei, admitem că aceasta se efectuează la presiune constantă și egală cu cea corespunzătoare cazului cînd gazul se află în stare de repaus, respectiv cînd conducta este închisă.

Pentru această situație rezultă de-a lungul conductei o variație a presiunii care tinde, după un anumit timp, către distribuția presiunii corespunzătoare regimului staționar.

Relațiile care permit determinarea intervalului de timp necesar stabilizării curgerii au fost stabilite în lucrarea [2].

Față de cele arătate mai sus, condițiile de limită și inițiale ale problemei, pentru funcția $\overline{H}(\xi, \theta)$, capătă următorul aspect:

$$\theta > 0 \begin{cases} \overline{H}(1, \theta) = 1 \\ \left.\dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \dfrac{\lambda l q_0^2}{b d p_K^2} = A = \text{const.} \end{cases} \tag{57}$$

$$\theta = 0, \ \overline{H}(\xi, 0) = 1,$$

iar pentru funcția $f_0(\xi, \theta)$

$$\theta > 0 \begin{cases} f_0(1, \theta) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial f_0}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = -\dfrac{A}{\mu} \end{cases} \qquad \theta = 0, \ f_0(\xi, \theta) = 0, \tag{58}$$

unde A este o mărime adimensională.

Pentru condițiile (58), funcția $f_0(\xi, \theta)$ are forma

$$f_0(\xi, \theta) = \frac{A}{\mu}\left[1 - \xi - \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)\dfrac{\pi}{2}\xi}{(2m+1)^2} e^{-(2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \overline{q}_{\text{med}}\theta}\right], \tag{59}$$

iar $f_1'(\xi, \theta)$ se obține din ecuația

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = \overline{q}_{\text{med}} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi_2} + \Phi_0(\xi, \theta), \tag{59'}$$

cu condițiile la limită și inițiale (47), pentru $i = 1$, unde $\Phi_0(\xi, \theta)$ are expresia

$$\Phi_0(\xi, \theta) = \frac{1}{2}\frac{A^2}{\mu^2}\left[1 - \xi - \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)\dfrac{\pi}{2}\xi}{(2m+1)^2} e^{-(2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \overline{q}_{\text{med}}\theta}\right] \times$$

$$\times \overline{q}_{\text{med}} \sum_{m=0}^{\infty} \cos(2m+1)\frac{\pi}{2}\xi \cdot e^{-(2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \overline{q}_{\text{med}}\theta}. \tag{60}$$

Soluția ecuației (59′) care verifică condițiile (47′), se caută sub forma

$$f_1(\xi, \theta) = \sum_{m=0}^{m=\infty} U_m(\theta) \cos (2m + 1) \frac{\pi}{2} \xi, \tag{61}$$

care, introdusă în (59′), conduce la ecuația diferențială

$$\frac{dU_m}{d\theta} = -\overline{q}_{med} \left(\frac{(2m+1}{2} \pi \right)^2 U_m + 2 \int_0^1 \Phi_0(\xi, \theta) \cos (2m+1) \frac{\pi}{2} \xi \, d\xi. \tag{61′}$$

și, ținînd seama de condiția inițială din (47′), $U_m(0) = 0$, obținem

$$U_m(\theta) = 2 \int_0^\theta \int_0^1 \Phi_0(\xi, \tau) \cos (2m+1) \frac{\pi}{2} \xi \cdot e^{-(2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \overline{q}_{med} (\theta - \tau)} \, d\xi \, d\tau \tag{62}$$

respectiv

$$f_1(\xi, \theta) = 2 \int_0^\theta \int_0^1 \Phi_0(\lambda, \tau) \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \overline{q}_{med} (\theta - \tau)} \cos (2m + 1) \frac{\pi}{2} \lambda \cos (2m + 1) \frac{\pi}{2} \xi \, d\xi \, d\lambda. \tag{63}$$

Dacă introducem funcția lui Green

$$G(\xi, \theta, \lambda, \tau) = 2 \sum_{m=0}^{m=\infty} e^{-(2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4} \overline{q}_{med} (\theta - \tau)} \cos (2m + 1) \frac{\pi}{2} \lambda \cos (2m + 1) \frac{\pi}{2} \xi, \tag{64}$$

atunci $f_1(\xi, \theta)$ se scrie astfel:

$$f_1(\xi, \theta) = \int_0^\theta \int_0^1 \Phi_0(\lambda, \tau) G(\xi, \theta, \lambda, \tau) \, d\lambda \, d\tau. \tag{65}$$

Deoarece seria (59′) este rapid convergentă, în aplicațiile practice ne putem limita numai la primul termen, și în acest caz $\Phi_0(\xi, \theta)$ devine

$$\Phi_0(\xi, \theta) = \frac{A^2}{2\mu^2} \overline{q}_{med} \left(1 - \xi - \frac{8}{\pi^2} \cos \frac{\pi}{2} \xi \cdot e^{-\frac{\pi^2}{4} \overline{q}_{med} \theta} \right) \cos \frac{\pi}{2} \xi \cdot e^{-\frac{\pi^2}{4} \overline{q}_{med} \theta}. \tag{65′}$$

Din același motiv putem considera și pentru funcția lui Green numai primul termen al seriei, și în acest mod, după efectuarea integralelor, rezultă în cele din urmă

$$f_1(\xi, \theta) = \frac{2}{\mu^2} A^2 e^{-\frac{\pi^2}{4}\bar{q}_{med}\theta} \cos\frac{\pi}{2}\xi\left[\frac{1}{4}\left(1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{4}{\pi^2}\right)\bar{q}_{med}\theta + \frac{128}{3\pi^5}(e^{-\frac{\pi^2}{4}\bar{q}_{med}\theta} - 1)\right]. \quad (66)$$

Funcțiile $f_0(\xi, \theta)$ și $f_1(\xi, \theta)$ fiind determinate, obținem pentru funcția $\overline{H}(\xi, \theta)$ următoarea expresie aproximativă:

$$\overline{H}(\xi, \theta) = 1 - A\left[1 - \xi - \frac{8}{\pi^2}\cos\frac{\pi}{2}\xi e^{-\frac{\pi^2}{4}\bar{q}_{med}\theta}\right] -$$

$$- 2A^2 e^{-\frac{\pi^2}{4}\bar{q}_{med}\theta}\cos\frac{\pi}{2}\xi\left[\frac{1}{4}\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)\bar{q}^{\theta}_{med}\theta + \frac{128}{3\pi^5}(e^{-\frac{\pi^2}{4}\bar{q}_{med}\theta} - 1)\right], \quad (67)$$

care în punctul de consum, $\xi = 0$, devine

$$\overline{H}(0, \theta) = 1 - A\left(1 - \frac{8}{\pi^2}e^{-\frac{\pi^2}{4}\bar{q}_{med}\theta}\right) - 2A^2\left[\frac{1}{4}\left(1 + \frac{4}{\pi^2}\right)\bar{q}_{med}\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{128}{3\pi^5}(e^{-\frac{\pi^2}{4}\bar{q}_{med}\theta} - 1)\right]e^{-\frac{\pi^2}{4}\bar{q}_{med}\theta}; \text{ unde } \overline{H} = \frac{p^2(0, \theta)}{p_K^2}. \quad (68)$$

Este interesant să examinăm comportarea asimptotică a funcțiilor f_0 și f_1 în punctul de consum $x = 0$. Astfel, în tabela 1 sînt redate va-

Tabela 1

$\bar{q}^{\theta}_{med}$	f_0	f_1
0,1	0,188	0,0023
0,2	0,26	0,0064
0,4	0,352	0,00103
0,64	0,42	0,00115
0,7	0,43	0,001147
0,8	0,446	0,0109
1	0,4672	0,009
1,2	0,482	0,0074
1,4	0,488	0,0054
1,6	0,4938	0,0039
1,8	0,4955	0,0027
2	0,4973	0,00187

lorile funcțiilor f_0 și f_1, pentru $A = 0{,}5$, unde se observă că seria este rapid convergentă pentru valorile timpului adimensional care prezintă interes practic. Prin urmare, în calculele practice putem considera cu o

bună aproximație numai valoarea funcției f_0, întrucît ordinul de mărime a lui f_1 este în general neglijabil comparativ cu cel al lui f_0.

În cele ce urmează vom considera cazul cînd presiunile în punctele de alimentare și consum sînt constante; la momentul inițial presupunem că presiunea este aceeași în toate punctele conductei, respectiv că gazul se află în stare de repaus. Condițiile la limită și inițiale vor fi în această situație

$$\theta > 0 \begin{cases} \overline{H}(0, \theta) = \dfrac{H_0}{H_k} = A \\ \overline{H}(1, \theta) = 1 \end{cases}$$

$$\theta = 0 \quad \overline{H}(\xi, 0) = 1, \tag{69}$$

iar pentru funcțiile f_0 și f_1

$$\theta > 0 \begin{cases} f_0(0, \theta) = \dfrac{1 - A}{\mu} \\ f_0(1, \theta) = 0 \end{cases} ; \quad \theta > 0 \begin{cases} f_1(0, \theta) = 0 \\ f_1(1, \theta) = 0 \end{cases}$$

$$\theta = 0, \quad f(\xi, 0) = 0; \quad \theta = 0 \quad f_1(\xi, 0) = 0. \tag{70}$$

Pentru condițiile la limită și inițiale (70), referitoare la funcția f_0, obținem din (48) pentru f_0 următoarea ecuație:

$$f_0(\xi, \theta) = \frac{1 - A}{\mu}\left[1 - \xi - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi\xi}{n} e^{-n^2\pi^2\overline{q}_{med}\theta}\right]. \tag{71}$$

Pe de altă parte, dacă de asemenea ne limităm numai la primul termen al seriei (71), atunci termenul liber al ecuației neomogene devine

$$\Phi_0 = -\frac{1}{2} f_0 \frac{\partial f_0}{\partial \theta} = -\frac{(1 - A)^2}{\mu^2}\overline{q}_{med}\pi \sin \pi\xi e^{-\pi^2\overline{q}_{med}\theta} \cdot \left(1 - \right.$$

$$\left. - \xi - \frac{2}{\pi}\sin \pi\xi e^{-\pi^2\overline{q}_{med}\theta}\right) \tag{72}$$

și, prin urmare, din (53) obținem

$$f_1(\xi, \theta) = -\frac{2(1 - A)^2}{\mu^2}\overline{q}_{med}\pi \sin \pi\xi e^{-\pi^2\overline{q}_{med}\theta} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\theta}\int_0^{1} \sin^2 \pi\lambda \left(1 - \lambda - \frac{2}{\pi}\sin \pi\lambda e^{-\pi^2\overline{q}_{med}\theta}\right) d\tau\, d\lambda. \tag{73}$$

După efectuarea integralelor rezultă pentru $f_1(\xi, \theta)$

$$f_1(\xi, \theta) = -\frac{2(1 - A)^2}{\mu^2}\sin \pi\xi e^{-\pi^2\overline{q}_{med}\theta}\left[\overline{q}_{med}\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi^2}(e^{-\pi^2\overline{q}_{med}\theta} - 1)\right], \tag{74}$$

iar pentru funcţia $H(\xi, \theta)$

$$\overline{H} = 1 - (1 - A)\left[1 - \xi - \frac{2}{\pi}\sin \pi \xi \, e^{-\pi^2 \overline{q}_{med}\, \theta} - \right.$$

$$\left. - 2(1 - A)\sin \pi \xi \, e^{-\pi^2 \overline{q}_{med}\, \theta}\left(\overline{q}_{med} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} e^{-\pi^2 \overline{q}_{med}\, \theta}\right)\right], \qquad (75)$$

unde $\overline{H} = \dfrac{p^2(\xi, \theta)}{p_K^2}$.

Calculele numerice efectuate pentru valorile timpului adimensional considerate în cazul precedent arată de asemenea că în general ne putem limita numai la funcţia f_0.

3. ASUPRA INFLUENŢEI INERŢIEI ÎN CAZUL CURGERII GAZELOR PRIN CONDUCTE MAGISTRALE

După cum s-a arătat în paragraful 1, pentru determinarea variaţiei presiunii de-a lungul conductei, la anumite momente de timp, trebuie să rezolvăm ecuaţia neliniară

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = b \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\lambda}{d} \frac{q}{p} \frac{\partial H}{\partial t}, \qquad (76)$$

unde funcţia $H(p)$ se obţine din relaţia (4_0).

Ecuaţia (76) a fost stabilită luînd în considerare influenţa inerţiei în cazul curgerii gazelor prin conducte magistrale.

Pentru a putea aprecia acum influenţa inerţiei asupra problemelor de curgere a gazelor, care prezintă interes practic, vom studia cazul considerat mai sus, unde am făcut abstracţie de termenul inerţial.

Dificultăţile matematice aferente rezolvării unei ecuaţii neliniare ne obligă să admitem într-o primă aproximaţie că termenul $\dfrac{q}{p}$ are o valoare constantă $\dfrac{\overline{q}}{\overline{p}}$, unde mărimile barate se referă la valorile medii. În felul acesta ecuaţia (76) devine indentică cu ecuaţia telegrafiştilor, şi în consecinţă, obţinerea soluţiei acesteia nu mai prezintă dificultăţi.

Deoarece ne referim la problema exploatării conductei cu debit constant şi alimentată de asemenea la presiune constantă, atunci condiţiile la limită şi iniţiale devin pentru funcţia $H(x, t)$

$$t = 0 \begin{cases} H = H_k \\ \dfrac{\partial H}{\partial t} = 0 \end{cases}; \quad t > 0 \begin{cases} \left.\dfrac{\partial H}{\partial x}\right|_{x=0} = B = \text{const.} \\ x = l \quad H(l, t) = H_k. \end{cases} \qquad (77)$$

Introducînd variabilele adimensionale

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \theta = \frac{d\overline{p}t}{\lambda \overline{q}_{\text{med}} l^2} \text{ și } \overline{H} = \frac{H - H_0}{H_k - H_0}, \tag{78}$$

ecuația (76) devine

$$\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \xi^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \overline{H}}{\partial \theta}, \tag{79}$$

unde constanta α^2 are expresia $\alpha^2 = \dfrac{bd^2\overline{p}^2 l^2}{\lambda^2 \overline{q}^2}$, l fiind o lungime de referință, care este lungimea conductei. Ținînd seama de (78), condițiile la limită și inițiale (77) devin în mărimi adimensionale

$$\theta = 0 \begin{cases} \overline{H} = 1 \\ \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \qquad \theta > 0 \begin{cases} \xi = 0; & \left.\dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = 1 \\ \xi = 1; & \overline{H} = 1. \end{cases} \tag{80}$$

În conformitate cu rezultatele obținute în lucrarea [6], soluția ecuației (79), cu condițiile la limită și inițiale (80), poate fi scrisă sub forma

$$H(x, t) = H_k - B\left\{1 - \frac{x}{l} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \beta_n} \left[(\alpha^2 + \beta_n^2)\, e^{-\frac{\alpha^2 - \beta_n}{2}\theta} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (\alpha^2 - \beta_n)\, e^{-\frac{\alpha^2 + \beta_n}{2}\theta}\right] \cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{x}{l}\right\}, \tag{81}$$

iar în punctul de consum, $x = 0$, rezultă pentru variația presiunii următoarea relație:

$$H = H_k - B\left\{1 - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \beta_n} \left[(\alpha^2 + \beta_n)\, e^{-\frac{\alpha^2 - \beta_n}{2}\theta} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (\alpha^2 - \beta_n)\, e^{-\frac{\alpha^2 + \beta_n}{2}\theta}\right]\right\}, \tag{82}$$

unde

$$\beta_n = \alpha^2 \sqrt{1 - (2n+1)^2 \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2}. \tag{83}$$

În cazul conductelor magistrale, a căror lungime este de ordinul sutelor de kilometri, constanta α^2 are valori foarte mari. Astfel, cînd α^2 tinde către infinit, ecuația (79) devine

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\lambda \overline{q}_{\text{med}}}{d} \frac{\sqrt{b}}{2{,}8\sqrt{H}} \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{84}$$

Pe de altă parte, pentru $(2n+1)^2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 < 1$ expresia (83) poate fi dezvoltată în serie de puteri, astfel încît vom avea

$$\beta_n = \alpha^2\sqrt{1-(2n+1)^2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2} = \alpha^2\left[1-\frac{1}{2}(2n+1)^2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\dots\right] \tag{85}$$

și, în consecință, rezultă prin trecerea la limită

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\alpha^2+\beta_n}{\beta_n}\,e^{-\frac{\alpha^2-\beta_n}{2}\theta} = 2\,e^{-(2n+1)^2\frac{\pi^2}{4}\theta}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\alpha^2-\beta_n}{\beta_n}\,e^{-\frac{\alpha^2+\beta_n}{2}\theta} = 0. \tag{86}$$

Prin urmare, pentru valori mari ale constantei α este ușor de remarcat că ecuația (82) devine identică cu ecuația (59), care a fost stabilită în cazul neglijării termenului inerțial $\frac{\partial v}{\partial t}$.

Pentru exemplificare s-a considerat o conductă magistrală avînd următoarele caracteristici: $d = 0{,}5$ m, $\lambda = 0{,}012$, Q (debitul gravimetric) $= 30$ kg/s, $\bar{p}$ (presiunea medie) $= 30$ ata, $l = 100$ km, $p_k = 40$ ata, $p_0 = 20$ ata și $T = 300°$K. Menționăm că în calculele numerice s-au calculat numai primii zece termeni ai seriei, întrucît s-a constatat că aceasta este suficient de rapid convergentă. Rezultatele numerice obținute arată că influența termenului inerțial este practic neglijabilă, deoarece valorile presiunii calculate cu relațiile (59) și (82) sînt identice pentru valorile timpului adimensional întîlnite în practică.

Față de cele arătate mai sus, rezultă că curgerea nestaționară a gazelor prin conducte magistrale poate fi descrisă, cu o bună aproximație pentru scopurile practice, cu ajutorul ecuației (13), respectiv a ține seama de influența termenului inerțial.

ANEXA I

ASUPRA COMPORTĂRII CONDUCTEI DIN PUNCTUL DE VEDERE AL CAPACITĂȚII DE ACUMULARE

Considerațiile precedente constituie punctul de plecare pentru efectuarea calculelor de prevedere referitoare la comportarea conductei în ceea ce privește cantitatea de gaze acumulată.

Dacă considerăm cazul conductei alimentate la o presiune constantă și exploatate la debit constant, respectiv la condițiile la limită și inițiale (57), atunci, în conformitate cu relația (59), variațiile debitului masic pe unitatea de secțiune vor fi în punctul de alimentare

$$q^2(l,\,t) = \frac{q_0^2}{K}\frac{\partial\overline{H}}{\partial\xi}\bigg|_{\xi=1} = q_0^2\,[1-e^{-\frac{\pi^2}{4}\beta t}], \tag{1}$$

unde

$$\beta = \frac{2dp_k}{\lambda l^2 q_{med}}. \tag{2}$$

Cantitatea de gaze necesară alimentării conductei astfel încît condiţiile la limită şi iniţialele (57) să fie asigurate se obţine din relaţia

$$G(l, t) = \frac{\pi d^2}{4} g \int_0^t q(l, \tau)\, d\tau = -\frac{2d^2 g q_0}{\pi\beta}\left[\sqrt{1 - e^{-\frac{\pi^2}{4}\beta t}} - \right.$$

$$\left. - \ln\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{\pi^2}{4}\beta t}}\right)\right] + \frac{\pi}{4} d^2 g q_0 t, \tag{3}$$

iar cantitatea de gaze extrasă din conductă rezultă din relaţia

$$G(0, t) = \frac{\pi d^2}{4} g \int_0^t q(0, \tau)\, d\tau = \frac{\pi d^2 g q_0 t}{4}. \tag{4}$$

În consecinţă, cantitatea de gaze acumulată în conductă, la anumite momente de timp va fi

$$\Delta G(t) = G(0, t) - G(l, t) = \frac{\pi d^2 g}{4} \int_0^t [q_0 - q(l, \tau)]\, d\tau. \tag{5}$$

După cîteva calcule se obţine în cele din urmă

$$\Delta G(t) = \frac{2d^2 g q_0}{\pi\beta}\left[\sqrt{1 - e^{-\frac{\pi^2}{4}\beta t}} - \ln\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 + \sqrt{1 - e^{-\frac{\pi^2}{4}\beta t}}\right)\right]. \tag{6}$$

În cazul exploatării conductei avînd o presiune constantă la fiecare din extremităţile acesteia, respectiv pentru condiţiile la limită şi iniţiale (63), vom avea

$$\Delta G(t) = \frac{\pi d^2}{4} g \int_0^t [q(0, \tau) - q(l, \tau)]\, d\tau, \tag{7}$$

unde $q(0, t)$ şi $q(l, t)$ rezultă, ţinînd seama de (75), din relaţiile

$$q^2(0, t) = \frac{q_0^2}{K}\frac{\partial \overline{H}}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} = -\frac{q_0^2}{K}\left[\frac{\partial \overline{f}_0}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} + \frac{\partial \overline{f}_1}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0}\right]$$

sau

$$q^2(0, t) = \frac{1 - A}{K} q_0^2\left[1 + 2e^{-\pi^2\beta t} + 2\pi(1 - A)\, e^{-\pi^2\beta t}\left[\beta t + \frac{1}{\pi^2}(e^{-\pi^2\beta t} - 1)\right]\right] \tag{8}$$

şi

$$q^2(l, t) = \frac{q_0^2}{K}\frac{\partial \overline{H}}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=1} = -\frac{q_0^2}{K}\left[\frac{\partial \overline{f}_0}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=1} + \frac{\partial \overline{f}_1}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=1}\right]$$

sau

$$q^2(l, t) = \frac{1 - A}{K} q_0^2\left[1 - 2e^{-\pi^2\beta t} - 2\pi(1 - A)\, e^{-\pi^2\beta t}\left[\beta t + \frac{1}{\pi^2}(e^{-\pi^2\beta t} - 1)\right]\right].$$

În tabela 2 s-a redat, pentru $A = 0{,}5$, valorile funcţiilor $\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \xi}$ şi $\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \xi}$ în punctele $\xi = 0$ şi $\xi = 1$, care reprezintă extremităţile conductei, în funcţie de timpul adimensional βt.

Tabela 2

βt	$\left.\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \xi}\right\|_{\xi=0}$	$\left.\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \xi}\right\|_{\xi=0}$	$\left.\frac{\partial \bar{f}_0}{\partial \xi}\right\|_{\xi=1}$	$\left.\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \xi}\right\|_{\xi=1}$	$\left(\frac{g}{q_0}\right)^2_{\xi=0}$	$\left(\frac{q}{q_0}\right)^2_{\xi=1}$
0,2	0,863	0,0212	0,132	0,0212	1,5784	0,2216
0,2	0,635	0,024	0,365	0,024	1,318	0,682
0,4	0,518	0,0085	0,482	0,0085	1,053	0,947
0,6	0,502	0,0019	0,497	0,0019	0,0078	0,9902
0,8	0,5003	0,0003	0,4996	0,0003	1,0012	0,9986
1	0,5	0,00006	0,5	0,00006	1,00112	0,99908

Valorile funcţiilor $\bar{f}_0$ şi $\bar{f}_1$ la mijlocul conductei pentru valorile lui βt întîlnite în practică sînt date în tabela 3.

Tabela 3

βt	$\bar{f}_0$	$\bar{f}_1$
0,1	0,134	0,0067
0,2	0,207	0,0076
0,6	0,249	0,00062
1	0,24998	0,000002

Menţionăm că în tabela 3 s-a considerat $A = 0{,}5$.

Dat fiind că la cele două extremităţi ale conductei $\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \xi}$, are valori mici, comparativ cu $\frac{\partial f_0}{\partial \xi}$, după cum reiese din tabela 2, rezultă că în aplicaţiile practice putem neglija termenul $\frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \xi}$.

Pe de altă parte, se remarcă din tabela 3 că pentru valorile variabilelor ξ şi βt, care prezintă interes practic, funcţia $\bar{f}_1$ este neglijabilă în raport cu $\bar{f}_0$. În cazul $\xi = 0{,}25$ şi 0,75 se obţin pentru $\bar{f}_1$ de asemenea valori neglijabile faţă de $\bar{f}_0$.

În figurile 1 şi 2 sînt redate variaţiile funcţiilor $\left(\frac{q}{q_0}\right)^2$ şi $\bar{f}_0/(1 - A)$.

Faptul că seria (45) este rapid convergentă, după cum rezultă din tabelele 2 şi 3, astfel încît ne putem limita cu o bună aproximaţie numai la primul termen al seriei (45), permite o simplificare substanţială a determinării soluţiei ecuaţiei neliniare (39). În consecinţă, funcţia $\bar{H}(\xi, \theta)$ va fi în acest caz $\bar{H}(\xi, \theta) = 1 - \mu f_0(\xi, \theta)$ şi, dacă o introducem în prima ecuaţie a sistemului (45′), vom obţine

$$q_{med} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \xi^2}. \tag{9}$$

Este uşor de remarcat că ecuaţia (9) este echivalentă cu (39) dacă admitem $\sqrt{\overline{H}} = 1$. Ceea ce înseamnă să considerăm în ecuaţia (39) $H = H_k$ pentru funcţia de sub radical. Prin urmare, în cazul condiţiilor (69), soluţia obţinută din (9) permite să obţinem cu o bună apro-

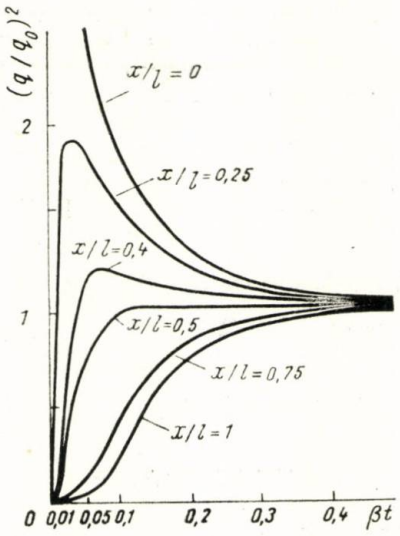


Fig. 1

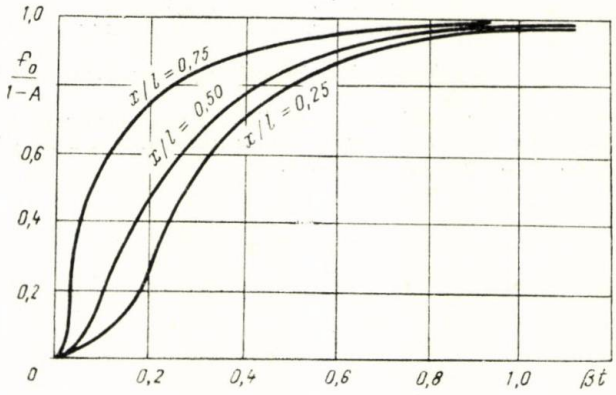


Fig. 2

ximaţie distribuţia debitului masic şi a presiunii de-a lungul conductei, la anumite momente de timp, şi să stabilim cantitatea de gaze acumulate în conductă.

Faţă de cele arătate mai sus, ecuaţia de continuitate (18) poate fi scrisă acum sub forma

$$\frac{\partial q}{\partial \xi} = -a \frac{\partial \overline{H}}{\partial \theta}, \tag{10}$$

de unde, prin integrarea în raport cu ξ, se obține

$$q(1, \theta) - q(0, \theta) = -a \int_0^1 \frac{\partial \overline{H}}{\partial \theta} \, d\xi \cdot \tag{11}$$

Cantitatea de gaze acumulate în conductă, în cazul curgerii tranzitorii, fiind diferența dintre cantitatea cu care este alimentată conducta și cea extrasă, atunci vom avea

$$\Delta G(t) = G(l, t) - G(l, t) = \frac{\pi d^2}{4} g \int_0^t [q(0, t) - q(l, t)] \, dt, \tag{12}$$

care, pe baza relației (11), poate fi scrisă

$$\Delta G(t) = \frac{\pi d^2 g a}{4\beta} \int_0^1 \left[\int_0^t \frac{\partial \overline{H}}{\partial \tau} \, d\tau \right] d\xi = \frac{\pi d^2 g a}{4\beta} \int_0^1 [\overline{H}(\xi, t) - \overline{H}(\xi, 0)] \, d\xi, \tag{13}$$

unde $\overline{H}(\xi, \theta) = 1 - \mu f_0$, f_0 obținîndu-se din (71). După efectuarea calculelor rezultă

$$\Delta G(t) = \frac{d^2 g q_0 a (1 - A)}{2\pi\beta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{m^2} (e^{-\pi^2 m^2 \beta t} - 1). \tag{14}$$

Primită la redacție la 15 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. H. Pascal, *Die Erdgasströmung durch Houptleitunger*, Rev. Méc. Appl., Acad. R.P.R., *1*, (1962).
2. — *Curgerea tranzitorie a gazelor prin conducte magistrale. Determinarea coeficientului de frecare hidrodinamic.* St. cerc. mec. apl., *1* (1963).
3. — *Метод определения гидродинамического коэфициента при течении газа в магистральных трубопроводах.* Доклад Академии наук СССР, **154**, *6*, (1964).
4. A. Houpeurt, *Sur l'ecoulment des gaz dans les mileux poreux.* Revue de l'Institut français du petrol, *11* (1959).
5. Tihonov, Samarski, *Ecuațiile fizicei matematice.* Edit. tehnică, București, 1956.
6. T. Oroveanu, A. Osnea, *Asupra scurgerii liniare a unui lichid compresibil printr-un mediu poros.* St. cerc. mec. apl., *5* (1963).

SCURGEREA MAGNETOHIDRODINAMICĂ PRINTR-UN CANAL ÎN CAZUL COMPORTĂRII ELECTRICE NEOMOGENE A PEREȚILOR SĂI[1])

de L. V. WOLFERSDORF
Math. Institut, Martin Luther Universität – Halle

532

Se tratează scurgerea staţionară a unui mediu incompresibil, vîscos, cu conductibilitate electrică, între doi pereţi plani paraleli, în prezenţa unui cîmp magnetic exterior perpendicular : Pereţii sînt formaţi din două jumătăţi cu conductibilitate diferită. Rezolvarea problemei se obţine cu ajutorul tehnicii lui Wiener-Hopf.

Cazul cel mai simplu al acestei probleme are loc cînd pereţii se consideră pe jumătate conductibili şi pe jumătate izolaţi. Pentru acest caz se calculează, pentru numere Hartmann mici, fluxul masic adimensional şi raportul dintre forţa lui Lorentz şi gradientul de presiune în suprafaţa de separare a celor două jumătăţi de canal.

1. INTRODUCERE

Scurgerile magnetohidrodinamice prin tuburi în prezenţa unui cîmp magnetic exterior normal au fost studiate în ultimii ani, începînd cu lucrarea [3] a lui Hartmann şi lucrările [6] şi [7] ale lui Shercliff pentru diferite geometrii ale tuburilor şi diferite comportări electrice ale acestora.

Cazul cel mai simplu îl prezintă scurgerea printr-un canal între două planuri paralele; ea a fost tratată de Hartmann [3] pentru pereţii izolaţi şi de Chang şi Lundgren [1] pentru pereţi cu o conductibilitate oarecare. Chang şi Yen [2] tratează cazul în care peretele superior are o altă conductibilitate decît peretele inferior. În toate aceste cazuri, pro-

[1]) Publicată şi în „Rev. roum. sci. techn. — Mecanique appliquée", **9**, 5 (1964).

blema la limită corespunzătoare, referitoare la sistemul de două ecuații cu derivate parțiale pentru viteză și inducția magnetică, se reduce la un sistem de două ecuații diferențiale ordinare.

Acest lucru însă nu mai are loc dacă fiecare perete este format din două jumătăți cu conductibilități diferite. În lucrarea de față, această problemă este adusă, cu ajutorul transformării Fourier, la o problemă de tip Hilbert din teoria funcțiilor, care se rezolvă cu ajutorul tehnicii lui Wiener-Hopf. Pentru funcțiile de rezolvare a vitezei și inducției magnetice, se pot indica, cu ajutorul calculului reziduurilor, dezvoltări în serie în ambele jumătăți ale canalului, punîndu-se la bază condiții la limită aproximative, valabile (după Shercliff) pentru pereții subțiri.

Dacă o jumătate a peretelui este un conductor perfect, iar cealaltă jumătate un izolator, condițiile la limită sînt exacte. În acest caz se determină, într-o primă aproximație, influența unui cîmp magnetic exterior slab asupra scurgerii prin canal și se calculează fluxul masic și variația raportului dintre componenta forței lui Lorenz în direcția scurgerii și valoarea gradientului de presiune în suprafața de separare a celor două jumătăți ale canalului.

2. FORMULAREA PROBLEMEI

Fie un mediu incompresibil, vîscos, cu conductibilitate electrică, care se deplasează în interiorul unui tub cilindric, și un cîmp magnetic omogen de inducție B_0, acționînd normal la direcția axială z a tubului. Mai presupunem că viteza scurgerii cît și cîmpurile electrice și magnetice induse sînt independente de z. În aceste condiții, componentele după z a vitezei v_z și a inducției magnetice B_z vor satisface sistemul de ecuații diferențiale (vezi [6], [1]):

$$\begin{aligned} \rho\nu\Delta v_z + \frac{B_0}{\mu}\frac{\partial B_z}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \Delta B_z + \sigma\mu B_0 \frac{\partial v_z}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

unde ρ, ν, σ, μ sînt parametrii considerați constanți ai densității mediului, viscozității, conductibilității electrice, permeabilității magnetice, iar $\frac{\partial p}{\partial z}$ gradientul de presiune, de asemenea considerat constant.

Introducînd coordonatele adimensionale $\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{a}$ (a — o lungime caracteristică) și mărimile adimensionale

$$V = -\frac{v_z}{(a^2/\nu\rho)(\partial p/\partial z)}, \quad B = -\frac{B_z}{(a^2/\nu\rho)(\partial p/\partial z)\mu(\nu\rho\sigma)^{1/2}}, \quad M = B_0 a\left(\frac{\sigma}{\nu\rho}\right)^{1/2},$$

sistemul (2.1) va lua forma

$$\Delta V + M\frac{\partial B}{\partial \eta} = -1,$$

$$\Delta B + M\frac{\partial V}{\partial \eta} = 0. \tag{2.2}$$

În cazul de față, al scurgerii între două plane paralele cu axa x, la distanța $2a$ (fig. 1), normale la direcția y a cîmpului magnetic ex-

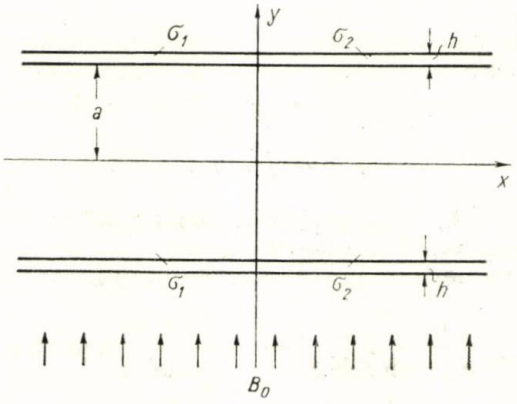


Fig. 1

terior și avînd pentru $-\infty < x < 0$ conductibilitatea σ_1, iar pentru $0 < x < \infty$ conductibilitatea σ_2, se adaugă sistemului (2.2) condițiile la limită

$$V = 0 \text{ pentru } \eta = \pm 1, \quad -\infty < x < \infty \tag{2.3 a}$$

și

$$\frac{\partial B}{\partial \eta} \pm \frac{B}{\varphi_1} = 0 \text{ pentru } \eta = \pm 1, \quad -\infty < \xi < 0,$$

$$\frac{\partial B}{\partial \eta} \pm \frac{B}{\varphi_2} = 0 \text{ pentru } \eta = \pm 1, \quad 0 < \xi < \infty, \tag{2.3 b}$$

pentru determinarea funcțiilor V și B (vezi [7], [1]).

Condițiile la limită (2.3*b*) sînt exacte numai pentru pereți perfect conductibili ($\varphi = \infty$) și pentru pereții izolați ($\varphi = 0$). În cazul general al conductibilității finite, ele reprezintă aproximații cu

$$\varphi_{1,2} = \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma} \cdot \frac{h}{a},$$

unde $\frac{h}{a}$ este raportul, considerat constant și mic, dintre grosimea pereților și jumătatea distanței dintre aceștia.

3. ALTĂ FORMULARE A PROBLEMEI LA LIMITĂ

Pentru rezolvarea problemei la limită dată prin (2.2), (2.3 *a*), și (2.3 *b*), vom scrie mai întîi

$$\begin{aligned} V(\xi,\eta) &= V_0(\xi,\eta) + V_1(\xi,\eta), \\ B(\xi,\eta) &= B_0(\xi,\eta) + B_1(\xi,\eta), \end{aligned} \tag{3.1}$$

nde $V_1(\xi,\eta)$, $B_1(\xi,\eta)$ este soluția problemei respective definită pentru $-\infty < \xi < 0$, unde pereții au peste tot conductibilitatea σ_1, sau pentru $0 < \xi < \infty$ unde pereții au peste tot conductibilitatea σ_2, (vezi [1]) :

$$V_1(\xi,\eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{M}\dfrac{\varphi_1 + 1}{M\varphi_1 + \tan hM}\left(1 - \dfrac{\cos hM\eta}{\cos hM}\right) \text{pentru } -\infty < \xi < 0, \\ \dfrac{1}{M}\dfrac{\varphi_2 + 1}{M\varphi_2 + \tan hM}\left(1 - \dfrac{\cos hM\eta}{\cos hM}\right) \text{pentru } 0 < \xi < \infty ; \end{cases}$$

$$B_1(\xi,\eta) = \begin{cases} -\dfrac{\eta}{M} + \dfrac{1}{M}\dfrac{\varphi_1 + 1}{M\varphi_1 + \tan hM}\dfrac{\sin hM\eta}{\cos hM} \text{pentru} -\infty < \xi < 0, \\ -\dfrac{\eta}{M} + \dfrac{1}{M}\dfrac{\varphi_2 + 1}{M\varphi_2 + \tan hM}\dfrac{\sin hM\eta}{\cos hM} \text{pentru } 0 < \xi < \infty. \end{cases} \tag{3.2}$$

Funcțiile $V_0(\xi,\eta)$, $B_0(\xi,\eta)$ satisfac atunci sistemul de ecuații omogene (2.2) și condițiile la limită (2.3 *a*) și (2.3*b*) pentru $\xi = 0$, derivatele normale $\frac{\partial V_0}{\partial \xi}$, $\frac{\partial B_0}{\partial \xi}$ sînt continue, în timp ce V_0, B_0 însele au o discontinuitate :

$$[V_0]_{-0}^{+0} = [V_1]_{+0}^{-0} = E\left(1 - \frac{\cos hM\eta}{\cos hM}\right), \tag{3.3 a}$$

$$[B_0]_{-0}^{+0} = [B_1]_{+0}^{-0} = E\frac{\sin hM\eta}{\cos hM}, \tag{3.3 b}$$

unde

$$E = \frac{1}{M}\left\{\frac{\varphi_1 + 1}{M\varphi_1 + \tan hM} - \frac{\varphi_2 + 1}{M\varphi_2 + \tan hM}\right\}. \tag{3.4}$$

La infinit, $V_0(\xi,\eta)$, $B_0(\xi,\eta)$, împreună cu derivatele lor de ordinul întîi, trebuie să se anuleze. Din sistemul (2.2) condițiile la limită (2.3*a*), (2.3*b*) și formulele (3.3*a*), (3.3*b*), rezultă că $V_0(\xi,\eta)$ este o funcție pară de η, iar $B_0(\xi,\eta)$ o funcție impară de η.

4. APLICAREA TRANSFORMĂRII FOURIER

Introducem transformatele Fourier în raport cu variabila ξ :

$$\widetilde{V}_0(\alpha,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} V_0(\xi,\eta)\, e^{i\alpha\xi}\, d\xi, \quad \widetilde{B}_0(\alpha,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} B_0(\xi,\eta)\, e^{i\alpha\xi}\, d\xi.$$

Din sistemul omogen (2.2), formulele discontinuităților (3.3*a*), (3.3*b*) și continuitatea lui $\frac{\partial V_0}{\partial \xi}$, $\frac{\partial B_0}{\partial \xi}$ pentru $\xi = 0$, rezultă pentru $\widetilde{V}_0(\alpha,\eta)$ și $\widetilde{\beta}_0(\alpha,\eta)$ sistemul de ecuații diferențiale ordinare în η :

$$\frac{d^2\widetilde{V}_0}{d\eta^2} + M\frac{d\widetilde{B}_0}{d\eta} - \alpha^2\widetilde{V}_0 = -i\alpha E\left(1 - \frac{\cos hM\eta}{\cos hM}\right),$$

$$\frac{d^2\widetilde{B}_0}{d\eta^2} + M\frac{d\widetilde{V}_0}{d\eta} - \alpha^2\widetilde{B}_0 = -i\alpha E\frac{\sin hM\eta}{\cos hM},$$

cu următoarea soluție generală

$$\begin{aligned}\widetilde{V}_0 &= A_1(\alpha)\cos hs_1\eta + A_2(\alpha)\cos hs_2\eta - \frac{E}{i\alpha}\left(1 - \frac{\cos hM\eta}{\cos hM}\right),\\ \widetilde{B}_0 &= -A_1(\alpha)\sin hs_1\eta - A_2(\alpha)\sin hs_2\eta - \frac{E}{i\alpha}\frac{\sin hM\eta}{\cos hM},\end{aligned} \tag{4.1}$$

unde

$$s_{1,2} = \frac{1}{2}(M \pm \beta), \quad \beta = \sqrt{M^2 + 4\alpha^2}, \tag{4.2}$$

ținînd seama că $\widetilde{V}_0(\alpha,\eta)$ este o funcție pară de η și $\widetilde{B}_0(\alpha,\eta)$ o funcție impară de η.

Din condiția la limită (2.3*a*) rezultă

$$\widetilde{V}_0(\alpha,\eta) = 0 \text{ pentru } \eta = 1. \tag{4.3}$$

Pentru aplicarea condițiilor la limită (2.3*b*) le extindem mai întîi pe întreaga dreaptă $\eta = 1$, $-\infty < \xi < \infty$:

$$\frac{\partial B_0}{\partial \eta} + \frac{B_0}{\varphi_1} = f(\xi) \text{ pentru } \eta = 1, \; -\infty < \xi < \infty,$$

$$\frac{\partial B_0}{\partial \eta} + \frac{B_0}{\varphi_2} = g(\xi) \text{ pentru } \eta = 1, \; -\infty < \xi < \infty,$$

unde $f(\xi) = 0$ pentru $-\infty < \xi < 0$, iar $g(\xi) = 0$ pentru $0 < \xi < \infty$. Vom avea

$$\frac{\partial \widetilde{B}_0}{\partial \eta} + \frac{\widetilde{B}_0}{\varphi_1} = F^+(\alpha) \text{ pentru } \eta = 1, \; -\infty < \alpha < \infty,$$

$$\frac{\partial \widetilde{B}_0}{\partial \eta} + \frac{\widetilde{B}_0}{\varphi_2} = G^-(\alpha) \text{ pentru } \eta = 1, \; -\infty < \alpha < \infty, \tag{4.4}$$

cu

$$F^+(\alpha) = \int_0^\infty f(\xi)\, e^{i\alpha\xi}\, d\xi, \; G^-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 g(\xi)\, e^{i\alpha\xi}\, d\xi.$$

Vom presupune că $f(\xi)$ și $g(\xi)$ sînt construite astfel încît $F^+(\alpha)$ din semiplanul superior $Im\ \alpha > 0$ și $G^-(\alpha)$ din semiplanul inferior $Im\ \alpha < 0$ să fie regulate, să se anuleze la infinit și să aibă valori la limită continue pe axa reală a planului α[2]).

Soluția care satisface condițiile la limită (4.3) și (4.4) are forma

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_0 &= -\frac{E}{i\alpha}\left(1 - \frac{\cos hM\eta}{\cos hM}\right) + \left[F^+(\alpha) + \frac{E}{i\alpha}\left(M + \frac{1}{\varphi_1}\tan hM\right)\right] \times \\
&\times \left[\frac{\cos hs_2\eta}{\cos hs_2} - \frac{\cos hs_1\eta}{\cos hs_1}\right] \frac{1}{\beta + \frac{1}{\varphi_1}(\tan hs_1 - \tan hs_2)}, \\
\widetilde{B}_0 &= -\frac{E}{i\alpha}\frac{\sin hM\eta}{\cos hM} \times \left[F^+(\alpha) + \frac{E}{i\alpha}\left(M + \frac{1}{\varphi_1}\tan hM\right)\right] \times \\
&\times \left[\frac{\sin hs_1\eta}{\cos hs_1} - \frac{\sin hs_2\eta}{\cos hs_2}\right] \frac{1}{\beta + \frac{1}{\varphi_1}(\tan hs_1 - \tan hs_2)},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

[2]) S-ar putea cere, de asemenea, așa cum se obișnuiește în cadrul metodei Wiener-Hopf, ca $F^+(\alpha)$ și $G^-(\alpha)$ să aibă o bandă de holomorfie comună $-c < Im\ \alpha < c$.

unde funcția $F^+(\alpha)$ rezultă, pentru $0 < \varphi_1 \leqslant \infty$, $0 < \varphi_2 \leqslant \infty$, ca soluție a problemei lui Hilbert (vezi [4]):

$$G^-(\alpha) = K(\alpha)\,F^+(\alpha) + \frac{E}{i\alpha}\left(\frac{K(\alpha)}{K(0)} - 1\right)\left(M + \frac{1}{\varphi_1}\tan hM\right)$$

cu (4.6)

$$K(\alpha) = \frac{\cos h\left(\frac{M}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{M}{2}-\frac{\beta}{2}\right)+\frac{1}{\varphi_2}(\sin h\beta/\beta)}{\cos h\left(\frac{M}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{M}{2}-\frac{\beta}{2}\right)+\frac{1}{\varphi_1}(\sin h\beta/\beta)}\,.$$

Pentru $\varphi_2 = 0$ [3]) vom scrie

$$h(\xi) = \lim_{\varphi_2\to 0}\varphi_2 \cdot g(\xi), \quad H^-(\alpha) = \lim_{\varphi_2\to 0}\varphi_2 G^-(\alpha),$$

obținîndu-se problema lui Hilbert

$$H^-(\alpha) = L(\alpha)\,F^+(\alpha) + \frac{E}{i\alpha}\left(\frac{L(\alpha)}{L(0)} - 1\right)\tan hM, \tag{4.7}$$

unde

$$L(\alpha) = \lim_{\varphi_2\to 0}\varphi_2 \cdot K(\alpha) = \frac{(\sin h\beta/\beta)}{\cos h\left(\frac{M}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cos h\left(\frac{M}{2}-\frac{\beta}{2}\right)+\frac{1}{\varphi_1}(\sin h\beta/\beta)}\,.$$

5. REZOLVAREA PROBLEMEI LUI HILBERT

Problema omogenă a lui Hilbert, corespunzătoare lui (4.6),

$$K^-(\alpha) = K(\alpha)\,K^+(\alpha) \tag{5.1}$$

are indicele zero, $K(\alpha)$ avînd pentru $\alpha \to \pm\infty$ aceeași valoare la limită fiind real și pozitiv pe toată axa reală α. De aceea (5.1) are precis o soluție liniar independentă, mărginită la infinit. În cazul problemei omogene corespunzătoare lui (4.7)

$$L^-(\alpha) = L(\alpha)\;L^+(\alpha) \tag{5.2}$$

același lucru este valabil pentru problema subordonată

$$\Lambda^-(\alpha) = \Lambda(\alpha)\,\Lambda^+(\alpha)$$

cu

$$\Lambda^-(\alpha) = \sqrt{M + 2i\alpha}\;L^-(\alpha), \Lambda(\alpha) = \sqrt{M^2 + 4\alpha^2}\,L(\alpha), \Lambda^+(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 2i\alpha}}\,L^+(\alpha)$$

[3]) Cazul $\varphi_1 = 0$ poate fi tratat analog, introducîndu-se în mod util în (4.5) funcția $G^-(\alpha)$ în locul lui $F^+(\alpha)$. De aceea nu vom analiza acest caz.

în consecință, (5.2) are precis o soluție liniar independentă cu $L^+(\alpha) \sim \alpha^{1/2}$ și $L^-(\alpha) \sim \alpha^{-1/2}$ la infinit. Soluția univocă a problemei neomogene (4.6), respectiv (4.7), care se anulează la infinit, este dată de

$$F^+(\alpha) = \frac{E}{i\alpha}\left(\frac{K^+(\alpha)}{K^+(0)} - 1\right)\left(M + \frac{1}{\varphi}\tan hM\right)^{4)} \qquad (5.3\,a)$$

și

$$G^-(\alpha) = \frac{E}{i\alpha}\left(\frac{K^-(\alpha)}{K^-(0)} - 1\right)\left(M + \frac{1}{\varphi_2}\tan hM\right), \qquad (5.3\,b)$$

respectiv

$$H^-(\alpha) = \frac{E}{i\alpha}\left(\frac{K^-(\alpha)}{K^-(0)} - 1\right)\tan hM. \qquad (5.3\,c)$$

Rezolvarea problemelor omogene (5.1) și (5.2), avînd în vedere că $K(\alpha)$ și $L(\alpha)$ sînt cîturi ale unor funcții întregi, se obține, ca și în metoda lui Wiener-Hopf (vezi [5]), cel mai simplu cu ajutorul teoremei lui Weierstrass. În acest scop notăm rădăcinile din planul superior $Im\,\beta > 0$ ale ecuației

$$\cos h\left(\frac{M}{2} + \frac{\beta}{2}\right)\cos h\left(\frac{M}{2} - \frac{\beta}{2}\right) + \frac{1}{\varphi_1}\frac{\sin h\beta}{\beta} = 0$$

cu $\beta_m^{(1)}$, $m = 1, 2, \ldots$ și analog cu $\beta_m^{(2)}$, $m = 1, 2, \ldots$ rădăcinile ecuației corespunzătoare, în care φ_1 a fost înlocuit cu φ_2. În cazul particular $\varphi_1 = \infty$ avem

$$\beta_{2n-1}^{(1)} = M + i(2n-1)\pi,\ \beta_{2n}^{(1)} = -M + i(2n-1)\pi\ (n = 1,2, \ldots),$$

iar în cazul particular $\varphi_2 = 0$

$$\beta_m^{(2)} = im\pi\quad (m = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Pentru $m \to \infty$ rădăcinile $\beta_m^{(1)}$ pentru $\varphi_1 > 0$ au aceeași comportare ca rădăcinile pentru cazul particular $\varphi_1 = \infty$:

$$\beta_{2n-1}^{(1)} \sim i\pi(2n-1) + M - \frac{2}{\varphi_1}\frac{1}{i\pi(2n-1)},\ \beta_{2n}^{(1)} \sim i\pi(2n-1) - M - \frac{2}{\varphi_1}\frac{1}{i\pi(2n-1)}$$

---

4) Pentru $\varphi_2 = 0$, se înlocuiește $\dfrac{K^+(\alpha)}{K^+(0)}$ prin $\dfrac{L^+(\alpha)}{L^+(0)}$.

și analog rădăcinile $\beta_m^{(2)}$ pentru $\varphi_2 > 0$. Avînd în vedere că numărătorul și numitorul $K(\alpha)$ și $L(\alpha)$ sînt funcții pare de β, avem

$$Z(\beta) \equiv \cos h\left(\frac{M}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cos h\left(\frac{M}{2}-\frac{\beta}{2}\right)+\frac{1}{\varphi_2}(\sin h\beta/\beta) =$$

$$= Z(0)\prod_{m=1}^{\infty}\{1-(\beta/\beta_m^{(2)})^2\},$$

$$N(\beta) \equiv \cos h\left(\frac{M}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cos h\left(\frac{M}{2}-\frac{\beta}{2}\right)+\frac{1}{\varphi_1}(\sin h\beta/\beta) =$$

$$= N(0)\prod_{m=1}^{\infty}\{1-(\beta/\beta_m^{(1)})^2\}$$

cu

$$Z(0)=\cos^2 h\frac{M}{2}+\frac{1}{\varphi_2},\quad N(0)=\cos^2 h\frac{M}{2}+\frac{1}{\varphi_1},$$

respectiv

$$Z(\beta) \equiv (\sin h\beta/\beta) = \prod_{m=1}^{\infty}\{1+(\beta/\pi m)^2\}$$

cu

$$Z(0)=1.$$

Folosind descompunerea

$$1-(\beta/\beta_m)^2 \equiv 1-[(M^2+4\alpha^2)/\beta_m^2] = \left(\sqrt{1-\frac{M^2}{\beta_m^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\alpha}{\beta_m}\right)\left(\sqrt{1-\frac{M^2}{\beta_m^2}}-\frac{2\alpha}{\beta_m}\right)$$

și ținînd seama de comportarea de mai sus a rădăcinilor $\beta_m^{(1)}$, $\beta_m^{(2)}$ pentru $m\to\infty$, obținem soluția problemei lui Hilbert (5.1) sub forma

$$K^+(\alpha) = N(0)\prod_{m=1}^{\infty}\left(\sqrt{1-\frac{M^2}{\beta_m^{(1)2}}}+\frac{2\alpha}{\beta_m^{(1)}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{M^2}{\beta_m^{(2)2}}}+\frac{2\alpha}{\beta_m^{(2)}}\right)^{-1}, \tag{5.4}$$

$$K^-(\alpha) = Z(0)\ N(0)\ [K^+(-\alpha)]^{-1},$$

iar soluția problemei lui Hilbert (5.2) sub forma

$$L^+(\alpha) = N(0)\,e^{i\frac{2}{\pi}\ln 2\cdot\alpha}\prod_{m=1}^{\infty}\left(\sqrt{1-\frac{M^2}{\beta_m^{(1)2}}}+\frac{2\alpha}{\beta_m^{(1)}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{M^2}{\pi^2m^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\alpha}{im\pi}\right)^{-1}\exp\left[-\frac{2\alpha}{\beta_m^{(1)}}+\frac{2\alpha}{im\pi}\right].$$

$$L^-(\alpha) = N(0)\,[L^+(-\alpha)]^{-1}. \tag{5.5}$$

6. REZOLVAREA PROBLEMEI INIȚIALE

Conform (4.5) și (5.3 a), transformatele lui Fourier $\widetilde{V}_0(\alpha,\eta)$ și $\widetilde{B}_0(\alpha,\eta)$ sînt date de formulele

$$\widetilde{V}_0 = -\frac{E}{i\alpha}\left(1-\frac{\cos hM\eta}{\cos hM}\right)+\frac{E}{i\alpha}\frac{K^+(\alpha)}{K^+(0)}\left(M+\frac{1}{\varphi_1}\tan hM\right)\times$$

$$\times\left[\frac{\cos hs_2\eta}{\cos hs_2}-\frac{\cos hs_1\eta}{\cos hs_1}\right]\frac{1}{\beta+\dfrac{1}{\varphi_1}(\tan hs_1-\tan hs_2)},$$

$$\widetilde{B}_0 = -\frac{E}{i\alpha}\frac{\sin hM\eta}{\cos hM}+\frac{E}{i\alpha}\frac{K^+(\alpha)}{K^+(0)}\left(M+\frac{1}{\varphi_1}\tan hM\right)\times \tag{6.1}$$

$$\times\left[\frac{\sin hs_1\eta}{\cos hs_1}-\frac{\sin hs_2\eta}{\cos hs_2}\right]\frac{1}{\beta+\dfrac{1}{\varphi_1}(\tan hs_1-\tan hs_2)},$$

unde mărimile E, s_1, s_2, și $K^+(\alpha)$ sînt definite de (3.4), (4.2) și (5.4), respectiv (5.5) [5]. Din (6.1) se obțin funcțiile căutate $V_0(\xi,\eta)$ și $B_0(\xi,\eta)$ cu ajutorul formulelor de inversare:

$$\begin{matrix} V_0(\xi,\eta) \\ B_0(\xi,\eta) \end{matrix} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{matrix} \widetilde{V}_0(\alpha,\eta) \\ \widetilde{B}_0(\alpha,\eta) \end{matrix} e^{-i\alpha\xi}\,d\alpha. \tag{6.2}$$

Transformatele lui Fourier $\widetilde{V}_0(\alpha,\eta)$ și $\widetilde{B}(\alpha,\eta)$ reprezintă funcții meromorfe de α, care la infinit au aceeași comportare ca α^{-1}. Ele sînt regulate pentru $\alpha = 0$. De aceea pentru $-\infty < \xi < 0$ drumul de integrare din (6.2) poate fi dus deasupra originii, închizîndu-se în semiplanul superior $Im\ \alpha > 0$ la infinit [6].

Pentru $0 < \xi < \infty$ vom înlocui $K^+(\alpha)$, conform (5.1) [6], respectiv (5.2), prin $K^-(\alpha)$, și vom închide drumul de integrare în semiplanul inferior $Im\ \alpha < 0$ [5]. Aplicarea teoriei reziduurilor ne va da dezvoltări în serie pentru funcțiile căutate $V_0(\xi,\eta)$ și $B_0(\xi,\eta)$.

---

[5]) Pentru $\varphi_2 = 0$ se înlocuiește în (6.1) $\dfrac{K^+(\alpha)}{K^+(0)}$ prin $\dfrac{L^+(\alpha)}{L^+(0)}$.

[6]) Vom considera deci un șir de curbe de integrare C_n, care se extind la infinit, de exemplu în semicercuri în jurul originii, care să treacă între punctele polare ale integrandului.

În cele ce urmează, ne vom limita, pentru simplitate, la cazul particular $\varphi_1 = \infty$, $\varphi_2 = 0$. În acest caz se obțin dezvoltările

$$V_0(\xi, \eta)_{(-\infty<\xi<0)} = \frac{EM}{K^+(0)} \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{2n-1}{2} \pi\eta}{(2n-1)} \left[\frac{e^{-i\alpha_{2n-1}^{(1)} \xi} K^+(\alpha_{2n-1}^{(1)})}{M + \frac{\pi}{2}(2n-1)i} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-i\alpha_{2n}^{(1)} \xi} K^+(\alpha_{2n}^{(1)})}{M - \frac{\pi}{2}(2n-1)i} \right], \tag{6.3}$$

$$V_0(\xi, \eta)_{(0<\xi<\infty)} = \frac{E \tanh M}{K^-(0)} \cdot \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{e^{-i\alpha_{2n-1}^{(2)} \xi} (2n-1) K^-(\alpha_{2n-1}^{(2)})}{\alpha_{2n-1}^{(2)\,2}} \sinh \frac{M}{2} \cdot \right.$$

$$\left. \cosh \frac{M}{2} \eta \cdot \cos \frac{2n-1}{2} \pi\eta + \frac{e^{-i\alpha_{2n}^{(2)} \xi} 2n K^-(\alpha_{2n}^{(2)})}{\alpha_{2n}^{(2)\,2}} \cosh \frac{M}{2} \cdot \sinh \frac{M}{2} \eta \cdot \sin n\pi\eta \right]$$

și

$$B_0(\xi, \eta)_{(-\infty<\xi<0)} = \frac{EM}{K^+(0)} \cdot \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \frac{2n-1}{2} \pi\eta}{(2n-1)} \left[\frac{e^{-i\alpha_{2n-1}^{(1)} \xi} K^+(\alpha_{2n-1}^{(1)})}{\frac{\pi}{2}(2n-1) - iM} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-i\alpha_{2n}^{(1)} \xi} K^+(\alpha_{2n}^{(1)})}{\frac{\pi}{2}(2n-1) + iM} \right], \tag{6.4}$$

$$B_0(\xi, \eta)_{(0<\xi<\infty)} = \frac{E \tanh M}{K^-(0)} \cdot \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{e^{-i\alpha_{2n-1}^{(2)} \xi} (2n-1) K^-(\alpha_{2n-1}^{(2)})}{\alpha_{2n}^{(2)\,2}} \sinh \frac{M}{2} \cdot \right.$$

$$\cdot \sinh \frac{M}{2} \eta \cdot \cos \frac{2n-1}{2} \pi\eta -$$

$$\left. - \frac{e^{-i\alpha_{2n}^{(2)} \xi} 2n K^-(\alpha_{2n}^{(2)})}{\alpha_{2n}^{(2)2}} \cosh \frac{M}{2} \cdot \cosh \frac{M}{2} \eta \cdot \sin n\pi\eta \right]$$

cu rădăcinile

$$\alpha_{2n-1}^{(1)} = \frac{i}{2} \sqrt{\pi^2 (2n-1)^2 - 2\pi i M (2n-1)},$$

$$\alpha_{2n}^{(1)} = \frac{i}{2} \sqrt{\pi^2 (2n-1)^2 + 2\pi i M (2n-1)}$$

și

$$\alpha_{2n-1}^{(2)} = -\frac{i}{2}\sqrt{M^2 + \pi^2(2n-1)^2},$$

$$\alpha_{2n}^{(2)} = -\frac{i}{2}\sqrt{M^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

Pentru acest caz special se recomandă, în locul formulei (5.5) o altă descompunere, care se obține înlocuind cos h cu sin h, folosind reprezentarea sub formă de produs a lui sin h :

$$K^+(\alpha) = e^{i\frac{2}{\pi}\ln 2\cdot\alpha}\left[\alpha + i\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + iM\frac{\pi}{2}}\right]\prod_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt{1 + \frac{M^2}{\pi^2 n^2}} - i\frac{2\alpha}{\pi n}\right]^{-1} \times \tag{6.5}$$

$$\times\left[\sqrt{1 - \frac{1}{n}\left(1 + \frac{iM}{\pi}\right) + \frac{1}{4n^2}\left(1 + \frac{2iM}{\pi}\right)} - i\frac{\alpha}{\pi n}\right]\left[\sqrt{1 + \frac{1}{n}\left(1 + \frac{iM}{\pi}\right) + \frac{1}{4n^2}\left(1 + \frac{2iM}{\pi}\right)} - i\frac{\alpha}{\pi n}\right],$$

$$K^-(\alpha) = -[K^+(-\alpha)]^{-1}.$$

Seriile (6.3) și (6.4) sînt valabile și pentru $\xi = -0$ și $\xi = +0$, deoarece primul termen din membrul doi al relației (6.1) servește numai la asigurarea regularității lui $\widetilde{V}_0(\alpha, \eta)$, respectiv $\widetilde{B}_0(\alpha, \eta)$ pentru $\alpha = 0$, fără o altă contribuție la integrală, iar al doilea termen dispare, fiind de ordin mai mare decît unu. Valabilitatea formulelor (6.3) pentru $\xi = -0$ și $\xi = +0$ se poate deduce și direct din convergența uniformă a seriilor în raport cu ξ. Din $V_0(\xi, \eta)$, $B_0(\xi, \eta)$ și din relațiile (3.1), (3.2) rezultă imediat soluțiile $V(\xi, \eta)$ și $B(\xi, \eta)$.

7. APROXIMAȚIE PENTRU NUMERE HARTMANN MICI

Pentru cîmpuri magnetice exterioare slabe, ne putem limita, în dezvoltările (6.3) și (6.4), la primii termeni în M, care nu se anulează. Atunci seriile pentru $B_0(\xi, \eta)$ pot fi însumate și obținem

$$\underset{(-\infty<\xi<0)}{B_0(\xi, \eta)} = \frac{2M}{3\pi}\arg\left(e^{\frac{\pi}{2}(\xi+i\eta)} + \sqrt{1 + e^{\pi(\xi+i\eta)}}\right),$$

$$\underset{(0<\xi<\infty)}{B_0(\xi, \eta)} = \frac{2M}{3\pi}\arg\left(1 + \sqrt{1 + e^{-\pi(\xi+i\eta)}}\right). \tag{7.1}$$

Inducția magnetică totală va fi atunci, ținînd seama de (3.1), (3.2) în primă aproximație,

$$\begin{aligned} B(\xi, \eta) &= M\eta\left(\frac{\eta^2}{6} - \frac{1}{2}\right) + B_0(\xi, \eta), \\ {\scriptstyle(-\infty<\xi<0)} & \\ B(\xi, \eta) &= M\eta\left(\frac{\eta^2}{6} - \frac{1}{6}\right) + B_0(\xi, \eta). \\ {\scriptstyle(0<\xi<\infty)} & \end{aligned} \tag{7.2}$$

Din (7.2), (7.1) obținem pentru mărimea $M \cdot \dfrac{\partial B}{\partial \eta}$, raportul dintre componenta după axa z a forței lui Lorentz și valoarea absolută a gradientului de presiune în secțiunea transversală $\xi = 0$, expresia

$$M \cdot \frac{\partial B}{\partial \eta} = M^2 \cdot k(\eta), \qquad k(\eta) = \frac{1}{3} \frac{\cos \dfrac{\pi}{4}\eta}{\sqrt{2 \cos \dfrac{\pi}{2}\eta}} - \frac{1}{2}(1 - \eta^2). \tag{7.3}$$

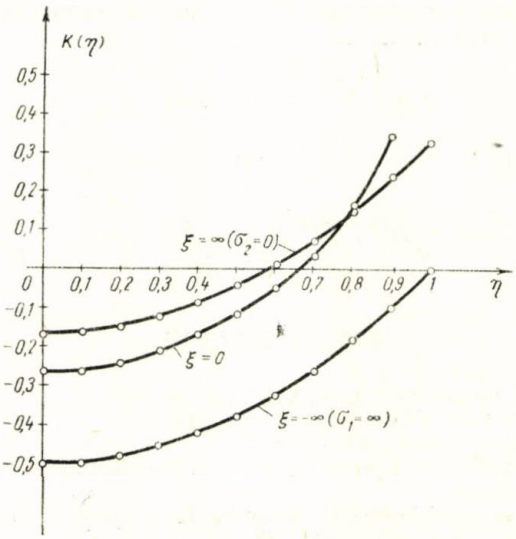


Fig. 2

Funcția $k(\eta)$ este reprezentată în figura 2. Ea variază în interiorul canalului, între curbele corespunzătoare pentru $\xi = -\infty$ și $\xi = +\infty$, însă la perete va crește infinit (de ordinul 1/2).

În timp ce $B_0 \sim M$, avem $V_0 \sim M^2$. Funcțiile $V_0(\xi, \eta)$ și $B_0(\xi, \eta)$ reprezintă deci soluțiile sistemului de ecuații diferențiale

$$\begin{aligned} \Delta V_0 + M\frac{\partial B_0}{\partial \eta} &= 0 \\ \Delta B_0 &= 0 \end{aligned}$$

pentru următoarele condiții la limită și de discontinuitate

$$V_0 = 0 \text{ pentru } \eta = \pm 1, \; -\infty < \xi < \infty;$$

$$\frac{\partial B_0}{\partial \eta} = 0 \text{ pentru } \eta = \pm 1, \; -\infty < \xi < 0; \quad B_0 = 0 \text{ pentru } \eta = \pm 1, \; 0 < \xi < \infty$$

$$[V_0]_{-0}^{+0} = -\frac{M^2}{6}(1-\eta^2), \; [B_0]_{-0}^{+0} = -\frac{1}{3} M\eta,$$

$$\left[\frac{\partial V_0}{\partial \xi}\right]_{-0}^{+0} = \left[\frac{\partial B_0}{\partial \xi}\right]_{-0}^{+0} = 0.$$

Pentru fluxul masic, adimensional

$$Q(\xi) = \int_{-1}^{1} V(\xi, \eta) \, d\eta$$

se obține în secțiunea transversală $\xi = 0$, ținînd seama de formula a doua (6.3), aproximativ valoarea

$$Q(0) = \frac{2}{3} - 0,1641 \; M^2,$$

aflată între valorile

$$Q_1(\xi = -\infty) = \frac{2}{3} - 0,2667 \; M^2 \text{ și } Q_2(\xi = +\infty) = \frac{2}{3} - 0,0444 \; M^2.$$

BIBLIOGRAFIE

1. C. C. Chang și T. S. Lundgren, ZAMP, **XII**, *2*, 100, (1961).
2. C. C. Chang și J. T. Yen, ZAMP, **XIII**, *3*, 266, (1962).
3. J. Hartmann, Math.-fys. Medd., **XV**, 6 (1937).
4. N. I. Mushelishvili, *Singular Integral Equations*. P. Noordhoff, 1953 (vezi și ed. 2, Moscova, 1962 în l. rusă).
5. B. Noble, *The Wiener-Hopf Technique*. Pergamon Press, 1958.
6. J. A. Shercliff, Proc. Camb. Phil. Soc., **49**, 136 (1953).
7. — J. Fluid. Mech., **1**, 644 (1956).

ASUPRA UNEI CLASE DE ARIPI DELTA AVÎND INCIDENȚA SAU PANTA VARIABILĂ DUPĂ FUNCȚII OMOGENE, ÎN REGIM SUPERSONIC

de ELIE CARAFOLI și DAN MATEESCU
Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R., București

Obiectul acestei lucrări constă în aplicarea mișcărilor conice de ordin superior la studiul aripilor triunghulare avînd incidența sau panta (sau vitezele verticale corespunzătoare) variabile după funcții omogene de diferite ordine. În acest scop problema se reduce la studiul unei aripi avînd o distribuție continuă de muchii elementare ceea ce ne permite să aplicăm rezultatele obținute în acest sens în lucrările anterioare.

Ca exemple de aplicație se determină în mod concret expresia vitezei de perturbație pentru o serie de aripi subțiri sau de grosime simetrică la care incidența sau panta variază după funcții omogene de ordinul zero și 1.

NOTAȚII ȘI FORMULE UZUALE

U_∞ — viteza curentului neperturbat

a_∞ — viteza sunetului în condițiile curentului neperturbat

$M_\infty = \dfrac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach, $B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$

$Ox_1 x_2 x_3$ — sistem triortogonal de coordonate a cărui axă Ox_1 este paralelă cu viteza curentului superturbat.

$y = \dfrac{x_2}{x_1}$, $z = \dfrac{x_3}{x_1}$ — coordonatele planului fizic oyz $(x_1 = 1)$

Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mecanique applique" **10**, 2, 1965 (în limba franceză).

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 18 NR. 2 P. 290–314 BUCUREȘTI 1965

$x = y + i\mathfrak{z}$ — plan auxiliar utilizat în lucrările anterioare, în care $\mathfrak{z} \neq z$ şi are valoarea următoare pe axa ordonatelor ($y = 0$) :

$$\mathfrak{z} = \frac{z}{\sqrt{1 - B^2 z^2}} \tag{1}$$

$\Phi(x_1, x_2, x_3)$ — potenţialul vitezelor de perturbaţii, considerat în general o funcţie omogenă de ordinul n.

$\Phi_{n-q-r,q,r} = \dfrac{\partial^n \Phi}{\partial x_1^{n-q-r}\, \partial x_2^q\, \partial x_3^r}$ — funcţii armonice în planul $oy\mathfrak{z}$ $(q + r \leqslant n)$.

$F_{n-q-r,q,r} = \Phi_{n-q-r,q,r} + i\,\Phi'_{n-q-r,q,r}$ — funcţii analitice în planul x între care există următoarele relaţii de compatibilitate;

$$\mathrm{d}F_{n,0,0} = (-1)^q x^q \left(\frac{ix}{\sqrt{1 - B^2 x^2}}\right)^r \mathrm{d}F_{n-q-r,q,r}, \quad (q + r \leqslant n). \tag{2}$$

$u = \Phi_{100}$, $v = \Phi_{010}$, $w = \Phi_{001}$ — vitezele de perturbaţie după axele Ox_1, Ox_2, Ox_3 care sînt funcţii omogene de ordin $(n - 1)$ şi care satisfac formulele lui Euler :

$$\frac{(n-1)!\,u}{x_1^{n-1}} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q\, y^q\, \Phi_{n-q,q,0} = \mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q\, x^q F_{n-q,q,0}, \tag{3 a}$$

$$\frac{(n-1)!\,v}{x_1^{n-1}} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q\, y^q\, \Phi_{n-q-1,q+1,0} = \mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q\, x^q F_{n-q-1,q+1,0}, \tag{3 b}$$

$$\frac{(n-1)!\,w}{x_1^{n-1}} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q\, y^q\, \Phi_{n-q-1,q,1} = \mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q\, x^q F_{n-q-1,q,1}. \tag{3 c}$$

$\mathcal{U}_{n-1}$ — funcţie analitică definită sub forma

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e\, \mathcal{U}_{n-1}, \quad \frac{\mathrm{d}^{n-1}\mathcal{U}_{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} = F_{1,n-1,0}. \tag{4}$$

Ţinînd seama de (2) şi (4) expresia (3 c) devine

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\, w = \mathcal{I}m \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^{n-q-2} C_{n-1}^q\, x^q \int x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2 x^2}\, \frac{\mathrm{d}^n \mathcal{U}_{n-1}}{\mathrm{d}x^n}\, \mathrm{d}x. \tag{5}$$

1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

În această lucrare ne propunem să tratăm cazul general al unei aripi la care incidența sau panta, și deci și viteza verticală w, sînt distribuite după funcții omogene de diferite ordine în locul polinoamelor omogene și același ordin care au format obiectul unor lucrări anteriare [1], [2].

În acest sens, să considerăm aripa delta din figura 1 pe extradosul căreia

$$w = x_1^{n-1}\, w_{n-1,0}\,(y), \tag{6}$$

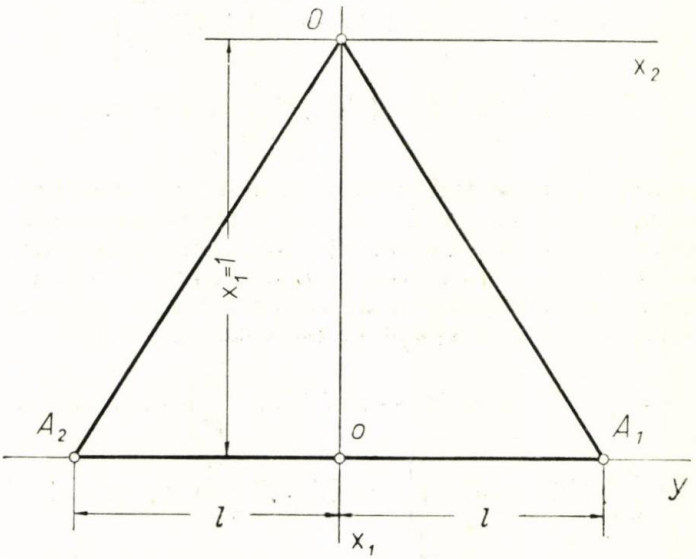


Fig. 1

unde $w_{n-1,0}\,(y)$ poate fi în general o funcție oarecare continuă și derivabilă de y.

Un caz interesant îl constituie desigur exprimarea funcției $w_{n-1,0}$ sub forma unui polinom, adică

$$w_{n-1,0} = \sum_{k=0}^{m} \beta_k\, y^k, \tag{7}$$

unde însă $m \geqslant n-1$.

Astfel de exemplu, considerînd cazul unei funcții omogene de ordin zero ($n = 1$), viteza w poate fi de forma

$$w = w_0\left(1 \pm a\,\frac{y}{l}\right), \tag{8}$$

căreia îi corespunde suprafața extradosului aripii definită prin ecuația

$$Z = \frac{w_0}{U_\infty}\, x_1\left[1 \mp \frac{y}{l}\left(1 + a \ln \frac{y}{l}\right)\right], \left(w = \frac{\partial Z}{\partial x_1}\, U_\infty\right), \tag{9}$$

sau poate fi de forma

$$w=\pm w_0\left[1+(m-1)(\pm 1)^m\frac{y^m}{l^m}\right],\quad Z=\frac{w_0}{U_\infty}x_1\left[1-(\pm 1)^m\frac{y^m}{l^m}\right],\ (m\geqslant 1)\quad (10)$$

în care semnul plus se referă la $y>0$, iar semnul minus la $y<0$.

În mod asemănător, în cazul distribuţiei după o funcţie omogenă de ordin $(n-1)$, viteza verticală poate fi dată sub forma generală

$$w=w_0\,x_1^{n-1}\left[n+(m-n)(\pm 1)^m\frac{y^m}{l^m}\right], \qquad (11\,a)$$

$$Z=\frac{w_0}{U_\infty}x_1^n\left[1-(\pm 1)^m\frac{y^m}{l^m}\right],\ (m\geqslant n). \qquad (11\,b)$$

Pentru aripile groase reale o cerinţă importantă care trebuie satisfăcută este aceea ca grosimea să fie nulă pe toate bordurile aripii. Această condiţie poate fi îndeplinită cu uşurinţă dacă, fiecăreia din aripile de mai sus, îi asociem cîte o aripă corespunzătoare, avînd viteza verticală distribuită după un polinom omogen, de tipul celor tratate în lucrările anterioare, obţinînd astfel aripi complexe de forma generală

$$w=w_0\,x_1^{n-1}\left[n+(m-n)(\pm 1)^m\frac{y^m}{l^m}\right]-m\,w_0\,x_1^{m-1}, \qquad (12\,a)$$

$$Z=\frac{w_0}{U_\infty}x_1^n(1-x_1^{m-n})\left[1-(\pm 1)^m\frac{y^m}{l^m}\right],\ (m\geqslant n+1). \qquad (12\,b)$$

Aripi închise pe toate bordurile se pot de asemenea obţine şi asociind convenabil cîte două aripi avînd vitezele verticale distribuite după funcţii omogene. Se obţin astfel aripi complexe definite în forma lor generală prin relaţiile

$$w=w_0\,x_1^{n-1}\left[n+(m-n)(\pm 1)^m\frac{y^m}{l^m}\right]-$$
$$-\,w_0\,x_1^{p-1}\left[p+(m-p)(\pm 1)^m\frac{y^m}{l^m}\right], \qquad (13\,a)$$

$$Z=\frac{w_0}{U_\infty}x_1^n(1-x_1^{p-n})\left[1-(\pm 1)^m\frac{y^m}{l^m}\right],\ (m\geqslant p+1\geqslant n+2). \qquad (13\,b)$$

În cele ce urmează ne propunem să studiem scurgerea în jurul aripilor simple avînd viteza verticală distribuită după o funcţie omogenă oarecare, iar pentru exemplificarea metodei de calcul vom trata complet cîteva din aripile simple care intră în componenţa aripilor complexe de mai sus.

2. DETERMINAREA VITEZEI AXIALE DE PERTURBAȚIE

Să considerăm cazul general al aripii delta din figura 1 pe extradosul căreia viteza verticală de perturbație este distribuită după o funcție omogenă de ordin $(n-1)$, ca în relația (6).

Este evident că scurgerea în jurul acestei aripi este o mișcare conică de ordin n. Urmînd același raționament ca și în cazul distribuției lui w după un polinom omogen de același ordin $(n-1)$, putem considera că funcția analitică $\mathcal{U}_{n-1}$ care definește viteza axială de perturbație (4) va avea aceeași comportare în imediata apropiere a bordurilor de atac și a muchiilor. Rezultă deci că bordurile de atac A_1 și A_2 ale aripii considerate vor avea aceleași contribuții în funcția vitezei axiale $\mathcal{U}_{n-1}$ și anume :

$$\mathcal{U}'_{n-1} = \frac{\sum_{q=0}^{n} A_{n,q}\, x^q}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \tag{14}$$

în cazul bordurilor subsonice $\left(l < \frac{1}{B}\right)$ ale aripilor subțiri,

$$\mathcal{U}'_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} C^{(1)}_{n,q}\, x^q \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2B(l-x)}} + \\ + \sum_{q=0}^{n-1} C^{(2)}_{n,q}\, x^q \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(l+x)}} + \sum_{q=0}^{n-2} D_{n,q}\, x^q \sqrt{1-B^2x^2}, \tag{15}$$

în cazul bordurilor subsonice ale aripilor de grosime simetrică, și

$$\mathcal{U}'_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} K^{(1)}_{n,q}\, x^q \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2B(l-x)}} + \\ + \sum_{q=0}^{n-1} K^{(2)}_{n,q}\, x^q \arccos \sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(l+x)}} + \sum_{q=0}^{n-2} D_{n,q}\, x^q \sqrt{1-B^2x^2}, \tag{16}$$

în cazul bordurilor supersonice $\left(l > \frac{1}{B}\right)$ ale aripilor subțiri sau de grosime simetrică, unde superindicele (1) se referă la bordul A_1, iar superindicele (2) la bordul A_2.

REMARCĂ. Se poate demonstra cu ușurință că expresia (16) se poate deduce din expresia (15) dacă se ține seama de relația

$$\operatorname{arg\,ch} \beta = \frac{\sqrt{1-B^2l^2}}{\sqrt{B^2l^2-1}} \arccos \beta. \tag{17}$$

Însă, numai contribuțiile bordurilor de atac nu dau soluția completă a problemei ; trebuie să luăm în considerație și distribuția continuă de

muchii elementare, care ne dau în fiecare punct $y = s$ de pe aripă, saltul elementar

$$\left[\frac{\mathrm{d}w_{n-1,0}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=s} \mathrm{d}s. \tag{18}$$

Ținînd seama de lucrările anterioare [2], contribuția muchiei elementare situate în punctul $y = s$ de pe o aripă subțire avînd bordurile subsonice $\left(l < \frac{1}{B}\right)$ va fi

$$\mathrm{d}\mathcal{U}^{(1)}_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} x^q\, Q^{(1)}_{n,q}(s) \arg \mathrm{ch} \sqrt{\frac{(l-x)\,(l+s)}{2l\,(s-x)}}\, \mathrm{d}s, \tag{19}$$

unde coeficienții $Q^{(1)}_{n,q}(s)$, care sînt funcții de s, se deduc din condițiile

$$\frac{(n-1)!}{C^q_{n-1}} \left[\frac{\mathrm{d}w_{n-1,0}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=s} \mathrm{d}s = \mathcal{I}m\,(-1)^q \int_{\sigma_1} x^{n-2} \sqrt{1 - B^2x^2}\, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} [\mathrm{d}\mathcal{U}^{(1)}_{n-1}]\, \mathrm{d}x, \tag{20a}$$

$$0 = \mathcal{I}m\,(-1)^{n-q} \int_{\sigma_1} x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2x^2}\, \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} [\mathrm{d}\mathcal{U}^{(1)}_{n-1}]\, \mathrm{d}x, \tag{20 b}$$

care se obțin aplicînd relațiile (5), (6), integrarea fiind efectuată pe un semicerc σ_1 de rază foarte mică în jurul punctului $y = s$ (fig. 2).

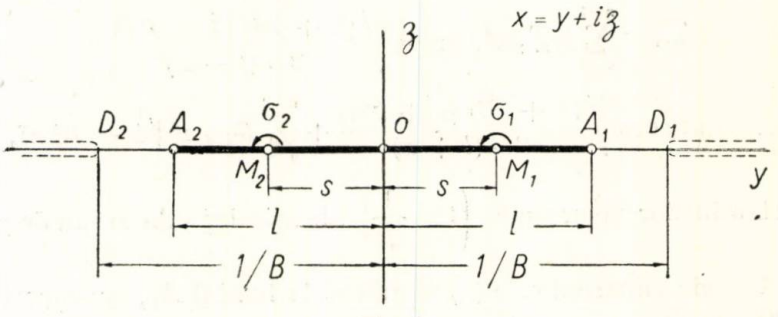


Fig. 2

În mod asemănător, pentru contribuția muchiei elementare situate în $y = -s$, de asemenea pe aripa subțire cu bordurile subsonice, vom avea

$$\mathrm{d}\mathcal{U}^{(2)}_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} x^q\, Q^{(2)}_{n,q}(s) \arg \mathrm{ch} \sqrt{\frac{(l+x)\,(l+s)}{2l\,(s+x)}}\, \mathrm{d}s, \tag{21}$$

unde expresiile coeficienților $Q^{(2)}_{n,q}(s)$ se deduc din condițiile

$$-\frac{(n-1)!}{C^q_{n-1}}\left[\frac{dw_{n-1,0}}{dy}\right]_{y=-s} ds = \mathcal{I}m\,(-1)^n \int_{\sigma_2} x^{n-2}\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}[d\mathcal{U}^{(2)}_{n-1}]dx, \tag{22 a}$$

$$0 = \mathcal{I}m\,(-1)^{n-q}\int_{\sigma_2} x^{n-q-2}\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{d}{dx^n}[d\mathcal{U}^{(2)}_{n-1}]\,dx, \tag{22 b}$$

în care integrarea trebuie efectuată pe un semicerc σ_2 de rază foarte mică în jurul punctului $y = -s$.

Expresiile stabilite mai sus pentru contribuțiile muchiilor elementare sînt valabile și în cazul aripii de grosime simetrică sau în cazul aripii subțiri cu bordurile supersonice dacă se înlocuiește l prin $\frac{1}{B}$ în relațiile (19) și (21); în cazul cînd muchia elementară considerată este supersonică $\left(s > \frac{1}{B}\right)$ se va ține seama de o relație analogă cu (17)

$$\operatorname{arg\,ch}\,\Theta = \frac{\sqrt{1-B^2s^2}}{\sqrt{B^2s^2-1}}\arccos\Theta. \tag{23}$$

Însumînd acum toate contribuțiile muchiilor elementare precum și cele ale bordurilor de atac vom obține, în ipoteza micilor perturbații, expresia funcției vitezei axiale

$$\mathcal{U}_{n-1} = \mathcal{U}'_{n-1} + \int_0^l \frac{d\mathcal{U}^{(1)}_{n-1}}{ds}\,ds + \int_0^l \frac{d\mathcal{U}^{(2)}_{n-1}}{ds}\,ds. \tag{24}$$

Determinarea constantelor. Pentru determinarea constantelor care apar în expresia funcției $\mathcal{U}_{n-1}$ datorită contribuțiilor bordurilor de atac se va proceda în același mod ca și în cazul vitezei verticale distribuite după un polinom omogen de ordin $(n-1)$. Astfel constantele $A_{n,q}$, $C^{(j)}_{n,q}$, $K^{(j)}_{n,q}$ se vor determina din condițiile

$$\frac{(n-1)!}{C^q_{n-1}}\,[w_{n-1,0}(y)]_{y=(-1)^{j+1}l} = \tag{25a}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\mathcal{I}m\,(-1)^{n-j}\int_{x_0}^{(-1)^{j+1}(l-\varepsilon)} x^{n-2}\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{d^n\mathcal{U}_{n-1}}{dx^n}\,dx\right], (j=1,\,2),$$

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\mathcal{I}m\,(-1)^{n-q-j}\int_{x_0}^{(-1)^{j+1}(l-\varepsilon)} x^{n-q-2}\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{d^n\mathcal{U}_{n-1}}{dx^n}\,dx\right], (j=1,\,2), \tag{25b}$$

unde x_0 reprezintă coordonata unui punct oarecare de pe porțiunea neperturbată a conului Mach (unde viteza de perturbație este nulă).

Pentru determinarea constantelor D_{n-q} vor fi utilizate condiţiile

$$\left(\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{\mathrm{d}^p\mathcal{U}_{n-1}}{\mathrm{d}x^p}\right)_{x=\pm\frac{1}{B}}=0,\quad p=1,\,2,\,\ldots,\,(n-1). \tag{26}$$

3. VARIAŢIA INCIDENŢEI SAU PANTEI DUPĂ O FUNCŢIE OMOGENĂ DE ORDIN ZERO

(mişcare conică propriu-zisă, $n=1$)

Să considerăm aripa delta OA_1A_2 (fig. 1) pe extradosul căreia viteza verticală este distribuită după o funcţie omogenă de ordin zero sub forma

$$w=w_{00}(y), \tag{27}$$

unde $w_{00}(y)$ este o funcţie oarecare continuă şi derivabilă de y.

Ţinînd seama de cele arătate mai sus şi observînd că în acest caz

$$Q_{10}^{(1)}=\frac{2}{\pi}\frac{s}{\sqrt{1-B^2s^2}}\left[\frac{\mathrm{d}w_{00}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=s},\quad Q_{10}^{(2)}=-\frac{2}{\pi}\frac{s}{\sqrt{1-B^2s^2}}\left[\frac{\mathrm{d}w_{00}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=-s}, \tag{28}$$

vom obţine, în cazul aripii de grosime simetrică,

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_0=C_{10}^{(1)}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2B(l-x)}}+C_{10}^{(2)}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(l+x)}}+\\+\frac{2}{\pi}\int_0^l\frac{s}{\sqrt{1-B^2s^2}}\left[\frac{\mathrm{d}w_{00}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=s}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1-Bx)(1+Bs)}{2B(s-x)}}\,\mathrm{d}s-\\-\frac{2}{\pi}\int_0^l\frac{s}{\sqrt{1-B^2s^2}}\left[\frac{\mathrm{d}w_{00}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=-s}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bx)(1+Bs)}{2B(s+x)}}\,\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{29}$$

unde

$$C_{10}^{(j)}=-\frac{2}{\pi}\frac{l}{\sqrt{1-B^2l^2}}\left[w_{00}(y)\right]_{y=(-1)^{j+1}l},\quad (j=1,\,2), \tag{30}$$

iar în cazul aripii subţiri cu bordurile subsonice

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_0=\frac{A_{10}+A_{11}x}{\sqrt{l^2-x^2}}+\frac{2}{\pi}\int_0^l\frac{s}{\sqrt{1-B^2s^2}}\left[\frac{\mathrm{d}w_{00}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=s}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(l-x)(l+s)}{2l(s-x)}}\,\mathrm{d}s-\\-\frac{2}{\pi}\int_0^l\frac{s}{\sqrt{1-B^2s^2}}\left[\frac{\mathrm{d}w_{00}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=-s}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(l+x)(l+s)}{2l(s+x)}}\,\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{31}$$

unde constantele A_{10}, A_{11} se determină în modul indicat mai sus.

Cu aceeaşi remarcă de mai sus (17), (23) expresia (29) a funcţiei $\mathcal{U}_0$ rămîne valabilă şi pentru aripa subţire sau de grosime simetrică avînd bordurile supersonice.

Pentru exemplificare să determinăm expresia vitezei axiale de perturbații în cîteva cazuri simple.

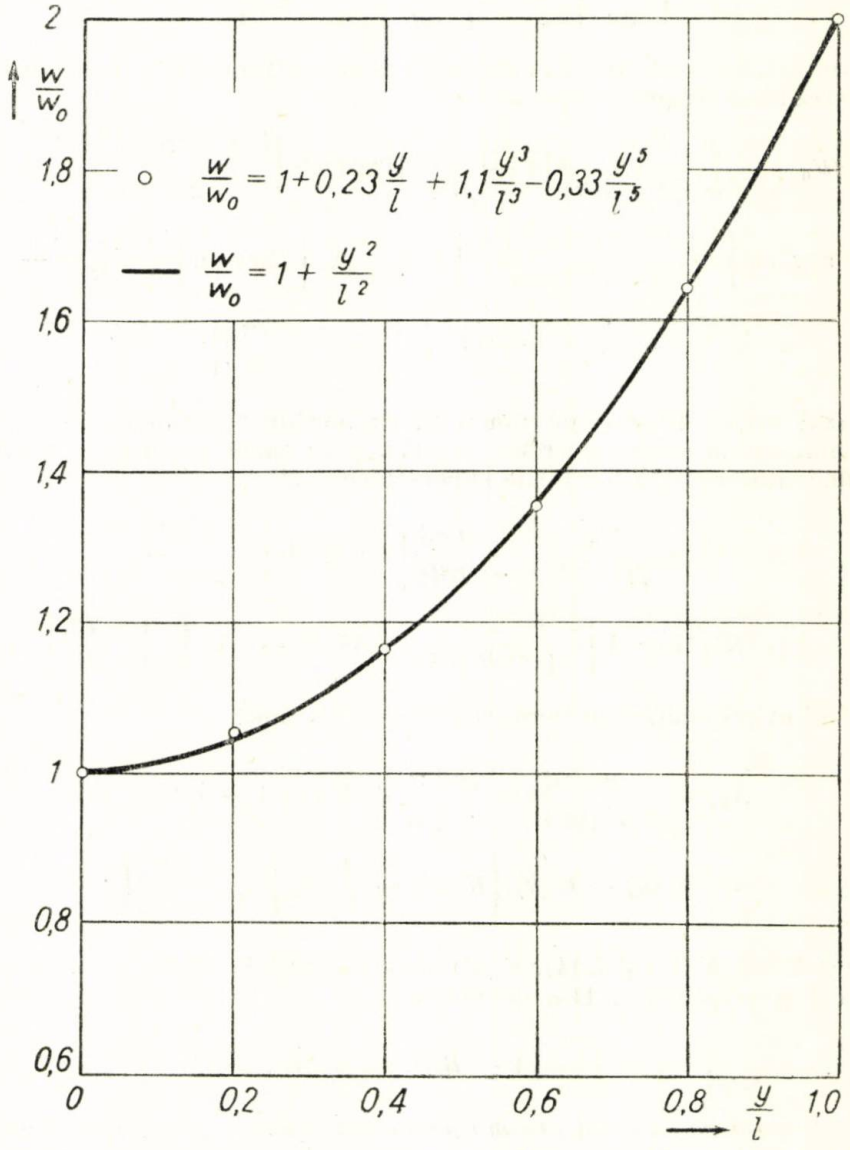


Fig. 3

Aripa delta cu variația liniară de incidență sau pantă. Să considerăm pentru început cazul aripii delta pe extradosul căreia viteza verticală w

este dată sub forma (8). Observînd că în acest caz

$$\left[\frac{\mathrm{d}w_{00}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=s} = -\left[\frac{\mathrm{d}w_{00}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=-s} = w_0\frac{a}{l}, \tag{32}$$

vom obţine, după efectuarea calculelor, pentru viteza axială de perturbaţie pe extradosul aripii, expresia

$$\mathcal{U}_0 = -\frac{2}{\pi}\frac{w_0 l}{\sqrt{1-B^2l^2}}\left(1+\frac{a}{B^2l^2}\right)\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2B(l-x)}} + \right.$$
$$+\left.\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(l+x)}}\right] + \frac{2a}{\pi}\frac{w_0 l}{B^2l^2}\left[2\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}} - \right. \tag{33}$$
$$\left. -\sqrt{1-B^2x^2}\left(\ln\sqrt{\frac{l^2-x^2}{x^2}}+\frac{i\pi}{2}\right)\right],$$

în cazul aripii de grosime simetrică cu bordurile susbonice — expresie valabilă, ţinînd seama de remarca (17), şi în cazul aripii subţiri sau de grosime simetrică cu bordurile supersonice — şi

$$\mathcal{U}_0 = \frac{A_{10}}{\sqrt{l^2-x^2}} + \frac{2}{\pi}\frac{aw_0 l}{B^2l^2}\left[2\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{l+x}{2x}} - \right.$$
$$\left. -\sqrt{1-B^2x^2}\operatorname{arg\,sh}\sqrt{\frac{l^2-x^2}{(1-B^2l^2)x^2}} + \sqrt{B^2(l^2-x^2)}\ln\sqrt{\frac{1+Bl}{1-Bl}}\right] \tag{34}$$

în cazul aripii subţiri cu bordurile subsonice, unde

$$A_{10} = -\frac{w_0 l^2}{E(k)}\left\{1+\frac{2a}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}+K(k)(1-E(k'))+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(K(k)-E(k))\left(K(k')-\frac{1}{Bl}\ln\sqrt{\frac{1+Bl}{1-Bl}}\right)\right]\right\}, \tag{35}$$

în care $K(k)$, $K(k')$ şi $E(k)$, $E(k')$ sînt integralele eliptice complete de speţa I şi respectiv a II-a de modul

$$k = \sqrt{1-B^2l^2}, \quad k' = Bl. \tag{36}$$

Aripa delta cu incidenţa sau panta distribuită după o parabolă cubică. În cazul cînd pe extradosul aripii w este dat de relaţia (10) în care $m = 3$, observînd că

$$\left[\frac{\mathrm{d}w_{00}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=s} = -\left[\frac{\mathrm{d}w_{00}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=-s} = 6\frac{w_0}{l^3}s^2, \tag{37}$$

se obțin după efectuarea calculelor expresiile

$$\mathcal{U}_0 = -\frac{2}{\pi}\frac{w_0 l}{\sqrt{1-B^2l^2}}\left[1+\frac{2\,(2-B^2l^2)}{B^4l^4}\right]\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1-Bx)}{2B\,(l-x)}}+\right.$$

$$+\left.\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1+Bx)}{2B\,(l+x)}}\right]+\frac{4\,w_0 l}{\pi\,B^4l^4}\left\{4\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{1+Bx}{2\,Bx}}-\right. \tag{38}$$

$$\left.-\sqrt{1-B^2x^2}\left[(2+B^2x^2)\left(\ln\sqrt{\frac{l^2-x^2}{x^2}}+\frac{i\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}B^2l^2\right]\right\},$$

în cazul aripii de grosime simetrică cu bordurile subsonice, precum și, ținînd seama de (17), în cazul aripii subțiri sau de grosime simetrică în bordurile supersonice, și

$$\mathcal{U}_0 = \frac{A'_{10}}{\sqrt{l^2-x^2}}+\frac{4w_0 l}{\pi B^4 l^4}\left\{4\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{l+x}{2x}}-\right.$$

$$-\sqrt{1-B^2x^2}\,(2+B^2x^2)\operatorname{arg\,sh}\sqrt{\frac{l^2-x^2}{(1-B^2l^2)\,x^2}}- \tag{39}$$

$$\left.-\sqrt{B^2\,(l^2-x^2)}\left[\frac{1}{2}Bl-\left(\frac{3+B^2l^2}{2}+B^2x^2\right)\ln\sqrt{\frac{1+Bl}{1-Bl}}\right]\right\},$$

în cazul aripii subțiri cu bordurile subsonice; constanta A'_{10} se determină în modul indicat mai sus.

Aripa delta cu incidența sau panta distribuită după o parabolă de ordin 5. Considerînd că w este distribuit pe extradosul aripii sub forma (10) în care $m = 5$, și deci

$$\left[\frac{\mathrm{d}w_{00}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=s} = -\left[\frac{\mathrm{d}w_{00}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=-s} = 20\frac{w_0}{l^5}s^4, \tag{40}$$

vor rezulta după efectuarea calculelor expresiile

$$\mathcal{U}_0 = -\frac{2}{\pi}\frac{w_0 l}{\sqrt{1-B^2l^2}}\left[1+\frac{4}{3}\frac{8-4B^2l^2-B^4l^4}{B^6l^6}\right]\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2\,B\,(l-x)}}+\right.$$

$$+\left.\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)\,(1+Bx)}{2B\,(l+x)}}+\frac{8w_0 l}{3\,\pi\,B^6l^6}\left\{16\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}}-\right.\right. \tag{41}$$

$$\left.-\sqrt{1-B^2x^2}\left[(8+4B^2x^2+3B^4x^4)\left(\ln\sqrt{\frac{l^2-x^2}{x^2}}+\frac{i\pi}{2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4}B^2l^2\,(8+3\,B^2l^2+6B^2x^2)\right]\right\},$$

în cazul aripii de grosime simetrică și al aripii subțiri cu bordurile supersonice (pentru care se va ține seama de remarca (17)), și

$$\mathcal{U}_0 = \frac{A''_{10}}{\sqrt{l^2-x^2}} + \frac{8w_0 l}{3\pi B^6 l^6}\left\{16 \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{l+x}{2x}} - \right.$$
$$- \sqrt{1-B^2x^2}(8+4B^2x^2+3B^4x^4)\operatorname{arg\,sh}\sqrt{\frac{l^2-x^2}{(1-B^2l^2)x^2}} -$$
$$- \frac{1}{8}\sqrt{B^2(l-x^2)}\Big[Bl(13+9B^2l^2+12B^2x^2) - \tag{42}$$
$$\left. - (45+10B^2l^2+9B^4l^4+(20+12B^2l^2)B^2x^2+24B^4x^4)\ln\sqrt{\frac{1+Bl}{1-Bl}}\right]\Big\},$$

în cazul aripii subțiri cu bordurile subsonice; constanta A''_{10} se determină și în acest caz în modul indicat mai sus.

Aripa delta cu incidența sau panta variabilă după un polinom de puteri pare ale lui y. Cazul variației parabolice. În cele de mai sus am tratat cîteva cazuri particulare de aripi la care variația lui w avea loc după puterile impare ale lui y. În cazul variației după puteri pare intervin însă unele dificultăți de calcul care, cu toate aproximațiile ce s-ar putea introduce, conduc la expresii complicate pentru $\mathcal{U}_0$. De aceea este mai simplu în acest caz să se înlocuiască variația lui w în puteri pare, cum ar fi

$$w = w_0\left(1+\alpha\frac{y^2}{l^2}+\beta\frac{y^4}{l^4}\right), \tag{43}$$

printr-o variație foarte apropiată însă în puteri impare de forma

$$w = w_0\left(1 \pm a\frac{y}{l} \pm b\frac{y^3}{l^3} \pm c\frac{y^5}{l^5}\right). \tag{44}$$

Pentru exemplificare să tratăm cazul variației parabolice pentru care putem scrie (fig. 3)

$$w = w_0\left(1+\frac{y^2}{l^2}\right) \approx w_0\left(1 \pm a\frac{y}{l} \pm b\frac{y^3}{l^3} \pm c\frac{y^5}{l^5}\right), \tag{45}$$

unde

$$a = 0{,}23, \quad b = 1{,}1, \quad c = -0{,}33. \tag{46}$$

Expresia lui $\mathcal{U}_0$ poate fi acum dedusă cu ușurință (în cadrul teoriei linearizate) dacă ținem seama de expresiile stabilite mai sus și va rezulta

$$\mathcal{U}_0 = -\frac{2}{\pi}\frac{w_0 l}{\sqrt{1-B^2l^2}}\left(1+\frac{a}{B^2l^2}+b\frac{2-B^2l^2}{B^4l^4}+\right.$$
$$\left.+c\frac{8-4B^2l^2-B^4l^4}{3B^6l^6}\right)\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2B(l-x)}}+\right.$$
$$\left.+\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(l+x)}}\right]+\frac{2w_0 l}{\pi B^2 l^2}\left\{2\left(a+\frac{2b}{B^2l^2}+\right.\right. \tag{47}$$
$$\left.+\frac{8c}{3B^4l^4}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}}-\sqrt{1-B^2x^2}\left[\left(a+b\frac{2+B^2x^2}{B^2l^2}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+c\frac{8+4B^2x^2+3B^4x^4}{3B^4l^4}\right)\left(\ln\sqrt{\frac{l^2-x^2}{x^2}}+\frac{i\pi}{2}\right)+\frac{b}{2}+c\frac{8+3B^2l^2+6B^2x^2}{12B^2l^2}\right]\Big\},$$

în cazul aripii de grosime simetrică cu bordurile subsonice, dar valabilă cu remarca (17) și în cazul aripii subțiri sau de grosime simetrică cu bordurile supersonice, și

$$\mathcal{U}_0 = \frac{A_{10}'''}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2w_0 l}{\pi B^2 l^2}\left\{2\left(a + \frac{2b}{B^2 l^2} + \frac{8c}{3B^4 l^4}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{l+x}{2x}} - \right.$$

$$- \sqrt{1 - B^2 x^2}\left(a + b\frac{2 + B^2 x^2}{B^2 l^2} + \right.$$

$$\left. + c\frac{8 + 4B^2 x^2 + 3B^4 x^4}{3B^4 l^4}\right)\operatorname{arg\,sh}\sqrt{\frac{l^2 - x^2}{(1 - B^2 l^2)x^2}} - \sqrt{B^2(l^2 - x^2)}\left[\frac{b}{2Bl} + \right. \tag{48}$$

$$+ c\frac{13 + 9B^2 l^2 + 12B^2 x^2}{24B^3 l^3} - \left(a + b\frac{3 + B^2 l^2 + 2B^2 x^2}{2B^2 l^2} + \right.$$

$$\left.\left. + c\frac{45 + 10B^2 l^2 + 9B^4 l^4 + (20 + 12B^2 l^2)B^2 x^2 + 24B^4 x^4}{24B^4 l^4}\right)\ln\sqrt{\frac{1 + Bl}{1 - Bl}}\right]\Bigg\},$$

în cazul aripii subțiri cu bordurile subsonice; constanta A_{10}''' se determină în modul indicat mai sus.

4. ARIPA DELTA CU INCIDENȚA SAU PANTA VARIABILĂ DUPĂ O FUNCȚIE OMOGENĂ DE ORDIN 1

(mișcare conică de ordin $n = 2$)

Să considerăm acum că pe extradosul aripii delta din figura 1 viteza verticală este distribuită după o funcție omogenă de ordin 1 sub forma

$$w = x_1 w_{10}(y), \tag{49}$$

unde $w_{10}(y)$ este o funcție continuă și derivabilă de y.

Observînd că aplicînd condițiile (22) și (24) se obține

$$Q_{20}^{(1)} = \frac{2s(2 - B^2 s^2)}{\pi(1 - B^2 s^2)^{3/2}}\left[\frac{\mathrm{d}w_{10}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=s}, \quad Q_{21}^{(1)} = -\frac{2}{\pi(1 - B^2 s^2)^{3/2}}\left[\frac{\mathrm{d}w_{10}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=s}, \tag{50a}$$

$$Q_{20}^{(2)} = -\frac{2s(2 - B^2 s^2)}{\pi(1 - B^2 s^2)^{3/2}}\left[\frac{\mathrm{d}w_{10}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=-s}, \quad Q_{21}^{(2)} = -\frac{2}{\pi(1 - B^2 s^2)^{3/2}}\left[\frac{\mathrm{d}w_{10}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=-s}, \tag{50b}$$

funcţia vitezei axiale de perturbaţie va fi dată în acest caz de relaţia

$$\mathcal{U}_1 = (C_{20}^{(1)} + C_{21}^{(1)}\, x)\, \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2B(l-x)}} +$$

$$+ (C_{20}^{(2)} + C_{21}^{(2)} x) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(l+x)}} +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^l \frac{s(2-B^2s^2)-x}{(1-B^2s^2)^{3/2}} \left[\frac{\mathrm{d}w_{10}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=s} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1-Bx)(1+Bs)}{2B(s-x)}}\, \mathrm{d}s - \tag{51}$$

$$- \frac{2}{\pi}\int_0^l \frac{s(2-B^2s^2)+x}{(1-B^2s^2)^{3/2}} \left[\frac{\mathrm{d}w_{10}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=-s} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+Bx)(1+Bs)}{2B(s+x)}}\, \mathrm{d}s +$$

$$+ D_{20}\sqrt{1-B^2x^2},$$

în cazul aripii de grosime simetrică cu bordurile subsonice, unde

$$C_{20}^{(j)} = -\frac{2l(2-B^2l^2)}{\pi(1-B^2l^2)^{3/2}} [w_{10}(y)]_{y=(-1)^{j+1}l},$$

$$C_{21}^{(j)} = (-1)^{j+1} \frac{2}{\pi(1-B^2l^2)^{3/2}} \left[w_{10}(y)\right]_{y=(-1)^{j+1}l}, (j=1,2). \tag{52}$$

şi

$$\mathcal{U}_1 = \frac{A_{20} + A_{21}\, x + A_{22}\, x^2}{\sqrt{l^2-x^2}} +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^l \frac{s(2-B^2s^2)-x}{(1-B^2s^2)^{3/2}} \left[\frac{\mathrm{d}w_{10}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=s} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(l-x)(l+s)}{2l(s-x)}}\, \mathrm{d}s - \tag{53}$$

$$- \frac{2}{\pi}\int_0^l \frac{s(2B^2s^2)+x}{(1-B^2s^2)^{3/2}} \left[\frac{\mathrm{d}w_{10}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=-s} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(l+x)(l+s)}{2l(s+x)}}\, \mathrm{d}s,$$

în cazul aripii subţiri cu bordurile subsonice ; constantele D_{20} şi respectiv A_{20}, A_{21}, A_{22} care intervin în expresiile (51) şi (52) se determină în modul indicat mai sus.

Vom remarca că expresia (51) a funcţiei $\mathcal{U}_1$ este valabilă, ţinînd seama de (17) şi (23), şi în cazul aripii subţiri sau de grosime simetrică cu bordurile supersonice.

Pentru exemplificare să considerăm aripa delta de grosime simetrică pe extradosul căreia viteza verticală este dată sub forma (10) unde $m = 3$, $n = 2$, adică

$$w = w_0\, x_1 \left(2 \pm \frac{y^3}{l^3}\right). \tag{54}$$

Vom observa că în acest caz

$$\left[\frac{\mathrm{d}w_{10}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=s} = -\left[\frac{\mathrm{d}w_{10}}{\mathrm{d}y}\right]_{y=-s} = \frac{3w_0}{l}\frac{s^2}{l^2} \approx \frac{w_0}{l}\left(a\frac{s}{l} + b\frac{s^3}{l^3} + c\frac{s^5}{l^5}\right), \tag{55}$$

unde

$$a = 0{,}7, \qquad b = 3{,}3, \qquad c = -1; \tag{56}$$

în relația de mai sus s-a introdus și cea de a doua formă de exprimare, foarte apropiată de prima, pentru a evita unele dificultăți de calcul.

Ținînd seama de cele de mai sus, va rezulta după efectuarea calculelor următoarea expresie a vitezei axiale $u = x_1 \mathcal{R}e\, \mathcal{U}_1$ pentru cazul considerat

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1 = {} & (C_0 - C_1 x) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2B(l-x)}} + (C_0 + \\ & + C_1 x) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(l+x)}} - \frac{2}{\pi} \frac{w_0 l}{B^4 l^4} \left[8 \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{1+Bx}{2Bx}} - \right. \\ & - \frac{3}{\sqrt{1-B^2x^2}} \left(\ln \sqrt{\frac{l^2-x^2}{(1-B^2l^2)x^2}} + \frac{i\pi}{2} \right) - (1-B^2x^2)^{3/2} \left(\ln \sqrt{\frac{l^2-x^2}{x^2}} + \\ & \left. + \frac{i\pi}{2} \right) - \frac{1}{6} B^2 l^2 \Bigg] + \frac{2}{\pi} \frac{w_0 x}{Bl} \left[\frac{\frac{a}{Bl} + \frac{b}{B^3 l^3} + \frac{c}{B^5 l^5}}{\sqrt{1-B^2x^2}} \left(\ln \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} - \frac{i\pi}{2} - \right. \right. \\ & \left. - Bx \ln \sqrt{\frac{1+Bl}{1-Bl}} \right) + \sqrt{1-B^2x^2} \left(\frac{b}{B^3 l^3} + \frac{c}{B^5 l^5} \frac{5+B^2x^2}{3} \right) \left(\ln \sqrt{\frac{l+x}{l-x}} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{i\pi}{2} \right) \right] + D_{20} \sqrt{1-B^2x^2}, \end{aligned} \tag{57}$$

unde

$$C_0 = -\frac{2}{\pi} \frac{3w_0 l}{(1-B^2l^2)^{3/2}} \left[2 - B^2 l^2 - \frac{3 + (1-B^2l^2)^2}{B^4 l^4} (1 - B^2 l^2) \right], \tag{58 a}$$

$$\begin{aligned} C_1 = -\frac{2}{\pi} \frac{w_0}{(1-B^2l^2)^{3/2}} \Bigg\{ 3 - \frac{1-B^2l^2}{Bl} \Bigg[\frac{a}{Bl} + \frac{b}{B^3 l^3} + \frac{c}{B^5 l^5} + \Bigg(\frac{b}{B^3 l^3} + \\ + \frac{c}{B^5 l^5} \frac{5+B^2l^2}{3} \Bigg) (1 - B^2 l^2) \Bigg] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{58 b}$$

Constanta D_{20} se determină după cum am arătat mai sus aplicînd condiția (26).

REMARCĂ. Dacă considerăm cazul aripii de grosime simetrică pe extradosul căreia w este dat sub forma unui polinom omogen de ordin 1,

$$w = x_1(\beta_{10} + \beta_{01} y), \tag{59}$$

va rezulta cu uşurinţă, urmînd aceeaşi cale ca mai sus, expresia :

$$\mathcal{U}_1 = -\frac{2}{\pi}\frac{l(2-B^2l^2)\beta_{10}+l^2\beta_{01}-x(\beta_{10}+B^2l^3\beta_{01})}{(1-B^2l^2)^{3/2}}\times$$

$$\times \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2B(l-x)}}- \tag{60}$$

$$-\frac{2}{\pi}\frac{l(2-B^2l^2)\beta_{10}-l^2\beta_{01}+x(\beta_{10}-B^2l^3\beta_{01})}{(1-B^2l^2)^{3/2}}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(l+x)}}+$$

$$+D_{20}\sqrt{1-B^2x^2}.$$

Se regăseşte astfel aceeaşi expresie care a fost obţinută în lucrările anterioare privind studiul aripilor avînd viteza distribuită după polinoame omogene de ordin superior.

Primită la redacţie la 7 ianuarie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, M. Ionescu, *Écoulements coniques d'ordre supérieur autour des ailes triangulaires minces ou à épaisseur symétrique.* Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **2**, *1*, (1957).
2. E. Carafoli, *High Speed Aerodynamics.* Ed. tehnică, Bucarest, 1956.

STUDII

METODA ACCELERAȚIILOR COMPUSE ÎN LANȚURILE CINEMATICE PLANE[1])

de CHR. PELECUDI

Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R., București

621.01

Se prezintă introducerea vectorului acceleraţie compusă, definit astfel ca într-o mişcare generală de rotaţie şi translaţie plană cu rotaţia uniformă ($\varepsilon = 0$) acceleraţiile compuse ale tuturor punctelor unui corp mobil să fie egale.

Distribuţia de acceleraţii compuse se bucură de aceleaşi proprietăţi ca şi distribuţia de viteze. Sînt utilizate astfel metodele de calcul simple ale vitezelor, ca: metoda planelor, metoda proiecţiilor, metoda rabaterii, metoda centrelor instantanee.

Sistemele de acceleraţii compuse depind de alegerea punctului caracteristic K, cu ajutorul căruia se definesc. Legătura acceleraţiilor compuse cu acceleraţiile reduse se exprimă prin faptul că segmentul HK reprezintă acceleraţia redusă a punctului H, punct care este centru instantaneu al acceleraţiilor compuse.

Determinarea acceleraţiilor în mecanisme, atît pe cale grafică, cît şi analitică, precum şi proprietăţile distribuţiilor de acceleraţii, sînt întrucîtva diferite de cele ale vitezelor, din cauza apariţiei în ecuaţiile vectoriale a unor termeni suplimentari, deşi aceştia sînt cunoscuţi din studiul vitezelor. Astfel, la calculul acceleraţiilor prin metoda proiecţiei (sau rabaterii) trebuie să se ţină seama de diferenţa proiecţiilor acceleraţiilor a două puncte pe dreapta care le uneşte, datorită acceleraţiei normale din mişcarea de rotaţie relativă [1], [2], [3], [4]. Poligonul acceleraţiilor din planul elementului şi poligonul acceleraţiilor din planul acceleraţiilor sînt direct asemenea [2], [3] cu poligonul elementului, dar unghiurile lor de rotaţie relative, ca şi raporturile de asemănare, depind de valorile vitezei şi acceleraţiei unghiulare. În schimb, la viteze se poate utiliza cu multă

[1]) Publicată şi în „Rev. roum. sci. techn. — Mecanique appliquée", **10**, *2* (1965).

ușurință și cu numeroase aplicații proprietatea poligonului vitezelor din planul vitezelor de a fi rotit cu un unghi de 90°, independent de viteza unghiulară, față de poligonul elementului. Construcția centrului instantaneu al vitezelor este ușurată, razele respective fiind perpendiculare pe vectorii vitezei. La accelerații, razele care pornesc din centrul instantaneu al accelerațiilor fac unghiul $\mu = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ cu vectorii accelerației.

În mișcarea relativă a două corpuri, diferențierea este și mai vizibilă, în ecuațiile de accelerații apărînd termenul complementar Coriolis. Din această cauză apar două centre instantanee ale accelerațiilor, după cum mișcarea este directă sau inversă. La viteze există un singur centru instantaneu pentru cele două mișcări, iar teorema colinearității celor trei centre de rotație este foarte utilă în aplicații [1], [2], [3], [4].

Pentru cauzele enumerate succint mai sus s-au căutat adaptări în determinarea accelerațiilor, care urmăresc reducerea construcțiilor în sensul celor pentru viteze. Astfel se menționează metoda accelerațiilor reduse, extinsă și la accelerațiile de ordine superioare, dezvoltată în numeroase lucrări valoroase ale prof. D. Mangeron [2], [3], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13]. Această metodă se bucură în primul rînd de proprietatea remarcabilă că poligonul accelerațiilor reduse din planul elementului are laturile perpendiculare pe laturile poligonului elementului, ceea ce face posibilă utilizarea metodei proiecțiilor aproape în aceleași condiții ca la viteze, proiecția accelerațiilor reduse a două puncte diferind între ele tocmai cu distanța dintre puncte [5], [6], [7].

În lucrarea de față expunem introducerea unui vector accelerație modificat, eventual numit „accelerație complexă", cu ajutorul căruia distribuția de accelerații se obține urmărind schemele de calcul pentru distribuția de viteze în toate metodele utilizate. Definirea acestui vector-accelerație și proprietățile sale se prezintă în paragrafele următoare

1. MIȘCAREA PLANĂ A UNUI SOLID RIGID

1.1. *Ecuațiile vectoriale.* Legătura dintre vitezele și accelerațiile a două puncte dintr-un solid rigid în mișcare sînt date de ecuațiile vectoriale Euler :

$$v_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} \quad \text{unde} \quad \bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{AB}, \tag{1}$$

și

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^t_{BA}, \tag{2}$$

unde

$$\bar{a}^n_{BA} = -\omega^2 \overline{AB} \quad \text{și} \quad \bar{a}^t_{BA} = \bar{\varepsilon} \times \overline{AB}.$$

Pentru a urmări analogia între calculele de accelerații și de viteză, se repartizează termenul $\bar{a}^n_{BA}$ la accelerațiile punctelor A și B. Alegîndu-se un punct oarecare K în planul elementului (fig. 1), vectorul accelerație

modificat „complexă" se definește prin mărimea vectorială :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_A &= \bar{a}_A + \omega^2 \overline{KA} = \bar{a}_K + \bar{\varepsilon} \times \overline{KA}\,, \\ \tilde{a}_B &= \bar{a}_B + \omega^2 \overline{KB} = \bar{a}_K + \bar{\varepsilon} \times \overline{KB}\,, \\ \tilde{a}_K &= \bar{a}_K \quad \text{deoarece} \quad \overline{KK} = 0\,. \end{aligned} \tag{3}$$

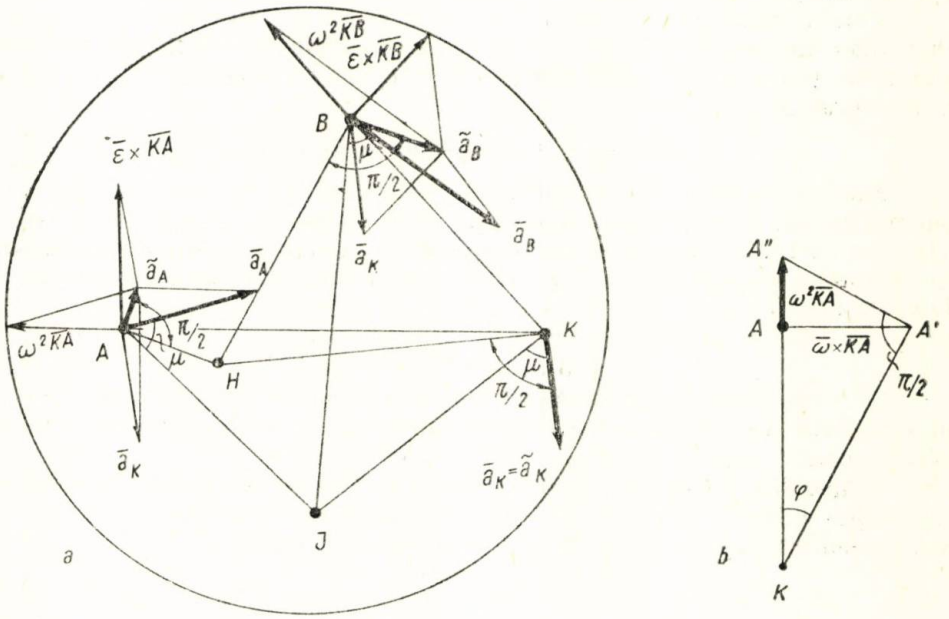


Fig. 1

Distribuția accelerațiilor complexe corespunde cu distribuția accelerațiilor simple în cazul cînd corpul ar avea o mișcare compusă dintr-o translație o dată cu punctul K și o rotație în jurul lui K fără viteză unghiulară.

Mărimea vectorială $\omega^2 \overline{KA}$, de natura unei accelerații, adăugată accelerației punctului A pentru a da accelerația complexă a punctului A, se poate construi grafic. Una din construcții (fig. 1 *b*) se face utilizînd triunghiul dreptunghi de catetă KA cu unghiul de 90° în punctul A și cu unghiul $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{\omega}{k_\omega}$ în punctul K. Cateta opusă (AA') ar reprezenta la scara vitezelor $k_v = k_l \cdot k_\omega$ viteza punctului A dacă rotația s-ar face în jurul punctului K. Perpendiculara pe ipotenuza KA' în A' definește pe dreapta KA punctul A'', astfel că AA'' reprezintă la scara accelerațiilor $k_a = k_l \cdot k_\omega^2$ mărimea $\omega^2 \overline{KA}$.

Astfel definit, sistemul de accelerații complexe depinde de alegerea punctului caracteristic K, pentru care accelerația complexă corespunde cu accelerația sa.

MUSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA

Ecuația vectorială de compunere a accelerațiilor (2) devine :

$$\tilde{a}_B = \tilde{a}_A + \tilde{a}_{BA} , \tag{4}$$

în care

$$\tilde{a}_{BA} = \bar{a}'_{BA} = \bar{\varepsilon} \times \overline{AB} \tag{5}$$

și care seamănă îndeaproape cu ecuația vectorială a vitezelor.

Pentru cazul în care corpul are o mișcare de rototranslație plană, cu rotație uniformă $\omega = ct$ și $\varepsilon = 0$, accelerațiile complexe ale tuturor punctelor corpului sînt egale între ele și egale cu accelerația punctului caracteristic K :

$$\tilde{a}_A = \tilde{a}_B = \ldots = \tilde{a}_K = \bar{a}_K . \tag{6}$$

Dacă punctul caracteristic K se confundă la un moment dat cu centrul instantaneu al accelerațiilor $K = J$, atunci $\bar{a}_K = \bar{a}_J = 0$ și distribuția vectorilor accelerației complexe în mișcarea de rototranslație apare numai ca distribuție a accelerațiilor tangențiale în mișcarea față de centrul J, adică

$$\tilde{a}_A = \bar{\varepsilon} \times \overline{JA} , \quad \tilde{a}_B = \bar{\varepsilon} \times \overline{JB} . \tag{7}$$

Se poate conclude că accelerațiile compuse din acest sistem $K = J$ ale diferitelor puncte sînt accelerațiile tangențiale din mișcarea de rotație față de centrul instantaneu J al accelerațiilor.

O distribuție asemănătoare, datorită numai accelerațiilor de rotație tangențiale într-un caz mai general, se obține în considerarea mișcării față de centrul instantaneu H al accelerațiilor compuse :

$$\tilde{a}_H = 0 , \tag{8}$$

$$\tilde{a}_A = \tilde{a}_{AH} = \bar{a}'_{AH} = \bar{\varepsilon} \times \overline{HA} , \tag{9}$$

$$\tilde{a}_B = \tilde{a}_{BH} = \bar{a}'_{BH} = \bar{\varepsilon} \times \overline{HB} .$$

1.2. *Metoda proiecțiilor.* Proiecția accelerațiilor compuse a două puncte A și B dintr-un rigid pe direcția care leagă punctele AB sînt egale :

$$pr_{\cdot AB}\, \tilde{a}_B = pr_{\cdot AB}\, \tilde{a}_A , \tag{10}$$

deoarece, dacă $\bar{n}$ este versorul direcției AB, avem $\bar{n} \cdot \tilde{a}_{BA} = 0$.

Accelerația unghiulară este obținută prin proiecțiile pe dreapta perpendiculară la direcția AB, adică

$$\varepsilon = \frac{a'_{BA}}{AB} = \frac{pr_{\perp AB}\, \tilde{a}_B - pr_{\perp AB}\, \tilde{a}_A}{AB} , \tag{11}$$

deoarece, dacă $\bar{t}$ este versorul direcției perpendiculare pe AB, atunci $\bar{t} \cdot \tilde{a}_{BA} = a'_{BA} = \varepsilon \cdot AB$.

Distribuția de accelerații compuse s-ar obține, conform figurii 2, pentru o mișcare de rototranslație cu $\omega = \text{const}$, o dată cu accelerația compusă a punctului P de pe dreapta AB, în lungul lui $\overline{AB}$ și cu o accele-

rație tangențială de rotație în jurul punctului P. Adică, pentru determinarea accelerației compuse a unui punct oarecare C^*, se procedează după cum urmează :

— se descompun accelerațiile compuse ale punctelor de pe dreapta AB în două componente. Componentele în direcția AB sînt egale :

$$(AA_n) = (BB_n) = (CC_n) = \ldots = (PP_n);$$

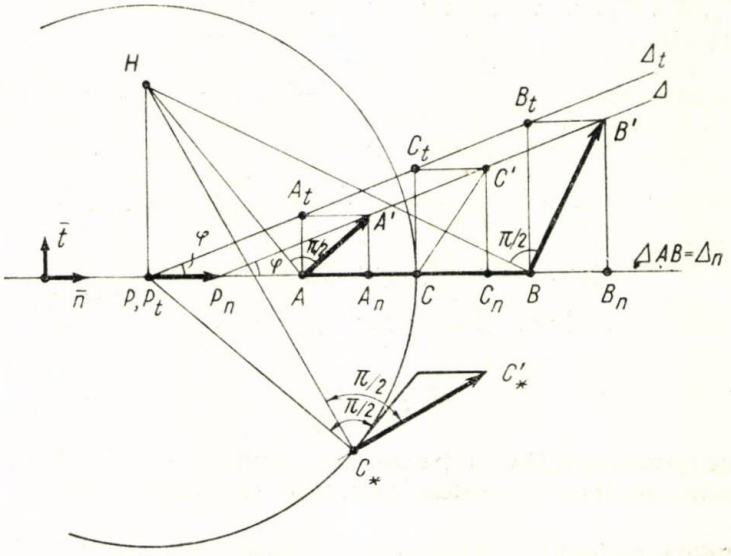


Fig. 2

Componentele în direcția perpendiculară la AB au extremitățile A_t, B_t, C_t, ..., P_t pe dreapta Δ_t paralelă cu dreapta Δ a extremităților accelerațiilor compuse și ambele fac unghiul ψ cu dreapta AB :

$$(PP_t) = 0 \qquad \varepsilon = \frac{k_a (AA_t)}{k_l (PA)} = k_\varepsilon \operatorname{tg} \psi ; \tag{12}$$

— pentru toate punctele de pe cercul de rază PC și cu centrul în P, accelerația tangențială are mărimea reprezentată prin CC_t, segment perpendicular pe AB și cu extremitatea pe dreapta Δ_t. Acest segment se duce tangent la cerc în punctul C^* ;
— componenta în direcția AB este egală cu $(PP_n) = (CC_n)$;
— se obține $\bar{a}_{C^*} = k_a (C^* c^*)$.

1.3. *Metoda poligoanelor asemenea.* Poligonul accelerațiilor compuse din planul elementului și poligonul accelerațiilor compuse din planul accelerațiilor sînt direct asemenea (în sensul de rotație dat de ε) cu poligonul elementului în mișcare.

Poligonul accelerațiilor compuse din planul accelerațiilor are față de poligonul elementului un raport de asemănare complex $\mathfrak{z} = i\,\varepsilon/k_\varepsilon$, ceea ce arată că raportul real de asemănare este $\varepsilon/k_\varepsilon$, iar rotația între poligoane se face cu unghiul $\pi/2$ în sensul dat de accelerația unghiulară. În adevăr,

$$\mathfrak{z} = \frac{(Z_b)-(Z_a)}{(Z_B)-(Z_A)} = \frac{(Z_c)-(Z_b)}{(Z_C)-(Z_B)} = \frac{(Z_a)-(Z_c)}{(Z_A)-(Z_C)}, \tag{13}$$

în care Z_a, Z_b, Z_c sînt vectorii complecși de poziție ai vîrfurilor accelerațiilor compuse, diferențele Z_b-Z_a, Z_c-Z_b, Z_a-Z_c reprezentînd vectorii complecși ai laturilor poligonului accelerațiilor, respectiv accelerația de rotație tangențială, iar Z_A, Z_B, Z_C și Z_B-Z_A, Z_C-Z_B, Z_A-Z_C au aceleași semnificații pentru poligonul elementului. Deci, cu notațiile de mărimi compuse, luînd în considerare și scările grafice utilizate pentru vectorii de poziție și pentru cei de accelerație $k_l\,\frac{m}{mm}$; $k_a\,\frac{ms^{-2}}{mm}$; $k_\varepsilon = \frac{k_a}{k_l}\,s^{-2}$, obținem:

$$\mathfrak{z} = \frac{(Z_b)-(Z_a)}{(Z_B)-(Z_A)} = \frac{(\tilde{a}_B)-(\tilde{a}_A)}{(Z_B)-(Z_A)} = \frac{(\tilde{a}_{BA})}{(\overline{AB})} = i\,\frac{\varepsilon}{k_\varepsilon},$$

adică

$$\mathfrak{z} = i\,\frac{\varepsilon}{k_\varepsilon}. \tag{14}$$

Prin reprezentările în paranteze rotunde s-au înțeles segmentele măsurate în milimetri pe desen la scările mărimilor vectoriale corespunzătoare.

Pentru poligonul accelerațiilor compuse din planul elementului se obține față de poligonul elementului raportul de asemănare complex $\eta = 1+\mathfrak{z}$, ceea ce conduce la un raport de asemănare real $\sqrt{1+\varepsilon^2/k_\varepsilon^2} = \frac{1}{\cos\psi}$ și la o rotație directă în sensul lui ε de unghi $\operatorname{tg}\psi = \frac{\varepsilon}{k_\varepsilon}$ (fig. 3).

Astfel

$$\begin{aligned}(Z_{A'}) &= (Z_A)+(\tilde{a}_A),\\ (Z_{B'}) &= (Z_B)+(\tilde{a}_B),\\ (Z_{C'}) &= (Z_C)+(\tilde{a}_C),\end{aligned} \tag{15}$$

în care $Z_{A'}$, $Z_{B'}$ și $Z_{C'}$ reprezintă vectorii complecși de poziție a vîrfurilor accelerațiilor compuse din planul elementului. Rezultă

$$\eta = \frac{(Z_{B'})-(Z_{A'})}{(Z_B)-(Z_A)} = \frac{(Z_B)-(Z_A)+(\tilde{a}_B)-(\tilde{a}_A)}{(Z_B)-(Z_A)} = 1+\frac{(\tilde{a}_{BA})}{(\overline{AB})},$$

adică

$$\eta = 1+\mathfrak{z}. \tag{16}$$

Se observă că atît $\mathfrak{z}$ cît și η sînt independente de alegerea arbitrară a punctului caracteristic K, cu ajutorul căruia se formează sistemul cores-

punzător de accelerații compuse. Astfel, două sisteme de accelerații compuse pentru punctele K' și K'' au poligoanele egale între ele, dar translatate de un vector $\overline{T} = -\omega^2 \overline{K'K''}$ (fig. 3).

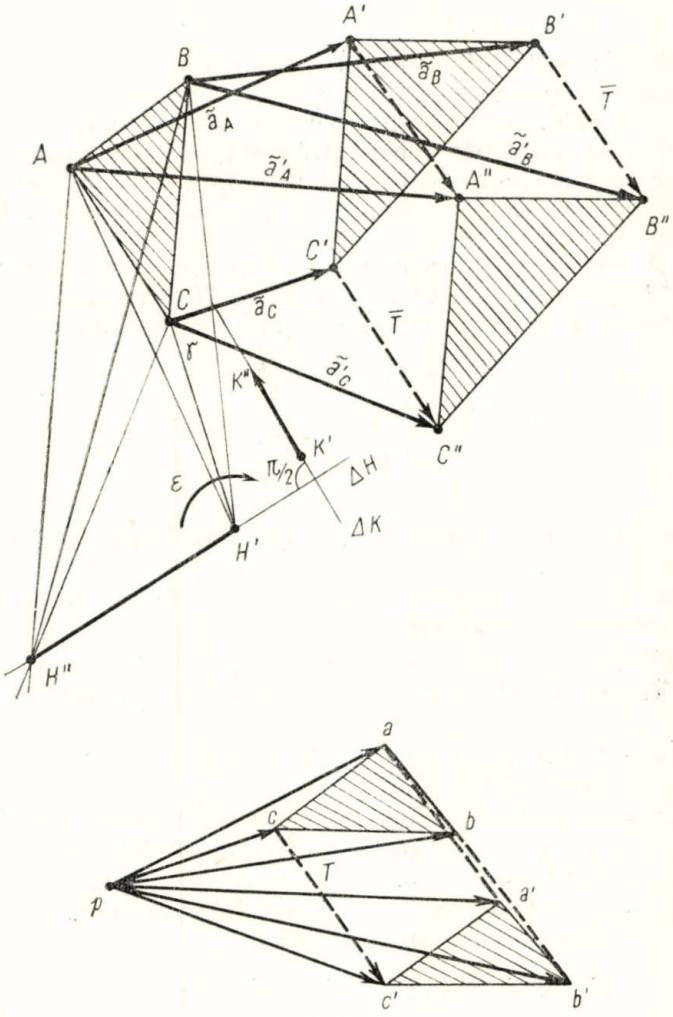


Fig. 3

În adevăr

$$\begin{aligned}(Z'_{A'}) &= (Z_A) + (\tilde{a}'_A)\,,\\ (Z''_{A'}) &= (Z_A) + (\tilde{a}''_A)\end{aligned} \tag{17}$$

și deci

$$(T) = (Z''_{A'}) - (Z'_{A'}) = (\tilde{a}''_A) - (\tilde{a}'_A) = -(\omega^2 \overline{K'K''})$$

sau

$$T = \tilde{a}''_A - \tilde{a}'_A = -\omega^2 \overline{K'K''}\,. \tag{18}$$

Acest vector de translație este independent de punctele alese ale poligonului elementului A, B, C și are direcția $\overline{K'K''}$ în sens invers, fiind de ω^2 ori mai mare. Dacă numeric $(k_l) = (k_a)$, atunci $k_\varepsilon = 1\ s^{-2}$ și deci

$$\delta = i\varepsilon \qquad \eta = 1 + i\varepsilon\,. \tag{19}$$

1.4. *Metoda centrului instantaneu.* Centrul instantaneu al accelerațiilor compuse corespunde punctului care la momentul respectiv are accelerația compusă nulă. Dacă acest punct este H, avem $\tilde{a}_H = 0$ și, conform relațiilor (9), distribuția de accelerații compuse este identică cu cea a accelerațiilor tangențiale în rotația solidului față de H. Accelerațiile compuse sînt perpendiculare pe razele care pleacă din centrul H în sensul dat de ε (fig. 3).

Trebuie remarcat că orice punct A al unui corp în rototranslație plană poate fi considerat centrul instantaneu H al unui sistem de accelerații compuse dacă se alege convenabil punctul caracteristic K :

$$\tilde{a}_A = \bar{a}_A + \omega^2 \overline{KA} = 0\,,$$

adică

$$\overline{KA} = -\frac{\bar{a}_A}{\omega^2}\,. \tag{20}$$

Segmentul $\overline{KA}$ este deci egal și de sens opus accelerației reduse a punctului A.

Punctul K va corespunde pentru aceasta cu extremitatea vectorului accelerației reduse a punctului A.

Determinarea polarelor. Considerînd un sistem de axe fixe XOY și un sistem de axe mobile xoy legat de corpul în mișcare plană (fig. 4), vom nota :

$\bar{R}_0$ — vectorul de poziție al originii axelor mobile față de sistemul fix XOY ;

$\bar{r}_H$, $\bar{R}_H$ — vectorii de poziție ai centrului instantaneu H al accelerațiilor compuse în sistemul mobil xoy și în sistemul fix XOY ;

$\bar{r}_K$, $\bar{R}_K$ — vectorii de poziție ai punctului caracteristic K în sistemul mobil și în sistemul fix :

$$\bar{R}_H = \bar{R}_0 + \bar{r}_H\,; \qquad \bar{R}_K = \bar{R}_0 + \bar{r}_K\,. \tag{21}$$

Dar

$$\tilde{a}_H = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_{H0} = 0 \tag{22}$$

sau

$$\tilde{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_H = 0\,,$$

adică, prin înmulțire vectorială la stînga cu $\bar{\varepsilon}$, obținem

$$\bar{r}_H = \frac{\bar{\varepsilon} \times \tilde{a}_0}{\varepsilon^2} \tag{23}$$

sau, dacă

$$\tilde{a}_0 = \bar{a}_0 + \omega^2 \bar{K}_0 = \bar{a}_0 - \omega^2 \bar{r}_K , \tag{24}$$

rezultă

$$\bar{r}_H = \frac{\bar{\varepsilon} \times a_0}{\varepsilon^2} - \frac{\omega^2}{\varepsilon^2} (\bar{\varepsilon} \times \bar{r}_K) \tag{25}$$

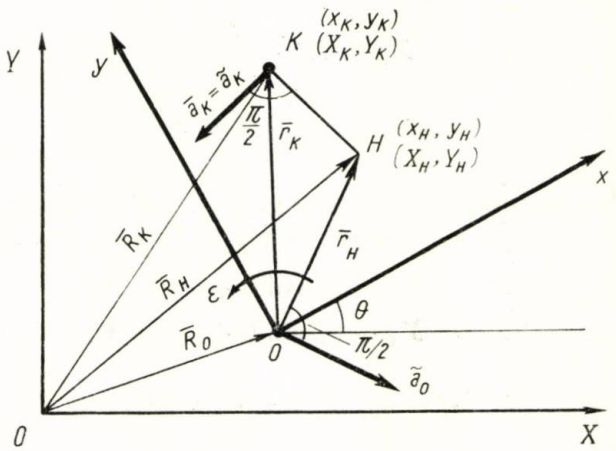


Fig. 4

sau, în proiecții pe axele mobile, avem

$$\begin{aligned} x_H &= -\frac{\tilde{a}_{0y}}{\varepsilon} = -\frac{a_{0y} - \omega^2 y_K}{\varepsilon} , \\ y_H &= \frac{\tilde{a}_{0x}}{\varepsilon} = \frac{a_{0x} - \omega^2 x_K}{\varepsilon} . \end{aligned} \tag{26}$$

Dacă se alege originea axelor mobile 0 în punctul K corespunzător sistemului de accelerații compuse, ceea ce nu micșorează cu nimic generalitatea, atunci

$$\bar{r}_K = 0 ; \qquad \bar{r}_H = \frac{\bar{\varepsilon} \times \bar{a}_K}{\varepsilon^2} = \overline{KH} \tag{27}$$

sau

$$x_H = -\frac{a_{Ky}}{\varepsilon} ; \qquad y_H = \frac{a_{Kx}}{\varepsilon} . \tag{28}$$

Centrul instantaneu H al sistemului de accelerații compuse (K) se confundă cu centrul instantaneu al accelerațiilor J pentru cazul cînd corpul în poziția respectivă ar pleca din repaus ($\omega = 0$) cu accelerația ε (eventual suprapusă și o translație).

Ecuațiile (25), (26), (27) și (28) reprezintă totodată și ecuațiile parametrice ale rostogolitoarei. Pentru coordonatele centrului H în planul fix, respectiv ecuațiile bazei sub formă parametrică, avem

$$\bar{R}_H = \bar{R}_0 + \bar{r}_H = \bar{R}_0 + \frac{\bar{\varepsilon} \times \bar{a}_0}{\varepsilon^2} \tag{29}$$

sau, în proiecții pe axele fixe,

$$\begin{aligned} X_H &= X_0 - \frac{\tilde{a}_{0y}}{\varepsilon}, \\ Y_H &= Y_0 + \frac{\tilde{a}_{0x}}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{30}$$

Dacă se consideră transformarea de coordonate dintre cele două sisteme mobil și fix, care formează între axe unghiul de rotație θ, avem :

$$\begin{aligned} X_H &= X_0 + x_H \cos\theta - y_H \sin\theta, \\ Y_H &= Y_0 + x_H \sin\theta + y_H \cos\theta, \end{aligned} \tag{31}$$

deoarece

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{0x} &= \tilde{a}_{0x} \cos\theta - \tilde{a}_{0y} \sin\theta, \\ \tilde{a}_{0y} &= \tilde{a}_{0x} \sin\theta + \tilde{a}_{0y} \cos\theta. \end{aligned} \tag{32}$$

Coordonatele punctului H pot fi calculate direct geometric, folosindu-se în construcție proprietatea că razele care pornesc din H sînt perpendiculare pe direcțiile accelerațiilor compuse. Astfel, centrul accelerațiilor compuse se găsește pe perpendiculara la accelerația punctului K la distanța $KH = \frac{a_K}{\varepsilon}$ în poziția în care sensul lui a_K corespunde cu sensul dat de ε. Conform cu (27), (28), $\overline{HK} = -\frac{\bar{\varepsilon} \times \bar{a}_K}{\varepsilon^2}$, dar, pe de altă parte, același vector reprezintă accelerația redusă a punctului H, adică $\overline{HK} = \frac{\bar{a}_H}{\omega^2}$, și deci

$$\frac{\bar{a}_H}{\omega^2} = -\frac{\bar{\varepsilon} \times \bar{a}_K}{\varepsilon^2}, \tag{33}$$

de unde

$$\bar{\varepsilon} \times \bar{a}_H = \omega^2 \bar{a}_K, \tag{34}$$

rezultînd că accelerațiile punctelor H și K sînt perpendiculare în sensul rotației ε a vectorului $\bar{a}_H$ peste $\bar{a}_K$.

Dacă sistemul de coordonate mobil este ales cu originea în centrul instantaneu al vitezelor și cu axele, tangenta și normala la curbele polare respective, atunci $a_{0x} = 0$ și $a_{0y} = -\omega u$, în care u este viteza de schimbare a centrului I.

Rezultă

$$x_H = \frac{\omega u + \omega^2 y_K}{\varepsilon}, \qquad y_H = -\frac{\omega^2 x_K}{\varepsilon}, \tag{35}$$

— pentru $K \equiv N$, în care N este diametral opus pe cercul inflexiunilor punctului I, atunci $x_K = 0$, $y_K = -\frac{u}{\omega}$ și deci $x_H = 0$, $y_H = 0$, adică $H \equiv I$, centrul instantaneu al sistemului de accelerații compuse corespunde cu centrul instantaneu al vitezelor (fig. 5);

— pentru $K \equiv T$, adică $x_K = 0$, $y_K = 0$, obținem $x_H = -\frac{\omega u}{\varepsilon}$, $y_H = 0$. Cînd punctul caracteristic K se confundă cu centrul vitezelor I, centrul instantaneu al accelerațiilor compuse corespunde cu punctul $T \equiv H$, diametral opus punctului I pe cercul de întoarcere-fugă (fig. 5);

— pentru $K \equiv J$, deoarece J nu are accelerație, rezultă că și $H \equiv J \equiv K$, centrul instantaneu al accelerațiilor compuse confundîndu-se cu centrul instantaneu al accelerațiilor (fig. 5);

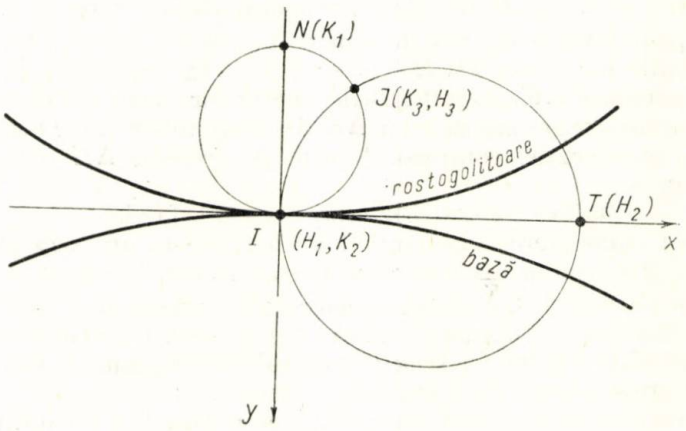


Fig. 5

— dacă centrele $I = J$ sînt permanente centre de rotație, atunci ($u = 0$) și din (35) rezultă

$$x_H = \frac{\omega^2 y_K}{\varepsilon}, \qquad y_H = -\frac{\omega^2 x_K}{\varepsilon} \tag{36}$$

sau

$$\omega^2 \bar{r}_K = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_H, \tag{37}$$

ceea ce conduce de asemenea, pentru alegerea lui $K \equiv I$, la $H \equiv I \equiv J \equiv K$.

Schimbarea punctului caracteristic K modifică sistemul de acceleraţii compuse, iar din (22)—(26) se poate determina variaţia vectorului de poziţie K în funcţie de vectorul de poziţie al centrului H, adică

$$\bar{r}_K = \frac{\bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_H}{\omega^2}. \tag{38}$$

Trecerea de la punctul caracteristic K' la K'' conduce la schimbarea centrului instantaneu din H' în H'' între vectorii $\overline{K'K''}$ şi $\overline{H'H''}$, avînd legătura

$$\bar{\varepsilon} \times \overline{H'H''} = \omega^2 \times \overline{K'K''} = -\bar{T}, \tag{39}$$

$$\overline{K'K''} = \bar{r}_{K''} - \bar{r}_{K'}; \qquad \overline{H'H''} = \bar{r}_{H''} - \bar{r}_{H'},$$

respectiv

$$\overline{K'K''} = \frac{\bar{\varepsilon} \times \overline{H'H''}}{\omega^2} \tag{40}$$

sau

$$\overline{H'H''} = -\frac{\omega^2}{\varepsilon^2}(\bar{\varepsilon} \times \overline{K'K''}) = \frac{\bar{\varepsilon} \times \bar{T}}{\varepsilon^2}. \tag{41}$$

Vectorii $\overline{K'K''}$ şi $\overline{H'H''}$ sînt perpendiculari, vectorul $\overline{H'H''}$ aşternîndu-se, prin rotaţie de $\pi/2$ în sensul dat de ε, peste vectorul $\overline{K'K''}$. Între mărimile lor avem $\varepsilon H'H'' = \omega^2 K'K''$. În concluzie, dacă punctul K descrie dreapta ΔK, extremităţile vectorilor acceleraţiei compuse A', B' şi C' descriu drepte paralele cu ΔK (în sens invers), iar centrul instantaneu H al acceleraţiei compuse descrie o dreaptă ΔH perpendiculară pe ΔK (fig. 3).

1.5. *Distribuţia acceleraţiilor compuse* [17], [18].

Pentru cunoaşterea acceleraţiilor compuse la un corp în rototranslaţie plană sînt necesari trei parametri scalari, considerîndu-se cunoscuţi : vectorul de poziţie $\overline{AB}$, direcţia acceleraţiei unghiulare $\bar{\varepsilon}$ perpendiculară pe planul mişcării, viteza unghiulară $\bar{\omega}$ şi poziţia punctului caracteristic K (respectiv KA şi KB). În studiul mecanismelor plane se pot întîlni mai des următoarele cazuri de parametri cunoscuţi :

a) proiecţia acceleraţiei compuse a unui punct A pe o direcţie ΔA :

$$\text{pr.}_{\Delta A}\, \tilde{a}_A = \text{pr.}_{\Delta A}\, \bar{a}_A + \omega^2\, \text{pr.}_{\Delta A}\, \overline{KA}. \tag{42}$$

Proiecţia acceleraţiei compuse se obţine astfel din proiecţia acceleraţiei simple a punctului respectiv (fig. 6).

Pentru direcţia $\overline{KA}$ perpendiculară pe dreapta ΔA, rezultă că cele două acceleraţii au proiecţiile egale :

$$\text{pr.}_{\perp \Delta AK}\, \tilde{a}_A = \text{pr.}_{\perp \Delta AK}\, \bar{a}_A. \tag{43}$$

— dreapta-suport $\Delta A'$ a vîrfului vectorului acceleraţiei compuse $\tilde{a}_A$. Aceasta echivalează cu cunoaşterea proiecţiei pe perpendiculara $\Delta A \equiv \perp \Delta A'$ la dreapta-suport (fig. 7).

b) Direcția accelerației compuse $\tilde{a}_A$, respectiv dreapta-suport $\Delta AA'$ a vectorului $\tilde{a}_A$, ceea ce echivalează cu cunoașterea proiecției nule pe perpendiculara $\perp \Delta AA'$ la dreapta considerată.

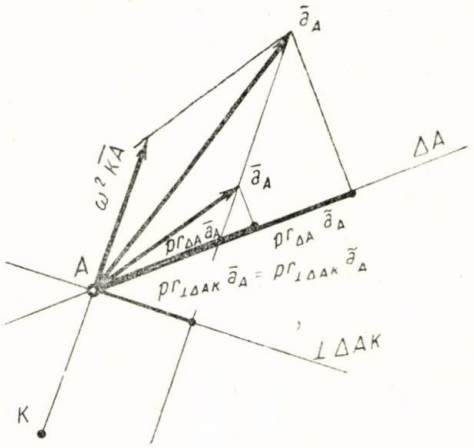


Fig. 6

— dreapta-suport a centrului instantaneu al accelerației compuse ΔH, care de altfel este identică cu $\perp \Delta AA'$, adică se cunoaște proiecția nulă a accelerației compuse pe dreapta ΔH (fig. 7).

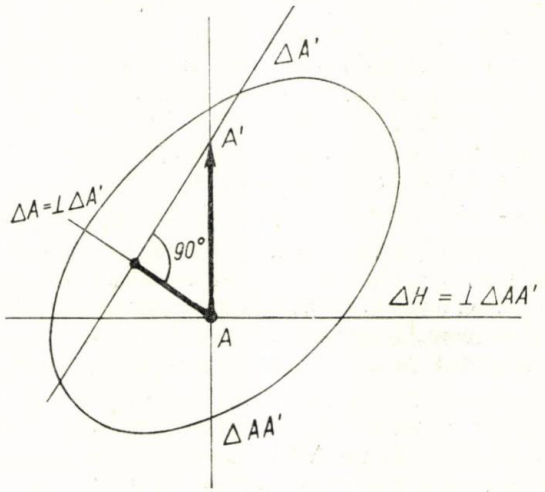


Fig. 7

c) mărimea accelerației unghiulare ε, ceea ce conduce, după relația (11), la obținerea legăturii între proiecțiile accelerațiilor compuse a punctelor de pe o dreaptă AB pe direcția perpendiculară la această dreaptă.

În raport cu relația (10), *cunoașterea unei proiecții echivalează cu cunoașterea proiecțiilor egale ale accelerațiilor compuse pentru toate punctele de pe dreapta proiecției* ΔA.

Cunoaşterea a doi parametri, compatibili şi independenţi, de acelaşi fel sau diferiţi pentru două puncte separate sau pentru acelaşi punct, conduce în final la aflarea :

a) *acceleraţiei compuse a unui punct C*, aflat la intersecţia suporturilor a două proiecţii ΔA şi ΔB. Se pot cunoaşte astfel *proiecţiile acceleraţiilor compuse ale tuturor punctelor din solid pe dreptele care le unesc cu punctul de acceleraţie compusă cunoscută* (fig. 8).

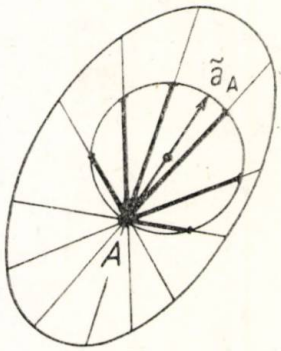


Fig. 8

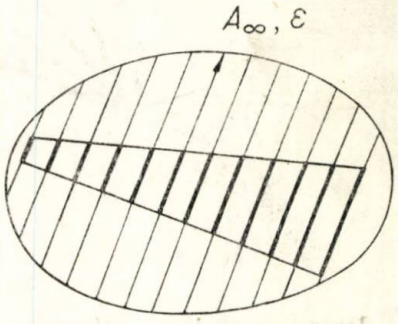


Fig. 9

De exemplu, în cazul acceleraţiilor compuse, ca şi în cazul vitezelor, cunoscînd liniile lor de acţiune pentru două puncte, se găseşte acceleraţia compusă (respectiv viteza) nulă a punctului aflat la intersecţia perpendicularelor duse pe aceste suporturi. Acest punct este centrul instantaneu. Pentru acceleraţiile simple, deşi proiecţiile lor sînt nule pe perpendicularele la suporturile lor, punctul de intersecţie respectiv are acceleraţie. Proiecţiile acestei acceleraţii pe cele două drepte care definesc punctul sînt $-\omega^2 \overline{AP}$ şi $-\omega^2 \overline{BP}$, avînd pr.$_{AP}$ $\bar{a}_A = 0$ şi pr.$_{BP}$ $\bar{a}_B = 0$;

b) dacă cele două proiecţii au suporturile paralele, se poate afla acceleraţia unghiulară ε (11), considerînd distanţa AB pe perpendiculara comună. Rezultă că se cunosc *proiecţiile acceleraţiilor compuse ale tuturor punctelor din solid pe dreptele paralele la direcţia dată*, respectiv pe dreptele care le unesc cu punctul de la infinit al direcţiei date (fig. 9).

Dacă se cunoaşte poziţia centrului instantaneu H, aceasta echivalează cu cunoaşterea acceleraţiei compuse nule a punctului H, $\tilde{a}_H = 0$, iar cunoaşterea unei proiecţii pe ΔA şi a acceleraţiei unghiulare ε, echivalează cu cunoaşterea proiecţiilor acceleraţiilor compuse ale tuturor punctelor pe dreptele paralele la direcţia proiecţiei date.

Cei doi parametri cunoscuţi trebuie să fie independenţi, căci altfel vor fi echivalenţi cu un singur parametru, cum se întîmplă la cunoaşterea a două proiecţii a acceleraţiilor compuse a două puncte A şi B pe dreapta comună AB, ele fiind egale. De asemenea trebuie să fie compatibili, pentru că altfel, ca de exemplu în cunoaşterea a două proiecţii neegale pe dreapta comună AB a punctelor, problema nu este rezolvabilă.

Cunoașterea a trei parametri compatibili și independenți determină complet distribuția accelerațiilor compuse în solidul rigid în rototranslație plană. Astfel, cunoașterea proiecțiilor accelerațiilor compuse a trei puncte pe direcții diferite echivalează cu obținerea accelerației compuse a unui punct A și proiecția accelerației compuse a unui alt punct B care trebuie să fie pe o direcție diferită de AB.

Se obțin astfel proiecțiile accelerațiilor compuse ale tuturor punctelor solidului pe orice direcție. Cei trei parametri dați trebuie să fie independenți, ceea ce nu se întîmplă, de exemplu, cînd cele trei proiecții au suporturi paralele sau dacă proiecția accelerației compuse a punctului B este dată pe dreapta AB, în care caz distribuția accelerațiilor compuse nu este determinată. De asemenea trebuie să fie compatibili, ca, de exemplu, în cazul suporturilor paralele ale proiecțiilor, respectiv să se îndeplinească relațiile

$$\varepsilon = \frac{\text{pr.}_{\perp AB}\,\bar{a}_B - \text{pr.}_{\perp AB}\,\bar{a}_A}{AB} = \frac{\text{pr.}_{\perp AC}\,\bar{a}_C - \text{pr.}_{\perp AC}\,\bar{a}_A}{AC},$$

în care dreapta ΔABC este perpendiculară pe direcția comună a proiecțiilor.

Dacă se cunosc mai mulți parametri pentru determinarea distribuției de accelerații compuse, aceștia trebuie să fie echivalenți cu trei parametri compatibili și independenți. Astfel, dacă se cunosc accelerațiile compuse a două puncte A și B, acestea trebuie să aibă proiecțiile egale pe dreapta AB. Iar dacă se cunosc patru proiecții pe drepte paralele, distribuția de accelerații nu poate fi determinată, existînd două relații de compatibilitate.

2. MIȘCAREA PLANĂ RELATIVĂ A DOUĂ SOLIDE RIGIDE [17], [18]

2.1. *Ecuațiile vectoriale.* Deoarece cele două solide rigide în mișcare plană fac parte dintr-un mecanism, vom considera separat cazul cînd centrele relative de viteză și de accelerație confundate sînt permanente, corespunzînd situației în care cele două corpuri sînt legate printr-o cuplă de rotație sau de translație și separat cazul cînd centrele relative sînt nepermanente.

Dacă elementele sînt legate printr-o cuplă de rotație, polul relativ $P_{12} = P_{21}$ corespunde poziției cuplei, iar accelerațiile punctelor P_1 și P_2 sînt egale $\bar{a}_{P_1} = \bar{a}_{P_2}$; dacă elementele sînt legate printr-o cuplă de translație, polul relativ este aruncat la infinit $P_{12\infty} \equiv P_{21\infty}$ pe direcția perpendiculară la dreapta translației, accelerațiile unghiulare fiind egale $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2$.

a) *Polul relativ permanent.* Ecuația vectorială de compunere a accelerațiilor pentru două puncte C_1 și C_2, legate fiecare de cîte unul din elemente, dar confundate în același punct geometric C, este

$$\bar{a}_{C_2} = \bar{a}_{C_1} + \bar{a}^{rn}_{C_{21}P_{21}} + \bar{a}^{rt}_{C_{21}P_{21}} + \bar{a}^{cr}_{C_{21}}. \qquad (44)$$

Acceleraţia relativă normală în mişcarea de rotaţie faţă de polul relativ este

$$\bar{a}^{rn}_{C_{21}P_{21}} = -(\omega_2 - \omega_1)^2 \overline{PC} \tag{45}$$

şi are valoarea nulă pentru polul aruncat la infinit $\omega_2 = \omega_1$ în cazul cuplei de translaţie.

Acceleraţia relativă tangenţială în mişcarea de rotaţie faţă de polul relativ este

$$\bar{a}^{rt}_{C_{21}P_{21}} = (\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1) \times \overline{PC} \tag{46}$$

şi are valoarea finită $\bar{a}^{rt}_{C_{21}P_{21}\infty}$ pentru polul aruncat la infinit, cu direcţia corespunzătoare dreptei translaţiei relative.

Acceleraţia complementară Coriolis este

$$\bar{a}^{cr}_{C_{21}} = -2\omega_1(\omega_2 - \omega_1)\overline{PC} \tag{47}$$

sau, pentru elemente legate printr-o cuplă de translaţie, $\bar{a}^{c}_{C_{21}} = 2\bar{\omega}_1 \times \times \bar{v}_{C_{21}} = 2\bar{\omega}_1 \times \bar{v}_{C_{21}}$, avînd direcţia perpendiculară pe dreapta translaţiei relative.

Ecuaţia de compunere a acceleraţiilor (44) se poate scrie sub forma

$$\bar{a}_{C_2} = \bar{a}_{C_1} + \bar{a}^{rt}_{C_{21}} + \bar{\alpha}_{C_{21}}, \tag{48}$$

asemănătoare cu cea a vitezelor

$$\bar{v}_{C_2} = \bar{v}_{C_1} + \bar{v}_{C_{21}}, \tag{49}$$

deoarece

$$\bar{v}_{C_{21}} = (\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1) \times \overline{PC} \tag{50}$$

şi

$$\bar{a}^{rt}_{C_{21}} = (\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1) \times \overline{PC},$$

dar care prezintă în plus termenul

$$\bar{\alpha}_{C_{21}} = \bar{a}^{rn}_{C_{21}P_{21}} + \bar{\alpha}^{cr}_{C_{21}}, \tag{51}$$

respectiv pentru cupla de rotaţie

$$\bar{\alpha}_{C_{21}} = (\omega_1^2 - \omega_2^2)\overline{PC} \tag{52}$$

şi pentru cupla de translaţie

$$\bar{\alpha}_{C_{21}} = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{C_{21}} = \bar{a}^{cr}_{C_{21}}. \tag{53}$$

Căutînd a avea o analogie perfectă între ecuaţiile de acceleraţii şi de viteze, vom repartiza termenul complementar $\bar{\alpha}_{C_{21}}$ la acceleraţiile punctelor C_1 şi C_2, urmărind a obţine aceeaşi formă pentru acceleraţia compusă ca mai înainte. Pentru aceasta vom lua două puncte K_1 şi K_2

caracteristice, legate fiecare de unul din elemente, cu ajutorul cărora se formează sistemele corespunzătoare de accelerații compuse. Deci :

$$\bar{a}_{C_2} = \bar{a}_{C_2} + \omega_2^2 \overline{K_2C}, \tag{54}$$

$$\bar{a}_{C_1} = \bar{a}_{C_1} + \omega_1^2 \overline{K_1C}.$$

Pentru ca ecuația (48) să rămînă sub forma

$$\bar{a}_{C_2} = \bar{a}_{C_1} + \bar{a}_{C_{21}}, \tag{55}$$

în care $\bar{a}_{C_{21}} = \bar{a}^{rt}_{C_{21}P_{21}}$, trebuie ca

$$\bar{\alpha}_{C_{21}} + \omega_2^2 \overline{K_2C} - \omega_1^2 \overline{K_1C} = 0, \tag{56}$$

care determină poziția punctului K_2 atunci cînd K_1 a fost cunoscut.

Pentru elemente legate prin cuple de rotație, condiția de mai sus se transformă în

$$\omega_2^2 \overline{PK_2} = \omega_1^2 \overline{PK_1} \tag{57}$$

sau

$$\overline{K_1K_2} = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_2^2} \overline{PK_1} = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2} \overline{PK_2}, \tag{58}$$

ceea ce arată în primul rînd că punctele K_2, K_1 și P sînt coliniare, iar dacă s-ar considera $\overline{PK_1}$ accelerația redusă a punctului P față de primul corp atunci $\overline{PK_2}$ este accelerația redusă a aceluiași punct P față de corpul celălalt, $\overline{PK_1}$ și $\overline{PK_2}$ avînd același sens.

Pentru elemente legate prin cuple de translație avem

$$\overline{K_1K_2} = \frac{2\bar{\omega} \times \bar{v}_{C_{21}}}{\omega^2} = \frac{\bar{a}^{cr}_{C_{21}}}{\omega^2}, \tag{59}$$

vectorul $\overline{K_1K_2}$ fiind perpendicular pe dreapta translației, menținîndu-se coliniaritatea punctelor K_2, K_1 și P_∞ și avînd mărimea $\frac{2v_{C_{21}}}{\omega}$ în sensul accelerației Coriolis.

Concludem că, atunci cînd punctul caracteristic K_2 este ales în funcție de poziția punctului caracteristic K_1 prin relațiile (57, 58, 59), ecuația (55) de compunere a accelerațiilor compuse a două puncte C_1 și C_2 legate de cele două corpuri, dar confundate în punctul geometric C, este întru totul analogă ecuației respective de viteze.

Trebuie observat faptul că, atunci cînd punctele C_1 și C_2 corespund polului relativ P_{12} permanent și deci au accelerațiile egale $\bar{a}_{P_2} = \bar{a}_{P_1}$, din (54, 55, 57) rezultă că și accelerațiile compuse sînt egale $\bar{a}_{P_1} = \bar{a}_{P_2}$, adică $\bar{a}_{P_{21}} = 0$ și $P_{12} \equiv P_{21} \equiv H_{12} \equiv H_{21}$ continuă să fie pol permanent și pentru accelerațiile compuse.

b) *Polul relativ nepermanent.* Acest caz apare la mecanismele cu came din cauza legăturii prin cupla superioară sau la mecanismele cu cuple inferioare pentru elemente nelegate direct. În ecuația de compunere a accelerațiilor (44) se introduce și accelerația relativă din polul relativ al vitezelor $\bar{a}^r_{P_{21}}$, adică

$$\bar{a}_{C_2} = \bar{a}_{C_1} + \bar{a}^r_{I_{21}} + \bar{a}^{rn}_{C_{21}I_{21}} + \bar{a}^{rt}_{C_{21}I_{21}} + \bar{a}^{cr}_{C_{21}}. \tag{60}$$

Urmărind ecuația de mai sus (60), pentru a rămîne la forma

$$\tilde{a}_{C_2} = \tilde{a}_{C_1} + \tilde{a}_{C_{21}},$$

în care

$$\tilde{a}_{C_{21}} = \bar{a}^{rt}_{C_{21}I_{21}} = (\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1) \times \overline{IC}, \tag{61}$$

trebuie ca relația (56) să fie completată cu termenul $\bar{a}^r_{I_{21}}$, adică

$$\omega_2^2 \overline{K_2C} - \omega_1^2 \overline{K_1C} + \bar{a}^r_{I_{21}} + \bar{a}^{rn}_{C_{21}I_{21}} + \bar{a}^{cr}_{C_{21}} = 0, \tag{62}$$

ceea ce conduce pentru polul instantaneu $I_{21} \equiv I_{12}$, la distanță finită, la

$$\omega_2^2 \overline{IK_2} = \omega_1^2 \overline{IK_1} + \bar{a}^r_{I_{21}} \tag{63}$$

sau

$$\omega_1^2 \overline{IK_1} = \omega_2^2 \overline{IK_2} + \bar{a}^r_{I_{12}},$$

deoarece

$$\bar{a}^r_{I_{21}} + \bar{a}^r_{I_{12}} = 0.$$

Se poate scrie de asemenea sub forma:

$$\overline{K_1K_2} = \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)\overline{IK_1} + \bar{a}^r_{I_{21}}}{\omega_2^2} = \frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)\overline{IK_2} + \bar{a}^r_{I_{12}}}{\omega_1^2}. \tag{64}$$

De data aceasta poziția punctului K_2 nu se găsește pe dreapta K_1I, din cauza termenului suplimentar $\bar{a}^r_{I_{21}} = -\bar{\omega}_{21} \times \bar{u}$ ($\bar{u}$ fiind viteza de schimbare a centrului I).

Dacă la un moment dat avem cazul particular cînd centrul instantaneu al vitezelor este aruncat la infinit, atunci se poate utiliza accelerația relativă scrisă din rotația în jurul centrului unic instantaneu al accelerațiilor $J_{12} = J_{21}$ (pentru $\omega_1 = \omega_2 = \omega$) la distanță finită sau infinită după cum $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ sau $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, adică

$$\bar{a}_{C_2} = \bar{a}_{C_1} + \bar{a}^{rn}_{C_{21}J_{21}} + \bar{a}^{rt}_{C_{21}J_{21}} + \bar{a}^{cr}_{C_{21}}. \tag{65}$$

Pentru ca

$$\tilde{a}_{C_2} = \tilde{a}_{C_1} + \tilde{a}_{C_{21}},$$

în care

$$\bar{a}^{rn}_{C_{21}J_{21}} = 0\,;\ \tilde{a}_{C_{21}} = \bar{a}^{rt}_{C_{21}J_{21}} = (\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1) \times \overline{JC}, \tag{66}$$

trebuie să avem

$$\overline{K_1K_2} = \frac{2\bar{\omega} \times \bar{v}_{C_{21}}}{\omega^2}, \tag{67}$$

formulă analogă cu aceea cînd centrele I și J sînt permanente și aruncate la infinit.

În privința centrelor instantanee relative ale accelerațiilor compuse, trebuie relevat că :

— dacă poziția punctului caracteristic K_2 în raport cu punctul caracteristic K_1 este dată de formula (63), atunci, pentru că $\tilde{a}_{H_{21}} = 0$, rezultă $H_{21} \equiv H_{12}$ și corespunde cu centrul instantaneu al vitezelor $I_{12} \equiv I_{21}$;

— dacă poziția punctului caracteristic K_2 în raport cu a punctului K_1 este luată după formula (67) pentru cazul particular cînd $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, atunci, pentru ca $\tilde{a}_{H_{21}} = 0$, rezultă $H_{21} \equiv H_{12}$ și corespunde cu centrul unic instantaneu al accelerațiilor $J_{12} \equiv J_{21}$.

La ambele cazuri, $\tilde{a}_{H_2} = \tilde{a}_{H_1}$; $\tilde{a}_{H_{21}} = 0$, adică punctele I_1 și I_2 confundate în centrul instantaneu al vitezelor, deși au accelerații diferite $\bar{a}_{I_2} = \bar{a}_{I_1} + \bar{a}^r_{I_{21}}$, au aceleași accelerații compuse $\tilde{a}_{I_2} = \tilde{a}_{I_1}$, iar pentru cazul particular $J_{12} = J_{21}$ punctele confundate J_1 și J_2 au de asemenea accelerații diferite $\bar{a}_{J_2} = \bar{a}_{J_1} + \bar{a}^{cr}_{J_{21}}$, dar aceleași accelerații compuse $\tilde{a}_{J_2} = \tilde{a}_{J_1}$.

Mai general, orice punct H poate fi considerat centrul unic instantaneu al accelerațiilor compuse relative $H_{21} \equiv H_{12}$ dacă se aleg în mod corespunzător pozițiile punctelor caracteristice K_1 și K_2. Astfel

$$\tilde{a}_{C_2} = \tilde{a}_{C_1} + \tilde{a}_{C_{21}}, \tag{68}$$

în care

— pentru H (și C), la distanță finită, $\tilde{a}_{C_{21}} = \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{HC}$, (69)

— pentru H la infinit, accelerația $\tilde{a}_{C_{21}} = \tilde{a}_{21}$ (70)

compusă relativă este aceeași pentru orice cupluri de puncte C, D,... etc., iar $\bar{\varepsilon}_{21} = 0$, adică $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2$.

Dacă H este la distanță finită $\bar{\varepsilon}_2 \neq \bar{\varepsilon}_1$, trebuie ca $\tilde{a}_{H_2} = \tilde{a}_{H_1}$, respectiv $\tilde{a}_{H_{21}} = \tilde{a}_{H_{12}} = 0$. Urmează că

— pentru $\omega_2 \neq \omega_1$:

$$\bar{a}_{H_2} + \omega_2^2 \overline{K_2H} = \bar{a}_{H_1} + \omega_1^2 \overline{K_1H} \tag{71}$$

sau

$$\omega_2^2 \overline{HK_2} = \omega_1^2 \overline{HK_1} + (\bar{a}_{H_2} - \bar{a}_{H_1}) \tag{72}$$

sau

$$\omega_2^2 \overline{HK_2} = \omega_1^2 \overline{HK_1} + \bar{a}^r_{H_{21}} + \bar{a}^{cr}_{H_{21}} ; \tag{73}$$

— pentru $\omega_2 = \omega_1 = \omega$:

$$\omega^2 \overline{K_1K_2} = \bar{a}^r_{H_{21}} + \bar{a}^{cr}_{H_{21}}. \tag{74}$$

Dar acceleraţia relativă $\bar{a}^r_{H_{21}}$ poate fi exprimată din mişcarea faţă de centrul instantaneu al vitezelor $I_{21} = I_{12}$ de centrul instantaneu al acceleraţiilor $J_{21} \neq J_{12}$:

$$\bar{a}^r_{H_{21}} = \bar{a}^r_{I_{21}} + \bar{a}^{rn}_{H_{21}I_{21}} + \bar{a}^{rt}_{H_{21}I_2} \tag{75}$$

sau

$$\bar{a}^r_{H_{21}} = \bar{a}^{rn}_{H_{21}J_{21}} + \bar{a}^{rt}_{H_{21}J_{21}}, \tag{76}$$

unde

$$\bar{a}^{rn}_{H_{21}I_{21}} = -\omega^2_{21}\overline{IH}, \qquad \bar{a}^{rt}_{H_{21}I_{21}} = \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{IH},$$

$$\bar{a}^{rn}_{H_{21}J_{21}} = -\omega^2_{21}\overline{J_{21}H}, \qquad \bar{a}^{rt}_{H_{21}J_{21}} = \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{J_{21}H}. \tag{77}$$

Se obţine

— pentru $\omega_1 \neq \omega_2$, $I_{12} \equiv I_{21}$ la distanţă finită :

$$\omega^2_2 \overline{IK_2} = \omega^2_1 \overline{IK_1} + \bar{a}^r_{I_{21}} + \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{IH} \tag{78}$$

sau

$$\omega^2_2 \overline{J_{21}K_2} = \omega^2_1 \overline{J_{21}K_1} + \bar{a}^{cr}_{J_{21,1}} + \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{J_{21}H}, \tag{79}$$

în care

$$\bar{a}^r_{I_{21}} = -\bar{\omega}_{21} \times \bar{u}, \qquad \bar{a}^{cr}_{J_{21,1}} = 2\bar{\omega}_1 \times \bar{v}_{J_{21,1}}, \tag{80}$$

şi, invers,

$$\omega^2_1 \overline{IK_1} = \omega^2_2 \overline{IK_2} + \bar{a}^r_{I_{12}} + \bar{\varepsilon}_{12} \times \overline{IH},$$

$$\omega^2_1 \overline{J_{12}K_1} = \omega^2_2 \overline{J_{12}K_2} + \bar{a}^{cr}_{J_{12,2}} + \bar{\varepsilon}_{12} \times \overline{J_{12}H},$$

în care

$$\bar{a}^r_{I_{12}} = -\bar{\omega}_{12} \times \bar{u}, \qquad \bar{a}^{cr}_{J_{12,2}} = 2\bar{\omega}_2 \times \bar{v}_{J_{12,2}}$$

— pentru $\omega_1 = \omega_2$, $I_{12} = I_{21}$ la infinit, dar $J_{12} = J_{21}$ (în acest caz) la distanţă finită $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$:

$$\omega^2 \overline{K_1K_2} = \bar{a}^{cr}_{21} + \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{JH}, \tag{81}$$

acceleraţia Coriolis fiind aceeaşi pentru orice puncte ;

— pentru centre permanente la distanţă finită $I = J = P$, legătura făcîndu-se prin cupla de rotaţie, $\omega_1 \neq \omega_2$, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$:

$$\omega^2_2 \overline{PK_2} = \omega^2_1 \overline{PK_1} + \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{PH}, \tag{82}$$

iar dacă la un moment dat $\omega_1 = \omega_2$, $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$:

$$\omega^2 \overline{K_1K_2} = \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{PH}. \tag{83}$$

Dacă H este la infinit $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, acceleraţiile compuse relative ale tuturor punctelor sînt egale, astfel că

— pentru $\omega_2 \neq \omega_1$:

$$\bar{a}_{C_2} + \omega^2_2 \overline{K_2C} = \bar{a}_{C_1} + \omega^2_1 \overline{K_1C} + \tilde{a}_{21} \tag{84}$$

sau

$$\omega_2^2 \overline{CK_2} = \omega_1^2 \overline{CK_1} + (\bar{a}_{C_2} - \bar{a}_{C_1}) - \tilde{a}_{21} \tag{85}$$

sau

$$\omega_2^2 \overline{CK_2} = \omega_1^2 \overline{CK_1} + \bar{a}^r_{C_{21}} + \bar{a}^{cr}_{C_{21}} - \tilde{a}_{21}\,; \tag{86}$$

— pentru $\omega_2 = \omega_1 = \omega$:

$$\omega^2 \overline{K_1K_2} = \bar{a}^r_{C_{21}} + \bar{a}^{cr}_{C_{21}} - \tilde{a}_{21}\,. \tag{87}$$

Exprimînd acceleraţiile relative şi Coriolis în funcţie de distanţele la I sau J, obţinem

— pentru $\omega_2 \neq \omega_1$, $I_{12} \equiv I_{21}$ la distanţă finită :

$$\omega_2^2 \overline{IK_2} = \omega_1^2 \overline{IK_1} + \bar{a}^r_{I_{21}} - \tilde{a}_{21} \tag{88}$$

sau

$$\omega_2^2 \overline{J_{21}K_2} = \omega_1^2 \overline{J_{21}K_1} + \bar{a}^{cr}_{J_{21,1}} - \tilde{a}_{21}\,; \tag{89}$$

— pentru centre permanente la distanţă infinită $I_\infty = J_\infty = P_\infty$, $\omega_2 = \omega_1$ $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ rămîne

$$\omega^2 \overline{K_1K_2} = \bar{a}^{cr}_{21} \text{ considerînd } \bar{a}^r_{C_{21}} = \tilde{a}_{21}\,. \tag{90}$$

Dacă se urmăreşte ca H să se confunde cu I, atunci formulele (78), (82) şi (90) devin

$$\begin{aligned} \omega_2^2 \overline{IK_2} &= \omega_1^2 \overline{IK_1} + \bar{a}^r_{I_{21}}\,, \\ \omega_2^2 \overline{PK_2} &= \omega_1^2 \overline{PK_1}\,, \\ \omega^2 \overline{K_1K_2} &= \bar{a}^{cr}_{21}\,. \end{aligned} \tag{91}$$

Dacă se urmăreşte ca H să se confunde cu J_{21} (eventual cu J_{12}), atunci formulele (79), (82) şi (90) devin

$$\begin{aligned} \omega_2^2 \overline{J_{21}K_2} &= \omega_1^2 \overline{J_{21}K_1} + \bar{a}^{cr}_{J_{21,1}}\,, \\ \omega_2^2 \overline{PK_2} &= \omega_1^2 \overline{PK_1}\,, \\ \omega^2 \overline{K_1K_2} &= \bar{a}^{cr}_{21}\,. \end{aligned} \tag{92}$$

Dacă se alege H astfel încît

$$\bar{a}^r_{I_{21}} + \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{IH} = 0, \tag{93}$$

rezultă din (78), cu $\omega_2 \neq \omega_1$, I la distanţă finită :

$$\omega_2^2 \overline{IK_2} = \omega_1^2 \overline{IK_1}. \tag{94}$$

Dacă se alege H astfel încît

$$\bar{a}^{cr}_{J_{21,1}} + \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{J_{21}H} = 0, \tag{95}$$

rezultă din (79) cu $\omega_2 \neq \omega_1$ J la distanță finită :

$$\omega_2^2 \overline{J_{21}K_2} = \omega_1^2 \overline{J_{21}K_1} \tag{96}$$

sau

$$\bar{a}^{cr}_{J_{12,2}} + \bar{\varepsilon}_{12} \times \overline{J_{12}H} = 0$$

și

$$\omega_2^2 \overline{J_{12}K_2} = \omega_1^2 \overline{J_{12}K_1};$$

— dacă se alege H astfel încît $K_1 \equiv K_2$, rezultă

$$(\omega_2^2 - \omega_1^2) \overline{IK} = \bar{a}^{r}_{I_{21}} + \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{IH}, \tag{97}$$

$$(\omega_2^2 - \omega_1^2) \overline{J_{21}K} = \bar{a}^{cr}_{J_{21,1}} + \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{J_{21}H}, \tag{98}$$

$$(\omega_2^2 - \omega_1^2) \overline{J_{12}K} = \bar{a}^{cr}_{J_{12,2}} + \bar{\varepsilon}_{12} \times \overline{J_{12}H}, \tag{99}$$

$$0 = \bar{a}^{cr}_{21} + \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{JH}, \tag{100}$$

$$(\omega_2^2 - \omega_1^2) \overline{PK} = \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{PH}. \tag{101}$$

2.2. *Distribuția accelerațiilor compuse* [17], [18]. Dacă se cunoaște poziția polului $H_{12} \equiv H_{21}$, pentru determinarea accelerațiilor compuse mai trebuie cunoscuți $p_2 = 3n - 2c = 4$, parametri compatibili și independenți, care pot fi distribuiți între cele două corpuri sub formele $2+2$ și $3+1$. În primul caz se presupun cunoscute accelerațiile compuse ale punctelor A și B din fiecare corp.

2.3. *Metoda poligoanelor.* Pentru punctele C_1 și C_2, confundate în C, dar legate de corpuri diferite, avem următoarele ecuații vectoriale :

$$\tilde{a}_{C_1} = \tilde{a}_{A_1} + \tilde{a}_{C_1A_1}; \qquad \tilde{a}_{C_2} = \tilde{a}_{B_2} + \tilde{a}_{C_2B_2}; \tag{102}$$

$$\tilde{a}_{C_2} = \tilde{a}_{C_1} + \tilde{a}_{C_{21}} \tag{103}$$

respectiv

$$\tilde{a}_{C_2} = \underline{\underline{\tilde{a}_{B_2}}} + \underset{\perp BC}{\underline{\tilde{a}_{C_2B_2}}} = \underline{\underline{\tilde{a}_{A_1}}} + \underset{\perp AC}{\underline{\tilde{a}_{C_1A_1}}} + \underset{\perp HC}{\underline{\tilde{a}_{C_{21}}}}. \tag{104}$$

S-au subliniat cu o linie vectorii la care se cunoaște o singură componentă scalară, indicată sub subliniere, și cu două linii vectorii cunoscuți complet. De asemenea se vor marca între paranteze rotunde și cu litere mici segmentele reprezentative pe desen în milimetri, considerate la scările respective k_l, k_a de lungime și pentru accelerații, a parametrilor vectoriali corespunzători. Rezolvarea ecuației vectoriale de mai sus cu trei necunoscute scalare se face grupînd necunoscutele (fig. 10).

a) Pentru gruparea a două necunoscute pe o singură direcție trebuie ca punctul C_2 să se găsească pe dreapta $\Delta_1 = A_1 H_{12}$ (C_2). De asemenea ecuațiile pentru determinarea accelerațiilor compuse a punctului D_1 se pot rezolva numai pentru punctele dreptei $\Delta_2 = B_2 H_{21}$ (D_1). Din poligonul accelerațiilor avem :

— din construcția accelerației compuse a punctului C_2 (fig. 10 și 11) :

$$\tilde{a}_{C_2} = k_a\,(\widetilde{pc_2}), \tag{105}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\tilde{a}_{C_2B_2}}{i\,\overline{BC}} = k_\varepsilon \frac{(\widetilde{b_2c_2})}{i\,(\overline{BC})},$$

$$\varepsilon_1\overline{AC}\,i + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,\overline{HC}\,i = \tilde{a}_{C_1A_1} + \tilde{a}_{C_{21}} = k_a\,(\widetilde{a_1c_2}),$$

$$\varepsilon_1\,(\overline{AH})\,i + \varepsilon_2\,(\overline{HC})\,i = k_\varepsilon\,(\widetilde{a_1c_2})$$

sau

$$\varepsilon_1\,\overline{AC}\,i + \tilde{a}_{C_{21}} = k_a\,(\widetilde{a_1c_2}),$$

pentru corpuri legate prin cuplă de translație, cînd $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ și se determină $\tilde{a}_{C_{21}}$;

— din construcția accelerației compuse a punctului D_1 (fig. 10 și 11) :

$$\tilde{a}_{D_1} = k_a\,(\widetilde{pd_1}), \tag{106}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\tilde{a}_{D_1A_1}}{i\,\overline{AD}} = k_\varepsilon \frac{(\widetilde{a_1d_1})}{i\,(\overline{AD})},$$

$$\varepsilon_2\,\overline{BD}\,i + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,\overline{HD}\,i = \tilde{a}_{D_2B_2} + \tilde{a}_{D_{12}} = k_a\,(\widetilde{b_2d_1}),$$

$$\varepsilon_2\,(\overline{BH})\,i + \varepsilon_1\,(\overline{HD})\,i = k_\varepsilon\,(\widetilde{b_2d_1})$$

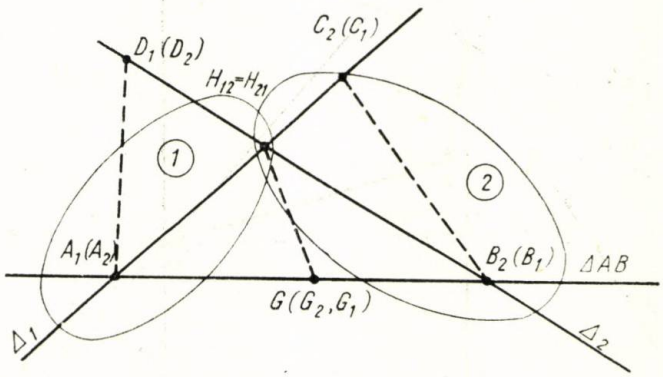


Fig. 10

sau

$$\varepsilon_2\,\overline{BD}\,i = \tilde{a}_{D_{12}} + k_a\,(\widetilde{b_2d_1}).$$

b) Se preferă determinarea deodată a accelerațiilor compuse egale ale punctelor H_1 și H_2 la intersecția dreptelor Δ_1 și Δ_2, mai ales dacă centrul H este la distanță finită convenabilă, deoarece $\tilde{a}_{H_{12}} = \tilde{a}_{H_{21}} = 0$ (fig. 10 și 11)

$$\tilde{a}_{H_1} = \tilde{a}_{H_2} = \underline{\underline{\tilde{a}_{A_2}}} + \underbrace{\tilde{a}_{H_1A_1}}_{\perp AH} = \underline{\underline{\tilde{a}_{B_2}}} + \underbrace{\tilde{a}_{H_2B_2}}_{\perp BH} \tag{107}$$

și deci

$$\tilde{a}_{H_1} = \tilde{a}_{H_2} = k_a(\widetilde{ph_1}) = k_a(\widetilde{ph_2}), \tag{108}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\tilde{a}_{H_1A_1}}{i\overline{AH}} = k_\varepsilon \frac{(\widetilde{a_1h_1})}{i(\overline{AH})},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\tilde{a}_{H_2B_2}}{i\overline{BH}} = k_\varepsilon \frac{(\widetilde{b_2h_2})}{i(\overline{BH})}.$$

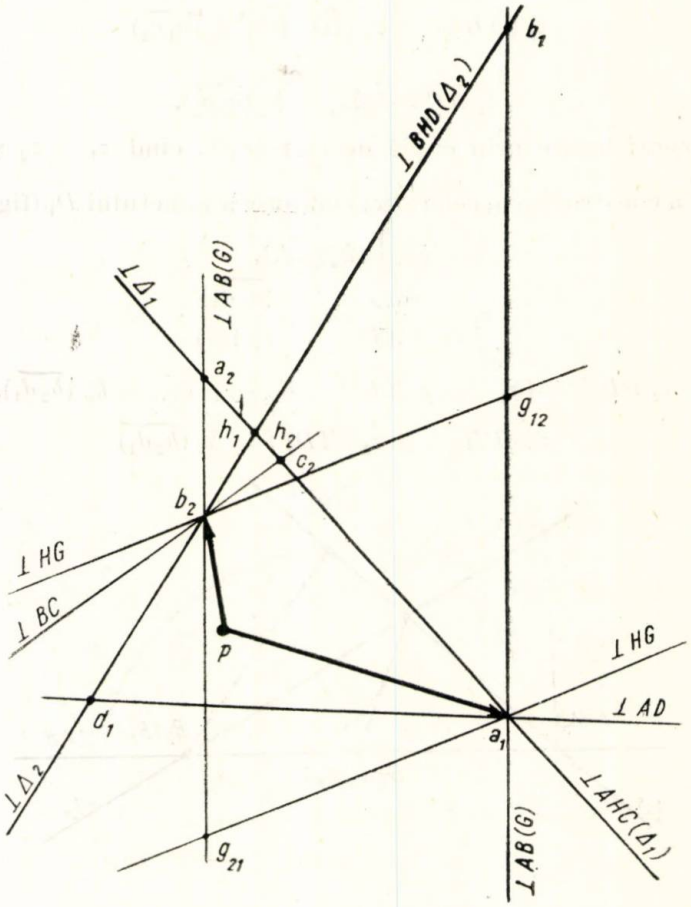


Fig. 11

c) De asemenea se preferă determinarea accelerațiilor compuse ale punctelor B_1 și A_2, corespunzătoare punctelor B_2 și A_1, mai ales dacă centrul $H_{12} = H_{21}$ este aruncat la infinit și deci cele două drepte Δ_1 și Δ_2 sînt paralele perpendiculare pe dreapta translației (fig. 10 și 11):

$$\tilde{a}_{A_2} = \underline{\underline{\tilde{a}_{B_2}}} + \underset{\perp BA}{\tilde{a}_{A_2B_2}} = \underline{\underline{\tilde{a}_{A_1}}} + \underset{\perp HA}{\tilde{a}_{A_{21}}} \tag{109}$$

sau

$$\tilde{a}_{B_1} = \underset{\equiv}{\tilde{a}_{A_1}} + \underset{\perp AB}{\tilde{a}_{B_1A_1}} = \underset{\equiv}{\tilde{a}_{B_2}} + \underset{\perp HB}{\tilde{a}_{B_{12}}} \tag{110}$$

cu următoarele determinări :

$$\tilde{a}_{A_2} = k_a\,(\widetilde{pa_2}), \tag{111}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\tilde{a}_{A_2B_2}}{i\overline{BA}} = k_\varepsilon \frac{(\widetilde{b_2a_2})}{i(\overline{BA})},$$

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{\tilde{a}_{A_{21}}}{i\overline{HA}} = k_\varepsilon \frac{(\widetilde{a_1a_2})}{i(\overline{HA})}$$

și

$$\tilde{a}_{B_1} = k_a\,(\widetilde{pb_1}), \tag{112}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\tilde{a}_{B_1A_1}}{i\overline{AB}} = k_\varepsilon \frac{(\widetilde{a_1b_1})}{i(\overline{AB})},$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{\tilde{a}_{B_{12}}}{i\overline{HB}} = k_\varepsilon \frac{(\widetilde{b_2b_1})}{i(\overline{HB})}.$$

d) Se poate rezolva ecuația vectorială (104) și pentru orice punct G situat pe dreapta AB, fără a afla accelerația compusă a punctului G (fig. 10 și 11) dacă se modifică după cum urmează :

$$\tilde{a}_{G_2} - \underset{\perp AGB}{\tilde{a}_{G_1A_1}} = \underset{\equiv}{\tilde{a}_{B_2}} + \underset{\perp AB\,(G)}{\tilde{a}_{G_2B_2} - \tilde{a}_{G_1A_1}} = \underset{\equiv}{\tilde{a}_{A_1}} + \underset{\perp HG}{\tilde{a}_{G_{21}}}, \tag{113}$$

ceea ce se realizează mai simplu în particular pentru punctele A și B. Se determină

$$\varepsilon_2\,\overline{BG}\,i - \varepsilon_1\overline{AG}\,i = \tilde{a}_{G_2B_2} - \tilde{a}_{G_1A_1} = k_a\,(\widetilde{b_2g_{21}}), \tag{114}$$

$$\varepsilon_2(BG)\,i - \varepsilon_1\,(\overline{AG})\,i = k_\varepsilon(\widetilde{b_2g_{21}}),$$

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,\overline{HG}\,i = \tilde{a}_{G_{21}} = k_a\,(\widetilde{a_1g_{21}}).$$

2.4. *Metoda proiecțiilor.* Plecînd de la ecuația

$$\tilde{a}_{C_2} = \tilde{a}_{C_1} + \tilde{a}_{C_{21}}, \tag{115}$$

în care eventual (pentru cupla de rotație) se poate explicita $\tilde{a}_{C_{21}}$ sub forma

$$\tilde{a}_{C_{21}} = \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{HC} = (\bar{\varepsilon}_2 - \bar{\varepsilon}_1) \times \overline{HC}, \tag{116}$$

avem :

a) proiecțiile accelerațiilor compuse ale punctelor de pe o dreaptă ΔH trecînd prin $H_{12} \equiv H_{21}$ sînt egale pe această dreaptă indiferent cărui corp aparțin punctele (fig. 12)

$$\mathrm{pr}_{\Delta H}\,\tilde{a}_{C_2} = \mathrm{pr}_{\Delta H}\,\tilde{a}_{C_1}. \tag{117}$$

b) Accelerația compusă liniară relativă sau accelerația relativă unghiulară se obține din proiecțiile accelerațiilor compuse ale punctelor de pe dreapta ΔH pe direcția perpendiculară (fig. 12) :

$$\tilde{a}_{C_{21}} = \text{pr.}_{\perp \Delta H}\, \tilde{a}_{C_2} - \text{pr.}_{\perp \Delta H}\, \tilde{a}_{C_1} = k_a\, (\widehat{C_1' C_2'}) \tag{118}$$

și eventual

$$\varepsilon_{21} = \frac{\tilde{a}_{C_{21}}}{i\, HC} = k_\varepsilon \frac{(\widehat{C_1' C_2'})}{i\,(HC)}. \tag{119}$$

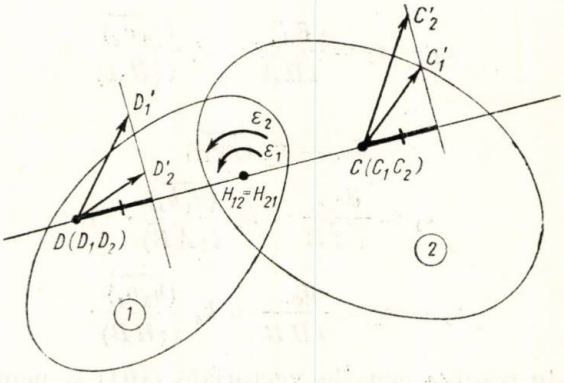


Fig. 12

Pentru distribuția parametrilor cunoscuți sub forma 2 + 2 utilizînd metoda proiecțiilor, aflarea accelerației compuse a punctului C_2 se face cunoscînd proiecția sa pe dreapta Δ_1 egală cu proiecția accelerației compuse a punctului A_1 și proiecția pe dreapta BC egală cu proiecția accelerației compuse a punctului B_2 (fig. 13). La fel se procedează și pentru punctele D_1 sau $H_1 = H_2$ sau A_2 și B_1 sau G_2 și G_1. Pentru determinarea accelerațiilor unghiulare avem :

$$\varepsilon_2 = \frac{\text{pr.}_{\perp BC}\, \tilde{a}_{C_2} - \text{pr.}_{\perp BC}\, \tilde{a}_{B_2}}{i\, BC} = k_\varepsilon \frac{\text{pr.}_{\perp BC}\,(\tilde{a}_{C_2}) - \text{pr.}_{\perp BC}\,(\tilde{a}_{B_2})}{i\,(BC)}, \tag{120}$$

$$\varepsilon_1\, \overline{AH}\, i + \varepsilon_2\, \overline{HC}\, i = \text{pr.}_{\perp \Delta_1}\, \tilde{a}_{C_2} - \text{pr.}_{\perp \Delta_1}\, \tilde{a}_{A_1}$$

sau

$$\varepsilon_1 = \frac{\text{pr.}_{\perp AD}\, \tilde{a}_{D_1} - \text{pr.}_{\perp AD}\, \tilde{a}_{A_1}}{i\, AD} = k_\varepsilon \frac{\text{pr.}_{\perp AD}\,(\tilde{a}_{D_1}) - \text{pr.}_{\perp AD}\,(\tilde{a}_{A_1})}{i\,(AD)}, \tag{121}$$

$$\varepsilon_2\, \overline{BH}\, i + \varepsilon_1\, \overline{HD}\, i = \text{pr.}_{\perp \Delta_2}\, \tilde{a}_{D_1} - \text{pr.}_{\perp \Delta_2}\, \tilde{a}_{B_2}.$$

Se procedează în același fel cînd polul este aruncat la infinit și cele două drepte Δ_1 și Δ_2 sînt paralele. Se preferă atunci determinarea accelerațiilor compuse ale punctelor A_2 și B_1 sau ale punctelor C_2 și D_1 de la intersecția perpendicularelor coborîte din A și B pe dreptele Δ_1 și Δ_2 cu aceste drepte (fig. 14 și 15).

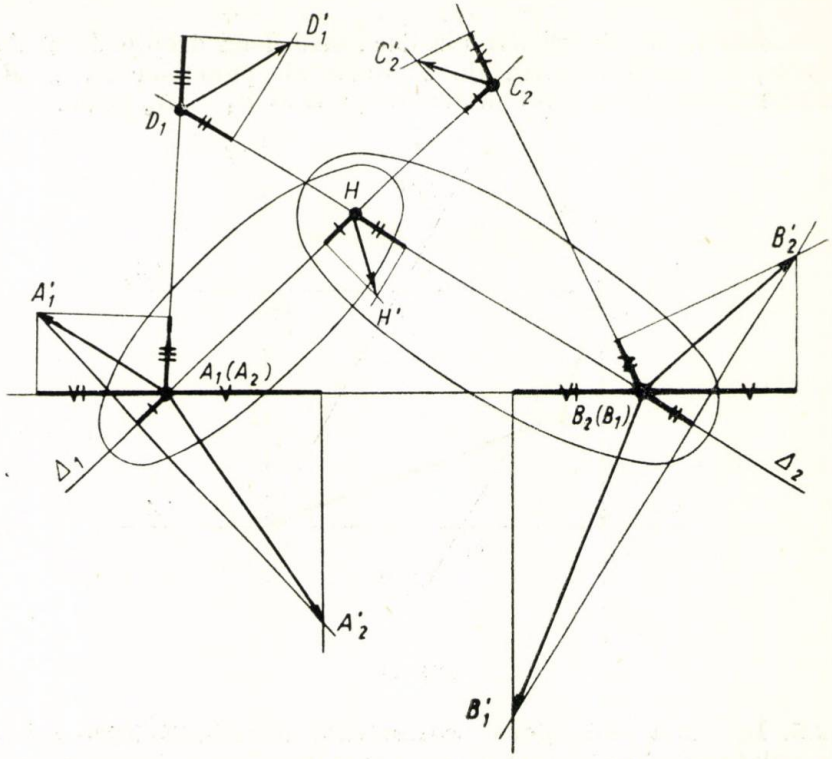

D_1'
C_2'
C_2
D_1
H
B_2'
A_1'
H'
$A_1(A_2)$
$B_2(B_1)$
Δ_1
Δ_2
A_2'
B_1'

Fig. 13

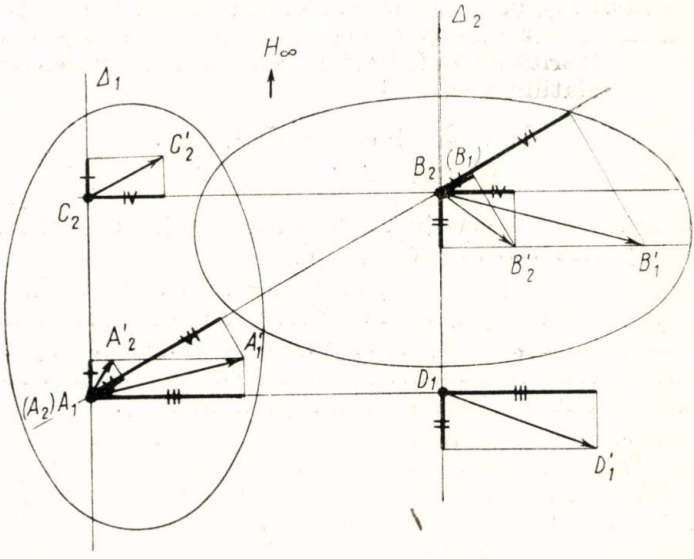

Δ_2
H_∞
Δ_1
C_2'
$B_2(B_1)$
C_2
B_2'
B_1'
A_2'
A_1'
D_1
$(A_2)A_1$
D_1'

Fig. 14

Problema nu este rezolvabilă dacă cele două drepte Δ_1 și Δ_2 sînt suprapuse, deoarece accelerațiile compuse ale punctelor A_1 și B_2 sînt dependente trebuind să aibă proiecțiile pe $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2$ egale.

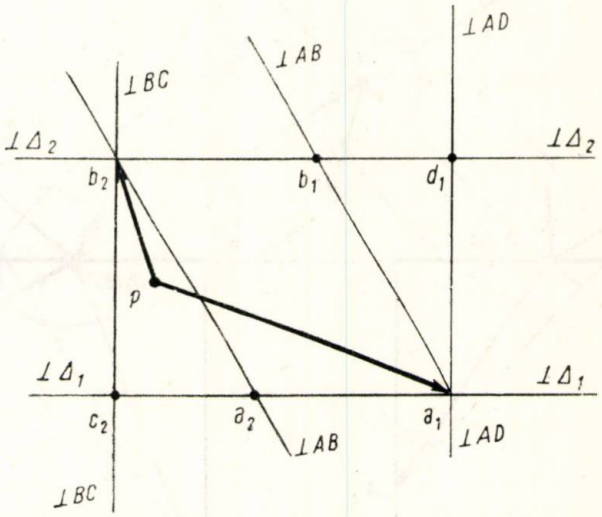


Fig. 15

2.5. În cazul cunoașterii parametrilor distribuiți între cele două corpuri sub forma 3 + 1, primul corp are starea de accelerații cunoscută. În particular se determină accelerația compusă a punctului H_1 egală cu aceea a punctului H_2, astfel că se vor cunoaște trei parametri și pentru corpul al doilea, respectiv $\tilde{a}_{H_2}$ și proiecția accelerației compuse a punctului B_2 pe o direcție diferită de BH. Pentru accelerația compusă a unui punct C_2 se pot scrie relațiile vectoriale

$$\tilde{a}_{C_2} = \underset{\text{pr.}_{\Delta B}\tilde{a}_{B_2}}{\tilde{a}_{B_2}} + \underset{\perp BC}{\tilde{a}_{C_2B_2}} = \underline{\underline{\tilde{a}_{C_1}}} + \underset{\perp HC}{\tilde{a}_{C_{21}}}. \tag{122}$$

Rezolvarea acestei ecuații se face în condiția ca punctul C să se găsească pe suportul ΔB al proiecției $\tilde{a}_{B_2}$.

Utilizînd metoda proiecției, se poate afla accelerația compusă a oricărui punct de pe dreapta ΔB, deoarece se cunosc proiecțiile pe două direcții : odată pe dreapta ΔB, adică $\text{pr.}_{\Delta B}\tilde{a}_{B_2} = \text{pr.}_{\Delta B}\tilde{a}_{C_2}$, și apoi pe dreapta ΔH, care trece prin centrul H, deoarece $\text{pr.}_{\Delta H}\tilde{a}_{C_2} = \text{pr.}_{\Delta H}\tilde{a}_{C_1}$. În particular se poate construi accelerația compusă a punctului B_2.

2.6. Dacă se cunoaște numai dreapta-suport ΔH a centrului instantaneu al accelerațiilor compuse, este necesar pentru determinarea distribuției de accelerații considerarea a încă cinci parametri scalari ce pot fi împărțiți între cele două corpuri sub forma 3 + 2. Se cunoaște deci distribuția de accelerații pentru un corp, iar pentru celălalt numai accelerația unui punct B_2 situat în afara dreptei ΔH. Cunoașterea suportului

ΔH și a accelerațiilor primului corp echivalează cu cunoașterea dreptei $\Delta_1 = \Delta H$, astfel că se poate afla accelerația oricărui punct C_2 situat pe această dreaptă, conform ecuațiilor vectoriale

$$\tilde{a}_{C_2} = \underbrace{\tilde{a}_{B_2}}_{\perp BC} + \underbrace{\tilde{a}_{C_2B_2}}_{\perp BC} = \underbrace{\tilde{a}_{C_1}}_{\perp HC} + \underbrace{\tilde{a}_{C_{21}}}_{\perp HC}, \tag{123}$$

ceea ce face posibilă cunoașterea distribuției de accelerații și pentru corpul al doilea.

2.7. Căutînd a avea același punct caracteristic K pentru ambele corpuri legate prin cupla de rotație în P conform formulelor (97) — (101), centrul instantaneu al accelerațiilor compuse H nu mai este identic cu P, ci se găsește pe o dreaptă perpendiculară la vectorul PK. Se cunoaște astfel dreapta-suport ΔH (P). Cunoscînd accelerațiile compuse ale punctelor A_1 și B_2, se pot face construcțiile vectoriale pentru punctul G, aflat la intersecția dreptei ΔH cu dreapta AB (fig. 16 *a*) după relațiile (113) — (114) și figurile 10—11. Se determină astfel accelerația compusă relativă $\tilde{a}_{G_{21}}$, după care urmează:

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2)\,\overline{PK} = \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{HP}, \tag{124}$$

$$\tilde{a}_{G_{21}} = \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{HG}, \tag{125}$$

obținîndu-se pentru mărimile vectorilor proporționalitatea

$$\frac{(\omega_1^2 - \omega_2^2)\,PK}{a_{G_{21}}} = \frac{HP}{HG}, \tag{126}$$

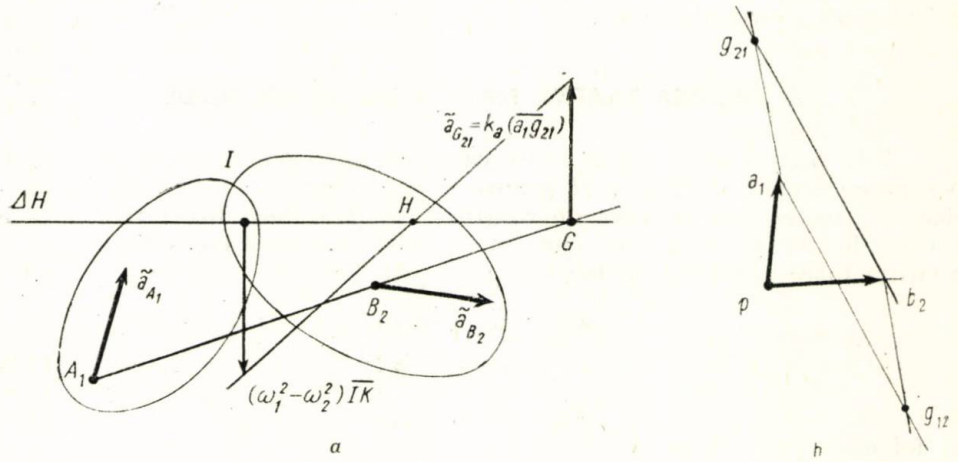


Fig. 16

din care se poate determina centrul H la intersecția dreptei ΔH cu dreapta extremităților vectorilor $(\omega_1^2 - \omega_2^2)\,\overline{PK}$ și $\tilde{a}_{G_{21}}$ (fig. 16 *a* și 16 *b*). Se determină ε_{21} și apoi ε_1 și ε_2 din relațiile (114).

2.8. În concluzia primelor două capitole se menționează că, dacă se introduc punctele caracteristice K cu care se permite definirea accelerațiilor compuse, relațiile de compunere ale acestora sînt :

— relația accelerațiilor compuse dintre două puncte A și B ale aceluiași corp :

$$\tilde{a}_B = \tilde{a}_A + \tilde{a}_{BA}, \tag{127}$$

în care

$$\tilde{a}_{BA} = \bar{a}^t_{BA} = \bar{\varepsilon} \times \overline{AB}, \tag{128}$$
$$\tilde{a}_A = \bar{a}_A + \omega^2 \overline{KA},$$
$$\tilde{a}_B = \bar{a}_B + \omega^2 \overline{KB};$$

— relația accelerațiilor compuse ale punctelor C_1 și C_2 legate de corpuri diferite, dar confundate în același punct geometric C :

$$\tilde{a}_{C_2} = \tilde{a}_{C_1} + \tilde{a}_{C_{21}}, \tag{129}$$

în care

$$\tilde{a}_{C_{21}} = \bar{a}^{rt}_{C_{21}} = \bar{\varepsilon}_{21} \times \overline{HC}, \tag{130}$$
$$\tilde{a}_{C_1} = \bar{a}_{C_1} + \omega_1^2 \overline{K_1 C},$$
$$\tilde{a}_{C_2} = \bar{a}_{C_2} + \omega_2^2 \overline{K_2 C}$$

și unde K_1 și K_2 sînt legate prin relațiile date la paragraful 2.1 iar H este centrul instantaneu relativ al accelerațiilor compuse (care poate fi oricare punct, dar care este preferabil să fie confundat cu I). Astfel modificate, relațiile de compunere ale accelerațiilor compuse sînt analoge relațiilor de compunere ale vitezelor.

3. MIȘCAREA RELATIVĂ PLANĂ A TREI SOLIDE RIGIDE

3.1. La trei solide rigide în mișcare plană, în general nu se păstrează pentru centrele instantanee H proprietatea de colinearitate care caracterizează centrele instantanee de rotație I. Astfel, dacă luăm trei puncte $C_1C_2C_3$ legate de cele trei corpuri în mișcare plană confundate în C, relațiile între accelerațiile lor compuse sînt

$$\tilde{a}_{C_2} = \tilde{a}_{C_1} + \tilde{a}_{C_{21}},$$
$$\tilde{a}_{C_3} = \tilde{a}_{C_2} + \tilde{a}_{C_{32}}, \tag{131}$$
$$\tilde{a}'_{C_1} = \tilde{a}_{C_3} + \tilde{a}_{C_{13}},$$

astfel că

$$\tilde{a}'_{C_1} - \tilde{a}_{C_1} = \tilde{a}_{C_{21}} + \tilde{a}_{C_{32}} + \tilde{a}_{C_{13}} \neq 0. \tag{132}$$

De altfel (18) avem

$$\overline{T} = \tilde{a}'_{C_1} - \tilde{a}_{C_1} = \tilde{a}'_{C_2} - \tilde{a}_{C_2} = \tilde{a}'_{C_3} - \tilde{a}_{C_3}, \tag{133}$$

$$\overline{T} = -\omega_1^2 \overline{K_1 K'_1} = -\omega_2^2 \overline{K_2 K'_2} = -\omega_3^2 \overline{K_3 K'_3}, \tag{134}$$

în care

$$\overline{T} = \tilde{a}_{C_{21}} + \tilde{a}_{C_{32}} + \tilde{a}_{C_{13}} \neq 0. \tag{135}$$

Într-adevăr, trecînd consecutiv de la corpurile 1 la 2 și 3 și reîntorcîndu-ne la primul, în general nu se capătă același punct caracteristic $K_1' \neq K_1$, astfel că și sistemele de accelerații compuse sînt diferite, $\tilde{a}'_{C_1} \neq \neq \tilde{a}_{C_1}$. Aceeași situație se prezintă pentru oricare din corpuri : $K_2' \neq K_2$ și $K_3' \neq K_3$ și deci $\tilde{a}'_{C_2} \neq \tilde{a}_{C_2}$ sau $\tilde{a}'_{C_3} \neq \tilde{a}_{C_3}$. Diferența accelerațiilor compuse corespunzătoare punctelor caracteristice diferite este aceeași pentru orice corp și egală cu vectorul de translație $\overline{T}$ (18), (135).

Reluînd cazul general (78), dar cu centrele I la distanță finită, avem

$$\begin{aligned} \omega_2^2 \overline{I_{12} K_2} &= \omega_1^2 \overline{I_{12} K_1} + \overline{a}^r_{I_{21}} + \overline{\varepsilon}_{21} \times \overline{I_{12} H_{12}}, \\ \omega_3^2 \overline{I_{23} K_3} &= \omega_2^2 \overline{I_{23} K_2} + \overline{a}^r_{I_{32}} + \overline{\varepsilon}_{32} \times \overline{I_{23} H_{23}}, \\ \omega_1^2 \overline{I_{31} K_1'} &= \omega_3^2 \overline{I_{31} K_3} + \overline{a}^r_{I_{13}} + \overline{\varepsilon}_{13} \times \overline{I_{31} H_{31}}, \end{aligned} \tag{136}$$

dar

$$\begin{aligned} \overline{I_{12} K_2} &= \overline{I_{12} I_{23}} + \overline{I_{23} K_2}, \\ \overline{I_{23} K_3} &= \overline{I_{23} I_{31}} + \overline{I_{31} K_3}, \\ \overline{I_{31} K_1'} &= \overline{I_{31} I_{12}} + \overline{I_{12} K_1} + \overline{K_1 K_1'}, \end{aligned} \tag{137}$$

și deci prin înlocuire în (136) și apoi însumare avem

$$\begin{aligned} \overline{T} = - \omega_1^2 \overline{K_1 K_1'} &= \omega_1^2 \overline{I_{31} I_{12}} + \omega_2^2 \overline{I_{12} I_{23}} + \omega_3^2 \overline{I_{23} I_{31}}, \\ - \overline{a}^r_{I_{21}} - \overline{a}^r_{I_{32}} - \overline{a}^r_{I_{13}} - \overline{\varepsilon}_{21} \times \overline{I_{12} H_{12}} - \overline{\varepsilon}_{32} \times \overline{I_{23} H_{23}} - \overline{\varepsilon}_{13} \times \overline{I_{31} H_{31}}, \end{aligned} \tag{138}$$

relație care se mai simplifică dacă centrele H se confundă cu I, dar care în general duce la $\overline{T} \neq 0$.

De asemenea după relația (135) rezultă

$$\begin{aligned} \overline{T} &= \overline{\varepsilon}_{21} \times \overline{H_{21} C} + \overline{\varepsilon}_{32} \times \overline{H_{32} C} + \overline{\varepsilon}_{13} \times \overline{H_{13} C} = \\ &= \overline{\varepsilon}_1 \times \overline{H_{13} H_{21}} + \overline{\varepsilon}_2 \times \overline{H_{21} H_{32}} + \overline{\varepsilon}_3 \times \overline{H_{32} H_{13}}. \end{aligned} \tag{139}$$

Din egalarea (138) cu (139) se obține

$$\begin{aligned} \omega_1^2 \overline{I_{31} I_{12}} + \omega_2^2 \overline{I_{12} I_{23}} + \omega_3^2 \overline{I_{23} I_{31}} &= \overline{a}^r_{I_{21}} + \overline{a}^r_{I_{32}} + \overline{a}^r_{I_{13}} + \\ + \overline{\varepsilon}_1 \times \overline{I_{31} I_{12}} + \overline{\varepsilon}_2 \times \overline{I_{12} I_{23}} + \overline{\varepsilon}_3 \times \overline{I_{23} I_{31}}, \end{aligned} \tag{140}$$

relație verificată și direct din valorile accelerațiilor $\overline{a}_{I_1}$, $\overline{a}_{I_2}$ și $\overline{a}_{I_3}$.

Se poate avea însă și $\overline{T} = 0$ dacă se aleg punctele caracteristice K sau centrele H în mod convenabil, astfel ca

$$\begin{aligned} \omega_1^2 \overline{I_{31} I_{12}} + \omega_2^2 \overline{I_{12} I_{23}} + \omega_3^2 \overline{I_{23} I_{31}} &= \overline{a}^r_{I_{21}} + \overline{a}^r_{I_{32}} + \overline{a}^r_{I_{13}} + \\ + \overline{\varepsilon}_{21} \times \overline{I_{12} H_{12}} + \overline{\varepsilon}_{32} \times \overline{I_{23} H_{23}} + \overline{\varepsilon}_{13} \times \overline{I_{31} H_{31}}, \end{aligned} \tag{141}$$

în care se poate urmări și condiția ca punctele caracteristice K să fie confundate $K_1 \equiv K_2 \equiv K_3$. Rezultă astfel:

$$\overline{T} = \tilde{a}_{C_{21}} + \tilde{a}_{C_{32}} + \tilde{a}_{C_{13}} =$$
$$= \bar{\varepsilon}_1 \times \overline{H_{13}H_{21}} + \bar{\varepsilon}_2 \times \overline{H_{21}H_{32}} + \bar{\varepsilon}_3 \times \overline{H_{31}H_{13}} = 0. \qquad (142)$$

Dar, avînd

$$\overline{H_{13}H_{21}} + \overline{H_{21}H_{32}} + \overline{H_{32}H_{13}} = 0, \qquad (143)$$

prin înmulțire cu ε_3 și scădere se capătă

$$\bar{\varepsilon}_{13} \times \overline{H_{13}H_{21}} + \bar{\varepsilon}_{23} \times \overline{H_{21}H_{32}} = 0, \qquad (144)$$

de unde rezultă colinearitatea celor trei centre relative ale accelerațiilor compuse H_{12}, H_{23}, H_{31} pentru această situație.

3.2. *Distribuția accelerațiilor compuse* [17], [18]. Se consideră cunoscute centrele instantanee relative H_{12} și H_{23}, astfel că pentru determinarea accelerațiilor compuse mai trebuie cunoscuți $p_3 = 3n - 2c = 5$, parametri scalari compatibili și independenți, care pot fi împărțiți între cele trei corpuri sub formele $3 + 0 + 2$ sau $2 + 1 + 2$. S-au reținut numai cazurile independente de cele studiate anterior, respectiv ca numărul de parametri cunoscuți pentru un corp să fie maxim trei, iar pentru două corpuri alăturate să fie mai mic de patru.

3.3. *Metoda poligoanelor asemenea.* Pornind de la cunoașterea a cîte doi parametri pentru corpurile extreme, respectiv accelerațiile compuse ale punctelor A_1 și B_3, se poate determina acceleratia compusă a unui punct C_2 din elementul al doilea — punct particular — obținut la intersecția dreptelor $\Delta_1 = A_1H_{12}(C_2)$ și $\Delta_3 = B_3H_{32}(C_2)$ (fig. 17 *a* și 17 *b*). În adevăr, relațiile vectoriale sînt

$$\tilde{a}_{C_1} = \tilde{a}_{A_1} + \tilde{a}_{C_1A_1}; \qquad \tilde{a}_{C_2} = \tilde{a}_{C_1} + \tilde{a}_{C_{21}};$$
$$\tilde{a}_{C_3} = \tilde{a}_{B_3} + \tilde{a}_{C_3B_3}; \qquad \tilde{a}_{C_2} = \tilde{a}_{C_3} + \tilde{a}_{C_{23}}, \qquad (145)$$

astfel că

$$\tilde{a}_{C_2} = \underbrace{\underline{\tilde{a}_{A_1}} + \underbrace{\tilde{a}_{C_1A_1}}_{\perp AC} + \underbrace{\tilde{a}_{C_{21}}}_{\perp H_{12}C}}_{\perp \Delta_1} = \underbrace{\underline{\tilde{a}_{B_3}} + \underbrace{\tilde{a}_{C_3B_3}}_{\perp BC} + \underbrace{\tilde{a}_{C_{23}}}_{\perp H_{23}C}}_{\perp \Delta_3}, \qquad (146)$$

relație în care cele patru necunoscute sînt grupate cîte două, după direcțiile $\perp \Delta_1$ și $\perp \Delta_3$.

Se obține (fig. 17 *b*):

$$\begin{aligned}
&\tilde{a}_{C_2} = k_a\,\widetilde{(p\,c_2)},\\
&\varepsilon_1\,\overline{AC}\,i + \varepsilon_{21}\,\overline{H_{21}C}\,i = \tilde{a}_{C_1A_1} + \tilde{a}_{C_{21}} = k_a\,\widetilde{(a_1c_2)},\\
&\varepsilon_1\,\overline{(AH_{12})}\,i + \varepsilon_2\,\overline{(H_{12}C)}\,i = k_\varepsilon\,\widetilde{(a_1c_2)}, \qquad (147)\\
&\varepsilon_3\,\overline{BC}\,i + \varepsilon_{23}\,\overline{H_{23}C}\,i = \tilde{a}_{C_3B_3} + \tilde{a}_{C_{23}} = k_a\,\widetilde{(b_3c_2)},\\
&\varepsilon_3\,\overline{(BH_{32})}\,i + \varepsilon_2\,\overline{(H_{32}C)}\,i = k_\varepsilon\,\widetilde{(b_3c_2)},
\end{aligned}$$

avînd totodată și două legături între cele trei accelerații unghiulare ε_1, ε_2, ε_3.

Dacă parametrii cunoscuți sînt distribuiți sub forma $3 + 0 + 2$, atunci se pot duce o infinitate de drepte Δ_1 ceea ce conduce la aflarea distribuției de accelerații pentru corpul al doilea și apoi pentru al treilea.

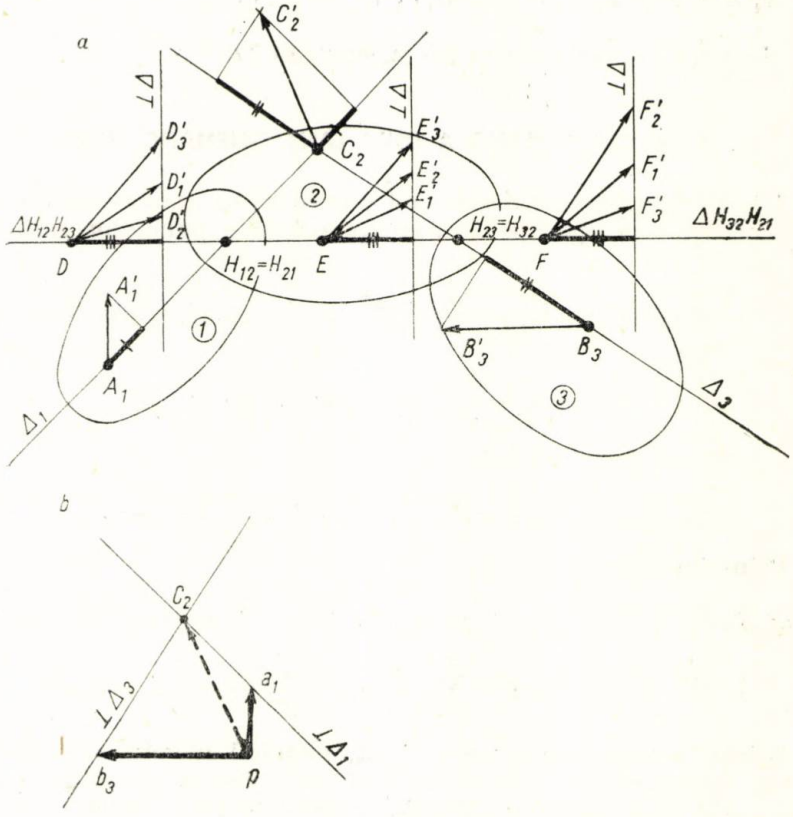


Fig. 17

Dacă parametrii cunoscuți sînt distribuiți sub forma $2 + 1 + 2$, odată determinată accelerația punctului C_2 și cunoscînd încă o proiecție de accelerație pentru alt punct D_2 pe o direcție diferită de DC, atunci se determină distribuția de accelerații în corpul al doilea și apoi respectiv în primul și în al treilea.

3.4. *Metoda proiecțiilor.* Proprietățile proiecțiilor accelerațiilor compuse (117—121) se extind și la mișcarea relativă a trei corpuri pentru punctele dreptei $\Delta H_{12}H_{23}$ legate de oricare din corpuri (fig. 17 *a*):

$$\text{pr.}_{\Delta}\ \tilde{a}_{D_3} = \text{pr.}_{\Delta}\ \tilde{a}_{D_2} = \text{pr.}_{\Delta}\ \tilde{a}_{D_1} \tag{148}$$

și

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{D_{21}} &= \varepsilon_{21}\cdot\overline{H_{21}D}\ i = \text{pr.}_{\perp\Delta}\ \tilde{a}_{D_2} - \text{pr.}_{\perp\Delta}\ \tilde{a}_{D_1}, \\ \tilde{a}_{D_{23}} &= \varepsilon_{23}\cdot\overline{H_{23}D}\ i = \text{pr.}_{\perp\Delta}\ \tilde{a}_{D_2} - \text{pr.}_{\perp\Delta}\ \tilde{a}_{D_3}. \end{aligned} \tag{149}$$

Utilizînd metoda proiecţiilor, acceleraţia compusă a punctului C_2 se determină prin două proiecţii cunoscute (fig. 17 *a*) odată pe dreapta Δ_1, deoarece $\text{pr.}_{\Delta_1} \bar{a}_{C_2} = \text{pr.}_{\Delta_1} \bar{a}_{A_1}$, şi apoi pe dreapta Δ_3, deoarece $\text{pr.}_{\Delta_3} \bar{a}_{C_2} = \text{pr.}_{\Delta_3} \bar{a}_{B_3}$. Pentru acceleraţiile unghiulare obţinem

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \overline{AH_{12}} i + \varepsilon_2 \overline{H_{12}C}\, i &= \text{pr.}_{\perp\Delta_1} \bar{a}_{C_2} - \text{pr.}_{\perp\Delta_1} \bar{a}_{A_1}, \\ \varepsilon_3 \overline{BH_{23}} i + \varepsilon_2 \overline{H_{23}C}\, i &= \text{pr.}_{\perp\Delta_3} \bar{a}_{C_2} - \text{pr.}_{\perp\Delta_3} \bar{a}_{B_3}. \end{aligned} \tag{150}$$

4. MIŞCAREA PLANĂ A UNUI LANŢ CINEMATIC SIMPLU

4.1. Pentru un lanţ deschis cu n corpuri se aplică relaţiile de legătură care dau din aproape în aproape poziţiile punctelor caracteristice K_S $(S = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\omega_{S+1}^2 \overline{I_{S,\,S+1}\, K_{S+1}} = \omega_S^2 \overline{I_{S,\,S+1}\, K_S} + \bar{a}^2_{I_{S+1,\,S}} + \bar{\varepsilon}_{S+1,\,S} \times \overline{I_{S,\,S+1}\, H_{S,\,S+1}}, \tag{151}$$

în care

$$\overline{I_{S,\,S+1}\, K_{S+1}} = \overline{I_{S,\,S+1}\, K_S} + \overline{K_S\, K_{S+1}} \tag{152}$$

sau

$$\overline{I_{S-1,\,S}\, K_{S+1}} = \overline{I_{S,\,S+1}\, K_{S+1}} + \overline{I_{S-1,\,S}\, I_{S,\,S+1}}\,. \tag{153}$$

Prin însumare se obţine

$$\begin{aligned} &\omega_1^2 \overline{K_1 I_{12}} + \omega_2^2 \overline{I_{12} I_{23}} + \omega_3^2 \overline{I_{23} I_{34}} + \ldots + \omega_S^2 \overline{I_{S-1,\,S} I_{S,\,S+1}} + \\ &+ \omega_{S+1}^2 \overline{I_{S,\,S+1}\, K_{S+1}} = \sum_{\sigma=1}^{S} \bar{a}^r_{I_{\sigma+1,\sigma}} + \sum_{\sigma=1}^{S} \bar{\varepsilon}_{\sigma+1,\sigma} \times \overline{I_{\sigma+1,\sigma}\, H_{\sigma+1,\sigma}}\,. \end{aligned} \tag{154}$$

Ultima relaţie are avantajul că, neavînd nevoie să se determine punctele caracteristice intermediare, îl poziţionează direct pe K_{S+1}, mai ales în cazul cînd, una din vitezele unghiulare intermediare fiind foarte mică ($\simeq 0$), aceasta ar putea conduce la un punct caracteristic respectiv, situat la mare depărtare în afara desenului.

În cazurile practice se va urmări ca centrele H ale acceleraţiilor compuse să se confunde cu centrele permanente de rotaţie P la distanţă finită (cuple de rotaţie). Deci relaţia (154) se simplifică, obţinîndu-se

$$\omega_1^2 \overline{K_1 P_{12}} + \omega_2^2 \overline{P_{12} P_{23}} + \ldots + \omega_{S+1}^2 \overline{P_{S,\,S+1} K_{S+1}} = 0, \tag{155}$$

relaţie a cărei construcţie grafică este un poligon închis cu laturile paralele cu laturile conturului poligonal deschis $K_1 P_{12} P_{23}, \ldots, K_{S+1}$(fig. 18 *a* şi 18 *b*).

Dacă în lanţul cinematic există corpuri legate prin cuple de translaţie $\omega_k = \omega_{k+1}$ şi $P_{k,k+1} \to \infty$, prin egalarea vitezelor unghiulare respective se elimină centrul aruncat la infinit şi totodată şi nedeterminarea

respectivă prin apariția termenului suplimentar de accelerație Coriolis (59) corespunzător :

$$\omega_k^2 \overline{P_{k-1,k} P_{k,k+1,\infty}} + \omega_{k+1}^2 \overline{P_{k,k+1,\infty} P_{k+1,k+2}} = \\ = \omega_k^2 \overline{P_{k-1,k} P_{k+1,k+2}} - \bar{a}_{k,k+1}^{cr}. \qquad (156)$$

Se obține deci

$$\omega_1^2 \overline{K_1 P_{12}} + \omega_2^2 \overline{P_{12} P_{23}} + \ldots + \\ + \omega_k^2 \overline{P_{k-1,k} P_{k+1,k+2}} + \\ + \omega_{S+1}^2 \overline{P_{S,S+1} K_{S+1}} = \sum{}' \bar{a}_{k,k+1}^{cr}, \qquad (157)$$

suma din partea a doua extinzîndu-se numai pentru corpurile legate prin cuple de translație.

4.2. Pentru un lanț cinematic simplu închis, la o parcurgere a sa se obține $K_{n+1} = K_1' \neq K_1$, punctul caracteristic K_1' diferit de K_1, ceea ce s-ar fi realizat și pentru orice alt corp al lanțului socotit ca inițial. Cele două sisteme de accelerații compuse corespunzătoare punctelor K și K' diferă prin translația de vector :

$$\overline{T} = -\omega_1^2 \overline{K_1 K_1'} = -\omega_2^2 \overline{K_2 K_2'} = \\ = \omega_1^2 \overline{P_{n,1} P_{12}} + \omega_2^2 \overline{P_{12} P_{23}} + \ldots + \\ + \omega_n^2 \overline{P_{n-1,n} P_{n,1}} \neq 0, \qquad (158)$$

iar dacă avem și cuple de translație :

$$\overline{T} = \omega_1^2 \overline{P_{n,1} P_{12}} + \ldots + \\ + \omega_k^2 \overline{P_{k-1,k} P_{k+1,k+2}} + \ldots + \\ + \omega_n^2 \overline{P_{n-1,n} P_{n,1}} - \sum{}' \bar{a}_{k,k+1}^{cr}. \qquad (159)$$

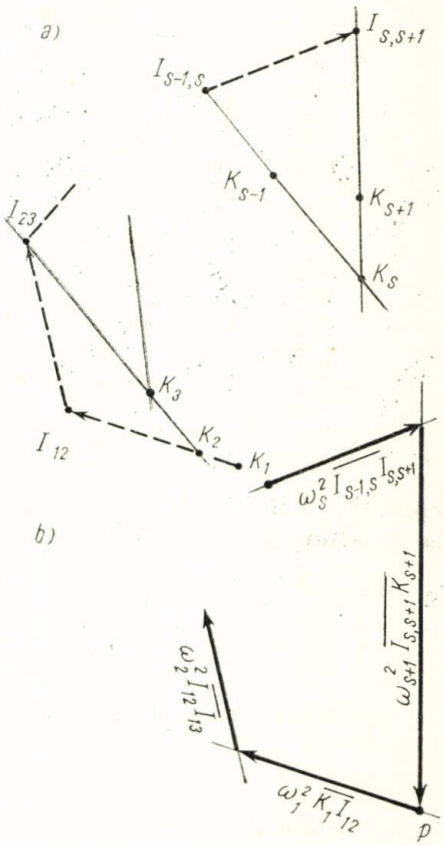


Fig. 18

4.3. *Mișcarea relativă plană a patru solide rigide* [17], [18]. Fiind cunoscute centrele instantanee H_{12}, H_{23} și H_{34}, pentru determinarea accelerațiilor compuse mai trebuie cunoscuți $p_4 = 3n - 2c = 6$ parametri scalari, care pot fi împărțiți între corpurile lanțului sub formele $3 + 0 + 0 + 3$, $3 + 0 + 1 + 2$ și $2 + 1 + 1 + 2$. Aceste forme nu se pot reduce la cazurile anterioare, deoarece s-a urmărit ca numărul de parametri cunoscuți să fie mai mic de trei pentru un corp, mai mic de patru pentru două corpuri alăturate și mai mic de cinci pentru trei corpuri consecutive.

Dacă se pornește de la cunoașterea a cîte doi parametri pentru corpurile extreme, respectiv accelerațiile compuse ale punctelor A_1 și B_4 se poate afla accelerația punctului C_2 de la intersecția dreptei $\Delta_1 = A_1H_{12}\,(C_2)$ cu $\Delta H_{23}H_{34}B_4$ dacă punctul B_4 se află pe această dreaptă. De asemenea se poate afla accelerația punctului D_3 de la intersecția

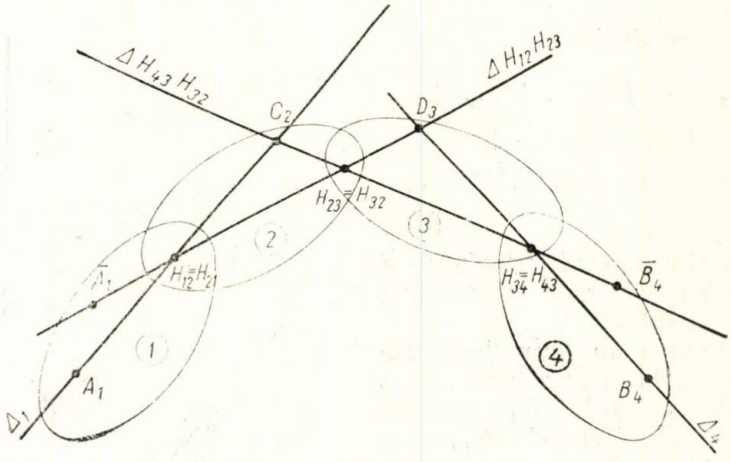


Fig. 19

dreptei $\Delta_4 = B_4H_{43}\,(D_3)$ cu dreapta $\Delta A_1H_{12}H_{23}\,(D_3)$ dacă punctul A_1 se află pe ultima dreaptă (fig. 19). Ecuațiile vectoriale utilizate sînt

$$\tilde{a}_{C_2} = \underline{\underline{\tilde{a}_{A_1}}} + \underbrace{\underbrace{\tilde{a}_{C_1A_1}}_{\perp AC} + \underbrace{\tilde{a}_{C_{21}}}_{\perp H_{21}C}}_{\perp \Delta_1} = \underline{\underline{\tilde{a}_{B_4}}} + \underbrace{\underbrace{\tilde{a}_{C_4B_4}}_{\perp BC} + \underbrace{\tilde{a}_{C_{34}}}_{\perp H_{34}C} + \underbrace{\tilde{a}_{C_{23}}}_{\perp H_{23}C}}_{\perp\, \Delta B_4H_{43}H_{32}} \tag{160}$$

$$\tilde{a}_{D_3} = \underline{\underline{\tilde{a}_{A_1}}} + \underbrace{\underbrace{\tilde{a}_{D_1A_1}}_{\perp AD} + \underbrace{\tilde{a}_{D_{21}}}_{\perp H_{12}D} + \underbrace{\tilde{a}_{D_{32}}}_{\perp H_{23}D}}_{\perp\, \Delta A_1H_{12}H_{23}} = \underline{\underline{\tilde{a}_{B_4}}} + \underbrace{\underbrace{\tilde{a}_{D_4B_4}}_{\perp BD} + \underbrace{\tilde{a}_{D_{34}}}_{\perp H_{34}D}}_{\perp \Delta_4}. \tag{161}$$

Cu ajutorul metodei poligoanelor de accelerații compuse, construite la fel ca în cazul a două corpuri, obținem

$$\begin{aligned}
&\tilde{a}_{C_2} = k_a\,(\widetilde{pc_2}),\\
&\varepsilon_1\overline{AC}\,i + \varepsilon_{21}\overline{H_{12}C}\,i = \tilde{a}_{C_1A_1} + \tilde{a}_{C_{21}} = k_a\,(\widetilde{a_1c_2}),\\
&\varepsilon_1(\overline{AH_{12}})\,i + \varepsilon_2(\overline{H_{12}C})\,i = k_\varepsilon\,(\widetilde{a_1c_2}),\\
&\varepsilon_4\overline{BC}\,i + \varepsilon_{34}\overline{H_{34}C}\,i + \varepsilon_{23}\overline{H_{23}C}\,i = \tilde{a}_{C_4B_4} + \tilde{a}_{C_{34}} + \tilde{a}_{C_{23}} = k_a\,(\widetilde{b_4c_2}),\\
&\varepsilon_4(\overline{BH_{34}})\,i + \varepsilon_3(\overline{H_{34}H_{23}})\,i + \varepsilon_2(\overline{H_{23}C})\,i = k_\varepsilon\,(\widetilde{b_4c_2})
\end{aligned} \tag{162}$$

sau

$$\tilde{a}_{D_3} = k_a\,(\widetilde{pd_3}), \tag{163}$$

$$\varepsilon_4\,\overline{BD}\,i + \varepsilon_{34}\,\overline{H_{34}D}\,i = \tilde{a}_{D_4B_4} + \tilde{a}_{D_{34}} = k_a\,(\widetilde{b_4d_3}),$$

$$\varepsilon_4\,(\overline{BH_{34}})\,i + \varepsilon_3\,(\overline{H_{34}D})\,i = k_\varepsilon\,(\widetilde{b_4d_3}),$$

$$\varepsilon_1\,\overline{AD}\,i + \varepsilon_{21}\,\overline{H_{12}D}\,i + \varepsilon_{32}\,\overline{H_{23}D}\,i = \tilde{a}_{D_1A_1} + \tilde{a}_{D_{21}} + \tilde{a}_{D_{32}} = k_a\,(\widetilde{a_1d_3}),$$

$$\varepsilon_1\,(\overline{AH_{12}})\,i + \varepsilon_2\,(\overline{H_{12}H_{23}})\,i + \varepsilon_3\,(\overline{H_{23}D})\,i = k_\varepsilon\,(\widetilde{a_1d_3}).$$

Utilizînd metoda proiecțiilor, se determină accelerațiile compuse ale punctelor C_2 și D_3, cunoscîndu-se proiecțiile lor pe dreptele care se intersectează în aceste puncte:

$$\text{pr.}_{\Delta_1}\tilde{a}_{C_2} = \text{pr.}_{\Delta_1}\tilde{a}_{A_1};\ \text{pr.}_{\Delta H_{23}H_{34}}\tilde{a}_{C_2} = \text{pr.}_{\Delta H_{23}H_{34}}\tilde{a}_{B_4}; \tag{164}$$

$$\text{pr.}_{\Delta_4}\tilde{a}_{D_3} = \text{pr.}_{\Delta_4}\tilde{a}_{B_4};\ \text{pr.}_{\Delta H_{12}H_{23}}\tilde{a}_{D_3} = \text{pr.}_{\Delta H_{12}H_{23}}\tilde{a}_{A_1}.$$

De asemenea se obțin relațiile

$$\varepsilon_1\,\overline{AH_{12}}\,i + \varepsilon_2\,\overline{H_{12}C}\,i = \text{pr.}_{\perp\Delta_1}\tilde{a}_{C_2} - \text{pr.}_{\perp\Delta_1}\tilde{a}_{A_1}, \tag{165}$$

$$\varepsilon_4\,\overline{BH_{34}}\,i + \varepsilon_3\,\overline{H_{34}H_{23}}\,i + \varepsilon_2\,\overline{H_{23}C}\,i = \text{pr.}_{\perp\Delta H_{23}H_{34}}\tilde{a}_{C_2} - \text{pr.}_{\perp\Delta H_{23}H_{34}}\tilde{a}_{B_4}$$

și

$$\varepsilon_4\,\overline{BH_{43}}\,i + \varepsilon_3\,\overline{H_{43}D}\,i = \text{pr.}_{\perp\Delta_4}\tilde{a}_{D_3} - \text{pr.}_{\perp\Delta_4}\tilde{a}_{B_4} \tag{166}$$

$$\varepsilon_1\,\overline{AH_{12}}\,i + \varepsilon_2\,\overline{H_{12}H_{23}}\,i + \varepsilon_3\,\overline{H_{23}D}\,i = \text{pr.}_{\perp\Delta H_{12}H_{23}}\tilde{a}_{D_3} - \text{pr.}_{\perp\Delta H_{12}H_{23}}\tilde{a}_{A_1}.$$

Pentru parametrii cunoscuți sub forma $3 + 0 + 0 + 3$ se pot determina accelerațiile compuse ale punctelor C_2 și D_3, deoarece întotdeauna sînt puncte A_1 și B_4 care se găsesc pe dreptele $\Delta H_{12}H_{23}$ și $\Delta H_{43}H_{32}$. Apoi din studiul celor două corpuri centrale se cunosc accelerațiile compuse a două puncte (C_2 și D_3) se pot determina complet distribuțiile de accelerații. De altfel sînt cunoscute și accelerațiile compuse ale punctelor H_2 din centrul H_{12} și H_3 din centrul H_{34}.

În cazul parametrilor cunoscuți sub forma $3 + 0 + 1 + 2$ se permite determinarea directă a accelerației punctului D_3 și apoi distribuția de accelerații pentru corpul al treilea, după care distribuția de accelerații pentru corpurile 2 și 4 se reduce la cazurile studiate anterior.

Dacă parametrii cunoscuți sînt împărțiți sub forma $2 + 1 + 1 + 2$, atunci din studiul mișcării primelor sau ultimelor două corpuri cu parametrii $2 + 1$ sau $1 + 2$ se pot obține direct accelerațiile compuse a două puncte din corpurile centrale așezate pe dreptele Δ_1 și Δ_4, astfel că ulterior, avînd împărțirea parametrilor cunoscuți sub forma $2 + 2$, determinarea accelerațiilor compuse este ușor rezolvabilă.

4.4. *Mișcarea relativă plană a cinci solide rigide* [17], [18]: Se consideră cunoscute centrele H_{12}, H_{23}, H_{34}, H_{45}, astfel că pentru determinarea accelerațiilor mai trebuie cunoscuți $p_5 = 3n - 2c = 7$ parametri scalari. Împărțirea lor între cele cinci corpuri poate fi făcută sub formele $3 + 0 + 1 + 0 + 3$, $2 + 1 + 1 + 1 + 2$ și $2 + 1 + 1 + 0 + 3$, avîn-

du-se în vedere ca numărul de parametri cunoscuți să fie maximum trei pentru un corp, mai mic de patru pentru două corpuri alăturate, mai mic de cinci pentru trei corpuri consecutive și mai mic de șase pentru patru corpuri consecutive.

Considerînd cunoscute accelerațiile compuse ale punctelor A_1 și B_5, se poate afla accelerația punctului C_3 legat de corpul central situat

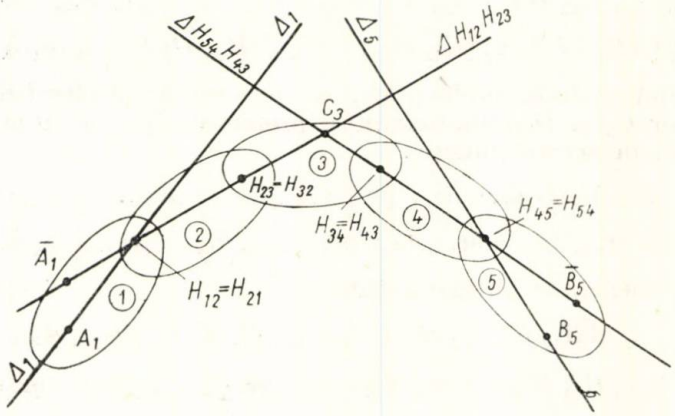


Fig. 20

la intersecția dreptelor $\Delta\,(A_1)\;H_{12}\;H_{23}$ și $\Delta H_{34}\,H_{45}\;(B_5)$ dacă punctele A_1 și B_5 se află pe aceste drepte (fig. 20). Ecuația vectorială utilizată este

$$\tilde{a}_{C_3} = \underline{\underline{\tilde{a}_{A_1}}} + \underbrace{\tilde{a}_{C_1A_1} + \tilde{a}_{C_{21}} + \tilde{a}_{C_{32}}}_{\perp\,\Delta\,(A_1)\,H_{12}\,H_{23}} = \tag{167}$$

$$= \underline{\underline{\tilde{a}_{B_5}}} + \underbrace{\tilde{a}_{C_5B_5} + \tilde{a}_{C_{45}} + \tilde{a}_{C_{34}}}_{\perp\,\Delta\,H_{34}\,H_{45}\,(B_5)},$$

iar metoda poligoanelor conduce la

$$\tilde{a}_{C_3} = k_a\,(\widetilde{pc_3}), \tag{168}$$

$$\varepsilon_1\,\overline{AC}\;i + \varepsilon_{21}\,\overline{H_{21}\,C}\;i + \varepsilon_{32}\,\overline{H_{32}\,C}\;i = \tilde{a}_{C_1A_1} + \tilde{a}_{C_{21}} + \tilde{a}_{C_{32}} = k_a(\widetilde{a_1c_3}),$$

$$\varepsilon_1\,(\overline{AH_{12}})\;i + \varepsilon_2\,(\overline{H_{12}\,H_{23}})\;i + \varepsilon_3\,(\overline{H_{23}\,C})\;i = k_\varepsilon\,(\widetilde{a_1c_3}),$$

$$\varepsilon_5\,\overline{BC}\;i + \varepsilon_{45}\,\overline{H_{54}\,C}\;i + \varepsilon_{34}\,\overline{H_{43}\,C}\;i = \tilde{a}_{C_5B_5} + \tilde{a}_{C_{45}} + \tilde{a}_{C_{34}} = k_a\,(\widetilde{b_5c_3}),$$

$$\varepsilon_5\,(\overline{BH_{54}})\;i + \varepsilon_4\,(\overline{H_{54}\,H_{43}})\;i + \varepsilon_3\,(\overline{H_{43}\,C})\;i = k_\varepsilon\,(\widetilde{b_5c_3}).$$

Metoda proiecțiilor determină accelerația compusă a punctului C_3, cunoscîndu-se proiecțiile ei pe dreptele $\Delta\,(A_1)\;H_{12}\;H_{23}$ și $\Delta H_{34}\,H_{45}\;(B_5)$:

$$\text{pr.}_{\Delta\,H_{12}\,H_{23}}\,\tilde{a}_{C_3} = \text{pr.}_{\Delta\,H_{12}\,H_{23}}\,\overline{a}_{A_1}, \tag{169}$$

$$\text{pr.}_{\Delta\,H_{34}\,H_{45}}\,\tilde{a}_{C_3} = \text{pr.}_{\Delta\,H_{34}\,H_{45}}\,\tilde{a}_{B_5}$$

şi de asemenea

$$\varepsilon_1 \overline{AH_{12}}\, i + \varepsilon_2 \overline{H_{12}H_{23}}\, i + \varepsilon_3 \overline{H_{23}C}\, i = \text{pr.}_{\perp \Delta H_{12}H_{23}} \tilde{a}_{C_3} - \text{pr.}_{\perp \Delta H_{12}H_{23}} \tilde{a}_{A_1},$$
$$\varepsilon_5 \overline{BH_{45}}\, i + \varepsilon_4 \overline{H_{45}H_{34}}\, i + \varepsilon_3 \overline{H_{34}C}\, i = \text{pr.}_{\perp \Delta H_{34}H_{45}} \tilde{a}_{C_3} - \text{pr.}_{\perp \Delta H_{34}H_{45}} \tilde{a}_{B_5}. \quad (170)$$

Pentru parametrii distribuiţi sub forma $3 + 0 + 1 + 0 + 3$, totdeauna se poate obţine direct acceleraţia compusă a unui punct din corpul central, astfel că se va cunoaşte distribuţia sa de acceleraţii, problema reducîndu-se ulterior la studiul a două grupe de trei corpuri. Pentru parametrii împărţiţi sub formele $2 + 1 + 1 + 0 + 3$ şi $2 + 1 + 1 + 1 + 2$, studiind grupele de cîte două corpuri consecutive cu parametrii $2 + 1$, se ajunge la parametrii repartizaţi sub forma $2 + 2$, după care problemele se reduc la cele studiate anterior.

Primită la redacţie la 10 decembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. I. I. Artabolevski, *Teoria mecanismelor şi maşinilor*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.
2. — *Structura şi cinematica mecanismelor*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1959.
3. N. I. Manolescu, M. Pielmuş, E. Erceanu, P. Antonescu, *Culegere de probleme de teoria mecanismelor şi a maşinilor*. Edit. de Stat didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
4. D. Tutunaru, Gh. Lazaride, Tr. Demian, *Teoria mecanismelor şi organelor de maşini*. Edit. de Stat didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1962, I.
5. D. Mangeron, C. Drăgan, Cl. Svijevscki, *O nouă metodă de studiu interesînd teoria mecanismelor şi a maşinilor*. St. cerc. mec. apl. **VIII**, *1* (1957).
6. D. Mangeron, C. Drăgan, O. Munteanu, *Studiul mecanismelor plane cu cuple cinematice inferioare bazat pe metoda acceleraţiilor reduse*. Bul. Inst. polit. din Iaşi, **II**, *3—4* (1956).
7. D. Mangeron, *Asupra unor proprietăţi ale acceleraţiilor reduse de ordin oarecare*. Bul. Inst. polit. din Iaşi, **III**, *1—2* (1957).
8. D. Mangeron, Gh. Ciobanu, A. Braier, *Problema distribuţiei acceleraţiilor de ordin oarecare în mişcarea sistemelor materiale*. Bul. Inst. polit. din Iaşi, **II**, *1—2* (1956).
9. D. Mangeron, C. Drăgan, *Aplicarea teoriei acceleraţiilor de ordin oarecare la studiul mecanismelor plane de clasa a treia*.
10. — *O nouă metodă de determinare a acceleraţiilor la mecanismele plane de clasa a doua*. Bul. Inst. polit. din Iaşi, **I**, *1—2* (1955).
11. D. Mangeron *Asupra unor proprietăţi ale crucilor lui Kotelnikov*. Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" Iaşi, **VI**, *3* (1960).
12. I. S. Zilberman, *Aplicarea metodei acceleraţiilor reduse la analiza cinematică a mecanismelor plane de clasa a treia*. Bul. Inst. polit. Iaşi, **III**, *1—2* (1957).
13. — *Aplicarea metodei acceleraţiilor reduse la determinarea razelor de curbură a traiectoriilor mecanismelor plane*. Studii şi cercetări ştiinţifice. Fizică şi ştiinţe tehnice, **IX**, *1* (1958).
14. D. Mangeron, A. Braier, *Reprezentarea cîmpurilor de acceleraţii de ordin oarecare prin numere complexe*, Gazeta matematică şi fizică, Seria A, *10* (1955).
15. O. Heck, *Representation der Beschleu Wigungs felder durch complexen Zahlen*. Ingenieur Archiv, 1932.
16. Chr. Pelecudi, R. Bogdan, *Synthesis of cam mechanisms whent the values at the cam arcs are presuribed*. Rev. Mec. Appl., *2* (1963).
17. Chr. Pelecudi, T. C. Hunker, *Studiul analitic al grupelor assurice*. St. cerc. mec. apl., *3* (1964).
18. Chr. Pelecudi, *Sistematizarea analizei grafice a lanţurilor cinematice simple plane*. St. cerc. mec. apl., *2* (1964).

EXISTENȚA MANIVELEI LA MECANISMELE PATRULATERE SFERICE

de FL. DUDIȚĂ
Institutul politehnic, Brașov

621.01

Pornind de la legea de transmitere a mecanismelor patrulatere sferice, se stabilesc condițiile generale ale existenței manivelei (34), (37), din care se deduce teorema existenței manivelei pentru mecanismele patrulatere sferice neisoscele în diferite formulări (34), (37), (47), (48).

Pe baza corelației între trigonometria sferică și cea plană, teoremele deduse se particularizează pentru mecanismele patrulatere plane, regăsindu-se astfel cunoscuta teoremă a lui Grashof (60).

Mecanismele sferice sînt mecanisme spațiale la care axele de rotație în mișcarea relativă și absolută se intersectează în același punct [4]. Mecanismul patrulater sferic este mecanismul sferic cu trei elemente mobile și patru articulații (cuple de clasa V), ale căror axe se intersectează în același punct (fig. 2, 3 și 4).

Spre deosebire de mecanismele plane, la care — axele de rotație în mișcarea relativă și absolută fiind paralele — axoidele fixe și mobile sînt cilindri cu axe paralele, la mecanismele sferice axoidele fixe și mobile sînt conuri cu același vîrf și denumite respectiv *con polodic* (bază) și *con herpolodic* (rostogolitoare).

Traiectoriile punctelor mecanismelor plane sînt curbe plane, iar cele ale punctelor mecanismelor sferice sînt curbe sferice; cinematica mecanismelor plane este legată deci de geometria și de trigonometria plană, iar cinematica mecanismelor sferice de geometria și de trigonometria sferică.

Atît în plan, cît și pe sferă, patrulaterul, fiind format din porțiuni geodezice (segmente de dreaptă, respectiv arce de cerc mare), se poate descompune în două triunghiuri.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 18 NR. 2 P. 355–375 BUCUREȘTI 1965

Pe o sferă de rază oarecare R (fig. 1), elementele triunghiului sferic sînt cele trei unghiuri A, B, C și cele trei laturi a, b, c, care, pentru o sferă dată, se măsoară prin unghiurile la centru α, β, γ.

Oricărui triunghi sferic cu vîrfurile în ABC și laturile a, b, c, măsurate prin unghiurile la centru α, β, γ, i se poate asocia triunghiul sferic cu aceleași vîrfuri, avînd însă laturile a, b, c', măsurate prin unghiurile la centru α, β, $2\pi - \gamma$ (triunghiul sferic $CBA'B'A$, fig. 1).

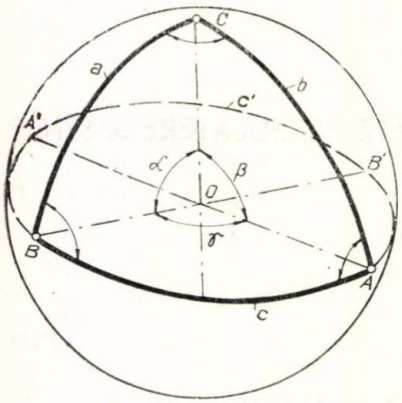


Fig. 1

Triunghiurile sferice care au laturi cu unghiuri la centru mai mici sau cel mult egale cu π se numesc *triunghiuri Euler* (triunghiul ABC, fig. 1), iar cele care au laturi cu unghiuri la centru mai mari ca π se numesc *triunghiuri Moebius-Study* (triunghiuri $CBA'B'A$, fig. 1).

În triunghiurile sferice Euler rămîn valabile proprietățile metrice cunoscute în triunghiurile plane : suma a două laturi este mai mare decît a treia, iar diferența a două laturi este mai mică decît a treia. În triunghiurile Moebius-Study, aceste proprietăți nu sînt valabile, ca, de exemplu, în triunghiul sferic $CBA'B'A$, în care laturile a și b sînt sferturi de cerc mare :

$$a + b < c'.$$

În triunghiul (sau patrulaterul) sferic, latura care are un unghi la centru mai mic, egal sau mai mare decît $\frac{\pi}{2}$ se numește *hipocvadrantică*, *cvadrantică*, respectiv *hipercvadrantică*.

Relația fundamentală în triunghiul sferic este dată de formula cosinusurilor :

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos A, \tag{1}$$

care, în funcție de laturi și de raza sferei, se scrie

$$\cos \frac{a}{R} = \cos \frac{b}{R} \cos \frac{c}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{c}{R} \cos A. \tag{1'}$$

Plecînd de la această relație, se deduce formula sinusurilor :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}, \tag{2}$$

care, în funcție de laturi și de raza sferei, se scrie

$$\frac{\sin\frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\sin\frac{b}{R}}{\sin B} = \frac{\sin\frac{c}{R}}{\sin C}. \tag{2'}$$

Pentru $R \to \infty$, relațiile (1') și (2') devin, respectiv,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A, \tag{3}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \tag{4}$$

cunoscute din geometria și trigonometria plană, ceea ce demonstrează că geometria euclidiană a planului este geometria pe sfera a cărei rază devine infinită.

1. CINEMATICA MECANISMULUI PATRULATER SFERIC

În mecanismul patrulater sferic, reprezentat în figura 2, s-a notat cu 1, 2, 3, 4 respectiv elementul conducător, elementul de legătură (biela), elementul condus și baza. Mărimile laturilor și ale unghiurilor la centru s-au notat, respectiv, cu a, b, c, d și α, β, γ, δ. Unghiurile variabile între diferitele elemente s-au notat prin litera φ, avînd indicii respectivi. Mărimea diagonalei BD și a unghiului la centru corespunzător s-au notat cu x, respectiv ξ.

În triunghiul sferic ABD (fig. 2) conform formulelor sinusurilor și cosinusurilor (1), (2), se scriu cu ușurință următoarele relații :

$$\frac{\sin\xi}{\sin\varphi_{10}} = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi_{x1}}, \tag{5}$$

$$\frac{\sin\xi}{\sin\varphi_{10}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi_{x0}}, \tag{5'}$$

$$\cos\xi = \cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta\cos\varphi_{10}, \tag{6}$$

$$\cos\delta = \cos\xi\cos\alpha + \sin\xi\sin\alpha\cos\varphi_{x1}, \tag{7}$$

$$\cos\alpha = \cos\delta\cos\xi + \sin\delta\sin\xi\cos\varphi_{x0}. \tag{8}$$

Înlocuind (5) și (6) în (7), se obține

$$\operatorname{tg}\varphi_{x1} = \frac{\sin\varphi_{10}}{\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\delta + \cos\alpha\cos\varphi_{10}},$$

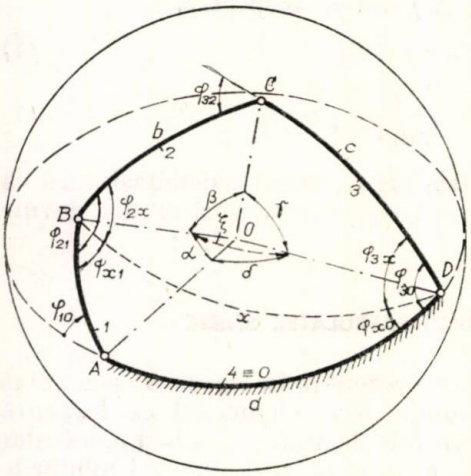
de unde rezultă

$$\varphi_{x1} = \varphi_{x1}(\varphi_{10}, \alpha, \delta) = \operatorname{arctg}\frac{\sin\varphi_{10}}{\sin\alpha\operatorname{ctg}\delta + \cos\alpha\cos\varphi_{10}}. \tag{9}$$

Înlocuind (5′) și (6) în (8), se obține

$$\varphi_{x0} = \varphi_{x0}(\varphi_{10}, \alpha, \delta) = \operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi_{10}}{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \delta + \cos \delta \cos \varphi_{10}}. \quad (10)$$

În triunghiul sferic BCD, în mod analog se scriu relațiile



mecanism patrulater sferic
Fig. 2

$$\frac{\sin \xi}{\sin \varphi_{32}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \varphi_{2x}}, \quad (11)$$

$$\frac{\sin \xi}{\sin \varphi_{32}} = \frac{\sin \beta}{\sin \varphi_{3x}}, \quad (11')$$

$$\cos \xi = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos \varphi_{32}, \quad (12)$$

$$\cos \gamma = \cos \beta \cos \xi + \sin \beta \sin \xi \cos \varphi_{2x}, \quad (13)$$

$$\cos \beta = \cos \xi \cos \gamma + \sin \xi \sin \gamma \cos \varphi_{3x}. \quad (14)$$

Înlocuind (6) în (12), se obține

$$\cos \varphi_{32} = m + n \cos \varphi_{10}, \quad (15)$$

în care s-a notat

$$m = \frac{\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha \cos \delta}{\sin \beta \sin \gamma}; \; n = \frac{\sin \alpha \sin \delta}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

Înlocuind (11) și (12) în (13), se obține

$$\varphi_{2x} = \varphi_{2x}(\varphi_{32}, \beta, \gamma) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \varphi_{32}}{\sin \beta \operatorname{ctg} \gamma + \cos \beta \cos \varphi_{32}}, \quad (16)$$

iar înlocuind (11′) și (12) în (14), se obține

$$\varphi_{3x} = \varphi_{3x}(\varphi_{32}, \beta, \gamma) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \varphi_{32}}{\operatorname{ctg} \beta \sin \gamma + \cos \gamma \cos \varphi_{32}}. \quad (17)$$

Ținînd seama de notațiile introduse (fig. 2) și de relațiile (9), (10), (15), (16) și (17), se obține:

$$\varphi_{32} = \varphi_{32}(\varphi_{10}, \alpha, \beta, \gamma, \delta), \quad (18)$$

$$\varphi_{21} = \varphi_{x1}(\varphi_{10}, \alpha, \delta) + \varphi_{2x}(\varphi_{32}, \beta, \gamma) = \varphi_{21}(\varphi_{10}, \alpha, \beta, \gamma, \delta), \quad (19)$$

$$\varphi_{30} = \varphi_{x0}(\varphi_{10}, \alpha, \delta) + \varphi_{3x}(\varphi_{32}, \beta, \gamma) = \varphi_{30}(\varphi_{10}, \alpha, \beta, \gamma, \delta). \quad (20)$$

Prin derivarea expresiilor (18), (19), (20), rezultă relaţiile cinematice fundamentale în mecanismul patrulater sferic :

$$\frac{\omega_{21}}{\omega_{10}} = \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial \varphi_{10}} = \frac{\partial \varphi_{x1}}{\partial \varphi_{10}} + \frac{\partial \varphi_{2x}}{\partial \varphi_{32}} \cdot \frac{\partial \varphi_{32}}{\partial \varphi_{10}}, \tag{21}$$

$$\frac{\omega_{32}}{\omega_{10}} = \frac{\partial \varphi_{32}}{\partial \varphi_{10}}, \tag{22}$$

$$\frac{\omega_{30}}{\omega_{10}} = \frac{\partial \varphi_{30}}{\partial \varphi_{10}} = \frac{\partial \varphi_{x0}}{\partial \varphi_{10}} + \frac{\partial \varphi_{3x}}{\partial \varphi_{32}} \cdot \frac{\partial \varphi_{32}}{\partial \varphi_{10}} = i_{31}, \tag{23}$$

în care

ω_{10} este viteza unghiulară absolută a elementului conducător,
ω_{21} — viteza unghiulară relativă a bielei în raport cu elementul conducător,
ω_{32} — viteza unghiulară relativă a elementului condus în raport cu biela,
ω_{30} — viteza unghiulară absolută a elementului condus,
i_{31} — raportul de transmitere.

Derivatele parţiale din relaţiile (21), (22) şi (23) au expresiile

$$\frac{\partial \varphi_{x0}}{\partial \varphi_{10}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \delta \cdot \cos \varphi_{10} + \cos \delta}{(\operatorname{ctg} \alpha \sin \delta + \cos \delta \cos \varphi_{10})^2 + \sin^2 \varphi_{10}}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial \varphi_{x1}}{\partial \varphi_{x0}} = \frac{\sin \alpha \operatorname{ctg} \delta \cos \varphi_{10} + \cos \alpha}{(\sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \delta + \cos \alpha \cos \varphi_{10})^2 + \sin^2 \varphi_{10}}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial \varphi_{32}}{\partial \varphi_{10}} = \frac{m \sin \varphi_{10}}{\sqrt{1 - (m + n \cos \varphi_{10})^2}}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial \varphi_{2x}}{\partial \varphi_{32}} = \frac{\sin \beta \operatorname{ctg} \gamma \cos \varphi_{32} + \cos \beta}{(\sin \beta \operatorname{ctg} \gamma + \cos \beta \cos \varphi_{32})^2 + \sin^2 \varphi_{32}}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial \varphi_{3x}}{\partial \varphi_{32}} = \frac{\operatorname{ctg} \beta \sin \gamma \cos \varphi_{32} + \cos \gamma}{(\operatorname{ctg} \beta \sin \gamma + \cos \gamma \cos \varphi_{32})^2 + \sin^2 \varphi_{32}}. \tag{28}$$

2. LEGEA DE TRANSMITERE

În mecanismul patrulater sferic, prin analogie cu cel plan, legea de transmitere exprimă dependenţa dintre mişcarea elementului conducător şi cel condus (20). Folosind (10), (15) şi (17), legea de transmitere (20) devine

$$\varphi_{30} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin \varphi_{10}}{\operatorname{ctg} \alpha \sin \delta + \cos \delta \cos \varphi_{10}} +$$

$$+ \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{E}}{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma \cos \delta + \sin \alpha \sin \delta \cos \gamma \cos \varphi_{10}}, \tag{29}$$

unde

$$E = A^2 - B^2,$$
$$A = \sin\beta \sin\gamma, \tag{30}$$
$$B = \cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\cos\delta + \sin\alpha\sin\delta\cos\varphi_{10}.$$

Pentru simplificarea calculelor, legea de transmitere (29) se poate exprima, în cazul general, cu ajutorul dezvoltării în serie Fourier [7].

3. CONDIȚIILE EXISTENȚEI MANIVELEI LA MECANISMELE PATRULATERE SFERICE

Raționamentele geometrice pe sferă, reprezentate în plan după o anumită corespondență stabilită în prealabil (de exemplu reprezentarea stereografică), își pierd din claritate. De aceea, spre deosebire de mecanismul patrulater articulat plan, unde condiția existenței manivelei a fost dedusă pe cale geometrică (teorema lui Grashof), condițiile existenței manivelei la mecanismul patrulater sferic se vor stabili pe cale analitică. Pentru verificare se va aplica același procedeu și la mecanismul patrulater articulat plan, regăsindu-se astfel teorema lui Grashof.

3.1. Clasificarea mecanismelor patrulatere sferice. În patrulaterul sferic oarecare, ca și mai sus, se notează cu litere latine mărimile laturilor, iar cu litere grecești unghiurile respective la centru (fig. 2). Dacă laturile depășesc un sfert de cerc (cvadrant), deci unghiurile corespunzătoare la centru depășesc un unghi drept, literele respective se vor accentua :

$$\alpha\,;\ \beta\,;\ \gamma\,;\ \delta \leqslant \frac{\pi}{2} < \alpha'\,;\ \beta'\,;\ \gamma'\,;\ \delta'. \tag{31}$$

Ținînd seama de această notație, clasificarea și denumirea mecanismelor patrulatere sferice în toate variantele, în funcție de poziția relativă și de numărul laturilor care depășesc un cvadrant, sînt centralizate în tabela 1.

Observație. În tehnică au o deosebită importanță mecanismele cvadrantice (mono-, bi- și tricvadrantice). Articulația cardanică este un mecanism sferic tricvadrantic (fig. 7*b*).

Pentru toate mecanismele patrulatere sferice, posibilitatea rotației complete a elementului conducător se exprimă analitic, pornind de la legea de transmitere (29), prin condiția ca, independent de φ_{10}, expresia E să fie nenegativă :

$$E = (A - B)(A + B) \geqslant 0. \tag{32}$$

3. 2. Mecanisme patrulatere sferice ahipercvadrantice. Ținînd seama de notațiile (30) și (31), condiția (32) este adevărată în următorul caz *compatibil* cu patrulaterul sferic :

$$\begin{cases} \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta\cos\varphi_{10} > 0, \\ \sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\cos\delta + \sin\alpha\sin\delta\cos\varphi_{10} > 0. \end{cases} \tag{33}$$

Tabela 1

Clasificarea mecanismelor patrulatere sferice

	Denumirea	Variante	Numărul variantelor
Mecanisme patrulatere sferice	ahipercvadrantice	$\alpha - \beta - \gamma - \delta$	$C_4^0 = 1$
	monohipercvadrantice	$\alpha - \beta - \gamma - \delta'$ $\alpha - \beta - \gamma' - \delta$ $\alpha - \beta' - \gamma - \delta$ $\alpha' - \beta - \gamma - \delta$	$C_4^1 = 4$
	bihipercvadrantice	$\alpha - \beta - \gamma' - \delta'$ $\alpha - \beta' - \gamma' - \delta$ $\alpha' - \beta' - \gamma - \delta$ $\alpha' - \beta - \gamma' - \delta$ $\alpha' - \beta - \gamma - \delta'$ $\alpha - \beta' - \gamma - \delta'$	$C_4^2 = 6$
	trihipercvadrantice	$\alpha' - \beta' - \gamma' - \delta$ $\alpha - \beta' - \gamma' - \delta'$ $\alpha' - \beta - \gamma' - \delta'$ $\alpha' - \beta' - \gamma - \delta'$	$C_4^3 = 4$
	hipercvadrantice	$\alpha' - \beta' - \gamma' - \delta'$	$C_4^4 = 1$

Aceste inegalităţi sînt adevărate, independent de φ_{10}, dacă

$$\begin{cases} \sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta \geqslant 0, \\ \sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta \geqslant 0. \end{cases} \tag{33'}$$

Restrîngînd expresiile, se obţine respectiv

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \delta) \geqslant \cos(\beta + \gamma), \\ \cos|\beta - \gamma| \geqslant \cos|\alpha - \delta|, \end{cases} \tag{33''}$$

de unde rezultă *condiţiile generale ale existenţei manivelei la mecanismele patrulatere sferice ahipercvadrantice* :

$$\begin{cases} \alpha + \delta \leqslant \beta + \gamma, \\ |\alpha - \delta| \geqslant |\beta - \gamma|. \end{cases} \tag{34}$$

Observaţie. Condiţiile (34) arată că în poziţii particulare mecanismul patrulater sferic cu manivelă formează triunghiuri sferice Euler [v. (59)].

3.3. Mecanisme patrulatere sferice monohipercvadrantice. În practică, aceste mecanisme (fig. 3) au o deosebită importanţă. Articulaţia cardanică, larg răspîndită în construcţia de maşini, are la bază un patrulater sferic monohipercvadrantic $ABCD$ (fig. 7*b*).

În poziţii particulare (două laturi sînt în prelungire), mecanismul sferic monohipercvadrantic formează triunghiuri sferice Moebius-Study; de aceea în analiza care urmează se vor lua în considerare numai unghiuri

care nu depășesc valoarea $\frac{\pi}{2}$ (31), obținîndu-se astfel triunghiuri sferice Euler :

$$\begin{cases} \alpha = \pi - \alpha' \\ \beta = \pi - \beta' \\ \gamma = \pi - \gamma' \\ \delta = \pi - \delta' \end{cases} \tag{35}$$

unde rămîne în vigoare notația (31).

Pentru toate cele patru variante ale mecanismului monohipercvadrantic din tabela 1, condiția generală (32), scrisă în cazul compatibil cu patrulaterul sferic (33), devine

$$\begin{cases} \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta \geqslant 0, \\ \sin\beta \sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\delta - \sin\alpha\sin\delta \geqslant 0. \end{cases} \tag{36}$$

Restrîngînd expresiile, se obține respectiv

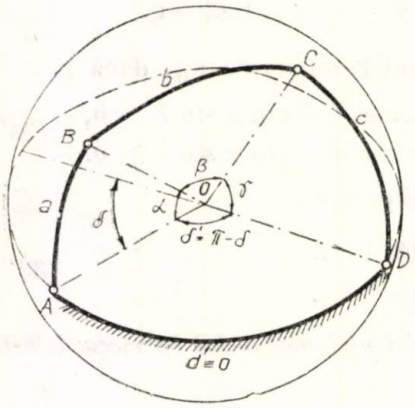


Fig. 3

$$\begin{cases} -\cos(\beta+\gamma) - \cos|\alpha-\delta| \geqslant 0, \\ \cos|\beta-\gamma| + \cos(\alpha+\delta) \geqslant 0, \end{cases} \tag{36'}$$

sau, sub altă formă,

$$\begin{cases} \cos(\pi - |\alpha-\delta|) \geqslant \cos(\beta+\gamma), \\ \cos(\alpha+\delta) \geqslant \cos(\pi - |\beta-\gamma|), \end{cases} \tag{36''}$$

din care se obțin *condițiile generale ale existenței manivelei la mecanismele patrulatere sferice monohipercvadrantice* :

$$\begin{cases} (\alpha+\delta) + |\beta-\gamma| \leqslant \pi, \\ |\alpha-\delta| + (\beta+\gamma) \geqslant \pi. \end{cases} \tag{37}$$

3.4. Mecanisme patrulatere sferice hipercvadrantice. Pentru toate cele șase variante ale patrulaterului sferic bihipercvadrantic din tabela 1, condiția generală (32), scrisă pentru cazul compatibil cu patrulaterul sferic, este identică cu (33′), deci condiția fundamentală în acest caz, ținînd seama de premisele (31) și (35), se formulează identic cu (34). Cazul mecanismului patrulater sferic bihipercvadrantic se reduce astfel la cel ahipercvadrantic.

3.5. Mecanisme patrulatere sferice trihipercvadrantice. Pentru toate cele patru variante ale acestui mecanism din tabela 1, condiția generală (32) a existenței manivelei, scrisă pentru cazul compatibil, este identică

cu (36). Cazul mecanismului patrulater trihipercvadrantic se reduce astfel la cel monohipercvadrantic (37).

3.6. Mecanisme patrulatere sferice hipercvadrantice. Din tabela 1 se reduc la cele ahipercvadrantice (34).

4. MECANISME PATRULATERE ISOSCELE SFERICE CU MANIVELĂ

Din mulțimea mecanismelor patrulatere sferice care satisfac condițiile (34), se separă cele în care laturile sînt egale două cîte două. Aceste mecanisme patrulatere sferice se vor numi *mecanisme sferice isoscele*; după poziția relativă a laturilor egale, ele se clasifică în:

a) mecanisme sferice romboide, în care laturile egale sînt alăturate (fig. 4 și 5);

b) mecanisme sferice de tip paralelogram, în care laturile egale sînt opuse (fig. 6); un caz particular al mecanismului sferic de tip paralelogram este mecanismul romb, în care toate laturile sînt egale (mecanism echilater).

Unele mecanisme sferice isoscele cu manivelă, în timpul funcționării, la trecerea prin pozițiile particulare (poziții în care toate laturile se suprapun) *degenerează* în manivelă, schimbîndu-și astfel structura și implicit funcția, iar altele, fără a-și schimba structura, își schimbă funcția. Se vor deosebi deci mecanisme cu structură sau funcție invariabilă și variabilă.

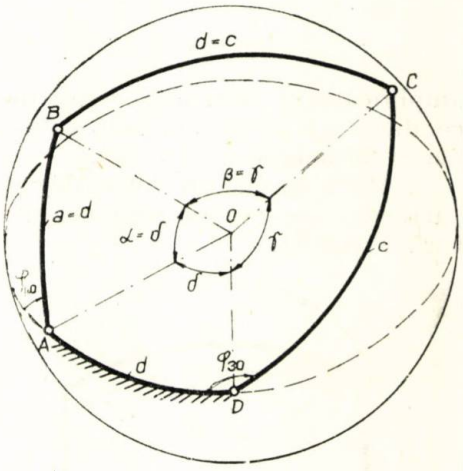


Fig. 4

4.1. Mecanisme sferice romboide. 4.1.1. *Mecanisme sferice romboide cu structură invariabilă* sînt mecanismele care satisfac condițiile

$$\begin{cases} \alpha + \delta < \beta + \gamma, \\ |\alpha - \delta| = |\beta - \gamma| = 0, \end{cases} \tag{34'}$$

adică una din laturile mici este bază, iar cealaltă element conducător (fig. 4).

Acestea sînt mecanisme cu dublă manivelă reductoare, deoarece unei rotații complete a elementului condus îi corespund două rotații ale elementului conducător.

4.1.2. *Mecanisme cu structură variabilă.* Aceste mecanisme, incluse de condițiile

$$\begin{cases} \alpha + \delta = \beta + \gamma, \\ |\alpha - \delta| = |\beta - \gamma|, \end{cases} \tag{34''}$$

ajungînd în oricare din cele două poziții particulare, degenerează în manivelă (fig. 5).

Dacă în mecanismele degenerate se comandă din exterior scoaterea imediată din pozițiile particulare, se obțin mecanisme dublă manivelă

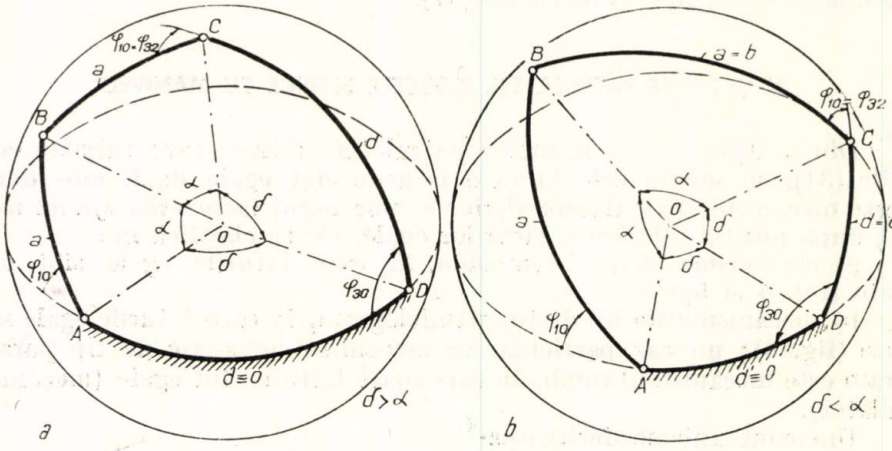


Fig. 5

amplificatoare (fig. 5*b*), deoarece unei rotații complete a elementului conducător îi corespund două rotații ale elementului condus, sau mecanisme manivelă-balansier (fig. 5*a*).

Dacă în mecanismele degenerate comanda scoaterii din pozițiile particulare se face intermitent, se obțin mecanisme intermitente cu structură variabilă.

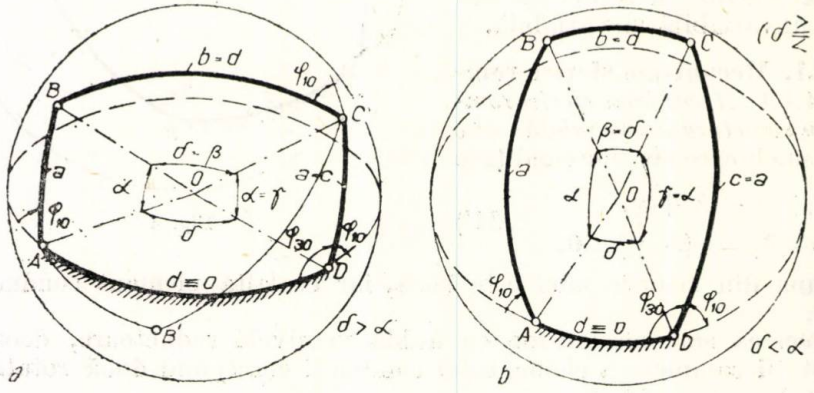


Fig. 6

4.2. Mecanisme sferice de tip paralelogram. 4.2.1. *Mecanisme de tip paralelogram cu structură și funcție invariabile* sînt cele incluse de condițiile (34″), în care laturile opuse sînt egale și una din cele mici este bază; ele funcționează totdeauna ca mecanisme dublă manivelă (fig. 6*b*).

4.2.2. *Mecanisme de tip paralelogram cu structură invariabilă și funcție variabilă* sînt cele incluse de condițiile (34''), în care laturile opuse sînt egale, iar una din laturile mari este bază (fig. 6*a*).

Ajungînd într-una din cele două poziții particulare, aceste mecanisme nu degenerează în manivelă, însă în timpul funcționării, fiind comandate din exterior, elementul condus poate păstra sau nu sensul mișcării în funcție de care rezultă:

a) mecanisme sferice paralelogram (dublă manivelă), la care mișcarea elementului condus și a celui conducător au același sens (fig. 6*a*, *ABCD*);

b) mecanisme sferice antiparalelogram (dublă manivelă), la care mișcarea elementului condus are sens opus mișcării elementului conducător (fig. 6*a*, *ABCD'*).

c) mecanism sferic paralelogram-antiparalelogram (manivelă-balansier), la care mișcarea elementului condus schimbă sensul.

Oricare dintre aceste mecanisme se obține din același mecanism patrulater sferic prin comanda din exterior a ieșirii elementului condus din pozițiile particulare.

Observație. Spre deosebire de mecanismele patrulatere articulate plane de tip paralelogram, care sînt *sincrone*, corespondentele lor sferice sînt *asincrone*.

5. CONDIȚIILE EXISTENȚEI MANIVELEI PENTRU MECANISMELE PATRULATERE SFERICE NEISOSCELE

Datorită schimbării funcției, la trecerea prin pozițiile particulare mecanismele isoscele cu manivelă se separă de cele neisoscele. În continuare, din condițiile generale ale existenței manivelei la mecanismele patrulatere sferice (34), (37) se vor deduce noi condiții pentru cele neisoscele.

În analiza care urmează, în patrulaterul sferic oarecare fiind necesară desprinderea celor două unghiuri la centru extremale, acestea se vor nota cu λ și se vor ordona

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4.$$

Unghiurile extremale λ_1 și λ_4 se vor nota cu λ_{min} și, respectiv, λ_{max}.

Semisuma unghiurilor la centru se va nota cu σ, iar suma unghiurilor neextremale cu ν:

$$2\sigma = \alpha + \beta + \gamma + \delta,$$
$$\nu = 2\sigma - (\lambda_{min} + \lambda_{max}). \qquad (38)$$

5.1. Mecanisme sferice neisoscele ahipercvadrantice și bihipercvadrantice. Analizînd după tabela 2 toate cazurile particulare incluse de condițiile generale (34) ale existenței manivelei la aceste tipuri de mecanisme

pentru mișcarea directă (element conducător a) și inversă (element conducător c) (fig. 2), se desprind ușor condițiile comune

$$\begin{cases} \lambda_{\min} + \lambda_{\max} \leqslant \nu, \\ \lambda_{\min} \not\equiv \beta, \end{cases} \tag{39}$$

adică *mecanismele sferice neisoscele ahipercvadrantice și bihipercvadrantice au manivelă dacă suma celor două unghiuri la centru extremale nu depășește suma celor neextremale, iar latura avînd unghiul la centru minim nu este bielă.*

Dacă se adaugă ambilor membri ai inegalității (39) mărimea ν, a cărei expresie se cunoaște (38), rezultă

$$\lambda_{\min} + \lambda_{\max} \leqslant \sigma \leqslant \nu. \tag{40}$$

Tabela 2

$$\alpha\,;\beta\,;\gamma\,;\delta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

	Condiție generală	Nr.	Cazuri particulare	Consecințe	Concluzie
Element conducător a	$\begin{cases} \alpha+\delta \leqslant \beta+\gamma \\ \lvert\alpha-\delta\rvert \geqslant \lvert\beta-\gamma\rvert \end{cases}$	1	$\alpha+\delta \leqslant \beta+\gamma$ $\gamma+\delta \leqslant \alpha+\beta$	$\delta \equiv \lambda_{\min.}$ $\alpha\,;\gamma \equiv \lambda_{\max.}$	$\begin{cases} \lambda_{\min.}+\lambda_{\max.} \leqslant \nu \\ \lambda_{\min.} \not\equiv \beta \end{cases}$ se exclud mecanismele isoscele
		2	$\alpha+\delta \leqslant \beta+\gamma$ $\beta+\delta \leqslant \alpha+\gamma$	$\delta \equiv \lambda_{\min.}$ $\alpha\,;\beta \equiv \lambda_{\max.}$	
		3	$\alpha+\delta \leqslant \beta+\gamma$ $\alpha+\gamma \leqslant \beta+\delta$	$\alpha \equiv \lambda_{\min.}$ $\gamma\,;\delta \equiv \lambda_{\max.}$	
		4	$\alpha+\delta \leqslant \beta+\gamma$ $\alpha+\beta \leqslant \gamma+\delta$	$\alpha \equiv \lambda_{\min.}$ $\beta\,;\gamma \equiv \lambda_{\max.}$	
Element conducător c	$\begin{cases} \gamma+\delta \leqslant \alpha+\beta \\ \lvert\gamma-\delta\rvert \geqslant \lvert\alpha-\beta\rvert \end{cases}$	1′	$\gamma+\delta \leqslant \alpha+\beta$ $\alpha+\delta \leqslant \beta+\gamma$	$\delta \equiv \lambda_{\min.}$ $\alpha\,;\gamma \equiv \lambda_{\max.}$	
		2′	$\gamma+\delta \leqslant \alpha+\beta$ $\beta+\delta \leqslant \alpha+\gamma$	$\delta \equiv \lambda_{\min.}$ $\beta\,;\gamma \equiv \lambda_{\max.}$	
		3′	$\gamma+\delta \leqslant \alpha+\beta$ $\alpha+\gamma \leqslant \beta+\delta$	$\gamma \equiv \lambda_{\min.}$ $\alpha\,;\delta \equiv \lambda_{\max.}$	
		4′	$\gamma+\delta \leqslant \alpha+\beta$ $\beta+\gamma \leqslant \alpha+\delta$	$\gamma \equiv \lambda_{\min.}$ $\beta\,;\delta \equiv \lambda_{\max.}$	

Ținînd seama de (40), condițiile (39) devin

$$\begin{cases} \lambda_{min} + \lambda_{max} \leqslant \sigma, \\ \lambda_{min} \not\equiv \beta \end{cases} \tag{41}$$

și se formulează analog cu (39).

5.2. Mecanisme sferice neisoscele mono- și trihipercvadrantice. Analizînd toate cazurile din tabela 3 în condițiile generale ale existenței manivelei la aceste tipuri de mecanisme (37) pentru mișcarea directă (element conducător a) și inversă (element conducător c) (fig. 3), se desprind condițiile comune

$$\begin{cases} \lambda_{min} + \pi \leqslant \lambda_{max} + \nu, \\ \lambda_{min} \not\equiv \beta. \end{cases} \tag{42}$$

Tabela 3

$$\alpha\,;\ \beta\,;\ \gamma\,;\ \delta \leqslant \frac{\pi}{2} < \alpha'\,;\ \beta\,;\ \gamma'\,;\ \delta' < \pi$$

	Condiția generală	Nr.	Cazuri particulare	Consecințe	Concluzie
Element conducător a	$\begin{cases} \alpha+\delta+\lvert\beta-\gamma\rvert \leqslant \pi \\ \lvert\alpha-\delta\rvert+\beta+\gamma \geqslant \pi \end{cases}$	1	$\alpha+\beta+\delta \leqslant \pi+\gamma$ $\alpha+\beta+\gamma \geqslant \pi+\delta$	$\delta \equiv \lambda_{min.}$ $\alpha\,;\beta \equiv \lambda_{max.}$	$\begin{cases} \lambda_{max}+\nu \geqslant \pi+\lambda_{min.} \\ \lambda_{min} \not\equiv \beta \end{cases}$
		2	$\alpha+\gamma+\delta \leqslant \pi+\beta$ $\alpha+\beta+\gamma \geqslant \pi+\delta$	$\delta \equiv \lambda_{min.}$ $\alpha\,;\gamma \equiv \lambda_{max.}$	
		3	$\alpha+\beta+\delta \leqslant \pi+\gamma$ $\beta+\gamma+\delta \geqslant \pi+\alpha$	$\alpha \equiv \lambda_{min.}$ $\beta\,;\delta \equiv \lambda_{max.}$	
		4	$\alpha+\gamma+\delta \leqslant \pi+\beta$ $\beta+\gamma+\delta \geqslant \pi+\alpha$	$\alpha \equiv \lambda_{min.}$ $\gamma\,;\delta \equiv \lambda_{max.}$	
Element conducător c	$\begin{cases} \gamma+\delta+\lvert\beta-\alpha\rvert \leqslant \pi \\ \lvert\gamma-\delta\rvert+\beta+\alpha \geqslant \pi \end{cases}$	1′	$\beta+\gamma+\delta \leqslant \pi+\alpha$ $\alpha+\beta+\gamma \geqslant \pi+\delta$	$\delta \equiv \lambda_{min.}$ $\beta\,;\gamma \equiv \lambda_{max.}$	
		2′	$\alpha+\gamma+\delta \leqslant \pi+\beta$ $\alpha+\beta+\gamma \geqslant \pi+\delta$	$\delta \equiv \lambda_{min.}$ $\alpha\,;\gamma \equiv \lambda_{max.}$	
		3′	$\beta+\gamma+\delta \leqslant \pi+\alpha$ $\alpha+\beta+\delta \geqslant \pi+\gamma$	$\gamma \equiv \lambda_{min.}$ $\beta\,;\delta \equiv \lambda_{max.}$	
		4′	$\alpha+\gamma+\delta \leqslant \pi+\beta$ $\alpha+\beta+\delta \geqslant \pi+\gamma$	$\gamma \equiv \lambda_{min.}$ $\alpha\,;\delta \equiv \lambda_{max.}$	

Ținînd seama de (40), aceste condiții devin

$$\begin{cases} \lambda_{\min} + \dfrac{\pi}{2} \leqslant \sigma, \\ \lambda_{\min} \not\equiv \beta. \end{cases} \tag{43}$$

Se observă că, dacă se ține seama de notația (31), deci de inegalitatea

$$\lambda_{\max} \leqslant \frac{\pi}{2}, \tag{44}$$

condițiile (43) devin identice cu (41).

5.3. Teorema existenței manivelei la mecanismele patrulatere sferice neisoscele. Rezumînd cazurile analizate, se poate formula teorema : *mecanismele patrulatere sferice neisoscele, considerînd ca unghiuri la centru ale laturilor pe cele care nu depășesc* $\frac{\pi}{2}$, *au manivelă dacă suma celor două unghiuri la centru extremale nu depășește semisuma unghiurilor la centru, iar latura corespunzătoare unghiului la centru minim nu este bielă (41).*

În clasa mecanismelor patrulatere sferice neisoscele cu manivelă se deosebesc mecanisme cu două manivele (mecanisme dublă manivelă), care transformă mișcarea de rotație continuă tot în mișcare de rotație continuă, și mecanisme cu o manivelă (mecanisme manivelă-balansier), care transformă mișcarea de rotație continuă în mișcare de rotație oscilatorie.

În tabelele 2 și 3, condițiile existenței *a două manivele* se deosebesc prin aceea că rămîn invariante la schimbarea elementului conducător în element condus (cazurile 1, 2, 1′, 2′ din tabela 2 și 3).

Astfel, pentru mecanismele ahipercvadrantice și bihipercvadrantice, condițiile care rămîn invariante la schimbarea elementului conducător (cazurile 1, 2, 1′, 2′ din tabela 2) sînt

$$\begin{cases} \lambda_{\min} + \lambda_{\max} \leqslant \nu, \\ \lambda_{\min} \equiv \delta, \end{cases} \tag{45}$$

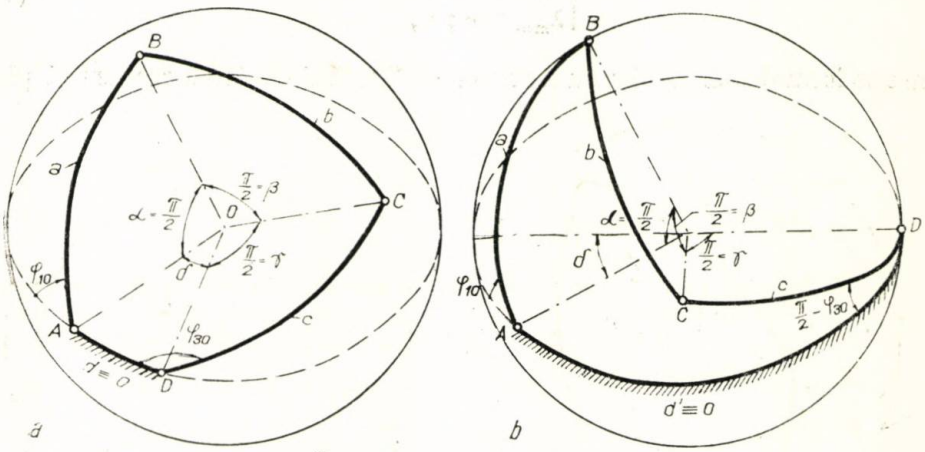
iar pentru cele monohipercvadrantice și trihipercvadrantice (cazurile 1, 2, 1′, 2′ din tabela 3) sînt

$$\begin{cases} \lambda_{\min} + \pi \leqslant \lambda_{\max} + \nu, \\ \lambda_{\min} \equiv \delta. \end{cases} \tag{46}$$

Ținînd seama de (40) și de (44), condițiile (45) și (46) se confundă, devenind

$$\begin{cases} \lambda_{\min} + \lambda_{\max} \leqslant \sigma, \\ \lambda_{\min} \equiv \delta, \end{cases} \tag{47}$$

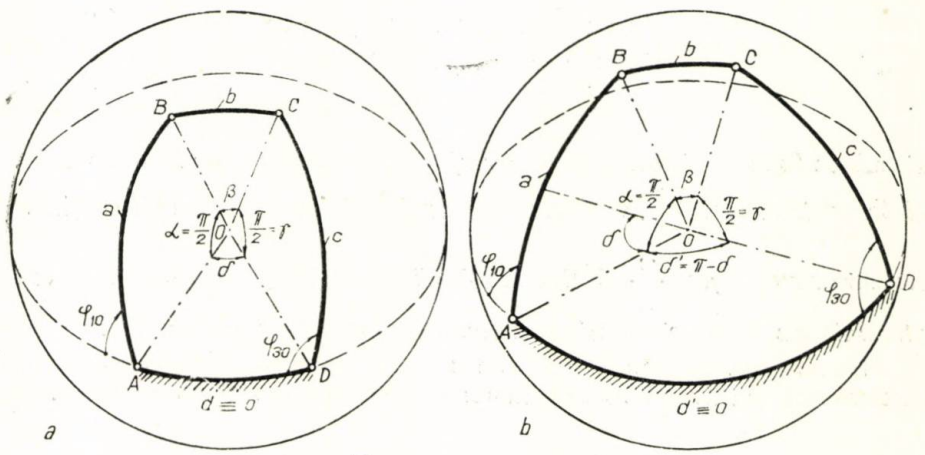
deci *mecanismele patrulatere sferice neisoscele, considerînd ca unghiuri între axele articulațiilor pe cele care nu depășesc* $\frac{\pi}{2}$, *au două manivele dacă*



a b

$\sigma < \frac{\pi}{2}$ - *mecanisme dublă-manivelă*

Fig. 7



a b

$\sigma < \beta < \frac{\pi}{2}$ - *mecanism dublă-manivelă*

$\beta < \sigma < \frac{\pi}{2}$ - *mecanism dublu-balansier*

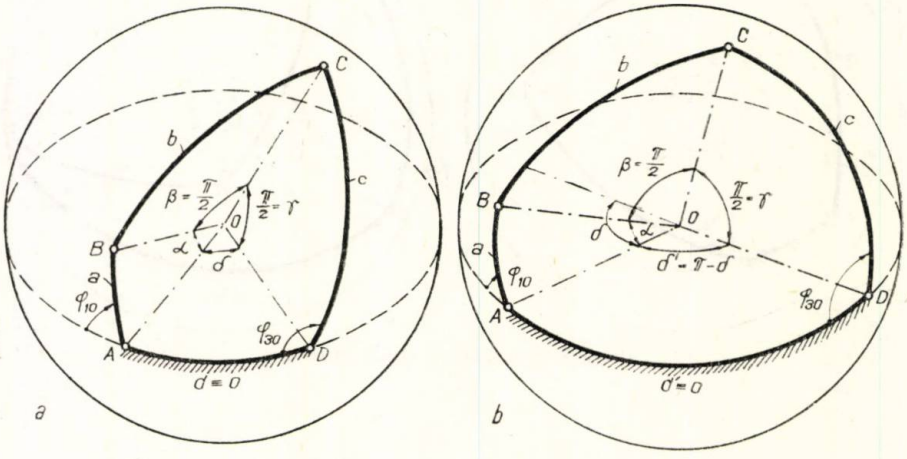
Fig. 8

suma celor două unghiuri la centru extremale nu depășește semisuma unghiurilor la centru, iar latura corespunzătoare unghiului la centru minim este bază (fig. 7, 8 și 9*a*).

Condițiile existenței unei singure manivele rezultă prin excludere (cazurile 3, 4, 3′, 4′ din tabelele 2 și 3);

$$\begin{cases} \lambda_{min} + \lambda_{max} \leqslant \sigma, \\ \lambda_{min} \equiv \alpha\,;\ \gamma, \end{cases} \tag{48}$$

care se formulează similar cu teorema lui Grashof pentru mecanismul plan



$\delta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ - mecanism dublă-manivelă
$\alpha < \delta < \frac{\pi}{2}$ - mecanism manivelă-balansier

Fig. 9

articulat : *la mecanismele patrulater sferice, latura corespunzătoare unghiului la centru minim* $\left(\text{considerînd ca unghiuri între axele articulațiilor pe cele care nu depășesc } \frac{\pi}{2}\right)$ *devine manivelă dacă suma unghiurilor la centru extremale nu depășește semisuma unghiurilor la centru* (fig. 9*b*).

Se observă că ambele aceste cazuri sînt incluse în teorema generală a existenței manivelei la mecanismele sferice, formulată anterior.

6. CORELAȚIA MECANISMELOR PATRULATERE SFERICE CU CELE PLANE ARTICULATE

După transformarea izometrică a sferei în plan, mecanismul patrulater sferic $ABCD$ (fig. 2) se transformă în mecanismul patrulater articulat plan $ABCD$ (fig. 10) : axele de rotație în mișcarea relativă și absolută devin paralele și, ca urmare, axoidele se transformă din conuri în cilindri, iar relațiile fundamentale din geometria și trigonometria sfe-

rică (1) și (2) devin relațiile fundamentale din geometria și trigonometria plană (3) și (4).

Toate relațiile deduse pentru patrulaterul sferic se transformă corespunzător în relații analoge pentru patrulaterul plan. Astfel, dependențele (9), (10), (15), (16), (17) pentru patrulaterul plan devin respectiv :

$$\varphi_{x1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{d \sin \varphi_{10}}{a + d \cos \varphi_{10}}, \tag{49}$$

$$\varphi_{x0} = \operatorname{arc\,tg} \frac{a \sin \varphi_{10}}{d + a \cos \varphi_{10}}, \tag{50}$$

$$\varphi_{32} = \arccos \frac{(a^2 + d^2) - (b^2 + c^2) + 2ad \cos \varphi_{10}}{2bc}, \tag{51}$$

$$\varphi_{2x} = \operatorname{arc\,tg} \frac{c \sin \varphi_{32}}{b + c \cos \varphi_{32}}, \tag{52}$$

$$\varphi_{3x} = \operatorname{arc\,tg} \frac{b \sin \varphi_{32}}{c + b \cos \varphi_{32}}. \tag{53}$$

Cunoscînd aceste dependențe, se obțin relațiile cinematice fundamentale pentru mecanismul patrulater articulat plan corespunzătoare celor deduse pentru mecanismul patrulater sferic (21), (22), (23).

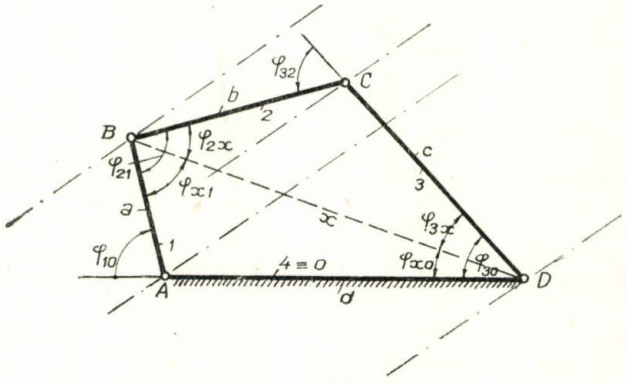


Fig. 10

6.1. Legea de transmitere. Pentru mecanismul patrulater plan articulat, legea de transmitere (29) devine

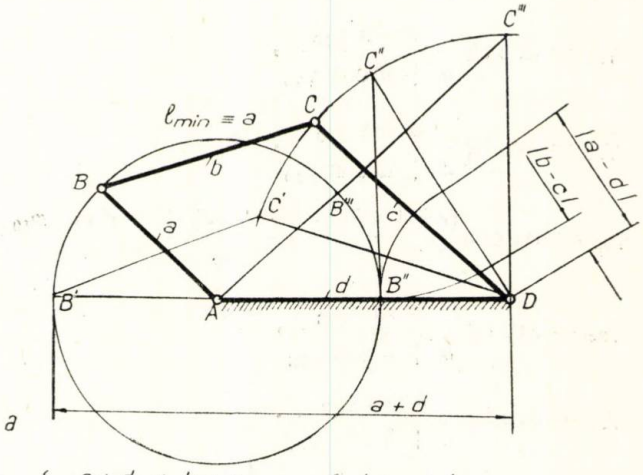
$$\varphi_{30} = \operatorname{arc\,tg} \frac{a \sin \varphi_{10}}{d + a \cos \varphi_{10}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{F}}{a^2 - b^2 + c^2 + d^2 + 2ad \cos \varphi_{10}}, \tag{54}$$

unde

$$F = (2bc)^2 - [(a^2 + d^2) - (b^2 + c^2) + 2\,ad \cos \varphi_{10}]^2.$$

6.2. Condiția existenței manivelei la mecanismul patrulater plan articulat. Raționînd ca în cazul patrulaterului sferic, condiția existenței manivelei se scrie

$$F \geqslant 0 \tag{55}$$



$$\begin{cases} a + d < b + c \\ |a - d| > |b - c| \end{cases} ; \quad \begin{cases} l_{min} + l_{max} < p \\ l_{min} \not\equiv b \end{cases}$$

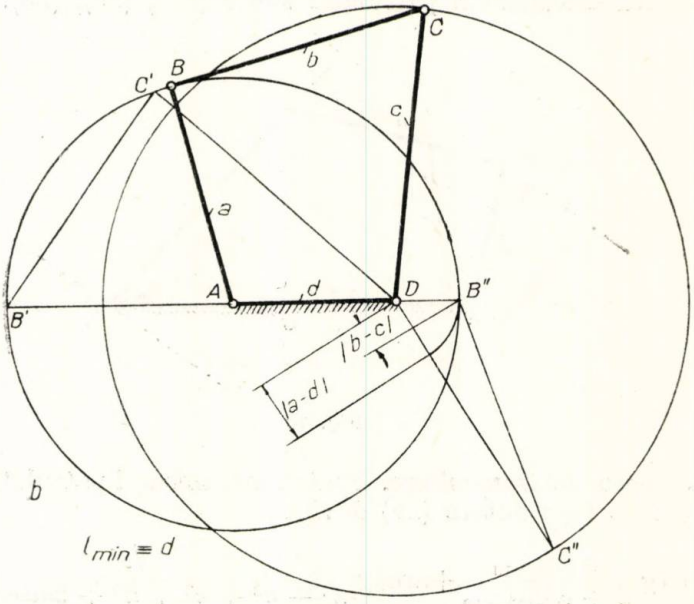


Fig. 11

și este îndeplinită în următorul caz *compatibil* cu patrulaterul plan :

$$\begin{cases} 2bc + (b^2 + c^2) - (a^2 + d^2) - 2ad \cos \varphi_{10} > 0, \\ 2bc - (b^2 + c^2) + (a^2 + d^2) + 2ad \cos \varphi_{10} > 0. \end{cases} \tag{56}$$

Aceste inegalități sînt adevărate independent de φ_{10} dacă

$$\begin{cases} (b + c)^2 - (a + d)^2 \geqslant 0, \\ -(b - c)^2 + (a - d)^2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{57}$$

Știind că suma celor patru laturi este o mărime strict pozitivă, condițiile existenței manivelei (57) devin

$$\begin{cases} a + d \leqslant b + c, \\ |a - d| \geqslant |b - c| \end{cases} \tag{58}$$

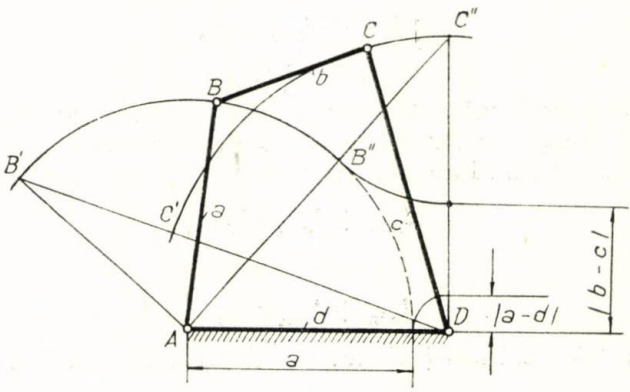
și sînt analoge cu cele deduse pentru patrulaterul sferic ahipercvadrantic (34) (tabela 4).

Analizînd figura 11, se observă că mecanismul patrulater plan articulat are manivelă dacă sînt posibile cele două poziții particulare $AB'C'D$ și $AB''C''D$; aceste poziții nu sînt posibile la mecanismul dublu balansier (fig. 12).

Scriind relațiile evidente în triunghiurile $B'C'D$ și $B''C''D$ (fig. 11)

$$\begin{aligned} \overline{B'D} &\leqslant \overline{B'C} + \overline{C'D}, \\ \overline{B''D} &\geqslant \left| \overline{B''C''} - \overline{C''D} \right|, \end{aligned} \tag{59}$$

se obțin pe cale geometrică condițiile (58).



$$\begin{cases} a + d > b + c \\ |a - d| < |b - c| \end{cases} ; \quad \begin{cases} \ell_{min.} + \ell_{max} < p \\ \ell_{min.} \equiv b \end{cases}$$

Fig. 12

Pe baza analogiei condițiilor (34) și (58) și a identității relațiilor (58) și (59) se demonstrează că în triunghiurile sferice Euler (poziții particulare ale mecanismelor patrulatere sferice ahipercvadrantice) rămîn valabile proprietățile metrice din triunghiurile plane (59).

Știind că proprietățile mecanismelor patrulatere sferice isoscele rămîn valabile și pentru corespondentele lor plane și procedînd exact ca în cazul mecanismului patrulater sferic ahipercvadrantic, se obțin condițiile fundamentale ale existenței manivelei la mecanismele patrulatere plane neisoscele articulate, care se scriu analog cu (41) (fig. 11) :

$$\begin{cases} l_{min} + l_{max} \leqslant p, \\ l_{min} \not\equiv b, \end{cases} \tag{60}$$

unde l_{min} și l_{max} sînt laturile extremale,

p — semiperimetrul.

Teorema existenței manivelei la mecanismul patrulater plan articulat se formulează deci astfel : *mecanismele patrulatere plane articulate neisoscele au manivelă dacă suma celor două laturi extremale nu depășește semiperimetrul, iar latura minimă nu este bielă* (60) (fig. 11*b*).

Prin analogie cu (47) se formulează teorema existenței a două manivele :

$$\begin{cases} l_{min} + l_{max} \leqslant p, \\ l_{min} \equiv d, \end{cases} \tag{61}$$

și anume : *mecanismul patrulater plan articulat neisoscel are două manivele (mecanism dublă manivelă) dacă suma celor două laturi extremale nu depășește semiperimetrul, iar latura minimă este bază* (fig. 11*a*).

Prin analogie cu (48) se formulează teorema existenței unei singure manivele :

$$\begin{cases} l_{min} + l_{max} \leqslant p, \\ l_{min} \equiv a\,;\ c, \end{cases} \tag{62}$$

și anume : *în mecanismul patrulater plan articulat, latura minimă devine manivelă dacă suma laturilor extremale nu depășește semiperimetrul.*

Notînd cu n suma laturilor neextremale și ținînd seama că relația

$$l_{min} + l_{max} \leqslant p$$

implică relația

$$l_{min} + l_{max} \leqslant n,$$

teorema formulată mai sus (62) devine identică cu teorema lui Grashof.

7. CONCLUZII

Condițiile generale ale existenței manivelei la mecanismele patrulatere sferice și plane articulate și diferitele lor formulări pentru mecanismele neisoscele sînt centralizate în tabela 4, unde prin α, β, γ, δ s-au notat unghiurile la centru (unghiuri între axe) *care nu depășesc* $\frac{\pi}{2}$, co-

respunzătoare, respectiv, elementului conducător a, bielei b, elementului condus c și bazei d.

Tabela 4

Mecanisme patrulatere		Condiție generală a existenței manivelei	Consecințe pentru mecanisme neisoscele		
			teoremă	Particularizări ale teoremei	
				2 manivele	1 manivelă
sferice (se consideră unghiurile minime între axele articulațiilor)	ahipercvadrantice bihipercvadrantice tetrahipercvadrantice	$\begin{cases}\alpha+\delta\leqslant\beta+\gamma\\ \lvert\alpha-\delta\rvert\geqslant\lvert\beta-\gamma\rvert\end{cases}$	$\begin{cases}\lambda_{min.}+\lambda_{max.}\leqslant\sigma\\ \lambda_{min.}\neq\beta\end{cases}$	$\begin{cases}\lambda_{min.}+\lambda_{max.}\leqslant\sigma\\ \lambda_{min.}\equiv\delta\end{cases}$	$\begin{cases}\lambda_{min.}+\lambda_{max.}\leqslant\sigma\\ \lambda_{min.}\equiv\alpha\,;\,\gamma\end{cases}$
	monohipercvadrantice trihipercvadrantice	$\begin{cases}\alpha+\delta+\lvert\beta-\gamma\rvert\leqslant\pi\\ \lvert\alpha-\delta\rvert+\beta+\gamma\geqslant\pi\end{cases}$			
plane articulate		$\begin{cases}a+d\leqslant b+c\\ \lvert a-d\rvert\geqslant\lvert b-c\rvert\end{cases}$	$\begin{cases}l_{min.}+l_{max.}\leqslant p\\ l_{min.}\neq b\end{cases}$	$\begin{cases}l_{min.}+l_{max.}\leqslant p\\ l_{min.}\equiv d\end{cases}$	$\begin{cases}l_{min.}+l_{max.}\leqslant p\\ l_{min.}\equiv a\,;\,c\end{cases}$

Primită la redacție la 6 mai 1964, unele completări la 9 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. N. Mihăileanu, *Goemetrie neeuclidiană*. Edit. Acad. R.P.R., 1954.
2. F. F. Pavlov, V. P. Maşkevici, *Trigonometrie sferică*, Edit. tehnică, 1954.
3. H. R. Müller, *Sphärische Kinematik*, VEB Deutsche Verlag Wissenschaft, 1962.
4. В. В. Добровольский, *Теория сферических механизмов*. Машгиз, 1947.
5. * * * *Structura și cinematica mecanismelor*, Edit. tehnică, București, 1959.
6. W. Jahr, P. Knechtel, *Grundzüge der Getriebelehre*, Erster Band. Fachbuchverlag Leipzig, 1955.
7. A. T. Yang, *Harmonic Analisis of spherical four-bar mechanism*. Journal of Applied Mechanics, December 1962.
8. W. Rath, *Kinematik des Kreuzgelenk mit beliebiger Koppellänge*. Das Industrieblatt, **60**, *12*, 1960.
9. D. Mangeron, N. Tavhelidze, *Zadacea o provaracivaemosti Zvenev mnogozennih mehanizmov I.*, Bul. Inst. pol. Iași, *3—4* (1960).

ASUPRA ECUAȚIILOR PLĂCILOR PLANE SUBȚIRI ELASTICE ÎN APROXIMAȚIA NELINIARĂ, ÎN TEORIA FĂRĂ IPOTEZA LOVE-KIRCHHOFF [1])

de V. MANEA

Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R., București

539.3 : 517.9

În prezentul articol se consideră problema stabilirii ecuațiilor plăcilor plane subțiri elastice în aproximația neliniară, într-o formulare ce nu apelează la ipoteza Love-Kirchhoff. Se obțin ecuațiile cu derivate parțiale ce descriu starea de încovoiere, luîndu-se în considerație anumite efecte datorite neliniarității geometrice. Pe baza analizei făcute se poate aprecia caracterul aproximativ al formulării clasice în privința termenilor neliniari și totodată se dă posibilitatea îmbunătățirii preciziei, dacă este necesară, prin considerarea termenilor neliniari suplimentari corespunzători.

1. INTRODUCERE

În cuprinsul prezentului articol ne-am propus ca, pe baza unor rezultate anterioare referitoare la ecuațiile neliniare de mișcare a unui mediu continuu deformabil cuprinse în [1], [2], [3] și [4], precum și la formularea unei teorii a plăcilor plane subțiri elastice în aproximația liniară dată în [5], [6], [7] și [8], să dăm o formulare a teoriei plăcilor plane subțiri elastice în aproximația neliniară. Această problemă este tratată, evident, în formularea clasică bazată pe ipoteza Love-Kirchhoff, fiindu-i consacrată o literatură deosebit de bogată. Este suficient să amintim de cîteva din lucrările de bază binecunoscute [9], [10], [11], [12], [13] etc. După cum se știe însă, contradicțiile proprii formulării bazate pe ipoteza menționată devin și mai incomode în cazul aproximației neliniare.

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. techn. — Mecanique appliquée", **10**, 2 (1965).

2. ECUAȚIILE DE ECHILIBRU DINAMIC AL PLĂCILOR ÎN FORȚE ȘI MOMENTE

Pentru stabilirea acestora alegem suprafețele de coordonate y_1, y_2, y_3 astfel încît suprafața mediană să coincidă cu $y_3 = 0$. În acest caz vectorul de poziție al unui punct P din interiorul plăcii, într-un sistem de referință cartesian $Ox_1x_2x_3$, se poate scrie sub forma

$$\bar{r} = \bar{r}_0(y_1, y_2) + \bar{r}_{03}(y_1, y_2)\, y_3, \tag{2.1}$$

unde $\bar{r}_0(y_1, y_2)$ reprezintă vectorul de poziție al punctului de intersecție a suprafeței mediane cu linia de coordonate y_3 ce trece prin P, iar $\bar{r}_{03}(y_1, y_2)$ vectorul fundamental tangent la această linie, care, în particular, poate fi aleasă normal la suprafața mediană. Întrucît vectorul de poziție depinde liniar de y_3, toate mărimile geometrice legate de metrica spațiului le vom considera de asemenea în aproximația liniară în raport cu y_3. Astfel pentru vectorii bazei covariante vom avea

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= \bar{r}_{01} + \frac{\partial \bar{r}_{03}}{\partial y_1} \cdot y_3, \\ \bar{r}_2 &= \bar{r}_{02} + \frac{\partial \bar{r}_{03}}{\partial y_2} \cdot y_3, \\ \bar{r}_3 &= \bar{r}_{03}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

unde prin $\bar{r}_{0i}$ am notat vectorii bazei covariante pe suprafața $y_3 = 0$. Ținînd seama de relațiile

$$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial y_j} = \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial y_i} = \Gamma^s_{ij}\, \bar{r}_s, \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{2.3}$$

unde prin Γ^s_{ij} am notat simbolii lui Christoffel de speța a doua, avem

$$\frac{\partial \bar{r}_{0i}}{\partial y_j} = \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial y_j}\right)_{y_3 = 0} = \tilde{\Gamma}^s_{ij}\, \bar{r}_{0s}, \tag{2.4}$$

prin $\tilde{\Gamma}^s_{ij}$ notînd $(\Gamma^s_{ij})_{y_3 = 0}$. Prin urmare, (2.2) devine

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= \bar{r}_{01} + \tilde{\Gamma}^s_{31}\, \bar{r}_{0s}\, y_3, \\ \bar{r}_2 &= \bar{r}_{02} + \tilde{\Gamma}^s_{32}\, \bar{r}_{0s}\, y_3, \\ \bar{r}_3 &= \bar{r}_{03}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Aceste relații ne vor servi pentru determinarea celorlalte mărimi geometrice referitoare la metrica spațiului. Avem, evident, $\Gamma^s_{33} = 0$. Pentru componentele tensorului metric fundamental rezultă

$$g_{ij} = \bar{r}_i\, \bar{r}_j = \tilde{g}_{ij} + (\tilde{\Gamma}^s_{3i}\, \tilde{g}_{sj} + \tilde{\Gamma}^t_{3j}\, \tilde{g}_{ti}) y_3 + \tilde{\Gamma}^s_{3i}\, \tilde{\Gamma}^t_{3j}\, \tilde{g}_{st}\, y_3^2.$$

Ecuațiile de echilibru dinamic la momentul t pot fi scrise sub forma [5]:

$$\iint_{S_{y_3=0}} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\, r^1\, \bar{\sigma}_{y_1}\, dy_3 \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g} r^2\, \bar{\sigma}_{y_2}\, dy_3 \right) + \left(\sqrt{g}\, r^3 \bar{\sigma}_{y3} \right) \Big|_{y_3^i}^{y_3^s} + \right.$$

$$\left. + \int_{y_3^i}^{y_3^s} \rho \sqrt{g} \left(\bar{f} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) dy_3 \right] dy_1\, dy_2 = 0 \tag{2.6}$$

$$\iint_{S_{y_3=0}} \bar{r}_0 \wedge \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\, r^1\, \bar{\sigma}_{y_1}\, dy_3 \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\, r^2\, \bar{\sigma}_{y_2}\, dy_3 \right) + \right.$$

$$\left. + \left(\sqrt{g}\, r^3\, \bar{\sigma}_{y_3} \right) \Big|_{y_3^i}^{y_3^s} + \int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\, \rho \left(\bar{f} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} \right) dy_3 \right] dy_1\, dy_2 + \tag{2.7}$$

$$+ \iint_{S_{y_3=0}} \left\{ \bar{r}_{03} \wedge \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\, r^1\, \bar{\sigma}_{y_1}\, y_3\, dy_3 \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\, r^2\, \sigma_{y_2}\, y_3\, dy_3 \right) + \right. \right.$$

$$+ \int_{y_3^i}^{y_3^s} \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\sqrt{g}\, r^3 \bar{\sigma}_{y_3} \right) y_3\, dy_3 + \int_{y_3^i}^{y_3^s} \rho \sqrt{g} \left(\bar{f} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) y_3\, dy_3 +$$

$$\left. \left. + \int_{y_3^i}^{y_3^s} \bar{r}_l \wedge \sqrt{g}\, r^{l'}\, \bar{\sigma}_{y_l}\, dy_3 \right\} dy_1\, dy_2 = 0,$$

unde prin g am notat determinantul format cu componentele tensorului metric fundamental, iar prin y_3^i și y_3^s valorile parametrului y_3 corespunzătoare suprafeței inferioare, respectiv superioare a plăcii. În cazul plăcilor de grosime variabilă, y_3^i și y_3^s trebuie considerate ca funcții de y_1 și y_2. Am notat, de asemenea, prin $\bar{\sigma}_{y_k}$ vectorul tensiune aplicat pe suprafața $y_k = \text{Ct}$, prin $\bar{u}$ vectorul deplasare, iar prin ρ masa specifică a materialului plăcii.

Introducînd notațiile

$$\int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\, r^{i'}\, \bar{\sigma}_{y_i}\, dy_3 = \sqrt{\bar{g}}\, r_0^{i'}\, \bar{N}_{y_i} \tag{2.8}$$

$$\int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\, r^{i'}\, \bar{\sigma}_{y_i}\, y_3\, dy_3 = \sqrt{\bar{g}}\, r_0^{i'}\, \bar{M}_{y_i} \tag{2.9}$$

$$\int_{y_3^i}^{y_3^s} \bar{r}_i \wedge \sqrt{g}\, r^{i'}\, \bar{\sigma}_{yi}\, dy_3 = \bar{r}_{0i} \wedge \sqrt{\bar{g}}\, r_0^i\, \bar{N}_{yi} + \tilde{\Gamma}_{3i}^s\, \bar{r}_{0s} \wedge \sqrt{\bar{g}}\, r_0^{i'}\, \bar{M}_{yi}, \tag{2.10}$$

unde $\widetilde{g} = (g)_{y_3=0}$, ecuațiile precedente vor fi satisfăcute dacă

$$\frac{\partial}{\partial y_1}(\sqrt{\widetilde{g}}\, r_0^1 \overline{N}_{y_1}) + \frac{\partial}{\partial y_3}(\sqrt{\widetilde{g}}\, r_0^2 \overline{N}_{y_2}) + (\sqrt{g}\, r^3 \bar{\sigma}_{y_3})\Big|_{y_3^i}^{y_3^s} + \\ + \int_{y_3^i}^{y_3^s} \rho \sqrt{g}\left(\bar{f} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right) dy_3 = 0, \tag{2.11}$$

$$\bar{r}_{03} \wedge \left[\frac{\partial}{\partial y_1}(\sqrt{\widetilde{g}}\, r_0^1 \overline{M}_{y_1}) + \frac{\partial}{\partial y_2}(\sqrt{\widetilde{g}}\, r_0^2 \overline{M}_{y_2}) + \int_{y_3^i}^{y_3^s} \frac{\partial}{\partial y_3}(\sqrt{g}\, r^3 \bar{\sigma}_{y_3})\, y_3\, dy_3 + \right.$$

$$\left. + \int_{y_3^i}^{y_3^s} \rho \sqrt{g}\left(\bar{f} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right) y_3\, dy_3\right] + \bar{r}_{0_l} \wedge \sqrt{\widetilde{g}}\, r_0^{l'} \overline{N}_{y_l} \widetilde{\Gamma}_{3i}^s \bar{r}_{0s} \wedge \sqrt{\widetilde{g}}\, r_0^{l'} \overline{M}_{y_l} = 0. \tag{2.12}$$

Semnul prim pus la un indice arată că nu are loc sumarea în raport cu acel indice. Acestea sînt ecuațiile de echilibru dinamic la momentul t, în forțe și momente, utilizate în teoria plăcilor curbe.

Urmînd același raționament ca în [1] și [2], vom putea scrie direct ecuațiile de echilibru dinamic la momentul $t^* = t + \Delta t$, referindu-ne la coordonatele curbilinii corespunzătoare liniilor rezultate prin deformarea liniilor de coordonate y_i la momentul t. Intervalul Δt se consideră suficient de mic pentru ca vitezele de variație a diferitelor mărimi să poată fi considerate constante. Notînd cu $(^*)$ toate mărimile care intervin în ecuațiile (2.11) și (2.12) și au suferit o variație în intervalul de timp Δt, vom scrie direct ecuațiile de echilibru dinamic valabile la momentul t^* sub forma

$$\frac{\partial}{\partial y_1}(\sqrt{\widetilde{g}^*}\, r_0^{*1} \overline{N}_{y_1}^*) + \frac{\partial}{\partial y_2}(\sqrt{\widetilde{g}^*}\, r_0^{*2}\, \overline{N}_{y_2}^*) + (\sqrt{\widetilde{g}^*}\, r^{*3}\, \bar{\sigma}_{y_3}^*)\Big|_{y_3^i}^{y_3^s} + \\ + \int_{y_3^i}^{y_3^s} \rho^* \sqrt{g^*}\left(\bar{f}^* - \frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial t^2}\right) dy_3 = 0 \tag{2.13}$$

$$\bar{r}_{03}^* \wedge \left[\frac{\partial}{\partial y_1}(\sqrt{\widetilde{g}^*}\, r_0^{*1}\, \overline{M}_{y_1}^*) + \frac{\partial}{\partial y_2}(\sqrt{\widetilde{g}^*}\, r_0^{*2}\, \overline{M}_{y_2}^*) + \int_{y_3^i}^{y_3^s} \frac{\partial}{\partial y_3}(\sqrt{g^*}\, r^{*3}\, \bar{\sigma}_{y_3}^*)\, y_3\, dy_3 + \right.$$

$$\left. + \int_{y_3^i}^{y_3^s} \rho^* \sqrt{g^*}\left(\bar{f}^* - \frac{\partial^2 \bar{u}^*}{\partial t^2}\right) y_3\, dy_3\right] + \bar{r}_{0l}^* \wedge \sqrt{\widetilde{g}^*}\, r_0^{*l'} \overline{N}_{yl}^* + \tag{2.14}$$

$$+ \widetilde{\Gamma}_{3l}^{*s}\, \bar{r}_{0s}^* \wedge \sqrt{\widetilde{g}^*}\, r_0^{*l} \overline{M}_{yl}^* = 0.$$

Aceste ecuații pot fi supuse cîtorva transformări pentru a fi aduse la o formă convenabilă aplicațiilor practice. În [1], [2] sau [4] am stabilit cîteva relații care dau variația în timp a anumitor mărimi ce intervin

la scrierea ecuațiilor de echilibru. Vom reproduce pe cele necesare transformării ecuațiilor (2.13) și (2.14). Astfel avem

$$\bar{r}^*_{0i} = \bar{r}_{0i} + (\nabla_i v^k)_{v_3=0}\,\bar{r}_{0k}, \tag{2.15}$$

$$\sqrt{\bar{g}^*}\, r^{*i}_0 = \sqrt{\bar{g}}\, r^i_0 (1 + \dot{\alpha}_{0i'} \triangle t), \tag{2.16}$$

$$\bar{\sigma}^*_{v_i} = \bar{\sigma}_{v_i} + \left[\dot{\sigma}_{v_i v_k}\frac{\bar{r}_k}{r_{k'}} + \left(\frac{\sigma_{v_i v_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^k - \frac{\sigma_{v_i v_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right]\triangle t, \tag{2.17}$$

$$\bar{A}^* = \bar{A} + \left[\dot{A}_{v_k}\frac{\bar{r}_k}{r_{k'}} + \left(\frac{A_{v_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^k - \frac{A_{v_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right]\triangle t, \tag{2.18}$$

$$\tilde{\Gamma}^{*s}_{3l}\,\bar{r}^*_s = \tilde{\Gamma}^s_{3l}\,\bar{r}_s + \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x_3\,\partial x_l}\right)_{v_3=0}\triangle t \cong \tilde{\Gamma}^s_3\,\bar{r}_s, \tag{2.18'}$$

unde am notat prin v^k componentele contravariante ale vectorului viteză $\bar{V}$, $\dot{\alpha}_{0i} = (\dot{\alpha}_i)_{v_3=0}$, unde $\dot{\alpha}_i$ reprezintă viteza de deformare superficială definită de relația

$$\sqrt{g^*}\, r^{*k} = \sqrt{g}\, r^k (1 + \dot{\alpha}_k \triangle t) = \sqrt{g}\, r^k \left[1 + (\nabla_{i'} v^{i'} + \nabla_{j'} v^{j'})\triangle t - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{g^{k'i'}}{g^{k'k'}}\nabla_{i'} v^{k'} + \frac{g^{k'j'}}{g^{k'k'}}\nabla_{j'} v^{k'}\right)\triangle t\right], \tag{2.19}$$

prin ∇_j simbolul derivatei covariante, prin $\dot{\varepsilon}_{ij}$ componentele tensorului viteză de deformare date de relația

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i v^j + \nabla_j v^i), \tag{2.20}$$

iar prin $\bar{A}$ vectorul $\bar{j} - \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}$. Punctul deasupra unei mărimi înseamnă derivata în raport cu timpul a acelei mărimi. Cu ajutorul acestor relații putem scrie

$$\sqrt{\bar{g}^*}\, r^{*i}_0\, \bar{N}^*_{v_i} = \int_{v^i_3}^{v^s_3} \sqrt{\bar{g}^*}\, r^{*i}\, \bar{\sigma}^*_{v_i}\, dy_3 = \sqrt{\bar{g}}\, r^{i'}_0 \bar{N}_{v_i} + \Delta t \int_{v^i_3}^{v^s_3} \sqrt{g}\, r^{i'}\left[\dot{\bar{\sigma}}_{v_i} + \dot{\alpha}_{i'}\,\bar{\sigma}_{v_i} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sigma_{v_i v_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^k - \frac{\sigma_{v_i v_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right] dy_3 \tag{2.21}$$

$$\sqrt{\bar{g}^*}\, r^{*i}_0\, \bar{M}^*_{v_i} = \int_{v^i_3}^{v^s_3} \sqrt{\bar{g}^*}\, r^{*i}\, \bar{\sigma}^*_{v_i}\, y_3\, dy_3 = \sqrt{\bar{g}}\, r^{i'}_0\, \bar{M}_{v_i} + \Delta t \int_{v^i_3}^{v^s_3} \sqrt{g}\, r^{i'}\left[\dot{\bar{\sigma}}_{v_i} + \dot{\alpha}_{i'}\,\bar{\sigma}_{v_i} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sigma_{v_i v_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^k - \frac{\sigma_{v_i v_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right] y_3\, dy_3. \tag{2.22}$$

Ținînd seama de aceste relații și de ecuațiile (2.11) și (2.12), precum și de faptul că Δt este arbitrar, ecuațiile (2.13) și (2.14) devin

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\int_{y_3^i}^{y_3^s}\sqrt{g}\,r^{i'}\left[\dot{\bar{\sigma}}_{y_i}+\dot{\alpha}_{i'}\,\bar{\sigma}_{y_i}+\left(\frac{\sigma_{y_i y_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^k-\frac{\sigma_{y_i y_k}}{r_{k'}}\cdot\frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right]dy_3+$$

$$+\left\{\sqrt{g}\,r^3\left[\dot{\bar{\sigma}}_{y_3}+\dot{\alpha}_3\,\bar{\sigma}_{y_3}+\left(\frac{\sigma_{y_3 y_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^k-\frac{\sigma_{y_3 y_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right]\right\}_{y_3^i}^{y_3^s}+ \tag{2.23}$$

$$+\int_{y_3^i}^{y_3^s}\sqrt{g}\,\rho\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\bar{j}-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right)+\left[\left(\frac{f_{y_j}}{r_{j'}}-\frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2}\right)\nabla_j v^k-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{f_{y_k}}{r_{k'}}-\frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2}\right)\frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right]\bar{r}_k\right\}dy_3=0$$

$$\bar{r}_{03}\wedge\left\{\left\{\frac{\partial}{\partial y_i}\int_{y_3^i}^{y_3^s}\sqrt{g}\,r^{i'}\left[\dot{\bar{\sigma}}_{y_i}+\dot{\alpha}_{i'}\,\bar{\sigma}_{y_i}+\left(\frac{\sigma_{y_i y_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^k-\frac{\sigma_{y_i y_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right]y_3\,dy_3+\right.\right.$$

$$+\int_{y_3^i}^{y_3^s}\frac{\partial}{\partial y_3}\left\{\sqrt{g}\,r^3\left[\dot{\bar{\sigma}}_{y_i}+\dot{\alpha}_3\,\bar{\sigma}_{y_3}+\left(\frac{\sigma_{y_3 y_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^k-\frac{\sigma_{y_3 y_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right]\right\}y_3\,dy_3+$$

$$+\int_{y_3^i}^{y_3^s}\sqrt{g}\,\rho\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\bar{j}-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right)+\left[\left(\frac{f_{y_j}}{r_{j'}}-\frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2}\right)\nabla_j v^k-\left(\frac{f_{y_k}}{r_{k'}}-\right.\right.\right. \tag{2.24}$$

$$\left.\left.\left.\left.-\frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2}\right)\frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right]\bar{r}_k\right\}y_3\,dy_3\right\}_{y_3^i}^{y_3^s}+\bar{r}_{0l}\wedge\int_{y_3^i}^{y_3^s}\sqrt{g}\,r^{l'}\left[\dot{\bar{\sigma}}_{y_l}+\dot{\alpha}_{l'}\,\bar{\sigma}_{y_l}+\left(\frac{\sigma_{y_i y_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^k-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\sigma_{y_i y_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right]dy_3+\widetilde{\Gamma}_{3l}^s\,\bar{r}_{0s}\wedge\int_{y_3^i}^{y_3^s}\sqrt{g}\,r^{l'}\left[\dot{\bar{\sigma}}_{y_l}+\dot{\alpha}_{l'}\,\bar{\sigma}_{y_l}+\left(\frac{\bar{\sigma}_{y_l y_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^k-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\sigma_{y_l y_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right]dy_3+(\nabla_3 v^k)_{y_3=0}\;\bar{r}_{0k}\wedge\left[\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sqrt{\bar{g}}\,r_0^{i'}\,\bar{M}_{k_i}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{y_3^i}^{y_3^s}\frac{\partial}{\partial_{y_i}}(\sqrt{g}\,r^3\,\bar{\sigma}_{y_3})\,y_3\,dy_3+\int_{y_3^i}^{y_3^s}\rho\sqrt{g}\left(\bar{j}-\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}\right)y_3\,dy_3\right]+\right.$$

$$+(\nabla_l v^k)_{y_3=0}\,\bar{r}_{0k}\wedge\sqrt{\bar{g}}\,r_0^{l'}\,\bar{N}_{y_l}+\widetilde{\Gamma}_{3l}^s(\nabla_s v^k)_{y_3=0}\,\bar{r}_{0k}\wedge\sqrt{\bar{g}}\,r_0^{l'}\,\bar{M}_{y_l}=0,$$

unde toți indicii iau valorile 1, 2 și 3 în afară de i, care ia numai valorile 1 și 2. Aceste ecuații au formă destul de complicată, care se simplifică mult în cazul sistemelor de coordonate ortogonale, îndeosebi rectilinii. Ca și în cazul ecuațiilor de echilibru în spațiul tridimensional [1], [2] sau [4], ecuațiile de mai sus pot fi scrise sub o formă în care ecuațiile [2.11)

și (2.12) apar sub semnul $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Ținînd seama de ecuația de continuitate $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \nabla_k v^k = 0$ și admițînd că $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t}$, ceea ce este admisibil în cazul mediilor elastice, și considerînd de acum spațiul nedeformabil, după cîteva operații ecuațiile (2.23) și (2.24) devin

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial y_i}(\sqrt{\tilde{g}}\, r_0^{i'}\, \overline{N}_{y_i}) + (\sqrt{g}\, r^3\, \bar{\sigma}_{y_3})\Big|_{y_3^i}^{y_3^s} + \right.$$

$$\left. + \int_{y_3^i}^{y_3^s} \rho\sqrt{g}\left(\bar{f} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right)\mathrm{d}y_3\right] + \sqrt{\tilde{g}}\,\overline{\mathfrak{R}} = 0, \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\bar{r}_{03} \wedge \left[\frac{\partial}{\partial y_i}(\sqrt{\tilde{g}}\, r_0^{i'}\, \overline{M}_{y_i}) + \int_{y_3^i}^{y_3^s} \frac{\partial}{\partial y_3}(\sqrt{g}\, r^3\, \bar{\sigma}_{y_3})\, y_3\, \mathrm{d}y_3 + \right.\right.$$

$$+ \int_{y_3^i}^{y_3^s} \rho\sqrt{g}\left(\bar{f} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right) y_3\, \mathrm{d}y_3\Big] + \bar{r}_{0l} \wedge \sqrt{\tilde{g}}\, r_0^{l'}\, \overline{N}_{y_l} + \tag{2.26}$$

$$\left. + \tilde{\Gamma}_{3l}^{s}\, \bar{r}_{0s} \wedge \sqrt{\tilde{g}}\, r_0^{l'}\, \overline{M}_{y_l}\right\} + \sqrt{\tilde{g}}\,\overline{\mathfrak{M}} = 0,$$

unde

$$\sqrt{\tilde{g}}\,\overline{\mathfrak{R}} = \frac{\partial}{\partial y_i}\int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\, r^{i'}\left[\dot{\alpha}_{i'}\, \bar{\sigma}_{y_i} + \left(\frac{\sigma_{y_i y_j}}{r_{j'}} \nabla_j v^k - \frac{\sigma_{y_i y_k}}{r_{k'}} \frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right] \mathrm{d}y_3 +$$

$$+ \left\{\sqrt{g}\, r^3\left[\dot{\alpha}_3\, \bar{\sigma}_{y_3} + \left(\frac{\sigma_{y_3 y_j}}{r_{j'}} \nabla_j v^k - \frac{\sigma_{y_3 y_k}}{r_{k'}} \frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right]\right\}_{y_3^i}^{y_3^s} + \tag{2.27}$$

$$+ \int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\,\rho\left\{\nabla_k v^k\left(\bar{f} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right) + \left[\left(\frac{f_{y_j}}{r_{j'}} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2}\right) \nabla_j v^k - \left(\frac{f_{y_k}}{r_{k'}} - \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2}\right)\frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right\} \mathrm{d}y_3,$$

$$\sqrt{\tilde{g}}\,\overline{\mathfrak{M}} = \bar{r}_{03} \wedge \left\{\left[\frac{\partial}{\partial y_i}\int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\, r^{i'}\left[\dot{\alpha}_{i'}\, \bar{\sigma}_{y_i} + \left(\frac{\sigma_{y_i y_j}}{r_{j'}} \nabla_j v^k - \frac{\sigma_{y_i y_k}}{r_{k'}} \frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right] y_3\, \mathrm{d}y_3 + \right.\right.$$

$$+ \int_{y_3^i}^{y_3^s} \frac{\partial}{\partial y_3}\left\{\sqrt{g}\, r^3\left[\dot{\alpha}_3\, \bar{\sigma}_{y_3} + \left(\frac{\sigma_{y_3 y_j}}{r_{j'}} \nabla_j v^k - \frac{\sigma_{y_3 y_k}}{r_{k'}} \frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right]\right\} y_3\, \mathrm{d}y_3 +$$

$$+ \int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\,\rho\left\{\nabla_k v^k\left(\bar{f} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\right) + \left[\left(\frac{f_{y_j}}{r_{j'}} - \frac{\partial^2 u^j}{\partial t^2}\right) \nabla_j v^k - \left(\frac{f_{y_k}}{r_{k'}} - \right.\right.\right.$$

$$-\frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2}\frac{\dot\varepsilon_{k'k'}}{g_{k'k'}}\Big]\bar r_k\Big\}y_3\,dy_3\Big\}+\bar r_{0l}\wedge\int_{y_3^i}^{y_3^s}\sqrt{g}\,r^{l'}\Big[\dot\alpha_{l'}\,\bar\sigma_{\nu l}+\Big(\frac{\sigma_{\nu_l\nu_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^k-$$

$$-\frac{\sigma_{\nu_l\nu_k}}{r_{k'}}\frac{\dot\varepsilon_{k'k'}}{g_{k'k'}}\Big)\bar r_k\Big]dy_3+\bar\Gamma^s_{3l}\,\bar r_{0s}\wedge\int_{y_3^i}^{y^s}\sqrt{g}\,r^{l'}\Big[\dot\alpha_{l'}\,\bar\sigma_{\nu l}+\Big(\frac{\sigma_{\nu_l\nu_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^k-$$

$$-\frac{\sigma_{\nu l\nu_k}}{r_{k'}}\frac{\dot\varepsilon_{k'k'}}{g_{k'k'}}\Big)\bar r_k\Big]dy_3+(\nabla_3 v^k)_{\nu_3=0}\,\bar r_{0k}\wedge\Big[\frac{\partial}{\partial y_i}(\sqrt{\bar g}\,r_0^{i'}\,\bar M_{\nu_i})+$$

$$+\int_{\nu_3^i}^{\nu_3^s}\frac{\partial}{\partial y_3}(\sqrt{g}\,r^3\,\bar\sigma_{\nu_3})\,y_3\,dy_3+\int_{\nu_3^i}^{\nu_3^s}\rho\sqrt{g}\Big(\bar f-\frac{\partial^2\bar u}{\partial t^2}\Big)y_3\,dy_3\Big]+$$

$$+(\nabla_l v^k)_{\nu_3=0}\,\bar r_{0k}\wedge\sqrt{\bar g}\;r_0^{l'}\,\bar N_{\nu_l}+\bar\Gamma^s_{3l}(\nabla_s v^k)_{\nu_3=0}\,\bar r_{0k}\wedge\sqrt{\bar g}\;r_0^{l'}\,\bar M_{\nu_l}.$$

Menționăm că indicele i ia valorile 1 și 2, pe cînd ceilalți valorile 1, 2 și 3. Ecuațiile obținute sînt utilizate în cazul plăcilor curbe în general. Deoarece sînt deosebit de complicate, mai ales datorită termenilor neliniari introduși prin intermediul vectorilor $\overline{\mathfrak{M}}$ și $\overline{\mathfrak{M}}$, este necesară utilizarea unor procedee adecvate de soluționare a lor. Printre acestea, cel mai des folosit este liniarizarea termenilor neliniari.

3. LINIARIZAREA ECUAȚIILOR DE ECHILIBRU

Dat fiind caracterul neliniar al termenilor ce compun vectorii $\overline{\mathfrak{M}}$ și $\overline{\mathfrak{M}}$, vom proceda la liniarizarea lor într-un mod similar celui utilizat în [3] sau [4]. Pentru aceasta vom presupune că, pînă la un moment dat t°, starea de solicitare a plăcii este descrisă în ecuațiile (2.11) și (2.12), ceea ce corespunde studiului mișcării în aproximația liniară. După momentul t°, mișcarea este descrisă în ecuațiile (2.25) și (2.26), în condițiile inițiale și la limită date. Dacă punem

$$\begin{aligned}
\bar\sigma_{\nu_i}&=\bar\sigma^0_{\nu_i}+\bar\sigma'_{\nu_i} & \bar u&=\bar u^0+\bar u'\\
\rho&=\rho^0 & \bar v&=\bar v^0+\bar v'\\
\bar F&=\bar F^0 & \dot\alpha_i&=\dot\alpha_i^0+\dot\alpha_i' \qquad (3.1)\\
\bar N_{\nu_i}&=\bar N^0_{\nu_i}+\bar N'_{\nu_i} & \dot\varepsilon_{ij}&=\dot\varepsilon^0_{ij}+\dot\varepsilon'_{ij}\\
\bar M_{\nu_i}&=M^0_{\nu_i}+M'_{\nu_i}
\end{aligned}$$

unde mărimile $\bar\sigma^0_{\nu_i}$, ρ^0, ... etc. sînt presupuse cunoscute în urma soluționării ecuațiilor (2.11) și (2.12), împreună cu legea lui Hooke în condițiile la limită și inițiale date și apoi înlocuim în ecuațiile (2.25) și (2.26) în imediata vecinătate a lui $t^\circ(t>t^\circ)$, putem presupune că mărimile $\bar\sigma'_{\nu_i}$, $\bar N'_{\nu_i}$,... etc. sînt suficient de mici pentru ca termenii neliniari în raport

cu aceste mărimi cu caracter de perturbație să fie neglijabili față de termenii definiți de expresii liniare în raport cu aceste perturbații. De asemenea vom neglija și termenii neliniari în raport cu mărimile corespunzătoare mișcării pînă la momentul t^0, deoarece aceste mărimi au fost determinate pe baza soluționării ecuațiilor (2.11) și (2.12) în aproximația liniară. Ținînd seama de aceste observații, vom scrie direct vectorii $\overline{\mathfrak{M}}$ și $\overline{\mathfrak{M}}$ sub forma

$$\sqrt{\bar{g}}\,\overline{\mathfrak{M}} = \frac{\partial}{\partial y_i}\int_{\nu_3^i}^{\nu_3^s}\sqrt{g}\,r^{i'}\left[\dot{\alpha}_i^0\,\bar{\sigma}'_{\nu_i} + \dot{\alpha}'_{i'}\,\bar{\sigma}^0_{\nu_i} + \left(\frac{\sigma'_{\nu_i\nu_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^{0k} - \frac{\sigma'_{\nu_i\nu_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}^0_{k'k'}}{g_{k'k'}} + \right.\right.$$

$$+\frac{\sigma^0_{\nu_i\nu_j}}{r_{j'}}\cdot\nabla_j v'^k - \left.\frac{\sigma^0_{\nu_i\nu_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}'_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\Big]\,dy_3 + \left\{\sqrt{\bar{g}}\,r^3\left[\dot{\alpha}_3^0\,\bar{\sigma}'_{\nu_3} + \dot{\alpha}'_3\,\bar{\sigma}^0_{\nu_3} + \left(\frac{\sigma'_{\nu_3\nu_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^{0k} - \right.\right.\right.$$

$$-\frac{\sigma'_{3k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}^0_{k'k'}}{g_{k'k'}} + \frac{\sigma^0_{\nu_3\nu_j}}{r_{j'}}\nabla_j v'^k - \left.\left.\left.\frac{\sigma^0_{\nu_3\nu_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}'_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right]\right\}_{\nu_3^i}^{\nu_3^s} + \int_{\nu_3^i}^{\nu_3^s}\sqrt{\bar{g}}\,\rho^0\left(\frac{f^0_{\nu_j}}{r_{j'}}\nabla_j v'^k - \right. \tag{3.2}$$

$$\left. - \frac{f^0_{\nu_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}'_{k'k'}}{g_{k'k'}} - \frac{\partial^2 u'^j}{\partial t^2}\nabla_j v^{0k} + \frac{\partial^2 u'^k}{\partial t^2}\frac{\dot{\varepsilon}^0_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\,dy_3.$$

$$\sqrt{\bar{g}}\,\overline{\mathfrak{M}} = \bar{r}_{03}\wedge\left\{\left\{\frac{\partial}{\partial y_i}\int_{\nu_3^i}^{\nu_3^s}\sqrt{g}\,r^{i'}\left[\dot{\alpha}_i^0\,\bar{\sigma}'_{\nu_i} + \dot{\alpha}'_{i'}\,\bar{\sigma}^0_{\nu_i} + \left(\frac{\sigma'_{\nu_i\nu_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^{0k} - \frac{\sigma'_{\nu_i\nu_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}^0_{k'k'}}{g_{k'k'}} + \right.\right.\right.\right.$$

$$+\frac{\sigma^0_{\nu_i\nu_j}}{r_{j'}}\nabla_j v'^k - \left.\left.\frac{\sigma^0_{\nu_i\nu_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}'_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right]y_3\,dy_3 + \left\{\sqrt{\bar{g}}\,r^3\left[\dot{\alpha}_3^0\,\bar{\sigma}'_{\nu_3} + \dot{\alpha}'_3\,\bar{\sigma}^0_{\nu_3} + \right.\right.\right.$$

$$+\left(\frac{\sigma'_{\nu_3\nu_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^{0k} - \frac{\sigma'_{\nu_3\nu_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}_{k'k'}}{g_{k'k'}} + \frac{\sigma^0_{\nu_3\nu_j}}{r_{j'}}\nabla_j v'^k - \left.\left.\frac{\sigma^0_{\nu_3\nu_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}'_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right]y_3\right\}_{\nu_3^i}^{\nu_3^s} +$$

$$\left.\left.+\int_{\nu_3^i}^{\nu_3^s}\sqrt{\bar{g}}\,\rho^0\left(\frac{f^0_{\nu_j}}{r_{j'}}\nabla_j v'^k - \frac{f^0_{\nu_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}'_{k'k'}}{g_{k'k'}} - \frac{\partial^2 u'^j}{\partial t^2}\nabla_j v^{0k} + \frac{\partial^2 u'^k}{\partial t^2}\frac{\dot{\varepsilon}^0_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\,y_3\;dy_3\right\}\right\} +$$

$$+\bar{r}_{0i}\wedge\int_{\nu_3^i}^{\nu_3^s}\sqrt{g}\;r^{i'}\left[\dot{\alpha}_i^0\,\bar{\sigma}'_{\nu_i} + \dot{\alpha}_i^0\,\sigma^0_{\nu_i} + \left(\frac{\sigma'_{\nu_i\nu_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^{0k} - \frac{\sigma'_{\nu_i\nu_k}}{r_k}\frac{\dot{\varepsilon}^0_{k'k'}}{g_{k'k'}} + \frac{\sigma^0_{\nu_i\nu_j}}{r_{j'}}\nabla_j v'^k - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\sigma'_{\nu_i\nu_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}'_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right]dy_3 + \widetilde{\Gamma}^s_{3l}\,\bar{r}_{0s}\wedge\int_{\nu_3^i}^{\nu_3^s}\sqrt{\bar{g}}\;r^{l'}\left[\dot{\alpha}^0_{l'}\,\bar{\sigma}'_{\nu_l} + \dot{\alpha}'_{l'}\,\bar{\sigma}^0_{\nu_l} + \left(\frac{\sigma'_{\nu_l\nu_j}}{r_{j'}}\nabla_j v^{0k} - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\sigma'_{\nu_l\nu_k}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}^0_{k'k'}}{g_{k'k'}} + \frac{\sigma^0_{k_l\nu_j}}{r_{j'}}\nabla_j v'^k - \frac{\sigma^0_{\nu_l\nu_j}}{r_{k'}}\frac{\dot{\varepsilon}'_{k'k'}}{g_{k'k'}}\right)\bar{r}_k\right]y_3\,dy_3 + \tag{3.3}$$

$$+\;(\nabla_3 v^{0k})_{\nu_3=0}\bar{r}_{0k}\wedge\left[\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\sqrt{\bar{g}}\;r^{i'}_0\,\overline{M}'_{\nu_i}\right) + \left(\sqrt{\bar{g}}\;r^3\,\bar{\sigma}'_{\nu_3}\,y_3\right)\right|_{\nu_3^i}^{\nu_3^s} -$$

$$- \int_{y_3^i}^{y_3^s} \rho^0 \sqrt{g}\, \frac{\partial^2 \overline{u}'}{\partial t^2}\, y_3\, dy_3 \Big] + (\nabla_3 v'^k)_{y_3=0}\, \overline{r}_{0k} \wedge \Big[\frac{\partial}{\partial y_i} (\sqrt{\overline{g}}\, r_0^{i'}\, \overline{M}^0_{y_i}) +$$

$$+ (\sqrt{g}\, r^3\, \bar{\sigma}^0_{y_3}\, y_3)\Big|_{y_3^i}^{y_3^s} + \int_{y_3^i}^{y_3^s} \rho^0 \sqrt{g}\, \bar{f}^0\, y_3\, dy_3 \Big] + (\nabla_i v^{0k})_{y_3=0}\, \overline{r}_{0k} \wedge \sqrt{\overline{g}}\; r_0^{i'}\, \overline{N}'_{y_i} +$$

$$+ (\nabla_i v'^k)_{y_3=0}\, \overline{r}_{0k} \wedge \sqrt{\overline{g}}\; r_0^{i'}\, \overline{N}^0_{yi} + \widetilde{\Gamma}^s_{3l}\, (\nabla_s v^{0k})_{y_3=0}\, \overline{r}_{0k} \wedge \sqrt{\overline{g}}\; r_0^{l'}\; \overline{M}'_{y_l} +$$

$$+ \widetilde{\Gamma}^s_{3l}\, (\nabla_s v'^k)_{y_3=0}\; \overline{r}_{0k} \wedge \sqrt{\overline{g}}\; r_0^{l'}\, \overline{M}^0_{y_l}, \tag{3.3}$$

unde $i = 1, 2$, ceilalți indici luînd valorile 1, 2, și 3. Expresiile (3.2) și (3.3) sînt încă prea complicate pentru a putea servi în scopuri practice. De aceea sînt necesare încă simplificări bazate pe analiza atentă a ordinului de mărime a termenilor ce compun aceste expresii. În cazul plăcilor elastice, termenii importanți sînt aceia datoriți tensiunilor corespunzătoare stării pînă la momentul t^0. Astfel este suficient ca din (3.2) și (3.3) să reținem expresiile

$$\sqrt{\overline{g}}\, \overline{\mathfrak{M}} = \frac{\partial}{\partial y_i} \int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\, r^3 \left(\frac{\sigma^0_{y_i y_j}}{r_{j'}} \nabla_j v'^k - \frac{\sigma^0_{y_i y_k}}{r_{k'}} \frac{\dot{\varepsilon}'_{k'k'}}{g_{k'k'}} \right) \overline{r}_k\, dy_3 +$$

$$+ \Big[\sqrt{\overline{g}}\; r^3 \left(\frac{\sigma^0_{y_i y_j}}{r_{j'}} \nabla_j v'^k - \frac{\sigma^0_{y_i y_k}}{r_{k'}} \frac{\dot{\varepsilon}'_{k'k'}}{g_{k'k'}} \right) \overline{r}_k \Big]_{y_3^i}^{y_3^s} + \int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\, \rho^0 \left(\frac{f^0_{y_j}}{r_{j'}} \nabla_j v'^k - \right. \tag{3.4}$$

$$\left. - \frac{f^0_{y_k}}{r_{k'}} \cdot \frac{\dot{\varepsilon}'_{k'k'}}{g_{k'k'}} \right) \overline{r}_k\, dy_3,$$

$$\sqrt{\overline{g}}\, \overline{\mathfrak{M}} = \overline{r}_{03} \wedge \Big\{ \Big\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\, r^{i'} \left(\frac{\sigma^0_{y_i y_j}}{r_{j'}} \nabla_j v'^k - \frac{\sigma^0_{y_i y_k}}{r_{k'}} \frac{\dot{\varepsilon}'_{k'k'}}{g_{k'k'}} \right) \overline{r}_k\, y_3\, dy_3 +$$

$$+ \Big[\sqrt{g}\; r^3 \left(\frac{\sigma^0_{y_3 y_j}}{r_{j'}} \nabla_j v'^k - \frac{\sigma^0_{y_i y_k}}{r_{k'}} \cdot \frac{\dot{\varepsilon}'_{k'k'}}{g_{k'k'}} \right) \overline{r}_k\, y_3 \Big]_{y_3^i}^{y_3^s} + \int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\, \rho^0 \left(\frac{f^0_{y_j}}{r_{j'}} \nabla_j v'^k - \right. \tag{3.5}$$

$$\left. - \frac{f^0_{y_k}}{r_{k'}} \frac{\dot{\varepsilon}'_{k'k'}}{g_{k'k'}} \right) \overline{r}_k\, y_3\, dy_3 \Big\} \Big\} + \overline{r}_{0i} \wedge \int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\, r^{i'} \left(\frac{\sigma^0_{y_i y_j}}{r_{j'}} \nabla_j v'^k - \frac{\sigma^0_{y_i y_k}}{r_{k'}} \frac{\dot{\varepsilon}'_{k'k'}}{g_{k'k'}} \right) \overline{r}_k\, dy_3 +$$

$$+ \widetilde{\Gamma}^s_{3l}\, \overline{r}_{0s} \wedge \int_{y_3^i}^{y_3^s} \sqrt{g}\; r^{i'} \left(\frac{\sigma^0_{y_i y_j}}{r_{j'}} \nabla_j v^k - \frac{\sigma^0_{y_i y_k}}{r_{k'}} \frac{\dot{\varepsilon}'_{k'k'}}{g_{k'k'}} \right) \overline{r}_k\, y_3\, dy_3 +$$

$$+ (\nabla_i v'^k)_{y_3=0} \overline{r}_{0k} \wedge \sqrt{\overline{g}}\; r_0^{i'}\, \overline{N}^0_{y_i} + \widetilde{\Gamma}^s_{3l}\, (\nabla_j v'^k)_{y_3=0} \wedge \sqrt{\overline{g}}\, r_0^{l'}\, \overline{M}^0_{y_l}.$$

Am neglijat de asemenea efectele datorite deformației superficiale, care pot juca un rol important numai în anumite cazuri, spre exemplu la ruperea materialului, precum și efectele dinamice, ceea ce echivalează cu presupunerea că solicitarea pînă la momentul t^0 are un caracter static.

După cum vom vedea ulterior, vor trebui efectuate noi simplificări asupra acestor expresii, ceea ce arată cît este de larg cadrul prezentei formulări. Pentru cazul plăcilor plane subțiri elastice este suficient să considerăm în locul coordonatelor curbilinii coordonatele carteziene x_k, planul median al plăcii corespunzînd lui $x_3 = 0$. Ecuațiile (2.25) și (2.26) după operația de liniarizare devin *)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \overline{N}_1'}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{N}_2'}{\partial x_2} + \bar{\sigma}'_{x_3^s} - \bar{\sigma}'_{x_3^i} - \int_{-h/2}^{h/2} \rho^0 \frac{\partial^2 \overline{u}'}{\partial t^2}\,\mathrm{d}x_3\right] + \overline{\mathfrak{F}} = 0, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\bar{l}_3 \wedge \left[\frac{\partial \overline{M}_1'}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{M}_2'}{\partial x_2} + \frac{h}{2}(\bar{\sigma}'_{x_3^s} + \bar{\sigma}'_{x_3^i}) - \int_{-h/2}^{h/2} \rho^0 \frac{\partial^2 \overline{u}'}{\partial t^2} x_3\,\mathrm{d}x_3\right] + \bar{l}_1 \wedge \overline{N}_1' + \bar{l}_2 \wedge \overline{N}_2'\right\} + \overline{\mathfrak{M}} = 0, \tag{3.7}$$

unde prin h am notat grosimea plăcii, considerată constantă, iar prin $\bar{l}_k$ versorii axelor sistemului de referință $Ox_1x_2x_3$. Expresiile (3.4) și (3.5) devin

$$\overline{\mathfrak{F}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma_{ij}^0 \frac{\partial v_k'}{\partial x_j} - \sigma_{ik}^0 \frac{\partial v_{k'}'}{\partial x_{k'}}\right)\mathrm{d}x_3 + \left[\left(\sigma_{3j}^0 \frac{\partial v_k'}{\partial x_j} - \sigma_{3k}^0 \frac{\partial v_{k'}'}{\partial x_{k'}}\right)\bar{l}_k\right]_{-h/2}^{h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} \rho^0\left(f_i^0 \frac{\partial v_k'}{\partial x_j} - f_k^0 \frac{\partial v_{k'}'}{\partial x_{k'}}\right)\bar{l}_k\,\mathrm{d}x_3, \tag{3.8}$$

respectiv

$$\overline{\mathfrak{M}} = \bar{l}_3 \wedge \left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma_{ij}^0 \frac{\partial v_k'}{\partial x_j} - \sigma_{ik}^0 \frac{\partial v_{k'}'}{\partial x_{k'}}\right)\bar{l}_k\, x_3\,\mathrm{d}x_3 + \left[\left(\sigma_{3j}^0 \frac{\partial v_k'}{\partial x_j} - \sigma_{3k}^0 \frac{\partial v_{k'}'}{\partial x_{k'}}\right)\bar{l}_k\, x_3\right]_{-h/2}^{h/2} + \int_{-h/2}^{h/2} \rho^0\left(f_j^0 \frac{\partial v_k'}{\partial x_j} - f_k^0 \frac{\partial v_{k'}}{\partial x_{k'}}\right)\bar{l}_k\, x_3\,\mathrm{d}x_3\right\} + \bar{l}_i \wedge \int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma_{ij}^0 \frac{\partial v_k'}{\partial x_j} - \sigma^0{}_k \frac{\partial v_{k'}'}{\partial x_{k'}}\right)\bar{l}_k\,\mathrm{d}x_3 + \left(\frac{\partial v_k'}{\partial x_i}\right)_{x_3=0} \bar{l}_k \wedge \overline{N}_i, \tag{3.9}$$

unde, după cum am mai menționat anterior, indicele $i = 1, 2$, ceilalți luînd valorile 1, 2, și 3. Pe lîngă condițiile inițiale obișnuite, după cum am arătat în [1] — [4], trebuie adăugate condițiile

$$\left[\frac{\partial \overline{N}_1'}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{N}_2'}{\partial x_2} + \bar{\sigma}'_{x_3^s} - \bar{\sigma}'_{x_3^i} - \int_{-h/2}^{h/2} \rho^0 \frac{\partial^2 \overline{u}'}{\partial t^2}\,\mathrm{d}x_3\right]_{t=t^0} = 0 \tag{3.10}$$

*) Pentru simplificarea scrierii vom înlocui indicii x_j prin j.

$$\left\{\bar{l}_3 \wedge \left[\frac{\partial \overline{M}_1'}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{M}_2'}{\partial x_2} + \frac{h}{2}\left(\bar{\sigma}'_{x_3^s} + \bar{\sigma}'_{x_3^i}\right) - \int_{-h/2}^{h/2} \rho^0 \frac{\partial^2 \overline{u}'}{\partial t^2} x_3 \, dx_3\right] + \right.$$
$$\left. + \bar{l}_1 \wedge N_1' + \bar{l}_2 \wedge \overline{N}_2' \right\}_{t=t^\circ} = 0 \tag{3.11}$$

a căror semnificaţie este evidentă. Mărimile $\bar{\sigma}_i^0$, $\overline{N}_i^0$, $\overline{M}_i^0$ etc. se determină rezolvînd ecuaţiile (2.11) şi (2.12), valabile pînă la momentul t°, care în cazul coordonatelor carteziene au forma

$$\frac{\partial \overline{N}_1^0}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{N}_2^0}{\partial x_2} + \bar{\sigma}^0_{x_3^s} - \bar{\sigma}^0_{x_3^i} + \int_{-h/2}^{h/2} \rho^0 \bar{f}^0 \, dx_3 = 0, \tag{3.12}$$

$$\bar{l}_3 \wedge \left[\frac{\partial \overline{M}_1^0}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{M}_2^0}{\partial x_2} + \frac{h}{2}\left(\bar{\sigma}^0_{x_3^s} + \bar{\sigma}^0_{x_3^i}\right) + \int_{-h/2}^{h/2} \rho^0 \bar{f}^0 \, x_3 \, dx_3\right] +$$
$$+ \bar{l}_1 \wedge \overline{N}_1^0 + \bar{l}_2 \wedge \overline{N}_2^0 = 0, \tag{3.13}$$

împreună cu legea lui Hooke în condiţiile la limită date.

4. ECUAŢIILE PLĂCILOR PLANE SUBŢIRI ELASTICE ÎN APROXIMAŢIA NELINIARĂ EXPRIMATE ÎN DEPLASĂRI

În [5] şi [8] am stabilit expresiile ecuaţiilor de echilibru ale plăcilor plane subţiri elastice în aproximaţia liniară. Rezultatele obţinute sînt utile şi în cazul de faţă, cu completările necesare impuse de prezenţa vectorilor $\overline{\mathfrak{R}}$ şi $\overline{\mathfrak{M}}$ în ecuaţiile (3.6) şi (3.7).

Vom lua pentru deplasări expresii de forma

$$u_1' = u_{10}'(x_1, x_2, t) + w_1'(x_1, x_2, t)\, x_3,$$
$$u_2' = u_{20}'(x_1, x_2, t) + w_2'(x_1, x_2, t)\, x_3, \tag{4.1}$$
$$u_3' = w'(x_1, x_2, x_3, t),$$

expresiile vitezelor rezultînd direct prin simpla derivare a acestor expresii în raport cu timpul.

Integrînd ecuaţiile (3.6) şi (3.7) în raport cu timpul şi ţinînd seama de condiţiile iniţiale suplimentare (3.10) şi (3.11), obţinem

$$\frac{\partial \overline{N}_1'}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{N}_2'}{\partial x_2} + \bar{\sigma}'_{x_3^s} - \bar{\sigma}'_{x_3^i} - \int_{-h/2}^{h/2} \rho^0 \frac{\partial^2 \overline{u}'}{\partial t^2} \, dx_3 + \int_{t^\circ}^{t} \overline{\mathfrak{R}} \, dt = 0, \tag{4.2}$$

$$\bar{l}_3 \wedge \left[\frac{\partial \overline{M}_1'}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{M}_2'}{\partial x_2} + \frac{h}{2}(\bar{\sigma}'_{x_3^s} + \bar{\sigma}'_{x_3^i}) - \int_{-h/2}^{h/2} \rho^\circ \frac{\partial^2 \overline{u}'}{\partial t^2} x_3 \, dx_3 \right] + l_1 \wedge \overline{N}_1' +$$

$$+ \bar{l}_2 \wedge \overline{N}_2' + \int_{t^0}^{t} \overline{\mathfrak{M}} \, dt = 0. \tag{4.3}$$

Prin urmare, este necesară exprimarea vectorilor $\overline{\mathfrak{R}}$ și $\overline{\mathfrak{M}}$, integrați în raport cu timpul, în funcție de deplasări conform cu (4.1). Pentru aceasta rescriem expresiile proiecțiilor acestor vectori pe axele sistemului de referință

$$\mathfrak{R}_k = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{ij}^0 \frac{\partial v_k'}{\partial x_j} - \sigma_{ik}^0 \frac{\partial v_{k'}'}{\partial x_k} \right) dx_3 + \left(\sigma_{3j}^0 \frac{\partial v_k'}{\partial x_j} - \sigma_{3k}^0 \frac{\partial v_{k'}'}{\partial x_{k'}} \right)_{-h/2}^{h/2} +$$

$$+ \int_{-h/2}^{h/2} \rho^0 \left(f_j^0 \frac{\partial v_k'}{\partial x_j} - f_k^0 \frac{\partial v_{k'}'}{\partial x_k} \right) dx_3, \tag{4.4}$$

respectiv

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{ij}^0 \frac{\partial v_2'}{\partial x_j} - \sigma_{i2}^0 \frac{\partial v_2'}{\partial x_2} \right) x_3 \, dx_3 - \left[\left(\sigma_{3j}^0 \frac{\partial v_2'}{\partial x_j} - \sigma_{32}^0 \frac{\partial v_2'}{\partial x_2} \right) x_3 \right]_{-h/2}^{h/2} +$$

$$+ \int_{-h/2}^{h/2} \rho^0 \left(f_j^0 \frac{\partial v_2'}{\partial x_j} - f_2^0 \frac{\partial v_2'}{\partial x_2} \right) x_3 \, dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{2j}^0 \frac{\partial v_3'}{\partial x_j} - \sigma_{23}^0 \frac{\partial v_3'}{\partial x_3} \right) dx_3 +$$

$$+ \left(\frac{\partial v_2'}{\partial x_i} \right)_{x_3=0} N_{i3}^0 - \left(\frac{\partial v_3'}{\partial x_i} \right)_{x_3=0} N_{i2}^0$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{ij}^0 \frac{\partial v_1'}{\partial x_j} - \sigma_{i1}^0 \frac{\partial v_1'}{\partial x_1} \right) x_3 \, dx_3 + \left[\left(\sigma_{3j}^0 \frac{\partial v_1'}{\partial x_j} - \sigma_{31}^0 \frac{\partial v_1'}{\partial x_1} \right) x_3 \right]_{-h/2}^{h/2} +$$

$$+ \int_{-h/2}^{h/2} \rho^0 \left(f_j^0 \frac{\partial v_1'}{\partial x_j} - f_1^0 \frac{\partial v_1'}{\partial x_1} \right) x_3 \, dx_3 - \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{1j}^0 \frac{\partial v_3'}{\partial x_j} - \sigma_{13}^0 \frac{\partial v_3'}{\partial x_3} \right) dx_3 - \tag{4.5}$$

$$- \left(\frac{\partial v_1'}{\partial x_i} \right)_{x_3=0} N_{i3}^0 + \left(\frac{\partial v_3'}{\partial x_i} \right)_{x_3=0} N_{i1}^0$$

$$\overline{\mathfrak{M}}_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{ij}^0 \frac{\partial v_2'}{\partial x_j} - \sigma_{12}^0 \frac{\partial v_2'}{\partial x_2} \right) dx_3 - \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{2j}^0 \frac{\partial v_1'}{\partial x_j} - \sigma_{21}^0 \frac{\partial v_1'}{\partial x_1} \right) dx_3 +$$

$$+ \left(\frac{\partial v_1'}{\partial x_i} \right)_{x_3=0} N_{i2}^0 - \left(\frac{\partial v_2'}{\partial x_i} \right)_{x_3=0} N_{i1}^0.$$

Înlocuind în aceste expresii conform cu (4.1) și ținînd seama de notațiile (2.8) și (2.9), obținem

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(N^0_{i2}\frac{\partial \dot{u}'_{10}}{\partial x_2} + M^0_{i2}\frac{\partial \dot{w}'_1}{\partial x_2} + N^0_{i3}\dot{w}'_1\right) + \left(\sigma^0_{32}\frac{\partial \dot{u}'_{10}}{\partial x_2} + \sigma^0_{32}\frac{\partial \dot{w}'_1}{\partial x_2}\cdot x_3 + \sigma^0_{33}\dot{w}'_1\right)^{h/2}_{-h/2} +$$
$$+ \frac{\partial \dot{u}'_{10}}{\partial x_2}\int_{-h/2}^{h/2}\rho^0 f^0_2\,\mathrm{d}x_3 + \frac{\partial \dot{w}'_1}{\partial x_2}\int_{-h/2}^{h/2}\rho^0 f^0_3 x_3\,\mathrm{d}x_3 + \dot{w}'_1\int_{-h/2}^{h/2}\rho^0 f^0_3\,\mathrm{d}x_3,$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(N^0_{i1}\frac{\partial \dot{u}'_{20}}{\partial x_1} + M^0_{i1}\frac{\partial \dot{w}'_2}{\partial x_1} + N^0_{i3}\dot{w}'_2\right) + \left(\sigma^0_{31}\frac{\partial \dot{u}'_{20}}{\partial x_1} + \sigma^0_{31}\frac{\partial \dot{w}'_2}{\partial x_1}x_3 + \sigma^0_{33}\dot{w}'_2\right)^{h/2}_{-h/2} +$$
$$+ \frac{\partial \dot{u}'_{20}}{\partial x_1}\int_{-h/2}^{h/2}\rho^0 f^0_1\,\mathrm{d}x_3 + \frac{\partial \dot{w}'_2}{\partial x_1}\int_{-h/2}^{h/2}\rho^0 f^0_1 x_3\,\mathrm{d}x_3 + \dot{w}'_2\int_{-h/2}^{h/2}\rho^0 f^0_1\,\mathrm{d}x_3, \quad (4.6)$$

$$\mathfrak{M}_3 = \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma^0_{ij}\frac{\partial \dot{w}'}{\partial x_j} - \sigma^0_{i3}\frac{\partial \dot{w}'}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_3 + \left(\sigma^0_{3j}\frac{\partial \dot{w}'}{\partial x_j} - \sigma^0_{33}\frac{\partial \dot{w}'}{\partial x_3}\right)^{h/2}_{-h/2} +$$
$$+ \int_{-h/2}^{h/2}\rho^0\left(f^0_j\frac{\partial \dot{w}'}{\partial x_j} - f^0_3\frac{\partial \dot{w}'}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_3,$$

respectiv

$$\mathfrak{M}_1 = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(M^0_{i1}\frac{\partial \dot{u}'_{20}}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{w}'_2}{\partial x_1}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma^0_{i1}x_3^2\,\mathrm{d}x_3 + \dot{w}'_2\int_{-h/2}^{h/2}\sigma^0_{i3}x_3\,\mathrm{d}x_3\right) -$$
$$- \left\{\left[\sigma^0_{31}\left(\frac{\partial \dot{u}'_{20}}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{w}'_2}{\partial x_1}x_3\right) + \sigma^0_{33}\dot{w}'_2\right]x_3\right\}^{h/2}_{-h/2} - \frac{\partial \dot{u}'_2}{\partial x_1}\int_{-h/2}^{h/2}\rho^0 f^0_1\,\mathrm{d}x_3 -$$
$$- \frac{\partial \dot{w}'_2}{\partial x_1}\int_{-h/2}^{h/2}\rho^0 f^0_1 x_3^2\,\mathrm{d}x_3 - \dot{w}'_2\int_{-h/2}^{h/2}\rho^0 f^0_3 x_3\,\mathrm{d}x_3 + \int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma^0_{21}\frac{\partial \dot{w}'}{\partial x_1} +$$
$$+ \sigma^0_{22}\frac{\partial \dot{w}'}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_3 + \frac{\partial \dot{u}'_{20}}{\partial x_i}N^0_{i3} - \left(\frac{\partial \dot{w}'}{\partial x_i}\right)_{x_3=0}N^0_{i2}, \quad (4.7)$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(M^0_{i2}\frac{\partial \dot{u}'_{10}}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{w}'_1}{\partial x_2}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma^0_{i2}x_3^2\,\mathrm{d}x_3 + \dot{w}'_1\int_{-h/2}^{h/2}\sigma^0_{i3}x_3\,\mathrm{d}x_3\right) +$$
$$+ \left\{\left[\sigma^0_{32}\left(\frac{\partial \dot{u}'_{10}}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{w}'_1}{\partial x_2}x_3\right) + \sigma^0_{33}\dot{w}'_1\right]x_3\right\}^{h/2}_{-h/2} + \frac{\partial \dot{u}'_1}{\partial x_2}\int_{-h/2}^{h/2}\rho^0 f^0_2 x_3\,\mathrm{d}x_3 +$$
$$+ \frac{\partial \dot{w}'_1}{\partial x_2}\int_{-h/2}^{h/2}\rho^0 f^0_2 x_3^2\,\mathrm{d}x_3 + \dot{w}'_1\int_{-h/2}^{h/2}\rho^0 f^0_3 x_3\,\mathrm{d}x_3 - \int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma^0_{11}\frac{\mathrm{d}\dot{w}'}{\mathrm{d}x_1} +$$
$$+ \sigma^0_{12}\frac{\partial \dot{w}'}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_3 - \frac{\partial \dot{u}'_{10}}{\partial x_i}N^0_{i3} + \left(\frac{\partial \dot{w}'}{\partial x_i}\right)_{x_3=0}N^0_{i1}.$$

$$\mathfrak{M}_3 = \int_{-h/2}^{h/2}\left[\sigma^0_{11}\left(\frac{\partial \dot{u}'_{20}}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{w}'_2}{\partial x_1}x_3\right) + \sigma^0_{13}\dot{w}'_2\right]\mathrm{d}x_3 -$$
$$- \int_{-h/2}^{h/2}\left[\sigma^0_{22}\left(\frac{\partial \dot{u}'_{10}}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{w}'_1}{\partial x_2}x_3\right) + \sigma^0_{23}\dot{w}'_1\right]\mathrm{d}x_3 + \frac{\partial \dot{u}'_{10}}{\partial x_i}N^0_{i2} - \frac{\partial \dot{u}'_{20}}{\partial x_i}N^0_{i1}.$$

Dacă ținem seama de ecuațiile de echilibru (3.12) și (3.13), scrise sub formă scalară, iar deplasarea $w(x_1, x_2, x_3, t)$ o înlocuim cu deplasarea

medie pe grosime $\overline{w}(x_1, x_2, t)$, expresiile (4.6) devin

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_1 &= N^0_{i2}\frac{\partial^2 \dot{u}'_{10}}{\partial x_i \partial x_2} + M^0_{i2}\frac{\partial^2 \dot{w}'_1}{\partial x_i \partial x_2} + N^0_{23}\frac{\partial \dot{w}'_1}{\partial x_2},\\
\mathfrak{M}_2 &= N^0_{i1}\frac{\partial^2 \dot{u}'_{20}}{\partial x_i \partial x_1} + M^0_{i1}\frac{\partial^2 \dot{w}'_2}{\partial x_i \partial x_1} + N^0_{13}\frac{\partial \dot{w}'_2}{\partial x_1},\\
\mathfrak{M}_3 &= N^0_{i1}\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x_i \partial x_1} + N_{i2}\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x_i \partial x_2}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Pentru simplificarea expresiilor (4.7) vom observa mai întîi că au loc egalitățile

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma^0_{i1}x_3^2\,dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2}\rho^0 f^0_1 x_3^2\,dx_3 &= -(\sigma^{0s}_{31} - \sigma^{0i}_{31})\frac{h^2}{12},\\
\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma^0_{i2}x_3^2\,dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2}\rho^0 f^0_2 x_3^2\,dx_3 &= -(\sigma^{0s}_{32} - \sigma^{0i}_{32})\frac{h^2}{12},\\
\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma^0_{i3}x_3\,dx_3 + \int_{-h/2}^{h/2}\rho^0 f^0_3 x_3\,dx_3 &= 0,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

a căror stabilire se face pe baza ecuațiilor tridimensionale de echilibru valabile pînă la momentul $t°$, ținînd seama de relațiile stabilite în [1]:

$$\begin{aligned}
\sigma^0_{31} &= \sigma^{0s}_{31} + \frac{\sigma^{0s}_{31} - \sigma^{0i}_{31}}{2}\left(1 + \frac{2x_3}{h}\right) + \mu\,\psi^0_1(x_1, x_2, x_3, t),\\
\sigma^0_{32} &= \sigma^{0s}_{32} + \frac{\sigma^{0s}_{32} - \sigma^{0i}_{32}}{2}\left(1 + \frac{2x_3}{h}\right) + \mu\,\psi_2(x_1, x_2, x_3, t),\\
\sigma^0_{33} &= \sigma^6_{33} + \frac{\sigma^{0s}_{33} - \sigma^{0i}_{33}}{2}\left(1 + \frac{2x_3}{h}\right),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

valabile pentru plăci subțiri. Funcțiile ψ_1 și ψ_2 au o distribuție parabolică pe grosime, anulîndu-se pe cele două suprafețe ale plăcii. Ținînd seama de ecuațiile de echilibru (3.12) și (3.13), scrise sub formă scalară, deplasarea w înlocuind-o prin deplasarea medie pe grosime $\overline{w}$, expresiile (4.7), devin

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_1 &= -M^0_{i1}\frac{\partial^2 \dot{u}'_{20}}{\partial x_i\,\partial x_1} - N^0_{i1}\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 \dot{w}'_2}{\partial x_i\,\partial x_1} + N^0_{23}\frac{\partial \dot{u}'_{20}}{\partial x_2} -\\
&\quad - \frac{\partial \dot{w}'_2}{\partial x_1}(\sigma^{0s}_{31} - \sigma^{0i}_{31})\frac{h^2}{4} - \frac{\partial \dot{w}'_2}{\partial x_2}(\sigma^{0s}_{32} - \sigma^{0i}_{32})\frac{h^2}{4} - \dot{w}'_2(\sigma^{0s}_{33} + \sigma^{0i}_{33})\frac{h}{2},\\
\mathfrak{M}_2 &= M^0_{i2}\frac{\partial^2 \dot{u}'_{10}}{\partial x_i\,\partial x_2} + N^0_{i2}\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 \dot{w}'_1}{\partial x_i\,\partial x_2} - N^0_{13}\frac{\partial \dot{u}'_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{w}'_1}{\partial x_2}(\sigma^{0s}_{32} - \sigma^{0i}_{32})\frac{h^2}{4} +\\
&\quad + \frac{\partial \dot{w}'_1}{\partial x_1}(\sigma^{0s}_{31} - \sigma^{0i}_{31})\frac{h^2}{4} + \dot{w}'_1(\sigma^{0s}_{33} + \sigma^{0i}_{33})\frac{h}{2},\\
\mathfrak{M}_3 &= M^0_{11}\frac{\partial \dot{w}'_2}{\partial x_1} - M^0_{22}\frac{\partial \dot{w}'_1}{\partial x_2} + N^0_{13}\dot{w}'_2 - N^0_{23}\dot{w}'_1 + N^0_{12}\left(\frac{\partial \dot{u}'_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{u}'_{20}}{\partial x_2}\right),
\end{aligned} \tag{4.11}$$

unde $i = 1, 2$.

Expresiile (4.8) și (4.11), permit o apreciere a principalelor efecte ce trebuie luate în considerare pentru construirea teoriei plăcilor plane subțiri elastice în aproximația neliniară. În primul rînd trebuie menționat că în acest caz starea de tensiune plană nu se mai separă de cea de încovoiere, ca în aproximația liniară. Pentru a ajunge la această separare trebuie efectuate încă simplificări ale acestor expresii. Se poate observa că, datorită faptului că deplasările și derivatele acestora din starea de tensiune plană sînt cu mult mai mari decît cele din starea de încovoiere, putem neglija termenii care conțin derivatele deplasărilor u'_{10} și u'_{20}. Putem neglija de asemenea efectele datorite tensiunilor aplicate pe suprafața superioară și inferioară a plăcii fără a restrînge generalitatea. În plus, tensiunile din starea de încovoiere sînt de obicei cu mult mai mici decît cele din starea de solicitare plană a plăcii, ceea ce permite de asemenea neglijarea termenilor care conțin forțe tăietoare și momente față de termenii ce conțin forțe din planul plăcii. În baza acestor observații, expresiile (4.8) și (4.11) se reduc la

$$\mathfrak{N}_1 \cong 0,$$

$$\mathfrak{N}_2 \cong 0,$$

$$\mathfrak{N}_3 = N^0_{11}\frac{\partial^2 \dot{\overline{w}}}{\partial x_1^2} + 2N^0_{12}\frac{\partial^2 \dot{\overline{w}}}{\partial x_1 \partial x_2} + N^0_{22}\frac{\partial^2 \dot{\overline{w}}}{\partial x_2^2}, \tag{4.12}$$

respectiv

$$\mathfrak{M}_1 = -N^0_{11}\frac{h^2}{12}\cdot\frac{\partial^2 \dot{w}'_2}{\partial x_1^2} - N^0_{21}\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 \dot{w}^1_2}{\partial x_2 \partial x_1},$$

$$\mathfrak{M}_2 = N^0_{12}\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 \dot{w}'_1}{\partial x_1 \partial x_2} + N^0_{22}\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 \dot{w}'_1}{\partial x_2^2}, \tag{4.13}$$

$$\mathfrak{M}_3 \cong 0.$$

Acum putem scrie direct ecuațiile (4.2) și (4.3) sub formă scalară

$$\frac{\partial N'_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N'_{21}}{\partial x_2} + \sigma'^s_{31} - \sigma'^i_{31} - \rho^0 h\frac{\partial^2 u'_{10}}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial N'_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N'_{22}}{\partial x_2} + \sigma'^s_{32} - \sigma'^i_{32} - \rho^0 h\frac{\partial^2 u'_{20}}{\partial t^2} = 0, \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial N'_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N'_{23}}{\partial x_2} + \sigma'^s_{33} - \sigma'^i_{33} - \rho^0 h\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial t^2} + \left(N^0_{11}\frac{\partial^2 \overline{w}'}{\partial x_1^2} + 2N^0_{12}\frac{\partial^2 \overline{w}'}{\partial x_1 \partial x_2} + N^0_{22}\frac{\partial^2 \overline{w}'}{\partial x_2^2}\right)_{t^0}^{t} = 0,$$

$$\frac{\partial M'_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M'_{22}}{\partial x_2} + \frac{h}{2}(\sigma'^{s}_{32} + \sigma'^{i}_{32}) - \rho^0 \frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 w'_2}{\partial t^2} - N'_{23} - \left(N^0_{11}\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 \overline{w}'_2}{\partial x_1^2} + \right.$$

$$\left. + N^0_{12}\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 w'_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^t_{t^0} = 0,$$

$$\frac{\partial M'_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M'_{12}}{\partial x_2} + \frac{h}{2}(\sigma'^{s}_{31} + \sigma'^{i}_{31}) - \rho^0 \frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 w'_1}{\partial t^2} - N'_{13} + \left(N^0_{12}\frac{h^2}{12}\cdot\frac{\partial^2 w'_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \right.$$

$$\left. + N^0_{22}\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 w'_1}{\partial x_2^2}\right)^t_{t^0} = 0.$$

Dacă în ecuația a treia din sistemul de mai sus înlocuim forțele tăietoare N'_{23} și N'_{13} din ecuațiile următoare, rezultă direct că termenii din aceste ecuații proveniți din $\mathfrak{M}_1$ și $\mathfrak{M}_2$ au un ordin de mărime față de termenii ce provin din $\mathfrak{M}_3$ așa cum este raportul $\frac{h^2}{L^2}$ față de unitate, L fiind o dimensiune caracteristică a plăcii. Din această observație rezultă că, pentru studiul plăcilor plane subțiri în aproximația neliniară a ecuațiilor de echilibru, este suficient să reținem termenii dați de $\mathfrak{M}_3$ (4.12). Pentru plăci de grosime medie, necesitatea considerării termenilor neglijați este evidentă.

Într-un mod cu totul identic cu cel în care s-a obținut sistemul de ecuații în deplasări, în aproximația liniară, pentru plăcile plane subțiri elastice [1], putem obține din sistemul (4.14) sistemul corespunzător în deplasări, utilizînd legea lui Hooke pentru forțe și momente exprimate sub forma dată în [1]:

$$N'_{ij} = \lambda^* h\theta'_0\delta_{ij} + \mu h\left(\frac{\partial u'_{i0}}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_{j0}}{\partial x_i}\right), \qquad (i, j = 1, 2) \qquad (4.15)$$

$$N'_{i3} = \mu h\left(\frac{\partial \overline{w}'}{\partial x_i} + w'_i\right), \qquad (i = 1, 2) \qquad (4.16)$$

respectiv

$$M'_{ij} = \frac{\lambda^* h^3}{12}\theta'\delta_{ij} + \mu\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial w'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w'_j}{\partial x_i}\right), \qquad (i, j = 1, 2) \qquad (4.17)$$

unde $\theta'_0 = \frac{\partial u'_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_{20}}{\partial x_2}$, respectiv $\theta'_1 = \frac{\partial w'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w'_2}{\partial x_2}$. Efectuînd înlocuirile corespunzătoare numai în ultimele trei ecuații (4.14), obținem

$$\mu h\,\Delta\overline{w}' + \mu h\theta'_1 + \frac{h}{2}(\sigma'^{s}_{33} - \sigma'^{i}_{33}) - \rho^0 h\frac{\partial^2 \overline{w}'}{\partial t^2} + \left(N^0_{11}\frac{\partial^2 \overline{w}'}{\partial x_1^2} + \right.$$

$$\left. + 2N^0_{12}\frac{\partial^2 \overline{w}'}{\partial x_1 \partial x_2} + N^0_{22}\frac{\partial^2 \overline{w}'}{\partial x_2^2}\right)^t_{t^0} = 0,$$

$$\frac{\mu h^3}{12}\Delta w_1' + (\lambda^* + \mu)\frac{h^3}{12}\frac{\partial \theta_1'}{\partial x_1} - \mu h\left(\frac{\partial \overline{w}'}{\partial x_1} + w_1'\right) + \frac{h}{2}(\sigma_{31}'^{s} + \sigma_{31}'^{i}) - \\ - \rho^0 \frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 w_1'}{\partial t^2} = 0, \tag{4.18}$$

$$\frac{\mu h^3}{12}\Delta w_2' + (\lambda^* + \mu)\frac{h^3}{12}\frac{\partial \theta_1'}{\partial x_2} - \mu h\left(\frac{\partial \overline{w}'}{\partial x_2} + w_2'\right) + \frac{h}{2}(\sigma_{32}'^{s} + \sigma_{32}'^{i}) - \\ - \rho^0 \frac{h^3}{12}\frac{\partial^2 w_2'}{\partial t^2} = 0.$$

Aceste ecuații pot servi pentru studiul problemelor de încovoiere a plăcilor subțiri elastice în aproximația neliniară, îndeosebi pentru studiul pierderii stabilității elastice. Ele au fost stabilite fără a apela la ipoteza Love-Kirchhoff și, ca și în cazul aproximației liniare, pot fi rezolvate într-o manieră asemănătoare, condițiile la limită, în număr de trei, punîndu-se în același mod.

Primită la redacție la 10 decembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. V. Manea, *Asupra ecuațiilor neliniare de mișcare ale unui mediu continuu deformabil.* S.C.M.A. *2* (1962).
2. — *Asupra ecuațiilor neliniare de mișcare ale unui mediu continuu deformabil în coordonate curbilinii oarecare.* S.C.M.A., *3* (1962).
3. — *Asupra liniarizării ecuațiilor de mișcare a unui mediu continuu deformabil.* S.C.M.A., *4* (1962).
4. — *К нелинейным уравнениям движения сплошной деформируемой сред.* Rev. Roum. Sc. Techn.,—Mec. Appl. *1* (1964).
5. — *Considerații asupra teoriei plăcilor plane elastice subțiri.* S.C.M.A., *4* (1963).
6. — *Construirea soluției ecuațiilor plăcilor plane elastice subțiri, din teoria fără ipoteza Love-Kirchhoff, prin metoda funcțiilor analitice.* S.C.M.A., *5* (1963).
7. — *Calculul plăcilor circulare elastice subțiri în teoria fără ipoteza Love-Kirchhoff.* S.C.M.A., *6* (1963).
8. — *Об одной теории тонких упругих плоских пластин без гипотезы Лиав-Киркгофф.* Rev. Roum. Sc. Tech.—Mec. Appl. *2* (1964).
9. С. П. Тимошенко, *Устойчивость упругих систем.* Гостехиздат М изд. 2-е, Москва, 1955.
10. В. В. Болотин, *Динамическая устойчивость упругих систем.* Гостехиздат, Москва, 1956.
11. В. В. Болотин, *Неконсервативные задачи теории устойчивости*, Физматгиз, Москва, 1961.
12. М. Муштари, К. З. Галимов, *Нелинейная теория упругих тонких оболочек.* Таткнигоиздат, Казань, 1957.
13. А. С. Волмир, *Устойчивость упругих систем*, Госуд. Издат. Физико-Мат. Лит. Москва, 1961.

DESPRE DETERMINAREA STĂRII DE TENSIUNE ȘI DE DEFORMAȚIE ÎN PROBLEMA PLANĂ A ELASTODINAMICII CORPURILOR ANIZOTROPE[1]

de SOÓS EUGEN
Universitatea București – Facultatea de matematică – mecanică

539.3

Se presupune că într-un corp anizotrop, caracterizat de trei constante elastice, starea de tensiune este produsă de o perturbație mobilă care se deplasează cu viteză constantă $\vec{w}$. Se arată că componentele tensorului tensiune și ale deplasării se pot exprima cu ajutorul a două funcții analitice definite în două planuri complexe diferite. Se determină starea de tensiune și deformație în următoarele cazuri: ștanță plană mobilă, forță concentrată mobilă pe frontiera semiplanului, ștanță parabolică mobilă, fisură rectilinie mobilă.

Influența unei perturbații care se deplasează cu viteză constantă pe frontiera sau în interiorul unui corp elastic izotrop a fost studiată în mai multe lucrări. Astfel, în [1], Sneddon arată că determinarea tensiunii în acest caz în problema plană a elasticității, în absența forțelor masice, se reduce la găsirea a două funcții analitice definite în două plane complexe. Cu ajutorul transformatei Fourier, Sneddon găsește soluția pentru cazul unei forțe concentrate mobile pe frontiera semiplanului. Radok [2], utilizînd aceeași reprezentare complexă, regăsește rezultatul, obținut de Yoffe [3] pe altă cale, în problema fisurii mobile a lui Griffith; determină starea de tensiune și deformație creată în semiplan de o ștanță parabolică mobilă și dă reprezentarea componentelor deplasării în cazul unei dislocații mobile, problemă rezolvată anterior de Eshelby [4]. În lucrarea [5], Cole și Huth arată că tipul ecuațiilor diferențiale corespunzătoare undelor plane de dilatare și de torsiune depinde de numerele lui Mach $M_1 = \frac{w}{w_1}$,

[1] Apare și în „Rev. roum. sci. techn. – Mecanique appliquée", (1965).

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 18 NR. 2 P. 395–406 BUCUREȘTI 1965

$M = \frac{w}{w_2}$, w fiind viteza de deplasare a perturbației, iar w_1 și w_2 vitezele de propagare ale undelor plane longitudinale și transversale.

Starea de tensiune provocată de forțele mobile pe frontiera unui corp elastic este tratată în lucrarea [6] prin utilizarea transformatelor integrale. Cu ajutorul suprapunerii unor unde sinusoidale și al reprezentării funcției lui Dirac prin transformate bidimensionale, Fourier determină cîmpul de deplasări și tensiuni într-un semispațiu elastic izotrop cînd pe frontiera corpului acționează o forță concentrată, care se deplasează cu viteză constantă

În lucrarea [7], Papadopoulos studiază undele de șoc provocate într-un semispațiu de sarcini care se deplasează cu viteză supersonică. Sveklo, în lucrarea [8], studiază cu ajutorul funcțiilor de variabilă complexă, pentru corpuri anizotrope caracterizate de trei constante elastice [11], problema generală a elastodinamicii plane.

În această lucrare vom arăta că rezultatele obținute în [1] și [2] pot fi extinse pentru corpurile anizotrope considerate în [8] dacă în corp avem o stare de deformație plană, tensiunile și deformațiile fiind provocate de o perturbație care se deplasează cu viteză constantă.

★

Considerăm un corp anizotrop caracterizat prin trei constante elastice. Presupunem că în corp avem o stare de deformație plană. Conform ipotezei în sistemul cartezian de axe Oxy, legea lui Hooke are forma următoare [11]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}\,\varepsilon_{11} + C_{12}\,\varepsilon_{22} \\ \sigma_{22} &= C_{12}\,\varepsilon_{11} + C_{11}\,\varepsilon_{22} \\ \sigma_{12} &= C_{44}\,\varepsilon_{12} \end{aligned} \tag{1}$$

sau

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \varepsilon_{11} = C_1\,\sigma_{11} - C_2\,\sigma_{22} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \varepsilon_{22} = -\,C_2\sigma_{11} + C_1\,\sigma_{22} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \varepsilon_{12} = C_4\,\sigma_{12} \end{aligned} \tag{1'}$$

legătura dintre c_{11}, c_{12}, c_{44} și c_1, c_2, c_4 fiind evidentă.
Menționăm că în cazul izotrop avem

$$\begin{aligned} &C_{11} = \lambda + 2\mu,\ C_{12} = \lambda,\ C_{44} = \mu;\ C_1 = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu\,(\lambda + \mu)}, \\ &C_2 = \frac{\lambda}{4\mu\,(\lambda + \mu)},\quad C_4 = \frac{1}{\mu}. \end{aligned} \tag{2}$$

Energia specifică de deformaţie pentru corpul considerat este

$$W = \frac{1}{2} C_{11} \varepsilon_{11}^2 + C_{12} \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \frac{1}{2} C_{11} \varepsilon_{22}^2 + \frac{1}{2} C_{44} \varepsilon_{12}^2 .$$

Se ştie că într-un corp anizotrop viteza de propagare a undelor depinde de direcţia de propagare [11]. Dacă notăm cu l şi m cosinuşii directori ai direcţiei de propagare, atunci vitezele de propagare w_1 şi w_2 ale undelor plane din corpul considerat sînt rădăcinile ecuaţiei

$$\begin{vmatrix} C_{11} l^2 + C_{44} m^2 - \rho w^2 & (C_{12} + C_{44}) lm \\ (C_{12} + C_{44}) lm & C_{11} m^2 + C_{44} l^2 - \rho w^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Valorile extreme ale vitezelor de propagare sînt atinse pentru $l = 1$, $m = 0$ şi $l = 0$, $m = 1$, pentru care găsim în ambele cazuri următoarele două viteze :

$$w_1^2 = \frac{C_{11}}{\rho}, \quad w_2^2 = \frac{C_{44}}{\rho} \text{ sau } w_1^2 = \frac{C_1}{\rho(C_1^2 - C^2{}_2)}, \quad w_2^2 = \frac{1}{\rho C_4}, \tag{4}$$

unde am notat cu ρ densitatea constantă a corpului considerat.

Energia specifică de deformaţie este pozitivă definită, de unde rezultă

$$C_{11} > 0, \quad C_{11}^2 - C_{12}^2 > 0, \quad C_{44} > 0. \tag{5}$$

Se ştie că în starea de tensiune plană componentele tensorului tensiune satisfac ecuaţiile de mişcare ale lui Cauchy :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Ecuaţia de compatibilitate este

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x \partial y}. \tag{7}$$

Derivînd ecuaţiile (6) în raport cu x, respectiv y, şi scăzînd rezultatele obţinute avînd în vedere legea lui Hooke (1′), obţinem

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho (C_1 - C_2) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \sigma_{11} = \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \rho (C_1 + C_2) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \sigma_{22},$$

de unde rezultă că există o funcţie $U(x, y)$ cu proprietatea

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \rho (C_1 + C_2) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] U, \\ \sigma_{22} &= \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho (C_1 + C_2) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] U. \end{aligned} \tag{8}$$

Rezultatul obținut în cazul izotrop coincide cu cel găsit în lucrările [1], [2], [9]. Un rezultat analog pentru un corp ortotrop este dat în lucrarea [10].

În cele ce urmează vom presupune că tensiunea din corp se datorește unei perturbații mobile care se deplasează cu o viteză constantă w paralel cu axa Ox. Este evident că în acest caz vom avea un regim permanent în raport cu un sistem mobil $O'y$, care se deplasează, ca și perturbația, cu viteza w. Deci toate mărimile vor fi funcții numai de $x - wt$ și y. Făcînd schimbarea de variabile

$$\xi = x - w\,t \text{ și } y = y,$$

relațiile (8) vor avea forma

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \rho(C_1+C_2)w^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\Big] U, \\ \sigma_{22} &= [1 - \rho\,(C_1 + C_2)\,w^2]\,\frac{y^2 U}{\partial \xi^2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Derivînd ecuațiile (6) în raport cu x, respectiv y, și adunînd rezultatele obținute, pe baza legii lui Hooke și a relației (9), din ecuația de continuitate (7), rezultă, că funcția de tensiune $U\,(\xi, y)$ satisface în interiorul corpului următoarea ecuație :

$$\begin{aligned} &\left[1 - \left(\frac{w^2}{w_1^2} + \frac{w^2}{w_2^2}\right) + \frac{w^2}{w_1^2}\cdot\frac{w^2}{w_2^2}\right]\frac{\partial^4 U}{\partial \xi^4} + \left[\frac{C_4 - 2C_2}{C_1} - \right. \\ &\left. - \left(\frac{w^2}{w_1^2} + \frac{w_2}{w_2^2}\right)\right]\frac{\partial^4 U}{\partial \xi^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Ecuația (10) se poate pune sub forma

$$\left[(1 - \alpha_1^2)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\left[(1 - \alpha_2^2)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] U = 0, \tag{11}$$

α_j^2 fiind rădăcinile ecuației

$$z^2 - \left[k + \frac{w^2}{w_1^2} + \frac{w^2}{w_2^2}\right] z + \left[k + \frac{w^2}{w_1^2}\cdot\frac{w^2}{w_2^2}\right] = 0, \tag{12}$$

unde

$$k = \frac{2C_1 + 2C_2 - C_4}{C_1} = \frac{(C_{11} + C_{12})\,(2C_{44} + C_{12} - C_{11})}{C_{11}\cdot C_{44}}. \tag{13}$$

Din (5) se vede că

$$\frac{C_{11} + C_{12}}{C_{11}\,C_{44}} > 0.$$

Rezultatele experimentale arată că la toate materialele cu anizotropie de tipul celui considerat avem [8], [11] :

$$2\,C_{44} + C_{12} - C_{11} < 0.$$

Din cele spuse rezultă că totdeauna

$$k < 0. \tag{14}$$

Conform relațiilor (2), pentru un corp izotrop $k = 0$. În acest caz, ecuația (12) coincide cu cea găsită în lucrările [1, 2]. Dacă $w = 0$, ecuația (12) se reduce la ecuația cunoscută a lui Lehnițki [12].

Discriminantul ecuației (12) este

$$\Delta = \left(k + \frac{w^2}{w_1^2} + \frac{w^2}{w_2^2}\right)^2 - 4\left(k + \frac{w^2}{w_1^2} \cdot \frac{w^2}{w_2^2}\right) = k^2 + 2k\left(\frac{w^2}{w_1^2} + \frac{w^2}{w_2^2} - 2\right) + \left(\frac{w^2}{w_1^2} - \frac{w^2}{w_2^2}\right)^2.$$

În cele ce urmează vom presupune că viteza de propagare a perturbației satisface relațiile

$$w^2 < w_1^2, \; w^2 < w_2^2. \tag{15}$$

Dacă condițiile (15) nu sînt satisfăcute, în corp apar unde de șoc. Din (14) și (15) se vede că $\Delta > 0$, deci ecuația (13) are totdeauna rădăcini reale. Menționăm că pe baza ipotezei (16) rezultă :

$$2 - \left(k + \frac{w^2}{w_1^2} + \frac{w^2}{w_2^2}\right) > 0.$$

Utilizînd această relație, se arată imediat că $\alpha_j < 1$. Acest rezultat este esențial pentru cele ce urmează.

Dacă notăm :

$$\beta_j = \sqrt{1 - \alpha_j^2} > 0,$$

ecuația (11) se integrează imediat cu ajutorul variabilelor complexe

$$z_j = \xi + \mathrm{i}\, \beta_j\, y$$

și soluția generală este de forma

$$U(\xi, y) = \varphi_1(z_1) + \bar{\varphi}_1(\bar{z}_1) + \varphi_2(z_2) + \bar{\varphi}_2(\bar{z}_2), \tag{16}$$

$\varphi_j(z_j)$ fiind două funcții analitice în planele complexe z_j $(j = 1, 2)$. Vom nota

$$f_j(z_j) = \frac{\mathrm{d}\varphi_j(z_j)}{\mathrm{d}z_j} = \varphi_j'(z_j).$$

Din relațiile (9) și (16) obținem

$$\sigma_{11} = 2\mathrm{Re}\,[P_1 f_1'(z_1) + P_2 f_2'(z_2)], \tag{17}$$

$$\sigma_{22} = 2q\ \mathrm{Re}\,[f_1'(z_1) + f_2'(z_2)],$$

unde

$$P_j = -\,[\beta_j^2 + \rho(C_1 + C_2)\, w^2], \quad q = 1 - \rho(C_1 + C_2)\, w^2. \tag{17'}$$

Utilizînd legea lui Hooke (1'), prin integrare obținem :

$$U = 2 \text{ Re } [p_1 f_1(z_1) + p_2 f_2(z_2)], \tag{18'}$$
$$V = 2 \text{ Im } [q_1 f_1(z_1) + q_2 f_2(z_2)],$$

unde

$$p_j = -\left(C_1 \beta_j^2 + C_2 + C_1 \frac{w^2}{w_1^2}\right), \quad q_j = \frac{1}{\beta_j}\left(C_2 \beta_j^2 + C_1 - C_1 \frac{w^2}{w_2^2}\right). \tag{18}$$

Din a treia relație (1') rezultă prin derivare

$$\sigma_{12} = 2 \text{ Im } [Q_1 f_1'(z_1) + Q_2 f_2'(z_2)], \tag{19}$$

unde

$$Q_j = \frac{1}{C_4}[-\beta_j p_j + q_j]. \tag{19'}$$

Se verifică imediat prin calcul direct că soluția (17—19) satisface ecuațiile (6) și (7). Dacă corpul este izotrop, din (17—19) regăsim soluția din lucrările [1, 2]. Dacă $w = 0$, din (17—19) regăsim soluția cunoscută a lui Lehnițki [12].

Rezultatul obținut generalizează astfel reprezentarea dată în lucrările [1, 2] pentru un corp anizotrop caracterizat de trei constante elastice.

APLICAȚII

1. SEMIPLANUL ANIZOTROP CU SARCINĂ MOBILĂ PE FRONTIERĂ

Considerăm semiplanul $y \geqslant 0$. Vom presupune că pe frontiera semiplanului nu avem sarcini tangențiale numai presiuni normale ; condițiile la limită vor fi deci

$$\sigma_{22}(\xi, 0) = p(\xi), \quad \sigma_{12}(\xi, 0) = 0. \tag{20}$$

Din relația (19) se vede că a doua condiție (20) va fi satisfăcută dacă luăm

$$f_1'(z_1) = Q_2 \chi'(z_1), \quad f_2'(z_2) = -Q_1 \chi'(z_2), \tag{21}$$

$\chi(z)$ fiind o funcție analitică de variabilă complexă $z = \xi + iy$. Din prima condiție (20) obținem

$$\chi'(\xi) + \overline{\chi}(\xi) = 2 \text{ Re } \chi(z)\Big|_{y=0} = \frac{p(\xi)}{q(Q_2 - Q_1)}. \tag{22}$$

Problema este astfel redusă la găsirea unei funcții armonice în semiplanul $y > 0$, cînd cunoaștem valorile sale pe frontiera $y = 0$. Formula lui Schwarz-Villat [13] reduce rezolvarea acestei probleme la calcularea unei integrale ; avem

$$\chi'(z) = -\frac{1}{2\pi i q(Q_2 - Q_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\xi)}{z - \xi} \, d\xi. \tag{23}$$

Am presupus $p(\infty) = 0$.

Problema se mai poate rezolva cu ajutorul transformatei Fourier, metodă utilizată de Sneddon în [1].
Fie $p^*(\eta)$ transformata Fourier a lui $p(\xi)$:

$$p^*(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi)\, e^{-i\eta\xi}\, d\xi. \tag{24}$$

Conform teoremei de inversiune [14], avem

$$p(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\eta)\, e^{-i\eta\xi}\, d\eta,$$

deci condiția la limită (22) devine:

$$\chi'(\xi) + \overline{\chi}'(\xi) = \frac{1}{\pi q (Q_2 - Q_1)} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\eta)\, e^{-i\xi\eta}\, d\eta.$$

Această metodă este utilă dacă $p^*(\eta)$ este o funcție pară de η. În acest caz găsim

$$\chi'(z) = \frac{1}{\pi q (Q_2 - Q_1)} \int_{0}^{\infty} p^*(\eta)\, e^{iz\eta}\, d\eta. \tag{25}$$

Vom considera două exemple simple pentru ilustrarea utilizării celor două metode.

ȘTANȚĂ PLANĂ MOBILĂ FĂRĂ FRECARE (SOLUȚIE APROXIMATIVĂ)

Presupunem că sub ștanță presiunea este aproximativ constantă, ipoteză aproximativă care se admite în tehnică [16]. Forma funcției $p(\xi)$ va fi deci în acest caz

$$p(\xi) = \begin{cases} P & \text{pentru } |\xi| < a, \\ 0 & \text{pentru } |\xi| > a. \end{cases}$$

Din relația (23) obținem imediat

$$\chi'(z) = \frac{P}{2\pi i q (Q_1 - Q_2)} \ln \frac{z + a}{z - a}. \tag{26}$$

SARCINĂ CONCENTRATĂ MOBILĂ

Forma funcției $p(\xi)$ este:

$$p(\xi) = P^* \delta(\xi),$$

$\delta(\xi)$ fiind funcția lui Dirac.
Avem

$$p^*(\eta) = \frac{P^*}{2}.$$

deci

$$\chi'(z) = \frac{P^*}{2\pi\, iq\,(Q_1 - Q_2)} \cdot \frac{1}{z}. \tag{27}$$

Evident, (27) se obține direct și din (23) sau din (26) dacă presupunem că $a \to 0$ și $2aP \to P^*$.

Componentele tensorului tensiune și ale deplasării se determină din relațiile (17—19).

Obținem, de exemplu, în cazul sarcinii concentrate:

$$f_1'(z_1) = \frac{Q_2}{2\,\pi\, iq\,(Q_1 - Q_2)} \cdot \frac{P^*}{(x - wt) + i\,\beta_1 y},$$

$$f_2'(z_2) = \frac{Q_1}{2\,\pi\, iq\,(Q_2 - Q_1)} \cdot \frac{P^*}{(x - wt) + i\,\beta_2 y},$$

$$\sigma_{22} = \frac{P^*}{\pi}\left[\frac{\beta_1 Q_2}{Q_2 - Q_1} \cdot \frac{y}{(x - wt)^2 + \beta_1^2 y^2} + \frac{\beta_2 Q_1}{Q_1 - Q_2} \cdot \frac{y}{(x - wt)^2 + \beta_2^2 y^2}\right].$$

Se vede clar că $\sigma_{22} = 0$ pentru $y = 0$, $x - wt \neq 0$, și pe un semicerc din semiplanul superior cu centrul în punctul $x - wt = 0$, $y = 0$ avem

$$\int \sigma_{22}\, ds = P^*,$$

unde ds reprezintă elementul de arc pe semicerc.

ȘTANȚĂ MOBILĂ CU BAZĂ CURBĂ (SOLUȚIA EXACTĂ)

Presupunem că ștanța se deplasează pe frontiera semiplanului cu viteza constantă w. Între ștanță și semiplan nu avem frecare. Condițiile la limită vor fi

$$\begin{aligned} &\sigma_{12}(\xi, 0) = 0 \text{ pentru } -\infty < \xi < \infty, \\ &\sigma_{22}(\xi, 0) = 0 \text{ pentru } a < |\xi|, \\ &V(\xi, 0) = f(\xi) \text{ pentru } |\xi| < a. \end{aligned} \tag{28}$$

Funcția $f(x)$ reprezintă profilul ștanței; a se determină din condiția

$$P = \int_{-a}^{a} \sigma_{22}(\xi, 0)\, d\xi, \tag{29}$$

P fiind presiunea normală dată, care acționează pe ștanță.

Vom căuta funcțiile $f_j(z_j)$ sub forma

$$f_j'(z_j) = A_j \chi'(z_j). \tag{30}$$

Utilizînd relaţiile (17—19) din (28), obţinem :

$$(A_1 Q_1 + A_2 Q_2)\,[\chi'(\xi) - \overline{\chi}'(\xi)] = 0 \text{ pentru } -\infty < \xi < \infty,$$

$$q\,(A_1 + A_2)\,[\chi'(\xi) + \overline{\chi}'(\xi)] = 0 \text{ pentru } a < |\xi|,$$

$$(q_1 A_1 + q_2 A_2)\,[\chi'(\xi) - \overline{\chi}'(\xi)] = \mathrm{i} f'(\xi) \text{ pentru } |\xi| < a.$$

Vom determina constantele A_j din condiţiile

$$A_1 Q_1 + A_2 Q_2 = 0$$

$$A_1 q_1 + A_2 q_2 = 1$$

de unde rezultă

$$A_1 = \frac{Q_2}{q_1 Q_2 - q_2 Q_1}, \quad A_2 = \frac{Q_1}{q_2 Q_1 - q_1 Q_2}.$$

Astfel, pentru $\chi'(z)$ avem următoarele condiţii :

$$\chi'(\xi) + \overline{\chi}'(\xi) = 0 \text{ pentru } a < |\xi|, \tag{31}$$

$$\chi'(\xi) - \overline{\chi}'(\xi) = \mathrm{i} f'(\xi) \text{ pentru } |\xi| < a. \tag{32}$$

Vom introduce funcţia complexă

$$F(z) = \begin{cases} \chi'(z) \text{ pentru } y > 0, \\ -\overline{\chi'(\overline{z})} \text{ pentru } y < 0. \end{cases}$$

Vom ajunge astfel la cunoscuta problemă a conjugării liniare [15] :

$$F^+(\xi) - F^-(\xi) = 0 \text{ pentru } a < |\xi|,$$

$$F^+(\xi) + F^-(\xi) = \mathrm{i} f'(\xi) \text{ pentru } |\xi| < a.$$

Soluţia problemei care se anulează pentru $\xi = \pm a$ şi tinde la zero cînd $|z| \to \infty$, este

$$\chi'(z) = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{f'(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2}\,(\xi - z)} \tag{33}$$

în semiplanul superior.

În relaţia precedentă trebuie să considerăm acea determinare a radicalului care pentru $|z|$ suficient de mare se dezvoltă în forma

$$\sqrt{z^2 - a^2} = z - \frac{a^2}{2} + 0\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Vom considera ca aplicaţie o ştanţă cu baza parabolică ; în acest caz avem

$$f(\xi) = d - \frac{\xi^2}{2R},$$

unde R este suficient de mare ca să avem deformații mici.

Din relația (31) găsim

$$\chi'(z) = \frac{\mathrm{i}}{2R}[\sqrt{z^2 - a^2} - z],$$

deci

$$f_1'(z_1) = \frac{Q_2}{2R(q, Q_2 - q_2 Q_1)}\,\mathrm{i}\,[\sqrt{z_1^2 - a^2} - z_1],$$

$$f_2'(z_2) = \frac{Q_1}{2R(q_2 Q_1 - q_1 Q_2)}\,\mathrm{i}\,[\sqrt{z_2^2 - a^2} - z_2].$$

Componentele tensorului tensiune și ale deplasării se determină cu ajutorul relațiilor (17)—(19).

FISURĂ RECTILINIE MOBILĂ

Presupunem că în planul nemărginit avem o fisură de lungime a situată pe axa Ox, care se deplasează cu viteză constantă w paralel cu această axă. La mari distanțe planul este întins uniform într-o direcție perpendiculară pe fisură. Avem deci următoarele condiții la limită :

$$\sigma_{11}^{\infty} = 0, \quad \sigma_{12}^{\infty} = 0, \quad \sigma_{22}^{\infty} = N \text{ (const.)} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_{12}(\xi, 0) = 0 \text{ pentru } |\xi| < a, \\ &\sigma_{22}(\xi, 0) = 0 \text{ pentru } |\xi| < a. \end{aligned} \tag{35}$$

Pentru îndeplinirea condițiilor (34) vom căuta funcțiile necunoscute în următoarea formă :

$$f_j(z_j) = A_j z_j + g_j(z_j), \tag{36}$$

unde funcțiile $g_j(z_j)$ au următoarea proprietate :

$$\lim_{z_j \to \infty} g_j'(z_j) = 0, \tag{37}$$

iar A_j sînt constante reale.

Din (34), 36) și (37) rezultă

$$A_1 = \frac{P_2}{P_2 - P_1} \cdot \frac{N}{2q}, \quad A_2 = \frac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \frac{N}{2q}. \tag{38}$$

Condițiile (35) dau următoarele relații :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\,[g_1'(z_1) + g_2'(z_2)] = -\frac{N}{2q}, \\ &(y = 0, \quad |\xi| < a) \\ &\mathrm{Re}\,\{\mathrm{i}\,[Q_1 g_1'(z_1) + Q_2 g_2'(z_2)]\} = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Fisura fiind pe axa reală, frontierele domeniilor din planele complexe z, z_1, z_2 coincid. Reprezentarea conformă a acestor frontiere pe cercul de rază 1 din planul complex ζ este dată de funcția

$$z_{1,2} = \frac{a}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right). \tag{40}$$

Transpunînd condițiile pe cercul unitate, obținem imediat

$$g_1(\zeta) = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \cdot \frac{N}{2q} a\zeta, \quad g_2(\zeta) = \frac{Q_1}{Q_2 - Q_1} \cdot \frac{N}{2q} a\zeta. \tag{41}$$

Din (41) și (42) rezultă

$$g_1(z_1) = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \cdot \frac{N}{2q}[z_1 - \sqrt{z_1^2 - a^2}], \quad g_2(z_2) = \frac{Q_1}{Q_2 - Q_1} \cdot \frac{N}{2q}[z_2 - \sqrt{z_2^2 - a^2}],$$

deci cu (36)

$$f_1(z_1) = \frac{N}{2q}\left[\frac{P_2}{P_2 - P_1} z_1 + \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}(z_1 - \sqrt{z_1^2 - a^2})\right],$$

$$f_2(z_2) = \frac{N}{2q}\left[\frac{P_1}{P_1 - P_2} z_2 + \frac{Q_1}{Q_2 - Q_1}(z_2 - \sqrt{z_2^2 - a^2})\right].$$

Componentele tensorului tensiune se determină din relațiile (17)—(19). Obținem, de exemplu,

$$\sigma_{22} = N \cdot \mathrm{Re}\left[\frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} \cdot \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - a^2}} + \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} \cdot \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - a^2}}\right].$$

Pe axa reală vom avea

$$\sigma_{22}(\zeta, 0) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } |\xi| < a, \\ N \dfrac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2}} \text{ pentru } |\xi| > a. \end{cases}$$

În mod asemănător se pot rezolva problemele cu următoarele condiții la mari distanțe :

$$\sigma_{11}^{\infty} = M \text{ (const.)}, \ \sigma_{12}^{\infty} = 0, \ \sigma_{22}^{\infty} = 0 \text{ sau } \sigma_{11}^{\infty} = 0, \ \sigma_{12}^{\infty} = T, \ \sigma_{22}^{\infty} = 0.$$

Folosind metoda lui Radok [2] și relațiile (17)—(19), se poate determina imediat starea de tensiune într-un plan elastic anizotrop produsă de o dizlocație rectilinie mobilă.

Primită la redacție la 27 iunie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. I. Sneddon, *The stress produced by pulse of pressure moving along the surface of a semi-infinite solid.* Rend. de Circolo Mat. di Palermo, S. 2, **1**, *1* (1952).
2. J. R. M. Radok, *On the solution of problems of dynamic plane elasticity.* Quarterly of Appl. Math., **14**, *3* (1956).

3. E. Yoffe, *The moving Griffith crack*. Phil. Mag., **42**, July (1954).
4. J. D. Eshelby, *Uniformly moving dislocation*. Proc. Phys. Soc., **62**, *353 A* (1949).
5. I. D. Cole, J. Huth, *Stressed produced in a half plane by moving loads*, J. Paper Am. Soc. Mech. Engr., *8* (1958).
6. J. Mandel, A. Avramesco, *Deplacements produits par une charge mobile à la surface d'une semi-espace elastique*. Comptes Rendus, **252**, *24* (1961).
7. M. Papadopoulos, *The elastodynamics of moving loads I.*, J. Austral Math. Soc., **3**, *1*, (1963).
8. В. А. Свекло, *К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела*. II M M, **25**, *5* (1961).
9. P. P. Teodorescu, *Asupra unei metode generale de rezolvare a problemei plane a elastodinamicii*. Com. Acad. R.P.R., **6**, *6* (1956).
10. — *Asupra problemei plane a elasticităţii unor corpuri anizotrope*. Com. Acad. R.P.R., **6**, *12* (1958).
11. A. E. H. Love, *The Mathematical Theory of Elasticity*. New York, 1944.
12. Г. А. Лехницкий, Анизотропные пластинки. Москва-Ленинград, 1947.
13. C. Jacob, *Introduction Mathématique à la Mécanique des Fluides*. Bucarest-Paris, 1959.
14. I. Sneddon, *Fourier Transforms*. New York-Toronto-London, 1951.
15. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные проблемы математической теории упругости*. Москва, 1954.
16. H. Deresiewicz, *The half-plane under pressure distributed over an elliptical portion of its boundary*. J. Appl. Mech., March, 1960.

PARABOLOIDUL DE ROTAȚIE PLEOȘTIT, PE CONTUR DREPTUNGHIULAR, CU DIFERITE REZEMĂRI PE CONTUR. APLICAȚIE PENTRU MARGINI ÎNCASTRATE

de VICTOR GIONCU
Institutul de cercetări în construcții
și economia construcțiilor (INCERC), Timișoara

539.4

În lucrare se prezintă o soluție generală a teoriei de încovoiere a paraboloidului de rotație pleoștit, pe contur dreptunghiular, folosind dezvoltări în serii de funcții fundamentale, acestea putînd să fie făcute să satisfacă orice mod de rezemare omogenă pe contur. Într-o metodă variațională se utilizează proprietățile acestor funcții de a fi ortogonale cu ele însele și cvasiortogonale cu derivatele secunde. Se detaliază apoi cazul încastrării pe contur.

La calculul plăcilor curbe subțiri de rotație pleoștite pe contur dreptunghiular, se pleacă de la ecuațiile de bază ale plăcilor curbe subțiri cu dublă curbură.

Folosind dezvoltările în serii duble trigonometrice, Vlasov [1] a stabilit formule de calcul pentru cazul simplei rezemări pe contur. Doganoff [2] și Dikovici [3] au folosit seriile simple. S-au întocmit tabele și diagrame practice de calcul [4], însă numai pentru cazul simplei rezemări.

În lucrarea de față ne-am propus să studiem și alte cazuri de rezemare, folosind pentru aceasta dezvoltări în serii de funcții fundamentale, cu ajutorul cărora pot fi satisfăcute condițiile de margine omogene. Funcțiile fundamentale care intervin la studiul vibrațiilor grinzilor drepte au fost folosite de Vlasov la calculul plăcilor curbe subțiri prismatice.

În cadrul studiului ne vom folosi de o metodă variațională cunoscută sub denumirea de metoda Bubnov-Galerkin, care folosește proprietatea de ortogonalitate a funcțiilor fundamentale în raport cu ele însele și de cvasiortogonalitate cu derivatele secunde. Din această cauză, soluția dată problemei are un caracter aproximativ, cu o eroare încă nedeterminată în această lucrare, dar în limite acceptabile, după cum se arată în [10].

1. ECUAȚIILE GENERALE

În ipoteza plăcilor curbe subțiri de rotație pleoștite, forma suprafeței mediane a cupolei sferice poate fi asimilată de asemenea cu cea a paraboloidului de rotație pe același contur și cu aceeași săgeată.

Fie această suprafață scrisă în coordonate carteziene (fig. 1):

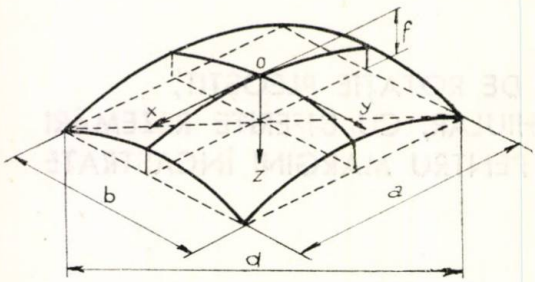


Fig. 1

$$z = \frac{1}{2R}(x^2 + y^2) \qquad (1.1)$$

unde R este raza de curbură a sferei, respectiv raza la creștet a paraboloidului de rotație.

Aceasta se poate calcula în funcție de celelalte dimensiuni:

$$R = \frac{1}{8f}(a^2 + b^2) = \frac{d^2}{8f}. \qquad (1.2)$$

Ecuațiile diferențiale de bază ale plăcilor curbe subțiri pleoștite cu dublă curbură, scrise pentru suprafețele de rotație, vor fi

$$\frac{1}{Eh}\Delta\Delta F + \frac{1}{R}\Delta w = 0,$$
$$K\,\Delta\Delta w - \frac{1}{R}\Delta F = Z, \qquad (1.3\,a \div b)$$

unde necunoscutele sînt funcția de eforturi F și deplasarea verticală w.

În aceste ecuații s-au introdus notațiile:

$\Delta(\ldots) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\ldots)$ — operatorul lui Laplace;

E — modulul de elasticitate;

h — grosimea plăcii;

$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — rigiditatea la încovoiere a plăcii;

ν — coeficientul lui Poisson;

Z — componenta verticală a încărcării exterioare.

Între necunoscutele F, w și celelalte mărimi statice și deformații există relațiile:

— eforturi normale și de lunecare:

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \qquad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \qquad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}; \qquad (1.4\,a \div c)$$

— momente de încovoiere și de răsucire :

$$m_{xx} = -K\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad m_{yy} = -K\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad m_{xy} = -K\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y},$$

$$M_x = m_{xx} + \nu m_{yy} \quad M_y = m_{yy} + \nu m_{xx} \quad M_{xy} = (1-\nu)\, m_{xy}; \quad (1.4\,\mathrm{d} \div \mathrm{f})$$

— forțe tăietoare și forțe tăietoare generalizate :

$$t_{xxx} = -K\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad t_{xxy} = -K\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y} \quad t_{xyy} = -K\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y^2} \quad t_{yyy} = -K\frac{\partial^3 w}{\partial y^3},$$

$$T_x = t_{xxx} + t_{xyy} \qquad T_y = t_{yyy} + t_{xxy},$$

$$R_x = t_{xxx} + (2-\nu)\, t_{xyy} \qquad R_y = t_{yyy} + (2-\nu)\, t_{xxy}; \qquad (1.4\,\mathrm{g} \div \mathrm{j})$$

— deplasări și rotiri :

$$u = \int\left[\frac{w}{R} + \frac{1}{Eh}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\right]\mathrm{d}x; \qquad v = \int\left[\frac{w}{R} + \frac{1}{Eh}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\right]\mathrm{d}y;$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x}; \qquad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial y}. \qquad (1.4\,\mathrm{k} \div \mathrm{o})$$

Integrarea sistemului de ecuații diferențiale (1.3) poate fi redusă la integrarea succesivă a unor ecuații cu derivate parțiale de ordin inferior dacă se introduce o funcție mixtă Ω, definită astfel :

$$\Delta w = \Delta\Omega, \qquad \Delta F = -\frac{Eh}{R}\,\Omega. \qquad (1.5\,\mathrm{a} \div \mathrm{b})$$

Cu acestea ecuația (1.3 a) este identic satisfăcută, iar ecuația (1.3 b) devine

$$\Delta\Delta\Omega + \frac{Eh}{KR^2}\,\Omega - \frac{Z}{k} = 0. \qquad (1.5\ \mathrm{c})$$

Integrarea sistemului (1.3), care este de ordinul 8, s-a redus astfel la integrarea unei ecuații de ordinul 4 și două de ordinul 2.

2. DEDUCEREA SOLUȚIILOR GENERALE

Integrarea ecuațiilor diferențiale (1.5) se va face folosind dezvoltările în serii simple, care au avantajul că prin structura lor satisfac condițiile marginale pe două laturi opuse, fie acestea $x = \pm\frac{a}{2}$, iar pe laturile $y = \pm\frac{b}{2}$ condițiile marginale vor fi satisfăcute prin determinarea în mod corespunzător a constantelor de integrare.

În [1], [2] și [3], folosindu-se dezvoltările în serii trigonometrice, s-au satisfăcut pe laturile $x = \pm \frac{a}{2}$ condiții de rezemare simplă ($w = M_x = \varepsilon_y = N_x = 0$). Dacă însă condițiile marginale sînt de altă natură, dezvoltările în serii trigonometrice nu mai sînt valabile și, prin urmare, vom apela la dezvoltările în serii de funcții fundamentale.

Funcțiile fundamentale sînt soluții ale ecuației diferențiale

$$\frac{d^4E}{dx^4} - \frac{\lambda_m^4}{a^4} E = 0 \tag{2.1}$$

și au forma

$$E = C_1 \cos \frac{\lambda_m}{a} x + C_2 \operatorname{ch} \frac{\lambda_m}{a} x + C_3 \sin \frac{\lambda_m}{a} x + C_4 \operatorname{sh} \frac{\lambda_m}{a} x, \tag{2.2}$$

unde $C_1, \ldots, C_4$ sînt constante de integrare ce se determină în funcție de condițiile marginale pentru $x = \pm \frac{a}{2}$, iar λ_m este o constantă ce se determină dintr-o condiție de compatibilitate.

Se constată că seriile trigonometrice sînt un caz particular al seriilor de funcții fundamentale și, prin urmare, acestea din urmă generalizează problema.

Dacă încărcarea exterioară se descompune într-o serie de funcții fundamentale de forma

$$Z = \sum_m z_m U_m(\lambda_{1m}, x), \tag{2.3}$$

unde z_m este o constantă, iar funcția fundamentală $U_m(\lambda_{1m}, x)$ satisface condițiile de rezemare marginală, necunoscuta Ω va fi de forma unui produs de două expresii, fiecare funcție de un singur argument:

$$\Omega = \sum_m \Omega_m(y) U_m(\lambda_{1m}, x). \tag{2.4 a}$$

Ținînd seama de (1.5 a), vom avea de asemenea

$$w = \sum_m W_m(y) U_m(\lambda_{1m}, x). \tag{2.4 b}$$

Funcția de eforturi F se va exprima sub forma unui produs de două funcții de un singur argument:

$$F = \sum_m F_m(y) X_m(\lambda_{2m}, x), \tag{2.4 c}$$

unde $X_m(\lambda_{2m}, x)$ este o funcție fundamentală ce satisface condițiile marginale pentru $x = \pm \frac{a}{2}$.

Dacă relațiile (2.3), (2.4) se introduc în ecuația (1.5 c), se obține (pentru o valoare oarecare m)

$$\Omega_m^{IV} U_m + 2\,\Omega_m^{II} U_m^{II} + \left(U_m^{IV} + \frac{Eh}{KR^2} U_m\right) \Omega_m - \frac{z_m U_m}{K} = 0. \tag{2.5}$$

Se constată că ecuația nu este verificată de soluțiile (2.4) și, prin urmare soluția se va determina printr-o metodă variațională.

Vom prefera din metodele variaționale cunoscute pe cea a lui Bubnov-Galerkin, care folosește proprietatea de ortogonalitate a două funcții, din care una este identic nulă [5], [7] și [10].

Dacă în (2.4 a) considerăm pe $\Omega_m(y)$ drept constantă nedeterminată, care se va preciza în așa fel încît aceasta să fie identică cu soluția exactă, trebuie să fie satisfăcută condiția de ortogonalitate

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\Omega_m^{IV} U_m + 2\,\Omega_m'' U_m'' + \left(U_m^{IV} + \frac{Eh}{KR^2} U_m\right) \Omega_m - \frac{z_m U_m}{K}\right] U_m \,dx = 0. \tag{2.6}$$

Scrierea sub această formă a condiției de ortogonalitate a fost posibilă datorită faptului că funcțiile fundamentale, sub forma folosită în lucrare (satisfăcînd condiții de margine omogene), sînt ortogonale cu ele însele, iar în raport cu derivatele secunde sînt cvasiortogonale [5], [10]. Dacă ne limităm la un număr finit de termeni, se poate arăta [10] că suma membrilor accesorii matricei sistemului de ecuații complet (unde nu s-a ținut seama de proprietățile de cvasiortogonalitate) este sub 5% față de termenii principali și, prin urmare, în sistemul de ecuații se pot menține numai termenii diagonalei principale.

Dacă se introduc notațiile

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} U_m'' U_m \,dx &= -\frac{\gamma_m^2}{a^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} U_m^2 \,dx, \\ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} U_m^{IV} U_m \,dx &= \frac{\lambda_{1m}^4}{a^4} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} U_m^2 \,dx, \end{aligned} \tag{2.7 a ÷ b}$$

ecuația (2.6) se poate scrie

$$\Omega_m^{IV} - 2\frac{\gamma_m^2}{a^2} \Omega_m'' + \frac{1}{a^4}(\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4)\,\Omega_m - \frac{z_m}{K} = 0, \tag{2.8}$$

unde s-a introdus și coeficientul de amortizare

$$\varepsilon = \sqrt[4]{\frac{Eha^4}{KR^2}} = \sqrt[4]{12\,(1-\nu^2)}\,\frac{a}{\sqrt{Rh}} = 4\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}\,\frac{a}{d}\sqrt{\frac{f}{h}}. \tag{2.9}$$

Ecuația diferențială (2.8) este de ordinul 4 cu coeficienți constanți. Ea are o soluție particulară Ω_{m0}, care verifică ecuația (2.8), și o soluție Ω_m a ecuației omogene asociate:

$$\Omega_m^{IV} - 2\frac{\gamma_m^2}{a^2}\Omega_m'' + \frac{1}{a^4}(\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4)\,\Omega_m = 0. \tag{2.10}$$

Soluția particulară se determină ușor, fiind de forma

$$\Omega_{m0} = \frac{z_m a^4}{K}\,\frac{1}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4}. \tag{2.11}$$

Soluția ecuației omogene (2.10) va fi

$$\Omega_m = \sum_{i=1}^{4} C_i\, e^{\frac{r_i}{a}y}, \tag{2.12}$$

unde r_i sînt rădăcinile ecuației caracteristice:

$$r^4 - 2\gamma_m^2 r^2 + (\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4) = 0. \tag{2.13}$$

Dacă rădăcinile acestor ecuații sînt $\pm\alpha_m$, $\pm\beta_m$, ele vor fi de forma

$$\begin{aligned} \alpha_m &= x_m + i\,\mu_m, \\ \beta_m &= x_m - i\,\mu_m, \end{aligned} \tag{2.14 a ÷ b}$$

unde x_m, μ_m vor avea valorile

$$\left.\begin{matrix} x_m \\ \mu_m \end{matrix}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4} \pm \gamma_m^2} = \frac{\lambda_{1m}}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1 + \varepsilon_m^4} \pm \omega_m^2}, \tag{2.15 a ÷ c}$$

cu $\varepsilon_m = \dfrac{\varepsilon}{\lambda_{1m}}$ și $\omega_m = \dfrac{\gamma_m}{\lambda_{1m}}$.

Soluția ecuației diferențiale (1.5) va fi, prin urmare,

$$\begin{aligned} \Omega = \frac{a^4}{K}\sum_m \frac{z_m}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4}\Big[1 + C_{1m}\,\mathrm{ch}\,\frac{\alpha_m}{a}y + C_{2m}\,\mathrm{ch}\,\frac{\beta_m}{a}y + C_{3m}\,\mathrm{sh}\,\frac{\alpha_m}{a}y + \\ + C_{4m}\,\mathrm{sh}\,\frac{\beta_m}{a}y\Big]U_m(\lambda_{1m}, x). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Urmează să determinăm valorile necunoscutelor w și F din ecuațiile (15 a ÷ b).

Din (1.5 a) rezultă prin integrare simbolică

$$w = \Omega + w_1 \tag{2.17}$$

unde w_1 este o constantă de integrare ce verifică ecuația

$$\Delta w_1 = 0. \tag{2.18}$$

Dacă se exprimă și această constantă de integrare sub forma unei dezvoltări în serii de funcții fundamentale :

$$w_1 = \sum_m w_{1m}(y)\, U_m(x), \tag{2.19}$$

atunci (2.18) devine (pentru un termen oarecare m)

$$U_m'' w_{1m} + U_m\ w_{1m}'' = 0.$$

Pentru precizarea lui w_{1m} se va folosi din nou metoda variațională Bubnov-Galerkin :

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (U_m'' w_{1m} + U_m w_{1m}'')\, U_m \, dx = 0, \tag{2.20}$$

care, ținînd seama de (2.7 a), devine

$$w_{1m}'' - \frac{\gamma_m^2}{a^2} w_{1m} = 0, \tag{2.21}$$

care are soluția

$$w_{1m} = \bar{A}_{1m} \operatorname{ch} \frac{\gamma_m}{a} y + \bar{A}_{2m} \operatorname{sh} \frac{\gamma_m}{a} y. \tag{2.22}$$

Soluția completă pentru necunoscuta w va fi

$$w = \frac{a^4}{K} \sum_m \frac{z_m}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4} \left[1 + \bar{C}_{1m} \operatorname{ch} \frac{\alpha_m}{a} y + \bar{C}_{2m} \operatorname{ch} \frac{\beta_m}{a} y + \bar{C}_{3m} \operatorname{sh} \frac{\alpha_m}{a} y + \right.$$
$$\left. + \bar{C}_{4m} \operatorname{sh} \frac{\beta_m}{a} y + A_{1m} \operatorname{ch} \frac{\gamma_m}{a} y + A_{2m} \operatorname{sh} \frac{\gamma_m}{a} y \right] U_m(x). \tag{2.23}$$

Din ecuația (1.5 b), ținînd seama și de (2.4 c), rezultă (pentru un termen oarecare m)

$$F_m'' X_m + F_m X_m'' + \frac{Eh}{R} \Omega_m U_m = 0. \tag{2.24}$$

Dacă se aplică proprietatea de ortogonalitate din metoda Bubnov-Galerkin, relația devine

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(F_m'' X_m + F_m X_m'' + \frac{Eh}{R} \Omega_m U_m \right) X_m \, dx = 0. \tag{2.25}$$

Dacă se introduc notațiile

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} X_m'' X_m \, dx = -\frac{\delta_m^2}{a^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} X_m^2 \, dx,$$
$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} U_m X_m \, dx = \varphi_m \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} X_m^2 \, dx, \qquad (2.26\,a \div b)$$

relația (2.25) devine

$$F_m'' - \frac{\delta_m^2}{a^2} F_m + \frac{Eh}{R} \varphi_m \Omega_m = 0. \qquad (2.27)$$

Soluția particulară a acestei ecuații se va obține cu ajutorul metodei variației constantei și va fi de forma

$$F_{m_0} = \frac{Eha}{R} \frac{\varphi_m}{\delta_m} \left[\operatorname{ch} \frac{\delta_m}{a} y \int \Omega_m(y) \operatorname{sh} \frac{\delta_m}{a} y \, dy - \operatorname{sh} \frac{\delta_m}{a} y \int \Omega_m(y) \operatorname{ch} \frac{\delta_m}{a} y \, dy \right] =$$
$$= \frac{Eha^6}{KR} \varphi_m \frac{z_m}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4} \left[\frac{1}{\delta_m^2} + \frac{C_{1m} \operatorname{ch} \frac{\alpha_m}{a} y + C_{3m} \operatorname{sh} \frac{\alpha_m}{a} y}{\delta_m^2 - \alpha_m^2} + \frac{C_{2m} \operatorname{ch} \frac{\beta_m}{a} y + C_{4m} \operatorname{sh} \frac{\beta_m}{a} y}{\delta_m^2 - \beta_m^2} \right]. \qquad (2.28)$$

Soluția omogenă a ecuației (2.27) va fi

$$F_m = \frac{Eha^6}{KR} \varphi_m \frac{z_m}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4} \left(A_{3m} \operatorname{ch} \frac{\delta_m}{a} y + A_{4m} \operatorname{sh} \frac{\delta_m}{a} y \right) \qquad (2.29)$$

și, prin urmare, soluția generală va fi

$$F = R a^2 \sum_m \varphi_m \frac{z_m \varepsilon^4}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4} \left[\frac{1}{\delta_m^2} + \frac{C_{1m} \operatorname{ch} \frac{\alpha_m}{a} y + C_{3m} \operatorname{sh} \frac{\alpha_m}{a} y}{\delta_m^2 - \alpha_m^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{C_{2m} \operatorname{ch} \frac{\beta_m}{a} y + C_{4m} \operatorname{sh} \frac{\beta_m}{a} y}{\delta_m^2 - \beta_m^2} + A_{3m} \operatorname{ch} \frac{\delta_m}{a} y + A_{4m} \operatorname{sh} \frac{\delta_m}{a} y \right] X_m(x). \qquad (2.30)$$

Expresiile (2.23) și (2.30) definesc necunoscutele w și F ale sistemului de ecuații (1.3) și cu ajutorul relațiilor (1.4) se pot calcula acum valorile mărimilor statice și deformațiile.

Dacă se ține seama de relațiile (2.14) și se introduc funcțiile

$$\begin{aligned}
\Phi_{1m}(y) &= \operatorname{ch}\frac{x_m}{a}y\ \cos\frac{\mu_m}{a}y,\\
\Phi_{2m}(y) &= \operatorname{sh}\frac{x_m}{a}y\ \sin\frac{\mu_m}{a}y,\\
\Phi_{3m}(y) &= \operatorname{sh}\frac{x_m}{a}y\ \cos\frac{\mu_m}{a}y,\\
\Phi_{4m}(y) &= \operatorname{ch}\frac{x_m}{a}y\ \sin\frac{\mu_m}{a}y,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

precum și noi constante de integrare, se obțin pentru necunoscutele w și F expresiile

$$w = \frac{a^4}{K}\sum_m \frac{z_m}{\lambda_{1m}^4+\varepsilon^4}\Big[1 + C_{1m}\Phi_{1m} + C_{2m}\Phi_{2m} + C_{3m}\Phi_{3m} + C_{4m}\Phi_{4m} + A_{1m}\operatorname{ch}\frac{\gamma_m}{a}y + A_{2m}\operatorname{sh}\frac{\gamma_m}{a}y\Big]U_m(x),$$

$$\begin{aligned}
F = Ra^2\sum_m \frac{\varphi_m}{\delta_m^4-2\gamma_m^2\delta_m^2+\lambda_{1m}^4+\varepsilon^4}\,\frac{z_m\varepsilon^4}{\lambda_{1m}^4+\varepsilon^4}\Big[&\frac{\delta_m^4-2\gamma_{1m}^2\delta_m^2+\lambda_{1m}^4+\varepsilon^4}{\delta_m^2} +\\
&+[(\delta_m^2-\gamma_m^2)C_{1m}+\sqrt{\lambda_{1m}^4+\varepsilon^4-\gamma_m^4}\,C_{2m}]\Phi_{1m} +\\
&+[(\delta_m^2-\gamma_m^2)C_{2m}-\sqrt{\lambda_{1m}^4+\varepsilon^4-\gamma_m^4}\,C_{1m}]\Phi_{2m} +\\
&+[(\delta_m^2-\gamma_m^2)C_{3m}+\sqrt{\lambda_{1m}^4+\varepsilon^4-\gamma_m^4}\,C_{4m}]\Phi_{3m} +\\
&+[(\delta_m^2-\gamma_m^2)C_{4m}-\sqrt{\lambda_{1m}^4+\varepsilon^4-\gamma_m^4}\,C_{3m}]\Phi_{4m} +\\
&+A_{3m}\operatorname{ch}\frac{\delta_m}{a}y + A_{4m}\operatorname{sh}\frac{\delta_m}{a}y\Big]X_m(x).
\end{aligned} \tag{2.32 a ÷ b}$$

La calculul solicitărilor și deformațiilor se ține seama și de faptul că între funcțiile Φ_i și derivatele lor există relațiile

$$\begin{aligned}
\Phi'_{1m} &= \frac{1}{a}(x_m\Phi_{3m} - \mu_m\Phi_{4m}),\\
\Phi'_{2m} &= \frac{1}{a}(x_m\Phi_{4m} + \mu_m\Phi_{3m}),\\
\Phi'_{3m} &= \frac{1}{a}(x_m\Phi_{1m} - \mu_m\Phi_{2m}),\\
\Phi'_{4m} &= \frac{1}{a}(x_m\Phi_{2m} + \mu_m\Phi_{1m}),
\end{aligned}$$

$$\Phi''_{1m} = \frac{1}{a^2}(\gamma_m^2 \Phi_{1m} - \sqrt{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4 - \gamma_m^4}\,\Phi_{2m}),$$

$$\Phi''_{2m} = \frac{1}{a^2}(\gamma_m^2 \Phi_{2m} + \sqrt{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4 - \gamma_m^4}\,\Phi_{1m}),$$

$$\Phi''_{3m} = \frac{1}{a^2}(\gamma_m^2 \Phi_{3m} - \sqrt{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4 - \gamma_m^4}\,\Phi_{4m}), \tag{2.33}$$

$$\Phi''_{4m} = \frac{1}{a^2}(\gamma_m^2 \Phi_{4m} + \sqrt{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4 - \gamma_m^4}\,\Phi_{3m}),$$

$$\Phi'''_{1m} = \frac{1}{a^3}[x_m(x_m^2 - 3\,\mu_m^2)\,\Phi_{3m} - \mu_m(3\,x_m^2 - \mu_m^2)\,\Phi_{4m}],$$

$$\Phi'''_{2m} = \frac{1}{a^3}[x_m(x_m^2 - 3\,\mu_m^2)\,\Phi_{4m} + \mu_m(3\,x_m^2 - \mu_m^2)\,\Phi_{3m}],$$

$$\Phi'''_{3m} = \frac{1}{a^3}[x_m(x_m^2 - 3\,\mu_m^2)\,\Phi_{1m} - \mu_m(3\,x_m^2 - \mu_m^2)\,\Phi_{2m}],$$

$$\Phi'''_{4m} = \frac{1}{a^3}[x_m(x_m^2 - 3\,\mu_m^2)\,\Phi_{2m} + \mu_m(3\,x_m^2 - \mu_m^2)\,\Phi_{1m}].$$

Solicitările și deformațiile pot fi scrise sub două forme distincte (pentru o valoare oarecare m):

$$S_I = M_S\Big[S_0 + (p\,C_{1m} + q\,C_{2m})\,\Phi_{1m} + (p\,C_{2m} - q\,C_{1m})\,\Phi_{2m} +$$

$$+ (p\,C_{3m} + q\,C_{4m})\,\Phi_{3m} + (p\,C_{4m} - q\,C_{3m})\,\Phi_{4m} + (r\,A_{1m} + s\,A_{2m})\,\mathrm{ch}\,\frac{\gamma_m}{a}y +$$

$$+ (r\,A_{2m} + s\,A_{1m})\,\mathrm{sh}\,\frac{\gamma_m}{a}y + (r'A_{3m} + s'A_{4m})\,\mathrm{ch}\,\frac{\delta_m}{a}y + (r'A_{4m} + s'A_{3m})\,\mathrm{sh}\,\frac{\delta_m}{a}y\Big] \tag{2.34 a}$$

sau

$$S_{II} = M_S\Big[S_0 + (pC_{3m} + qC_{4m})\,\Phi_{1m} + (pC_{4m} - qC_{3m})\,\Phi_{2m} + (pC_{1m} + qC_{2m})\,\Phi_{3m} +$$

$$+ (pC_{2m} - qC_{1m})\,\Phi_{4m} + (rA_{1m} + sA_{2m})\,\mathrm{ch}\,\frac{\gamma_m}{a}y + (rA_{2m} + sA_{1m})\,\mathrm{sh}\,\frac{\gamma_m}{a}y +$$

$$+ (r'A_{3m} + s'A_{4m})\,\mathrm{ch}\,\frac{\delta_m}{a}y + (r'A_{4m} + s'A_{3m})\,\mathrm{sh}\,\frac{\delta_m}{a}y\Big]. \tag{2.34 b}$$

Tabela 1

S	Tipul	M_S	S_0	p	q	r	s	r'	s'
$N_x \frac{1}{X_m}$	S_{I}	$z_m R \frac{\varphi_m}{\delta_m^4 - 2\gamma_m^2 \delta_m^2 + \lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4} \frac{\varepsilon^4}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4}$	0	$\delta_m^2 \gamma_m^2 - (\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4)$	$\delta_m^2 \sqrt{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4 - \gamma_m^4}$	0	0	δ_m^2	0
$N_y \frac{\lambda_{2m}^2}{a^2 X_m''}$	S_{I}	$z_m R \frac{\varphi_m}{\delta_m^4 - 2\gamma_m^2 \delta_m^2 + \lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4} \frac{\lambda_{2m}^2 \varepsilon^4}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4}$	$\frac{\delta_m^4 - 2\gamma_m^2 \delta_m^2 + \lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4}{\delta_m^2}$	$\delta_m^2 - \gamma_m^2$	$\sqrt{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4 - \gamma_m^4}$	0	0	1	0
$N_{xy} \frac{\lambda_{2m}}{a X_m'}$	S_{II}	$-z_m R \frac{\varphi_m}{\delta_m^4 - 2\gamma_m^2 \delta_m^2 + \lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4} \frac{\lambda_{2m} \varepsilon^4}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4}$	0	$x_m [\delta_m^2 - (x_m^2 + \mu_m^2)]$	$\mu_m [\delta_m^2 + (x_m^2 + \mu_m^2)]$	0	0	0	δ_m
$w \frac{I}{U_m}$	S_{I}	$\frac{z_m a^4}{K} \frac{1}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4}$	1	1	0	1	0	0	0
$m_{xx} \frac{\lambda_{1m}^2}{a^2 U_m''}$	S_{I}	$-z_m a^2 \frac{\lambda_{1m}^2}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4}$	1	1	0	1	0	0	0
$m_{yy} \frac{1}{U_m}$	S_{I}	$-z_m a^2 \frac{1}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4}$	0	γ_m^2	$\sqrt{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4 - \gamma_m^4}$	γ_m^2	0	0	0
$m_{xy} \frac{\lambda_{1m}}{a U_m'}$	S_{II}	$-z_m a^2 \frac{\lambda_{1m}}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4}$	0	x_m	μ_m	0	γ_m	0	0
$t_{xxx} \frac{\lambda_{1m}^3}{a^3 U_m'''}$	S_{I}	$-z_m a \frac{\lambda_{1m}^3}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4}$	1	1	0	1	0	0	0
$t_{xyy} \frac{\lambda_{1m}}{a U_m'}$	S_{I}	$-z_m a \frac{\lambda_{1m}}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4}$	0	γ_m^2	$\sqrt{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4 - \gamma_m^4}$	γ_m^2	0	0	0
$t_{yyy} \frac{1}{U_m}$	S_{II}	$-z_m a \frac{1}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4}$	0	$x_m (x_m^2 - 3\mu_m^2)$	$\mu_m (3x_m^2 - \mu_m^2)$	0	γ_m^3	0	0
$t_{xxy} \frac{\lambda_{1m}^2}{a^2 U_m''}$	S_{II}	$-z_m a \frac{\lambda_{1m}^2}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4}$	0	x_m	μ_m	0	γ_m	0	0
$\theta_y \frac{1}{U_m}$	S_{II}	$\frac{z_m a^3}{K} \frac{1}{\lambda_{1m}^4 + \varepsilon^4}$	0	x_m	μ_m	0	γ_m	0	0

MUSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Cu ajutorul relației (2.34 a) se vor exprima N_x, N_y, w, M_x, M_y și T_x, iar cu ajutorul relației (2.34 b) Nxy, Mxy, Ty și θy.

Valorile M_s, S_o, p, q, r, s, r' și s' sînt înscrise în tabela 1.

Relațiile (2.34) depind de opt constante de integrare, care se vor determina din condițiile de rezemare de-a lungul marginilor $y = \pm \frac{b}{2}$. Punînd fiecare la dispoziție patru relații, constantele de integrare pot fi ușor determinate. Cu ajutorul acestor constante se pot calcula acum toate solicitările și deformațiile plăcii curbe subțiri.

3. FUNCȚIILE FUNDAMENTALE

Funcțiile fundamentale, care sînt soluții ale ecuației (2.1) și au forma (2.2), pot fi despărțite într-o sumă de două funcții; una simetrică și alta antisimetrică:

$$E_{\text{sim}} = C_1 \cos \frac{\lambda_m}{a} x + C_2 \operatorname{ch} \frac{\lambda_m}{a} x,$$

$$E_{\text{asim}} = C_3 \sin \frac{\lambda_m}{a} x + C_4 \operatorname{sh} \frac{\lambda_m}{a} x, \tag{3.1}$$

care fiecare în parte verifică ecuația (2.1) și, prin urmare, sînt tot funcții fundamentale.

Funcțiile simetrice vor defini condițiile de margine omogene simetrice, iar cele antisimetrice condiții omogene antisimetrice. Dacă rezemarea este oarecare, funcțiile fundamentale vor fi o combinație dintre cele două funcții.

Funcțiile fundamentale pentru rezemări diferite oarecare pe laturile $x = \pm \frac{a}{2}$ sînt dezvoltate în multe lucrări [1], [4], [6], [8] și [10].

În cele ce urmează ne vom ocupa numai de cazul rezemărilor omogene simetrice, respectiv de funcțiile fundamentale simetrice, fiind cele mai des întîlnite.

Condițiile de rezemare fiind simetrice, constantele se vor determina de-a lungul marginilor $x = \frac{a}{2}$. Deoarece sistemul de ecuații este omogen, pentru ca să existe soluții diferite de 0, trebuie ca determinantul principal al sistemului de ecuații să fie nul. De aici rezultă o ecuație transcendentă care va determina valorile parametrului λ_m. Forma funcției fundamentale și ecuațiile transcendente cu soluțiile lor sînt indicate în tabela 2, în funcție de diferite condiții marginale omogene. Pentru detalierea calculelor se pot consulta [5] și [6].

Tabela 2

Condiții marginale		Funcția fundamentală	Ecuația de compatibilitate	λ_m $m=1,3,5,7,\ldots$
$E = E' = 0$	$N_x = N_{xy} = 0$ $M_{xy} = t_{xyy} = w = \theta_x = 0$	$\operatorname{ch}\frac{\lambda_m}{a}x \quad \cos\frac{\lambda_m}{a}x$	$\operatorname{tg}\frac{\lambda_m}{2} = -\operatorname{th}\frac{\lambda_m}{2}$	$\lambda_1 = 4{,}730$ $\lambda_m = \frac{2m+1}{2}\pi$
$E = E''' = 0$	$N_x = u = 0$ $t_{xxx} = w = 0$	$\operatorname{ch}\frac{\lambda_m}{2} \quad \cos\frac{\lambda_m}{2}$	$\operatorname{tg}\frac{\lambda_m}{2} = \operatorname{th}\frac{\lambda_m}{2}$	$\lambda_m = \frac{2m+3}{2}\pi$
$E' = E'' = 0$	$N_{xy} = v = 0$ $m_{xx} = t_{xyy} = 0$	$\operatorname{ch}\frac{\lambda_m}{a}x \quad \cos\frac{\lambda_m}{a}x$	$\operatorname{tg}\frac{\lambda_m}{2} = \operatorname{th}\frac{\lambda_m}{2}$	$\lambda_m = \frac{2m+3}{2}\pi$
$E'' = E''' = 0$	$u = v = 0$ $m_{xx} = t_{xxx} = 0$	$\operatorname{ch}\frac{\lambda_m}{2} \quad \cos\frac{\lambda_m}{2}$	$\operatorname{tg}\frac{\lambda_m}{2} = -\operatorname{th}\frac{\lambda_m}{2}$	$\lambda_m = \frac{2m+1}{2}\pi$
$E = E'' = 0$	$N_x = v = 0$ $M_x = w = 0$	$\cos\frac{\lambda_m}{a}x$	$\cos\frac{\lambda_m}{2} = 0$	$\lambda_m = m\,\pi$
$E' = E''' = 0$	$N_{xy} = u = 0$ $M_{xy} = T_x = \theta_x = 0$		$\sin\frac{\lambda_m}{2} = 0$	$\lambda_m = (m+1)\pi$

4. PARABOLOID DE ROTAȚIE ÎNCASTRAT PE CONTUR, ÎNCĂRCAT CU SARCINĂ UNIFORM DISTRIBUITĂ

Sarcina uniform distribuită corespunde încărcării din zăpadă, iar pentru plăcile curbe subțiri pleoștite, și încărcării din greutate proprie.

Dacă peste sarcina uniformă coeficientul z_m din dezvoltarea (2.3) rezultă din relația (vezi și 4.3 a)

$$z_m = \frac{p\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} U_m \mathrm{d}x}{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} U_m^2 \mathrm{d}x} = \frac{4\operatorname{th}\frac{\lambda_{1m}}{2}}{\lambda_{1m}}p, \tag{4.1}$$

care are valorile

$$z_1 = 0{,}8309\ p,$$

$$z_m = \frac{8\,p}{(2\,m+1)\,\pi}, \qquad m = 3,5,7,\ldots$$

Constantele de integrare din expresiile funcţiilor fundamentale (2.2) şi relaţiile ce precizează solicitările şi deformaţiile (2.34) se determină din condiţiile de rezemare a marginilor:

$$x = \pm \frac{a}{2}, \quad y = \pm \frac{b}{2}.$$

Presupunînd că rezemarea se face pe timpane perfect rigide la încărcări verticale şi torsiune, însă flexibile la încărcări transversale, aceste condiţii pot fi scrise:

$$\begin{aligned} x &= \pm \frac{a}{2} \qquad w = \theta_x = N_x = \varepsilon_y = 0, \\ y &= \pm \frac{b}{2} \qquad w = \theta_y = N_y = \varepsilon_x = 0. \end{aligned} \tag{4.2 a ÷ b}$$

Forma funcţiilor fundamentale se determină cu ajutorul tabelei 2, ţinînd seama de (4.2 a), şi vor fi

$$U_m = \frac{\operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{a} x}{\operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2}} - \frac{\cos \frac{\lambda_{1m}}{a} x}{\cos \frac{\lambda_{1m}}{2}}, \tag{4.3 a÷b}$$

$$X_m = \cos \frac{\lambda_{2m}}{a} x,$$

unde

$$\lambda_{11} = 4{,}730 \qquad \lambda_{1m} = \frac{2_m + 1}{2} \pi \qquad m = 3, 5, 7, \ldots$$

$$\lambda_2 m = m \pi \qquad m = 1, 3, 5, 7, \ldots$$

Cu ajutorul relaţiilor (2.7 a) şi (2.26) se calculează

$$\begin{aligned} \omega_m^2 &= \operatorname{th} \frac{\lambda_{1m}}{2} \left(\operatorname{th} \frac{\lambda_{1m}}{2} - \frac{2}{\lambda_{1m}} \right), \\ \delta_m &= \lambda_{2m}, \\ \varphi_m &= (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{4 \lambda_{1m}^2 \lambda_{2m}}{\lambda_{1m}^4 - \lambda_{2m}^4}, \end{aligned} \tag{4.4 a ÷ c}$$

care au valorile

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 0{,}5499, \\ \delta_1 &= 3{,}1416, \\ \varphi_1 &= 0{,}6972. \end{aligned}$$

și

$$\omega_m^2 = 1 - \frac{4}{(2m+1)\,\pi},$$

$$\delta_m = m\,\pi,$$

$$\varphi_m = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{16}{\pi} \frac{m\,(2\,m+1)^2}{(4\,m+1)\,[(2\,m+1)^2+4\,m^2]}, \qquad \text{pt } m = 3,5,7,\ldots$$

Constantele de integrare din relațiile (2.34) se determină cu ajutorul condițiilor (4.2 b).

Din condițiile de simetrie față de axa y rezultă

$$C_{3m} = C_{4m} = A_{2m} = A_{4m} = 0$$

și, prin urmare, celelalte patru constante se vor determina din condițiile marginale pentru $y = \frac{b}{2}$.

Acestea vor fi :

$$\Phi_{1m}\left(\frac{b}{2}\right) C_{1m} + \Phi_{2m}\left(\frac{b}{2}\right) C_{2m} + \operatorname{ch}\frac{\gamma_m}{2}\frac{b}{a} A_{1m} + 1 = 0,$$

$$\left[x_m \Phi_{3m}\left(\frac{b}{2}\right) - \mu_m \Phi_{4m}\left(\frac{b}{2}\right)\right] C_{1m} + \left[x_m \Phi_{4m}\left(\frac{b}{2}\right) + \mu_m \Phi_{3m}\left(\frac{b}{2}\right)\right] C_{2m} +$$

$$+ \gamma_m \operatorname{sh}\frac{\gamma_m}{2}\frac{b}{a} A_{1m} = 0,$$

$$\left[(k_m^2 - \omega_m^2)\,\Phi_{1m}\left(\frac{b}{2}\right) - \sqrt{1+\varepsilon_m^4-\omega_m^4}\,\Phi_{2m}\left(\frac{b}{2}\right)\right] C_{1m} + \left[(k_m^2 - \omega_m^2)\,\Phi_{2m}\left(\frac{b}{2}\right) +\right.$$

$$\left. + \sqrt{1+\varepsilon_m^4-\omega_m^4}\,\Phi_{1m}\left(\frac{b}{2}\right)\right] C_{2m} + \frac{1}{\lambda_{1m}^2} \operatorname{ch}\frac{\lambda_{2m}}{2}\frac{b}{a} + \frac{k_m^4 - 2\,k_m^2\omega_m^2 + 1 + \varepsilon_m^4}{k_m^2} = 0,$$

$$\left[(k_m^2\,\omega_m^2 - 1 - \varepsilon_m^4)\,\Phi_{1m}\left(\frac{b}{2}\right) - k_m^2\sqrt{1+\varepsilon_m^4-\omega_m^4}\,\Phi_{2m}\left(\frac{b}{2}\right)\right] C_{1m} +$$

$$+ \left[(k_m^2\,w_m^2 - 1 - \varepsilon_m^4)\,\Phi_{2m}\left(\frac{b}{2}\right) + k_m^2\sqrt{1+\varepsilon_m^4-\omega_m^4}\,\Phi_{1m}\left(\frac{b}{2}\right)\right] C_{2m} +$$

$$+ \frac{k_m^2}{\lambda_{1m}^2} \operatorname{ch}\frac{\lambda_{2m}}{2}\frac{b}{a} = 0, \qquad (4.5\text{ a} \div \text{d})$$

unde s-a mai introdus și notația

$$k_m = \frac{\lambda_{2m}}{\lambda_{1m}} \qquad (4.6)$$

cu valorile

$$k_1 = 0{,}664 \qquad k_m = \frac{1}{1 + \frac{1}{2m}} \qquad m = 3,5,7,\ldots$$

Dacă se rezolvă sistemul de ecuaţii (4.5), se obţin următoarele valori pentru necunoscute :

$$C_{1m} = -\frac{x_m \Phi_{4m}\left(\frac{b}{2}\right) + \mu_m \Phi_{3m}\left(\frac{b}{2}\right)}{x_m \Phi_{5m}\left(\frac{b}{2}\right) + \mu_m \Phi_{6m}\left(\frac{b}{2}\right)},$$

$$C_{2m} = \frac{x_m \Phi_{3m}\left(\frac{b}{2}\right) - \mu_m \Phi_{4m}\left(\frac{b}{2}\right)}{x_m \Phi_{5m}\left(\frac{b}{2}\right) + \mu_m \Phi_{6m}\left(\frac{b}{2}\right)}, \qquad (4.7\ \text{a} \div \text{d})$$

$$A_{1m} = 0,$$

$$A_{3m} = \frac{\lambda_{1m}^2}{k_m^2} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\lambda_{2m}}{2} \frac{b}{a}} \frac{1}{x_m \Phi_{5m}\left(\frac{b}{2}\right) + \mu_m \Phi_{6m}\left(\frac{b}{2}\right)} \Bigg\{ \left[x_m \left(k_m^2 \omega_m^2 - 1 - \varepsilon_m^4\right) + \right.$$

$$\left. + \mu_m k_m^2 \sqrt{1 + \varepsilon_m^4 - \omega_m^4} \right] \Phi_{5m}\left(\frac{b}{2}\right) + \left[\mu_m \left(k_m^2 \omega_m^2 - 1 - \varepsilon_m^4\right) - \right.$$

$$\left. - x_m k_m^2 \sqrt{1 + \varepsilon_m^4 - \omega_m^4} \right] \Phi_{6m}\left(\frac{b}{2}\right) \Bigg\},$$

cu notaţiile suplimentare

$$\Phi_{5m}(y) = \cos \frac{\mu_m}{a} y \ \sin \frac{\mu_m}{a} y,$$

$$\Phi_{6m}(y) = \operatorname{ch} \frac{x_m}{a} y \ \operatorname{sh} \frac{x_m}{a} y. \qquad (4.8\ \text{a} \div \text{b})$$

Constantele de integrare fiind determinate, starea de tensiune şi deformaţie a plăcii curbe subţiri este complet definită.

Pentru cazul laturilor egale $a = b$ şi pentru diferite valori ale lui ε (10, 15, 20, 30), s-au determinat diagramele lui w, Mx şi Tx de-a lungul axei $y = 0$. Formulele de calcul precum şi diagramele respective, sînt redate de relaţiile (4.9) şi de figurile 2, 3, 4 :

$$(w)_{y=0} = \frac{p\, a^4}{K} \sum_m \frac{4 \operatorname{th} \frac{\lambda_{1m}}{2}}{\lambda_{1m}^5 \left(1 + \varepsilon_m^4\right)} \left[1 - \frac{x_m \Phi_{4m}\left(\frac{b}{2}\right) + \mu_m \Phi_{3m}\left(\frac{b}{2}\right)}{x_m \Phi_{5m}\left(\frac{b}{2}\right) + \mu_m \Phi_{6m}\left(\frac{b}{2}\right)} \right] \times$$

$$\times \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{a} x}{\operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2}} - \frac{\cos \frac{\lambda_{1m}}{a} x}{\cos \frac{\lambda_{1m}}{2}} \right), \qquad (4.9\ \text{a})$$

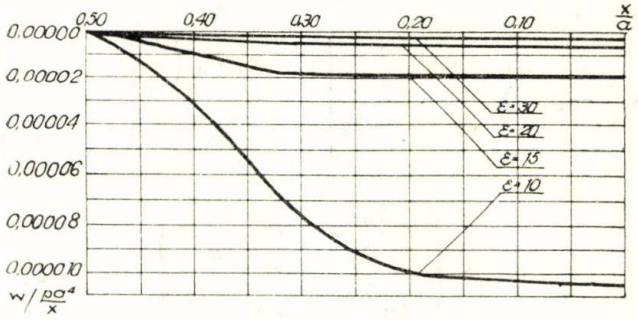


Fig. 2

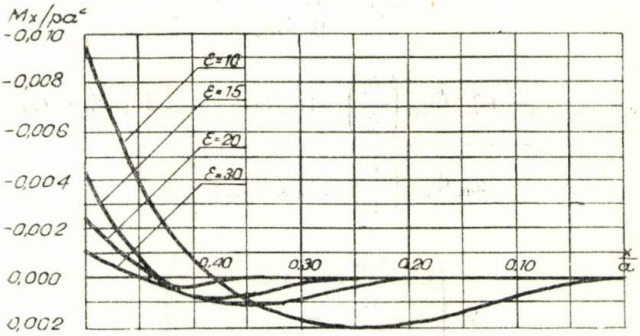


Fig. 3

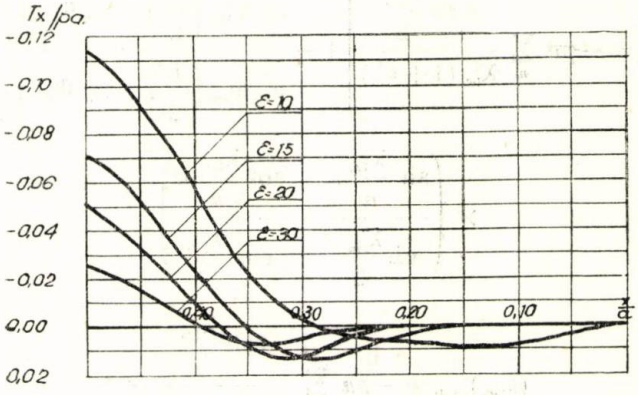


Fig. 4

$$M_x = m_{xx} + \nu\, m_{yy}$$

$$(m_{xx})_{y=0} = -pa^2 \sum_m \frac{4 \operatorname{th} \frac{\lambda_{1m}}{2}}{\lambda_{1m}^3 (1+\varepsilon_m^4)} \left[1 - \frac{x_m \Phi_{4m}\left(\frac{b}{2}\right) + \mu_m \Phi_{3m}\left(\frac{b}{2}\right)}{x_m \Phi_{5m}\left(\frac{b}{2}\right) + \mu_m \Phi_{6m}\left(\frac{b}{2}\right)} \right] \times$$

$$\times \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{a} x}{\operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2}} + \frac{\cos \frac{\lambda_{1m}}{a} x}{\cos \frac{\lambda_{1m}}{2}} \right)$$

$$(m_{yy})_{y=0} = -pa^2 \sum_m \frac{4 \operatorname{th} \frac{\lambda_{1m}}{2}}{\lambda_{1m}^3 (1+\varepsilon_m^4)} \times$$

$$\times \frac{(\mu_m w_m^2 - x_m \sqrt{1+\varepsilon_m^4 - \omega_m^4})\, \Phi_{3m}\left(\frac{b}{2}\right) + (x_m \omega_m^2 + \mu_m \sqrt{1+\varepsilon_m^4 - \omega_m^4})\, \Phi_{4m}\left(\frac{b}{2}\right)}{x_m \Phi_{5m}\left(\frac{b}{2}\right) + \mu_m \Phi_{6m}\left(\frac{b}{2}\right)} \times$$

$$\times \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{a} x}{\operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2}} - \frac{\cos \frac{\lambda_{1m}}{a} x}{\cos \frac{\lambda_{1m}}{2}} \right) \qquad (4.9\ \text{b})$$

$$T_x = t_{xxx} + t_{xyy}$$

$$(t_{xxx})_{y=0} = -pa \sum_m \frac{4 \operatorname{th} \frac{\lambda_{1m}}{2}}{\lambda_{1m}^2 (1+\varepsilon_m^4)} \left[1 - \frac{x_m \Phi_{4m}\left(\frac{b}{2}\right) + \mu_m \Phi_{3m}\left(\frac{b}{2}\right)}{x_m \Phi_{5m}\left(\frac{b}{2}\right) + \mu_m \Phi_{6m}\left(\frac{b}{2}\right)} \right] \times$$

$$\times \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda_{1m}}{a} x}{\operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2}} - \frac{\sin \frac{\lambda_{1m}}{a} x}{\cos \frac{\lambda_{1m}}{2}} \right)$$

$$(t_{xyy})_{y=0} = -pa \sum_m \frac{4 \operatorname{th} \frac{\lambda_{1m}}{2}}{\lambda_{1m}^2 (1+\varepsilon_m^4)} \times$$

$$\times \frac{(\mu_m \omega_m^2 - x_m \sqrt{1+\varepsilon_m^4-\omega_m^4})\,\Phi_{3m}\left(\frac{b}{2}\right)+(x_m \omega_m^2+\mu_m \sqrt{1+\varepsilon_m^4-\omega_m^4})\,\Phi_{4m}\left(\frac{b}{2}\right)}{x_m \Phi_{5m}\left(\frac{b}{2}\right)+\mu_m \Phi_{6m}\left(\frac{b}{2}\right)} \times$$

$$\times \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda_{1m}}{a} x}{\operatorname{ch} \frac{\lambda_{1m}}{2}} + \frac{\sin \frac{\lambda_{1m}}{a} x}{\cos \frac{\lambda_{1m}}{2}} \right). \qquad (4.9\ c)$$

Seriile care au determinat diagramele de mai sus sînt relativ slab convergente. Astfel, pentru w s-au luat în considerare termenii $m = 1 \ldots 13$, pentru M_x, $m = 1 \ldots 17$, iar pentru T_x, $m = 1 \ldots 19$.

Seriile ce determină valorile lui Nx, Ny și Nxy sînt și mai slab convergente.

Prin metoda descrisă se pot întocmi diagrame de calcul pentru eforturi, momente și forțe tăietoare în funcție de diferite valori ale coeficientului ε, de felul celor calculate în [3] și [4], pe care însă, datorită volumului mare de muncă, autorul nu le-a putut cuprinde în cadrul acestei lucrări.

5. O ALTĂ METODĂ APROXIMATIVĂ PENTRU CAZUL ÎNCASTRĂRII PE CONTUR

Deformațiile w, momentele de încovoiere M_x și forțele tăietoare T_x pot fi determinate cu o aproximație suficientă cu ajutorul unei metode datorită lui Hruban.

Dacă presupunem că studiem mărimile statice și geometrice de-a lungul axei $x = 0$ și că deformația pînzei pe direcția y nu este împiedicată, starea de tensiune și deformație nu depinde de y și, prin urmare, în ecuațiile diferențiale ale problemei (1.3) dispar derivatele parțiale în raport cu y:

$$\frac{1}{Eh} \frac{\mathrm{d}^4 F}{\mathrm{d}x^4} + \frac{1}{R} \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = 0,$$

$$K \frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} - \frac{1}{R} \frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}x^2} = p, \qquad (5.1\ \mathrm{a} \div \mathrm{b})$$

din care, eliminînd necunoscuta F, se obține ecuația

$$\frac{\mathrm{d}^6 w}{\mathrm{d}x^6} + \frac{Eh}{KR^2} \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{K} \frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}x^2},$$

pe care, integrînd-o de două ori și ținînd seama de notația (2.9), se obține

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} + \frac{\varepsilon^4}{a^4} w = \frac{p}{K} + A_1 x + A_2, \tag{5.2}$$

a cărei soluție este

$$w = \frac{pa^4}{K\varepsilon^4}(1 + A_1 x + A_2 + C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3 + C_4\Phi_4), \tag{5.3}$$

unde $\Phi_1 \ldots \Phi_4$ au semnificațiile (2.31), în care s-au înlocuit

$$x_m = \mu_m = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}. \tag{5.4}$$

Ținînd seama de condițiile de margine simetrice pentru $x = \pm \frac{a}{2}$, $A_1 = C_3 = C_4 = 0$. În mod asemănător ca la cap. 4 se poate arăta că și $A_2 = 0$.

Constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile de margine pentru $x = \pm \frac{a}{2}$, $w = 0$, $w' = 0$ și sînt

$$C_1 = -\frac{\Phi_3\left(\frac{a}{2}\right) + \Phi_4\left(\frac{a}{2}\right)}{\Phi_5\left(\frac{a}{2}\right) + \Phi_6\left(\frac{a}{2}\right)}; \qquad C_2 = \frac{\Phi_3\left(\frac{a}{2}\right) - \Phi_4\left(\frac{a}{2}\right)}{\Phi_5\left(\frac{a}{2}\right) + \Phi_6\left(\frac{a}{2}\right)}, \tag{5.5}$$

unde Φ_5 și Φ_6 au semnificațiile (4.8), în care s-au introdus valorile (5.4), și, prin urmare, se pot scrie :

$$w = \frac{pa^4}{K\varepsilon^4}\left\{1 - \frac{\left[\Phi_3\left(\frac{a}{2}\right) + \Phi_4\left(\frac{a}{2}\right)\right]\Phi_1(x) - \left[\Phi_3\left(\frac{a}{2}\right) - \Phi_4\left(\frac{a}{2}\right)\right]\Phi_2(x)}{\Phi_5\left(\frac{a}{2}\right) + \Phi_6\left(\frac{a}{2}\right)}\right\},$$

$$M_x = -\frac{pa^2}{\varepsilon^2}\frac{\left[\Phi_3\left(\frac{a}{2}\right) - \Phi_4\left(\frac{a}{2}\right)\right]\Phi_1(x) + \left[\Phi_3\left(\frac{a}{2}\right) + \Phi_4\left(\frac{a}{2}\right)\right]\Phi_2(x)}{\Phi_5\left(\frac{a}{2}\right) + \Phi_6\left(\frac{a}{2}\right)}, \tag{5.6 a ÷ c}$$

$$T_x = -\sqrt{2}\frac{pa}{\varepsilon}\frac{\Phi_4\left(\frac{a}{2}\right)\Phi_3(x) + \Phi_3\left(\frac{a}{2}\right)\Phi_4(x)}{\Phi_5\left(\frac{a}{2}\right) + \Phi_6\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Valorile maxime vor fi :

$$(w_{\max})_{x=0,\ y=0} = \frac{pa^4}{K\varepsilon^4}\left[1 - \frac{\Phi_3\left(\frac{a}{2}\right) + \Phi_4\left(\frac{a}{2}\right)}{\Phi_5\left(\frac{a}{2}\right) + \Phi_6\left(\frac{a}{2}\right)}\right],$$

$$(M_{x\,\max})_{x=\frac{a}{2},\ y=0} = \frac{pa^2}{\varepsilon^2}\,\frac{\Phi_5\left(\frac{a}{2}\right) - \Phi_6\left(\frac{a}{2}\right)}{\Phi_5\left(\frac{a}{2}\right) + \Phi_6\left(\frac{a}{2}\right)}, \qquad (5.7\ \text{a} \div \text{c})$$

$$(T_{x\,\max})_{x=\frac{a}{2},\ y=0} = -2\sqrt{2}\,\frac{pa}{\varepsilon}\,\frac{\Phi_5\left(\frac{a}{2}\right)\Phi_6\left(\frac{a}{2}\right)}{\Phi_5\left(\frac{a}{2}\right) + \Phi_6\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Ținînd seama că $\Phi_5\left(\frac{a}{2}\right)$ este foarte mic în raport cu $\Phi_6\left(\frac{a}{2}\right)$, iar raportul $\dfrac{\Phi_3\left(\frac{a}{2}\right) + \Phi_4\left(\frac{a}{2}\right)}{\Phi_5\left(\frac{a}{2}\right) + \Phi_6\left(\frac{a}{2}\right)}$ este de asemenea foarte mic, relațiile (5.7) se pot scrie simplificate :

$$w_{\max} = \frac{pa^4}{K\varepsilon^4},$$

$$M_{x\,\max} = -\frac{pa^2}{\varepsilon^2}, \qquad (5.8\ \text{a} \div \text{c})$$

$$T_{x\,\max} = -2\sqrt{2}\,\frac{pa}{\varepsilon}\,\Phi_5\left(\frac{a}{2}\right).$$

O situație comparativă a soluției prin dezvoltarea în serii de funcții fundamentale și soluția aproximativă descrisă mai sus s-a efectuat pentru valoarea $\varepsilon = 15$ și este înscrisă în tabela următoare :

Tabela 3

$\varepsilon = 15$	$w_{\max}\Big/\frac{pa^4}{K}$	$M_{x\,\max}/pa^2$	$T_{x\,\max}/pa$
Soluția (4.9)	0,0000195	−0,00425	−0,0697
Soluția (5.8)	0,0000198	−0,00445	−0,0707

Se constată că această metodă aproximativă dă valori suficient de apropiate de cele obținute cu ajutorul funcțiilor fundamentale, ținînd seama și de faptul că, în cazul dezvoltărilor în serii de aceste funcții, termenii ce reprezentau valori sub 5% din suma termenilor precedenți nu au fost luați în considerare.

CONCLUZII

Formulele stabilite în lucrarea de față permit să se calculeze paraboloizi de rotație pe contur dreptunghiular cu rezemări de margine omogene.

Calculele fiind detaliate pentru cazul încastrării pe contur, a fost posibilă trasarea diagramelor deplasării w, momentului de încovoiere M_x și forței tăietoare T_x, în funcție de diferite valori ale coeficientului ε (parametrul plăcii curbe).

După cunoștințele autorului, problema încastrării plăcilor curbe subțiri de rotație, pe contur dreptunghiular în cadrul teoriei de încovoiere, nu a mai fost tratată în literatura de specialitate decît cu metode foarte aproximative.

Primită la redacție la 23 aprilie 1964, completări și modificări la 21 august 1964 și 21 noiembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Wlasov W. S., *Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik.* Academie Verlag, Berlin, 1958.
2. I. Doganoff, *Betrachtungen über die Berechnungsverfahren rechteckiger Kugelkalotten.* Vortrag. II/2 International Colloquium on Simplified Calculation Methods, Brussels, September, 1961.
3. В. Диковић, *Пологие прямоугольные в плане оболочки вращения.* Госстройиздат, Москва, 1960.
4. * * * *Instrucțiuni pentru proiectarea acoperișurilor și planșeelor din plăci curbe subțiri de beton armat.* Edit. tehnică, București, 1963.
5. V. Gioncu, *O metodă variațională de calcul a plăcilor curbe subțiri cu aplicație la paraboloidul hiperbolic în șa.* St. cerc. mec. apl., **XVI**, *4*, 939 (1964).
6. M. Soare, *O metodă generală de rezolvare a plăcilor dreptunghiulare.* St. cerc. mec. apl., **XII**, *2*, 278 (1961).
7. P. P. Teodorescu, *Probleme plane în teoria elasticității.* Edit. Acad. R.P.R.
8. M. Soare, *Application de ecuations aux differences finies au calcul des coques.* Bucarest, 1962.
9. — *Teoria încovoierii simetrice a paraboloidului de rotație pleoștit pe contur circular.* St. cerc. mec. apl., **XIV**, *4*, 837 (1963).
10. О. Д. Ониашвили, *Некоторые динамические задачи теории оболочек.* Академия наук СССР, Москва, 1957.
11. M. Soare, *Contribuții la teoria încovoierii paraboloidului eliptic.* Lucrare de disertație. Autoreferat, București, 1963.

CRITERII DE SOLUȚIONARE A ECUAȚIEI DE ECHILIBRU PLASTIC A PLĂCILOR DREPTUNGHIULARE DE BETON ARMAT[1])

de VALERIU PETCU
Institutul de cercetări în construcții
și economia construcțiilor (INCERC), București

539.4 : 517.9

În lucrare se enunță trei criterii pentru soluționarea ecuației de echilibru plastic a plăcilor de beton armat cu armătura pe două direcții și se examinează aspectul economic specific fiecărui criteriu. Studiul se referă la plăcile dreptunghiulare de beton armat rezemate pe tot conturul, solicitate de încărcări permanente și temporare uniform distribuite pe toată suprafața lor. Este luată în considerație influența condiției privind comportarea elastică a armăturii în stadiul de exploatare asupra gradului de redistribuție plastică a eforturilor.

Studiul se bazează pe principiile metodei generale de calcul al construcțiilor la stări limită. Compararea rezultatelor obținute justifică oportunitatea aplicării criteriului redistribuției minime în calculul plastic al plăcilor armate pe două direcții.

I. INTRODUCERE

Studiile experimentale efectuate pînă în prezent în diferite țări au arătat că starea limită de rezistență a plăcilor de beton armat cu armătura pe două direcții corespunde transformării lor în mecanisme.

Schemele acestor mecanisme sînt alcătuite din linii de rupere de-a lungul cărora este atinsă limita de curgere în armătura întinsă [1].

Ecuația de echilibru plastic, care caracterizează din punct de vedere mecanic stadiul transformării în mecanism a unei structuri de

[1]) Comunicare prezentată la a XI-a Sesiune științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic Timișoara, 16—17 mai 1964.
Publicată și în „Rev. roum. sci. techn. — Mécanique appliquée", **10**, 2 (1965).

beton armat, exprimă, în cazul plăcilor, egalitatea dintre lucrul mecanic virtual al momentelor plastice care acționează de-a lungul liniilor de rupere și lucrul mecanic virtual al încărcărilor.

La proiectarea plastică a plăcilor de beton armat, necunoscutele ecuației de echilibru plastic sînt reprezentate exclusiv de momentele plastice care acționează de-a lungul liniilor de rupere, întrucît în acest caz valorile încărcărilor permanentă și temporară de calcul au valori cunoscute.

Deoarece numărul momentelor plastice este totdeauna mai mare decît unitatea, rezultă că pentru obținerea unei soluții unice a valorilor acestor momente sînt necesare ecuații suplimentare. Aceste ecuații pot avea la bază unul din următoarele criterii :

1) criteriul simplității armăturii,
2) criteriul redistribuției minime,
3) criteriul volumului minim de armătură.

Primul criteriu se referă la o distribuție a armăturii de rezistență pe suprafața plăcii care să asigure o operație de fasonare a vergelelor de oțel cît mai simplă și un montaj al acestor vergele cît mai ușor.

Criteriul al doilea constă în distribuirea armăturii de rezistență pe suprafața plăcii astfel încît redistribuția plastică a eforturilor sub acțiunea încărcărilor de calcul să fie minimă [2], [3].

Este evident că fiecăruia dintre aceste criterii îi corespunde un anumit volum de armătură de rezistență.

Întrucît aplicarea calculului plastic la proiectarea structurilor de beton armat apare justificată în măsura în care se realizează o reducere a consumului de materiale (și în special o reducere a consumului de oțel) față de cel corespunzător calculului elastic, apare oportună examinarea aspectului economic specific fiecăruia din cele trei criterii enumerate mai sus.

Problema devine cu atît mai importantă, cu cît la proiectarea plastică a plăcilor de beton armat gradul de redistribuție plastică a eforturilor este limitat în unele cazuri de condiția privind comportarea elastică a armăturii sub acțiunea încărcărilor de exploatare [4], [5] . Această limitare dispare numai în cazurile în care este satisfăcută relația

$$r \leqslant r_a, \tag{1}$$

în care

$$r = \frac{G + P_u}{G + P_1}; \tag{2}$$

$$r_a = \frac{G + P_u}{G + P_n}; \tag{3}$$

r este coeficientul de redistribuție al plăcii, reprezentînd raportul dintre suma încărcărilor totale permanentă și temporară de calcul și suma încărcărilor totale corespunzătoare atingerii limitei de curgere într-un singur punct al armăturii, determinat în ipoteza transformării plăcii în mecanism sub acțiunea încărcărilor permanentă și

temporară de calcul. Mărimea acestui coeficient depinde de caracteristicile statice și geometrice ale plăcii și de valorile momentelor plastice de-a lungul liniilor de rupere;

r_a — valoarea limită a coeficientului de redistribuție pînă la care este asigurată îndeplinirea condiției privind comportarea elastică a armăturii sub acțiunea încărcărilor de exploatare. Această valoare limită este funcție exclusiv de valorile de calcul ale încărcărilor permanentă și temporară și de valoarea normată a încărcării temporare. În consecință, la proiectarea plastică a unei plăci de beton armat valoarea acestui coeficient este cunoscută;

G — încărcarea permanentă totală de calcul;

P_u — încărcarea temporară totală de calcul;

P_n — încărcarea temporară totală normată;

P_1 — încărcarea temporară totală corespunzătoare atingerii limitei de curgere de calcul într-un singur punct al armăturii plăcii.

Observații.

1. În calculul plastic al structurilor de beton armat se denumesc încărcări de exploatare încărcarea permanentă de calcul și încărcarea temporară normată.

2. Prin definiție, încărcarea totală (permanentă sau temporară) este încărcarea care solicită toată placa.

În cazul particular al plăcilor solicitate de încărcări permanente și temporare uniform distribuite pe toată suprafața lor, relațiile (2) și (3) devin

$$r = \frac{q_u}{q_1}, \tag{2'}$$

respectiv

$$r_a = \frac{q_u}{q_n}, \tag{3'}$$

unde

$$q_u = g + p_u;\ q_n = g + p_n;\ q_1 = g + p_1;$$

g este încărcarea permanentă de calcul uniform distribuită pe unitatea de suprafață;

p_u — încărcarea temporară de calcul uniform distribuită pe unitatea de suprafață;

p_n — încărcarea temporară normată uniform distribuită pe unitatea de suprafață;

p_1 — încărcarea temporară uniform distribuită pe unitatea de suprafață, corespunzătoare atingerii limitei de curgere de calcul într-un singur punct al armăturii plăcii.

Prin urmare, momentele plastice date de sistemul format de ecuația de echilibru plastic și de ecuațiile suplimentare stabilite pe baza unuia din criteriile enunțate mai sus reprezintă momente plastice de calcul

numai în cazurile în care coeficientul de redistribuţie r îndeplineşte condiţia (1).

Pentru plăcile la care $r > r_a$, condiţia privind comportarea elastică a armăturii în stadiul de exploatare impune luarea în consideraţie numai a unei redistribuţii parţiale a eforturilor sub acţiunea încărcărilor de calcul,

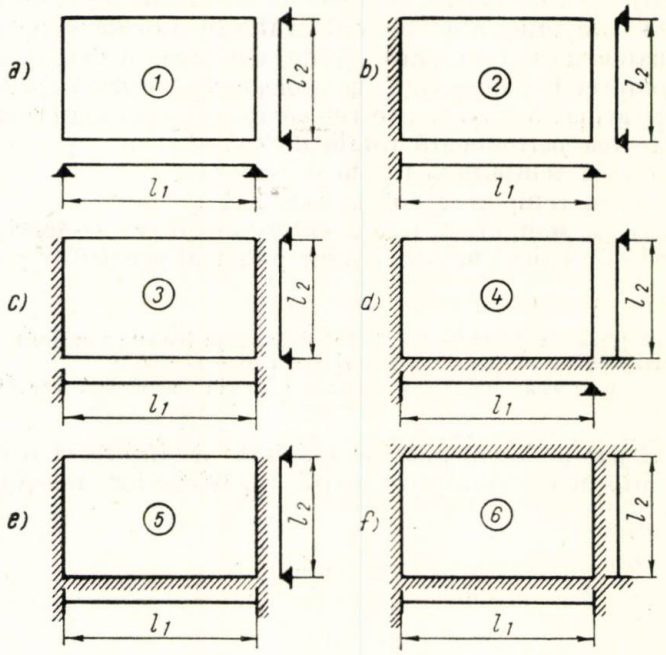


Fig. 1

astfel încît mărimea coeficientului de redistribuţie r', corespunzătoare acestei redistribuţii parţiale a eforturilor, să satisfacă egalitatea $r' = r_a$. În aceste cazuri, momentele plastice ce se obţin din condiţia $r' = r_a$ au valori mai mari sau cel puţin egale cu cele date de sistemul de ecuaţii menţionat mai sus, consecinţa acestui fapt fiind micşorarea economiei de oţel în raport cu cea obţinută pentru o redistribuţie totală a eforturilor.

Pentru stabilirea eficienţei economice a criteriilor prezentate mai sus, în cele ce urmează se determină raportul dintre volumul armăturii corespunzător fiecărui criteriu şi volumul armăturii corespunzător calculului elastic, ţinîndu-se seama de condiţia privind comportarea elastică a armăturii în stadiul de exploatare. Această determinare se face pentru şase tipuri de plăci independente de beton armat, de formă dreptunghiulară, rezemate pe tot conturul, solicitate de încărcări uniform distribuite pe toată suprafaţa lor, ale căror scheme sînt reprezentate în figura 1.

Studiul se bazează pe metoda generală de calcul al construcţiilor la stări limită, ale cărei principii sînt expuse în lucrările cu caracter oficial [6] şi [7].

II. NOTAȚII

Pe lîngă notațiile folosite anterior, în cele ce urmează mai intervin :

l_1, l_2 — deschiderile de calcul ale plăcii ;

$M_{i1} = \alpha_{i1} q_u l_1^2$, $M_{i2} = \alpha_{i2} q_u l_2^2$ — momentele elastice maxime pe unitatea de lungime, produse de încărcarea de calcul q_u în cîmpul plăcii de tip i pe direcțiile deschiderilor l_1 și l_2 ;

$M'_{i1} = \alpha'_{i1} q_u l_1^2$, $M'_{i2} = \alpha'_{i2} q_u l_2^2$ — valorile absolute ale momentelor elastice pe unitatea de lungime, produse de încărcarea de calcul q_u pe laturile încastrate ale plăcii de tip i, perpendiculare pe direcțiile deschiderilor l_1 și l_2 ;

M_{pi1}, M_{pi2} — momentele plastice pe unitatea de lungime, în cîmpul plăcii de tip i, pe direcțiile deschiderilor l_1 și l_2 ;

M'_{pi1}, M'_{pi2} — valorile absolute ale momentelor plastice pe unitatea de lungime, pe laturile încastrate ale plăcii de tip i, perpendiculare pe direcțiile deschiderilor l_1 și l_2 ;

R_a — limita de curgere de calcul a armăturii ;

V_0 — volumul armăturii corespunzător calculului elastic al plăcii ;

V_1 — volumul armăturii corespunzător criteriului simplității armăturii ;

V_2 — volumul armăturii corespunzător criteriului redistribuției minime ;

V_3 — volumul minim de armătură ;

z — brațul de pîrghie al cuplului interior al secțiunilor de calcul ale plăcii ;

α_{i1}, α_{i2} — coeficienți de influență ai momentelor elastice maxime din cîmpul plăcii de tip i pe direcțiile deschiderilor l_1 și l_2 ;

α'_{i1}, α'_{i2} — coeficienți de influență ai momentelor elastice de pe laturile încastrate perpendiculare pe direcțiile deschiderilor l_1 și l_2 ale plăcii de tip i.

III. IPOTEZE DE CALCUL

Prezentul studiu se bazează pe următoarele ipoteze :

1. Starea limită de rezistență a unei plăci de beton armat corespunde transformării ei în mecanism sub acțiunea încărcărilor de calcul.

2. În cazul plăcilor dreptunghiulare de beton armat solicitate de încărcări uniform distribuite pe toată suprafața lor, se admite o schemă unică a mecanismului de rupere, independentă de modul de rezemare a plăcii pe cele patru laturi (simplă rezemare sau încastrare perfectă).

Această schemă este alcătuită din patru linii de rupere care pătrund în colțurile plăcii, făcînd unghiuri de 45° în raport cu laturile adiacente,

dintr-o linie de rupere paralelă cu latura lungă, situată la mijlocul plăcii, şi din linii de rupere situate de-a lungul laturilor încastrate (fig. 2).

3. Pentru fiecare secţiune de calcul, armătura este presupusă uniform distribuită pe toată lăţimea plăcii.

Pe fiecare direcţie, din secţiunea de armătură din cîmp se ridică 1/2 pe laturile teoretic simplu rezemate şi 2/3 pe laturile încastrate.

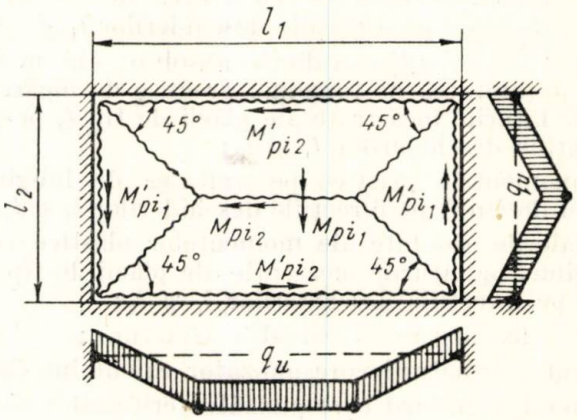


Fig. 2

Pe fiecare direcţie, ridicarea armăturii se face la o distanţă de rezeme egală cu $\frac{l_{min}}{5}$. l_{min} fiind deschiderea cea mai mică a plăcii.

De această reducere a armăturii din cîmp în vecinătatea reazemelor se ţine seama la determinarea lucrului mecanic virtual produs de momentele plastice din cîmp în stadiul de mecanism al plăcii.

4. În ecuaţia de echilibru plastic se iau în consideraţie momentele care apar pe reazemele teoretic simplu rezemate, datorită legăturii monolite a plăcilor cu grinzile de pe contur.

Mărimea acestor momente este egală cu 1/3 din mărimea momentelor plastice corespunzătoare din cîmp.

5. Armătura situată în colţurile plăcilor este în măsură să asigure formarea mecanismului de rupere reprezentat în figura 2.

6. Comportarea plăcilor sub acţiunea încărcărilor este perfect elastică pînă la atingerea limitei de curgere de calcul într-un singur punct al armăturii.

7. Determinarea volumului armăturii se referă numai la armătura de rezistenţă, exclusiv armarea colţurilor, şi numai la porţiunea delimitată de conturul plăcii.

De asemenea se neglijează surplusul de lungime a barelor ridicate, datorită porţiunilor înclinate, luîndu-se în consideraţie numai proiecţia pe planul plăcii a acestor porţiuni.

8. Armătura de pe reazeme se prelungește în cîmp pe o lungime egală cu $\frac{l}{4}$, unde l este deschiderea corespunzătoare fiecărei direcții a plăcii.

9. Se admite că pe ambele direcții, atît în cîmp, cît și pe reazeme, brațul de pîrghie al cuplului interior are o valoare unică.

IV. VOLUMUL ARMĂTURII CORESPUNZĂTOR CALCULULUI ELASTIC

Rezultatele calculului volumului armăturii, stabilite pentru cele șase tipuri de plăci reprezentate în figura 1, în ipoteza comportării elastice a acestora sub acțiunea încărcărilor de calcul, sînt date în tabela 1.

Tabela 1

Expresiile volumului de armătură V_0

Tipul plăcii	$\lambda = \frac{l_2}{l_1}$	$\frac{z \cdot R_a}{q_u \cdot l_1^4} \cdot V_0$
(1)	(2)	(3)
1	$0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 2{,}0$	$\alpha_{11}\lambda + \alpha_{12}\lambda^3$
2	$0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 1{,}0$	$\frac{\lambda(15-2\lambda)}{15}\alpha_{21} + \lambda^3\alpha_{22} + \frac{\lambda}{4}\alpha'_{21}$
	$1{,}0 \leqslant \lambda \leqslant 2{,}0$	$\frac{13\lambda}{15}\alpha_{21} + \lambda^3\alpha_{22} + \frac{\lambda}{4}\alpha'_{21}$
3	$0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 1{,}0$	$\frac{\lambda(15-4\lambda)}{15}\alpha_{31} + \lambda^3\alpha_{32} + \frac{\lambda}{2}\alpha'_{31}$
	$1{,}0 \leqslant \lambda \leqslant 2{,}0$	$\frac{11\lambda}{15}\alpha_{31} + \lambda^3\alpha_{32} + \frac{\lambda}{2}\alpha'_{31}$
4	$0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 1{,}0$	$\frac{\lambda(15-2\lambda)}{15}\alpha_{41} + \frac{13\lambda^3}{15}\alpha_{42} + \frac{\lambda}{4}\alpha'_{41} + \frac{\lambda^3}{4}\alpha'_{42}$
	$1{,}0 \leqslant \lambda \leqslant 2{,}0$	$\frac{13\lambda}{15}\alpha_{41} + \frac{\lambda^2(15\lambda-2)}{15}\alpha_{42} + \frac{\lambda}{4}\alpha'_{41} + \frac{\lambda^3}{4}\alpha'_{42}$
5	$0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 1{,}0$	$\frac{\lambda(15-4\lambda)}{15}\alpha_{51} + \frac{13\lambda^3}{15}\alpha_{52} + \frac{\lambda}{2}\alpha'_{51} + \frac{\lambda^3}{4}\alpha'_{52}$
	$1{,}0 \leqslant \lambda \leqslant 2{,}0$	$\frac{11\lambda}{15}\alpha_{51} + \frac{\lambda^2(15\lambda-2)}{15}\alpha_{52} + \frac{\lambda}{2}\alpha'_{51} + \frac{\lambda^3}{4}\alpha'_{52}$
6	$0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 1{,}0$	$\frac{\lambda(15-4\lambda)}{15}\alpha_{61} + \frac{11\lambda^3}{15}\alpha_{62} + \frac{\lambda}{2}\alpha'_{61} + \frac{\lambda^3}{2}\alpha'_{62}$
	$1{,}0 \leqslant \lambda \leqslant 2{,}0$	$\frac{11\lambda}{15}\alpha_{61} + \frac{\lambda^2(15\lambda-4)}{15}\alpha_{62} + \frac{\lambda}{2}\alpha'_{61} + \frac{\lambda^3}{2}\alpha'_{62}$

Valorile coeficienților α_{i1}, α_{i2}, α'_{i1} și α'_{i2} $(i = 1,\ldots,6)$, care intervin în expresiile volumului armăturii, sînt date în lucrările [2] și [3].

V. VOLUMUL ARMĂTURII CORESPUNZĂTOR CRITERIULUI SIMPLITĂȚII ARMĂTURII

Cea mai simplă distribuție a armăturii pe suprafața unei plăci armate pe două direcții se obține în cazul în care intensitatea acestei armături are aceeași valoare în toate secțiunile de calcul. În teoria plastică a structurilor de beton armat, plăcile astfel armate se numesc *plăci cu armătură izotropă*.

Ținînd seama de ipoteza referitoare la admiterea în cadrul acestui studiu a unei valori unice a brațului de pîrghie al cuplului interior în toate secțiunile de calcul, rezultă că în cazul plăcilor cu armătură izotropă momentele plastice din aceste secțiuni sînt egale între ele.

Fie M_p valoarea comună a acestor momente plastice.

Expresiile momentului plastic M_p, stabilite pe baza ecuației de echilibru plastic scrise pentru fiecare din cele șase tipuri de plăci luate în considerație, sînt date în tabela 2, coloana 3.

Pe de altă parte, momentul plastic al unei secțiuni de beton armat este egal cu momentul încovoietor corespunzător atingerii limitei de curgere în armătura întinsă a secțiunii.

În consecință, momentul plastic M_p al plăcilor cu armătură izotropă este egal cu momentul elastic corespunzător atingerii limitei de curgere de calcul în punctul cel mai solicitat al armăturii.

Fie q_1 valoarea încărcării care produce acest moment.

Expresiile momentului plastic M_p, stabilite în funcție de încărcarea q_1 pentru plăcile reprezentate în figura 1, sînt date în tabela 2, coloana 4.

Din egalarea expresiilor momentului plastic M_p obținute pe baza ecuației de echilibru plastic cu cele date de calculul elastic, se obțin expresiile coeficientului de redistribuție $r = \dfrac{q_u}{q_1}$, care sînt date de asemenea în tabela 2.

Volumul armăturii V_1 este dat în tabela 3, în funcție de tipul plăcii și de raportul laturilor.

Rezultatele obținute sînt valabile atîta timp cît coeficientul de redistribuție îndeplinește condiția $r \leqslant r_a$.

În cazurile în care $r > r_a$, este necesar să se adopte un moment plastic al secțiunilor de calcul M'_p mai mare decît M_p, astfel încît coeficientul de redistribuție r', corespunzător momentului plastic M'_p, să fie egal cu r_a.

Tabela 2

Momente plastice și coeficienți de redistribuție ai plăcilor cu armătura izotropă

Tipul plăcii	λ	M_p		r
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	$0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 1{,}0$	$\frac{5\lambda^2(3-\lambda)}{32(4\lambda+5)} q_u l_1^2$	$\alpha_{12}\ \lambda^2 q_1 l_1^2$	$\frac{32(4\lambda+5)}{5(3-\lambda)} \alpha_{12}$
	$1{,}0 \leqslant \lambda \leqslant 2{,}0$	$\frac{5(3\lambda-1)}{32(5\lambda+4)} q_u l_1^2$	$\alpha_{11} q_1 l_1^2$	$\frac{32(5\lambda+4)}{5(3\lambda-1)} \alpha_{11}$
2	$0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 1{,}0$	$\frac{\lambda^2(3-\lambda)}{32(\lambda+1)} q_u l_1^2$	$\alpha_{22}\lambda^2 q_1 l_1^2$, pentru $\lambda = 0{,}5$ $\alpha'_{21} q_1 l_1^2$, pentru $\lambda \geqslant 0{,}6$	$\frac{32(\lambda+1)}{3-\lambda} \alpha_{22}$, pentru $\lambda = 0{,}5$ $\frac{32(\lambda+1)}{\lambda^2(3-\lambda)} \alpha'_{21}$, pentru $\lambda \geqslant 0{,}6$
	$1{,}0 \leqslant \lambda \leqslant 2{,}0$	$\frac{3\lambda-1}{8(5\lambda+3)} q_u l_1^2$	$\alpha'_{21} q_1 l_1^2$	$\frac{8(5\lambda+3)}{3\lambda-1} \alpha'_{21}$
3	$0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 1{,}0$	$\frac{5\lambda^2(3-\lambda)}{32(6\lambda+5)} q_u l_1^2$	$\alpha_{32}\lambda^2 q_1 l_1^2$, pentru $\lambda = 0{,}5$ $\alpha'_{31} q_1 l_1^2$, pentru $\lambda \geqslant 0{,}6$	$\frac{32(6\lambda+5)}{5(3-\lambda)} \alpha_{32}$, pentru $\lambda = 0{,}5$ $\frac{32(6\lambda+5)}{5\lambda^2(3-\lambda)} \alpha'_{31}$, pentru $\lambda \geqslant 0{,}6$
	$1{,}0 \leqslant \lambda \leqslant 2{,}0$	$\frac{5(3\lambda-1)}{16(15\lambda+7)} q_u l_1^2$	$\alpha'_{31} q_1 l_1^2$	$\frac{16(15\lambda+7)}{5(3\lambda-1)} \alpha'_{31}$
4	$0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 1{,}0$	$\frac{5\lambda^2(3-\lambda)}{8(19\lambda+25)} q_u l_1^2$	$\alpha'_{42}\lambda^2 q_1 l_1^2$	$\frac{8(19\lambda+25)}{5(3-\lambda)} \alpha'_{42}$
	$1{,}0 \leqslant \lambda \leqslant 2{,}0$	$\frac{5(3\lambda-1)}{8(25\lambda+19)} q_u l_1^2$	$\alpha'_{41} q_1 l_1^2$	$\frac{8(25\lambda+19)}{5(3\lambda-1)} \alpha'_{41}$
5	$0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 1{,}0$	$\frac{5\lambda^2(3-\lambda)}{8(23\lambda+25)} q_u l_1^2$	$\alpha'_{52}\lambda^2 q_1 l_1^2$	$\frac{8(23\lambda+25)}{5(3-\lambda)} \alpha'_{52}$
	$1{,}0 \leqslant \lambda \leqslant 2{,}0$	$\frac{5(3\lambda-1)}{48(5\lambda+3)} q_u l_1^2$	$\alpha'_{51} q_1 l_1^2$	$\frac{48(5\lambda+3)}{5(3\lambda-1)} \alpha'_{51}$
6	$0{,}5 \leqslant \lambda \leqslant 1{,}0$	$\frac{5\lambda^2(3-\lambda)}{16(11\lambda+15)} q_u l_1^2$	$\alpha'_{62}\lambda^2 q_1 l_1^2$	$\frac{16(11\lambda+15)}{5(3-\lambda)} \alpha'_{62}$
	$1{,}0 \leqslant \lambda \leqslant 2{,}0$	$\frac{5(3\lambda-1)}{16(15\lambda+11)} q_u l_1^2$	$\alpha'_{61} q_1 l_1^2$	$\frac{16(15\lambda+11)}{5(3\lambda-1)} \alpha'_{61}$

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtár
Folyóiratkölcsönző
254/1966

ASUPRA STUDIULUI CONDIȚIILOR DE STABILITATE A LAGĂRELOR CIRCULARE LUBRIFICATE CU GAZE[1])

de V. N. CONSTANTINESCU

Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R., București

533 : 621.89 : 621.82

Folosind o metodă de studiu al stabilității elaborată în unele lucrări anterioare [1], [2], se determină caracteristicile dinamice și coeficienții ecuației de stabilitate pentru lagărele circulare lubrificate cu gaze. În final, se determină condițiile de stabilitate pentru lagăre de alungire infinită, relevîndu-se influența anumitor parametri constructivi și funcționali și se compară rezultate obținute cu cele realizate de alți autori.

În unele lucrări precedente [1], [2] s-a reluat problema stabilității dinamice a lagărelor circulare lubrificate cu gaze [3], deducîndu-se în final o ecuație de stabilitate în ipoteza unei mișcări cu perturbații mici față de poziția inițială de echilibru. Totodată, s-au stabilit unele relații aproximative pentru evaluarea reacțiunilor care apar în stratul de lubrifiant și a derivatelor acestora în funcție de parametrii de care depinde funcționarea lagărelor. În lucrările menționate s-au dedus de asemenea unele concluzii calitative privind comportarea dinamică a lagărelor circulare lubrificate cu gaze în regim hidrodinamic în anumite situații limită. Astfel, pentru viteze foarte reduse (parametrul $H \to 0$) rezultă că mișcarea este dinamic instabilă pentru orice excentricitate sau alungire a lagărului, în timp ce la viteze foarte mari ($H \to \infty$) mișcarea este neutru stabilă, de asemenea pentru orice excentricitate sau alungire a lagărului. Totodată, la excentricități relative reduse ($\varepsilon \to 0$) mișcarea în lagăr rezultă instabilă pentru

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. techn. — Mécanique appliquée", **10**, *3* (1965) (în limba engleză).

orice alungire. În sfîrşit, din analiza coeficienţilor care intervin în ecuaţia de stabilitate s-a relevat posibilitatea ca, cel puţin la numere H nu prea mari, mişcarea să rezulte stabilă pentru excentricităţi suficient de mari.

În cele ce urmează ne propunem ca, pe baza rezultatelor din lucrările [1], [2] şi a datelor numerice existente [4], [3], să studiem mai în detaliu condiţiile de stabilitate în lagărele circulare lubrificate cu gaze la excentricităţi mijlocii şi mari.

Astfel, în lucrările [1], [2] ecuaţia de stabilitate a fost dedusă sub forma

$$C_0 \bar{\nu}^4 + C_1 \bar{\nu}^3 + C_2 \bar{\nu}^2 + C_3 \bar{\nu} + C_4 = 0 \tag{1}$$

cu condiţiile de stabilitate

$$C_0 C_i > 0\,; \qquad C_0 [C_3 (C_1 C_2 - C_0 C_3) - C_1^2 C_4] > 0\,; \tag{2}$$

ω fiind viteza unghiulară a fusului

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{\omega}, \tag{3}$$

iar coeficienţii C_i au expresiile

$$\left.\begin{aligned}
C_0 &= 1\,; \qquad C_1 = \frac{2M^*}{H^2}\left(\frac{\partial C_t}{\partial \dot{\varepsilon}} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial C_n}{\partial \dot{\bar{\varphi}}}\right)\\
C_2 &= \frac{2M^*}{H^2}\left[\frac{1}{\varepsilon} C_t + \frac{\partial C_t}{\partial \varepsilon} + \frac{2M^*}{H^2}\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial C_t}{\partial \dot{\bar{\varphi}}}\frac{\partial C_n}{\partial \dot{\varepsilon}} - \frac{\partial C_t}{\partial \dot{\varepsilon}}\frac{\partial C_n}{\partial \dot{\bar{\varphi}}}\right)\right]\\
C_3 &= \frac{4M^{*2}}{H^4}\frac{1}{\varepsilon}\left(C_t\frac{\partial C_t}{\partial \dot{\varepsilon}} + C_n\frac{\partial C_n}{\partial \dot{\varepsilon}} + \frac{\partial C_t}{\partial \dot{\bar{\varphi}}}\frac{\partial C_n}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial C_t}{\partial \varepsilon}\frac{\partial C_n}{\partial \dot{\bar{\varphi}}}\right)\\
C_4 &= \frac{4M^{*2}}{H^4}\frac{1}{\varepsilon}\left(C_t\frac{\partial C_t}{\partial \varepsilon} + C_n\frac{\partial C_n}{\partial \varepsilon}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

în care

$$H = \frac{\mu\omega}{p_0 \psi^2}\,; \qquad M^* = \frac{\mu^2 b}{p_0 m \psi^5}, \tag{5}$$

μ fiind viscozitatea gazului lubrifiant, p_0 presiunea mediului exterior, $\psi = c/r_1$ jocul relativ, b lăţimea lagărului, iar m masa redusă a axului corespunzătoare lagărului.

În acelaşi timp, cu C_t, C_n s-au notat coeficienţii adimensionali corespunzători componentelor $\mathcal{P}_t$, $\mathcal{P}_n$ ale rezultantei presiunilor pe direcţia liniei centrelor (în momentul iniţial) şi pe o normală la aceasta.

$$C_t = \frac{\mathcal{P}_t}{2p_0 r_1 b}\,; \qquad C_n = \frac{\mathcal{P}_n}{2p_0 r_1 b}\,. \tag{6}$$

În sfîrșit, $\varepsilon = e/c$ este excentricitatea relativă, $\dot{\varphi}$ viteza de rotație a liniei centrelor, $\dot{\varepsilon} = \mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t$, iar

$$\bar{\dot{\varepsilon}} = \frac{\dot{\varepsilon}}{\omega}; \quad \bar{\dot{\varphi}} = \frac{\dot{\varphi}}{\omega}. \tag{7}$$

Pe de altă parte, toate valorile derivatelor coeficienților C_t, C_n care intervin în expresiile (4) sînt considerate pentru momentul inițial $t = 0$, respectiv pentru regimul de funcționare de bază, neperturbat. Notînd $\bar{C}_t$ $\bar{C}_n$ valorile C_t, C_n corespunzătoare acestui regim de bază neperturbat, se pot scrie relațiile aproximative [1]

$$\left.\begin{aligned}
&C_t \cong \bar{C}_t; \qquad C_n \cong \bar{C}_n \\
&\frac{\partial C_t}{\partial \varepsilon} \cong \frac{\partial \bar{C}_t}{\partial \varepsilon}; \quad \frac{\partial C_n}{\partial \varepsilon} \cong \frac{\partial \bar{C}_n}{\partial \varepsilon} \\
&\frac{\partial C_t}{\partial \bar{\dot{p}}} \cong -2H\frac{\partial \bar{C}_t}{\partial H}; \quad \frac{\partial C_n}{\partial \bar{\dot{\varphi}}} \cong -2H\frac{\partial \bar{C}_n}{\partial H} \\
&\frac{\partial C_t}{\partial \bar{\dot{\varepsilon}}} \cong \left(\frac{\partial C_t}{\partial \bar{\dot{\varepsilon}}}\right)_{H=0} \frac{1}{1+3bH^2}; \quad \frac{\partial C_n}{\partial \bar{\dot{\varepsilon}}} \cong 0
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ultimele două relații, respectiv derivatele în raport cu $\bar{\dot{\varepsilon}}$, fiind empirice, deduse pe baza comportării acestora în cazurile extreme $H \to 0$ și $H \to \infty$.

Din studiul ecuației (1) s-au putut desprinde unele concluzii calitative privind stabilitatea mișcării lagărelor circulare lubrificate cu gaze. Astfel, pentru $H \to 0$ mișcarea rezultă instabilă pentru orice excentricitate sau alungire, datorită faptului că distribuția presiunilor în absența efectului compresibilității este antisimetrică față de linia centrelor și deci $\mathcal{P}_t = \partial\mathcal{P}_t/\partial e = 0$, $C_t = \partial C_t/\partial\varepsilon = 0$. Pe de altă parte, la excentricități reduse ($\varepsilon \to 0$) mișcarea rezultă de asemenea instabilă pentru orice număr H, deoarece coeficientul $C_3 = 0$ (4). În sfîrșit, în cazul extrem $H \to \infty$ mișcarea rezultă neutru stabilă (mișcare periodică neamortizată, deoarece în această situație reacția în filmul de lubrifiant este plasată riguros pe linia centrelor și nu depinde de viteza suprafețelor ($\partial C_t/\partial\bar{\dot{\varepsilon}} = 0$), ci numai de poziția relativă instantanee a acestora.

Aceste rezultate impun, fără îndoială, anumite rezerve în privința condițiilor în care mișcarea într-un lagăr circular lubrificat cu gaze este dinamic stabilă din punctul de vedere al perturbațiilor mici. Apare, totodată, ca necesar studiul condițiilor de stabilitate la excentricități moderate și mari. Într-adevăr, din studiul calitativ al coeficienților C_i se constată că, pe măsură ce crește ε, coeficientul C_2 crește datorită prezenței în expresia acestuia a derivatei $\partial C_t/\partial\varepsilon$ și a termenului C_t/ε, care cresc o dată cu excentricitatea. Pe de altă parte, ultima condiție (2) este evident satisfăcută dacă C_2 are o valoare pozitivă suficient de mare.

În același timp se constată că, în anumite condiții, creșterea parametrului M^* are o influență stabilizatoare, de asemenea prin mărirea coeficientului C_2. Astfel, notînd cu

$$\bar{C}_1 = \frac{H^2}{2M^*} C_1; \quad \bar{C}_2 = \frac{H^2}{2M^*} C_2; \quad \bar{C}_3 = \frac{H^4}{4M^{*2}} C_3; \quad \bar{C}_4 = \frac{H^4}{4M^{*2}} C_4 \tag{9}$$

ultima condiție (2) se scrie, ținînd seama că $C_0 = 1$, sub forma

$$\left(\frac{H^2}{2M^*}\right)^4 [\bar{C}_3 (\bar{C}_1 \bar{C}_2 - \bar{C}_3) - \bar{C}_1^2 \bar{C}_4] > 0 \tag{10}$$

sau, deoarece $(H^2/2M^*)^4$ este evident pozitiv,

$$\bar{C}_3 (\bar{C}_1 \bar{C}_2 - \bar{C}_3) - \bar{C}_1^2 \bar{C}_4 > 0. \tag{11}$$

Din relațiile (9) și (4) se constată că coeficienții $\bar{C}_1, \bar{C}_3, \bar{C}_4$, nu depind de M^*. În schimb coeficientul C_2 depinde în continuare de M^*.

$$\bar{C}_2 = \frac{1}{\varepsilon} C_t + \frac{\partial C_t}{\partial \varepsilon} + \frac{2M^*}{H^2} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial C_t}{\partial \dot{\varphi}} \frac{\partial C_n}{\partial \dot{\varepsilon}} - \frac{\partial C_t}{\partial \dot{\varepsilon}} \frac{\partial C_n}{\partial \dot{\varphi}} \right) \tag{12}$$

și crește cu M^* dacă paranteza din membrul secund este pozitivă, ceea ce are loc întotdeauna la numere H reduse.

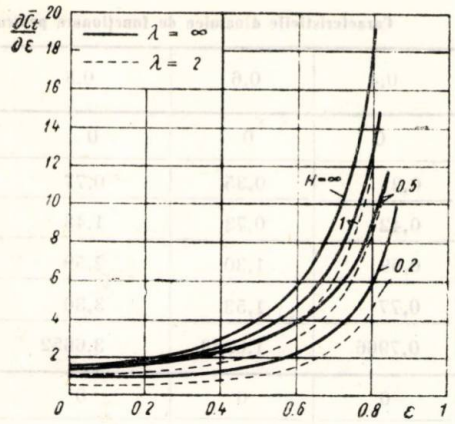
În sfîrșit, din relația (12) se mai constată că influența parametrului M^* scade pe măsură ce parametrul H crește, astfel încît este de așteptat ca acest parametru să aibă o influență importantă numai la viteze reduse, respectiv la valori reduse ale numărului H.

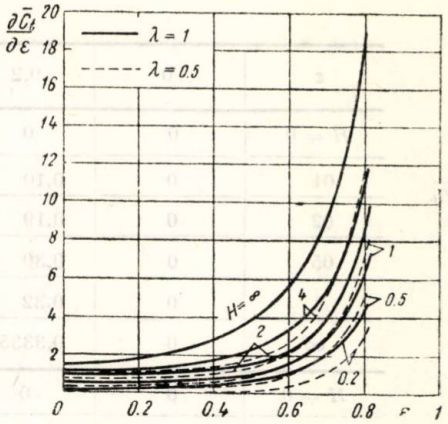
Concluziile de mai sus sînt generale și valabile indiferent de aproximațiile folosite mai departe pentru determinarea reacțiilor din filmul de lubrifiant (8).

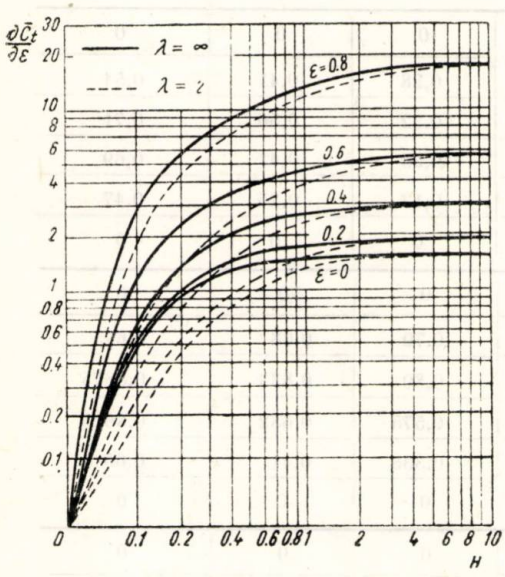
În continuare, deoarece coeficienții C_i nu pot fi determinați analitic, rămîne ca prin aplicații numerice la excentricități medii și mari să se verifice influența parametrilor M^*, H și ε asupra stabilității. Este de remarcat că relațiile aproximative (8) necesită numai cunoașterea coeficienților C_t, C_n din cazul static, respectiv pentru regimul de bază neperturbat. Astfel pentru calculul derivatelor (8), folosind datele numerice obținute de A. A. Raimondi [4] și H. Elrod și A. Burgdorfer [5], se obțin valorile prezentate în tabelele 1—4 pentru $\lambda = \infty$, $\lambda = 2$, $\lambda = 1$ și, respectiv, $\lambda = 0{,}5$.

Aceleași mărimi au fost reprezentate grafic în diagramele din figurile 1—5. Deși datele de la care s-a plecat sînt fără îndoială precise, fiind obținute numeric, valorile din tabelele ori diagramele de mai sus trebuie totuși considerate ca aproximative, aproximația putînd depăși chiar 10% în unele cazuri, deoarece determinarea derivatelor plecînd de la valorile funcțiilor respective în cîteva puncte este foarte dificilă, iar erorile sînt greu controlabile.

Nu s-au reprezentat componentele $\bar{C}_t$, respectiv $\bar{C}_n$, deoarece acestea pot fi urmărite în lucrarea [3]. Se constată că C_t are o variație asemănătoare cu aceea a coeficientului de încărcare total ζ [4], [3]. În schimb


$\frac{\partial \bar{C}_t}{\partial \varepsilon}$
λ = ∞
λ = 2
H=∞
1
0.5
0.2
ε
a


$\frac{\partial \bar{C}_t}{\partial \varepsilon}$
λ = 1
λ = 0.5
H=∞
4
2
1
0.5
0.2
ε
b


$\frac{\partial \bar{C}_t}{\partial \varepsilon}$
λ = ∞
λ = 2
ε=0.8
0.6
0.4
0.2
ε=0
H
c

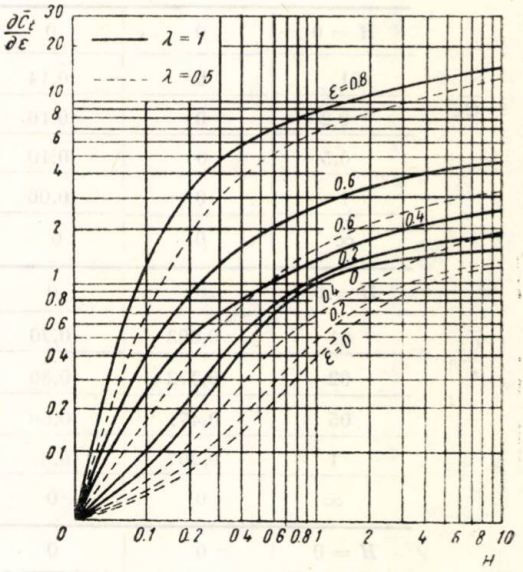

$\frac{\partial \bar{C}_t}{\partial \varepsilon}$
λ = 1
λ = 0.5
ε=0.8
0.6
0.6
0.4
0.2
0
ε=0
H
d

Fig. 1

Tabela

Caracteristicile dinamice de funcționare pentru

	ε	0	0,2	0,4	0,6	0,8
	$H = 0$	0	0	0	0	0
$\overline{C_t}$	01	0	0,10	0,21	0,35	0,77
	02	0	0,19	0,42	0,73	1,48
	05	0	0,30	0,69	1,30	2,59
	1	0	0,32	0,77	1,53	3,30
	∞	0	0,3335	0,7966	1,6349	3,6652
	$H = 0$	0	0	0	0	0
$\frac{\overline{C_t}}{\varepsilon}$	01	0,416	0,418	0,55	0,59	0,962
	02	0,92	0,95	1,05	1,215	1,85
	05	1,415	1,48	1,73	2,16	3,24
	1	1,51	1,58	1,98	2,55	4,13
	∞	1,57	1,67	1,99	2,72	4,58
	$H = 0$	0	0	0	0	0
$\overline{C_n}$	01	0	0,14	0,28	0,41	0,54
	0,2	0	0,16	0,32	0,50	0,71
	0,5	0	0,10	0,23	0,41	0,69
	1	0	0,06	0,13	0,25	0,47
	∞	0	0	0	0	0
	$H = 0$	0	0	0	0	0
$\frac{\overline{C_n}}{\varepsilon}$	01	0,693	0,70	0,70	0,68	0,675
	02	0,772	0,80	0,80	0,833	0,8875
	05	0,471	0,50	0,575	0,682	0,8625
	1	0,267	0,3	0,335	0,41	0,60
	∞	0	0	0	0	0
	$H = 0$	0	0	0	0	0
$\frac{\partial \overline{C_t}}{\partial \varepsilon}$	0,2	0,92	1	1,3	2,3	6
	0,5	1,415	1,65	2,38	3,9	10
	1	1,51	1,71	2,60	4,7	13,4
	∞	1,57	1,92	2,95	5,8	18,1

1

lagăre circulare de alungire $\lambda = \infty$

	ε	0	0,2	0,4	0,6	0,8
	$H = 0$	0	0	0	0	0
$\frac{\partial \bar{C}_n}{\partial \varepsilon}$	01	0,692	0,67	0,656	0,66	0,70
	02	0,772	0,735	0,75	0,84	1,01
	05	0,471	0,50	0,595	0,76	1,14
	1	0,267	0,313	0,422	0,62	1,15
	∞	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	1,05	4,8	5	5,2	5,6	9,2
$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial C_t}{\partial H}$	01	6,12	6,4	6,8	7,1	10,2
	02	3,79	4,2	4,6	5,0	7,4
	05	0,57	0,70	0,90	1,1	2,3
	1	0,083	0,11	0,15	0,2	0,54
	2	0,011	0,025	0,042	0,060	0,786
	∞	0	0	0	0	0
	$H = 0$	9,43	9,7	10	11	14
	0,05	7,21	7,5	7,8	8,2	8,6
$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial C_n}{\partial H}$	0,1	3,26	3,4	3,8	4,7	5,3
	0,2	−0,696	−0,3	0	0,44	1,2
	0,5	−0,754	−0,76	−0,76	−0,77	−0,56
	1	−0,241	−0,26	−0,28	−0,32	−0,38
	2	−0,0646	−0,07	−0,08	−0,09	−0,12
	∞	0	0	0	0	0
	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,05	0,864	0,92	1,12	1,68	4
$\frac{\partial C_t}{\partial \dot{\bar{\varepsilon}}}$	0,1	1,38	1,47	1,80	2,70	6,42
	0,2	1,54	1,64	2,0	3,02	7,16
	05	0,94	1,00	1,20	1,84	4,36
	1	0,51	0,54	0,66	0,996	2,36
	2	0,26	0,28	0,34	0,51	1,20
	∞	0	0	0	0	0

Tabela

Caracteristicile dinamice de funcționare

	ε	0	0,2	0,4	0,6	0,8
$\overline{C}_t$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,1	0	0,0336	0,085	0,195	0,521
	0,2	0	0,0966	0,227	0,457	1,038
	0,5	0	0,215	0,497	0,957	2,060
	1	0	0,270	0,639	1,26	2,790
	2	0	0,300	0,7960	1,63	3,60
	∞	0	0,3335	0,7966	1,6349	3,6652
$\frac{\overline{C}_t}{\varepsilon}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,1	0,161	0,168	0,213	0,325	0,651
	0,2	0,47	0,483	0,568	0,762	1,30
	0,5	1,040	1,075	1,24	1,595	2,58
	1	1,254	1,35	1,60	2,10	3,49
	2	1,42	1,50	1,99	2,72	4,50
	∞	1,57	1,667	1,995	2,73	4,59
$\overline{C}_n$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,1	0	0,0873	0,178	0,273	0,384
	0,2	0	0,129	0,257	0,383	0,520
	0,5	0	0,124	0,259	0,406	0,590
	1	0	0,086	0,185	0,302	0,456
	2	0	0,070	0,130	0,210	0,30
	∞	0	0	0	0	0
$\frac{\overline{C}_n}{\varepsilon}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,1	0,434	0,436	0,445	0,445	0,48
	0,2	0,62	0,645	0,643	0,639	0,65
	0,5	0,60	0,62	0,648	0,677	0,738
	1	0,42	0,43	0,463	0,503	0,57
	2	0,269	0,35	0,325	0,35	0,375
	∞	0	0	0	0	0

2

pentru lagăre circulare de alungire $\lambda = 2$

	ε	0	0,2	0,4	0,6	0,8
$\frac{\partial \overline{C}_t}{\partial \varepsilon}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,1	0,161	0,26	0,34	0,59	1,8
	0,2	0,47	0,55	0,78	1,43	4,65
	0,5	1,04	1,23	1,75	3,10	8,60
	1	1,25	1,70	2,30	3,90	12,0
	2	1,42	1,77	2,65	4,50	15,0
	∞	1,57	1,90	2,95	5,80	18,10
$\frac{\partial \overline{C}_n}{\partial \varepsilon}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,1	0,43	0,445	0,48	0,545	0,63
	0,2	0,62	0,45	0,65	0,69	0,845
	0,5	0,60	0,615	0,655	0,80	1
	1	0,42	0,472	0,585	0,785	1,18
	2	0,27	0,34	0,40	0,62	0,93
	∞	0	0	0	0	0
$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \overline{C}_t}{\partial H}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,05	2,6	2,9	3,1	4,2	7,8
	0,1	3,1	3,3	3,6	5,1	8,2
	0,2	2	2,30	2,7	3,8	5,9
	0,5	0,58	0,80	0,93	1,5	2,3
	1	0,26	0,33	0,42	0,67	1,02
	2	0,12	0,15	0,20	0,31	0,47
	∞	0	0	0	0	0
$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \overline{C}_n}{\partial H}$	$H = 0$	5	5,2	5,5	7,4	10
	0,05	3,9	3,9	4	4,5	3
	0,1	2,5	2,4	2,3	2,1	2,5
	0,2	0,52	0,54	0,57	0,60	0,62
	0,5	−0,24	−0,26	−0,27	−0,28	−0,12
	1	−0,08	−0,09	−0,10	−0,12	−0,17
	2	−0,035	−0,04	−0,045	−0,055	−0,08
	∞	0	0	0	0	0

Tabela

Caracteristicile dinamice de funcționare

	ε	0	0,2	0,4	0,6	0,8
$\overline{C}_t$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,04	0	0,0014	0,0047	0,0174	0,171
	0,1	0	0,0085	0,0272	0,0912	0,340
	0,2	0	0,0309	0,0898	0,238	0,685
	0,5	0	0,118	0,291	0,621	1,480
	1	0	0,205	0,490	0,986	2,23
	2	0	0,258	0,622	1,26	2,81
	∞	0	0,3335	0,7966	1,6349	3,6650
$\frac{\overline{C}_t}{\varepsilon}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,04	0,00525	0,007	0,0118	0,029	0,212
	0,1	0,0363	0,0425	0,068	0,152	0,425
	0,2	0,133	0,155	0,224	0,397	0,855
	0,5	0,57	0,59	0,728	1,037	1,85
	1	0,936	1,025	1,226	1,642	2,79
	2	1,225	1,210	1,556	2,10	3,51
	∞	1,57	1,667	1,995	2,73	4,59
$\overline{C}_n$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,04	0	0,0186	0,041	0,076	0,131
	01	0	0,045	0,098	0,166	0,261
	0,2	0	0,0819	0,170	0,264	0,366
	0,5	0	0,130	0,254	0,366	0,480
	1	0	0,121	0,239	0,351	0,469
	2	0	0,082	0,170	0,257	0,351
	∞	0	0	0	0	0
$\frac{\overline{C}_n}{\varepsilon}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,04	0,092	0,093	0,1026	0,127	0,174
	0,1	0,217	0,225	0,245	0,277	0,328
	0,2	0,39	0,41	0,425	0,440	0,445
	0,5	0,644	0,65	0,635	0,610	0,600
	1	0,59	0,605	0,598	0,586	0,586
	2	0,41	0,41	0,425	0,429	0,439
	∞	0	0	0	0	0

3

pentru lagăre circulare de alungire $\lambda = 1$

	ε	0	0,2	0,4	0,6	0,8
$\frac{\partial \overline{C}_t}{\partial \varepsilon}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,1	0,07	0,105	0,25	0,40	1,3
	0,2	0,17	0,23	0,50	0,9	3,2
	0,5	0,56	0,64	0,90	1,80	6,4
	1	1	1,05	1,32	2,6	8,3
	2	1,20	1,35	1,82	3,5	10,8
	4	1,35	1,60	2,1	4,0	13,0
	∞	1,57	1,90	2,95	5,80	18,10
$\frac{\partial \overline{C}_n}{\partial \varepsilon}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,1	0,217	0,264	0,34	0,46	0,58
	0,2	0,39	0,42	0,46	0,51	0,70
	0,5	0,644	0,605	0,56	0,58	0,76
	1	0,59	0,58	0,56	0,59	0,7
	2	0,41	0,415	0,44	0,48	0,57
	4	0,20	0,24	0,31	0,36	0,40
	∞	0	0	0	0	0
$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \overline{C}_t}{\partial H}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,5	0,5	0,55	0,65	1,4	3,4
	0,1	1,1	1,22	1,4	2,4	4,5
	0,2	1,5	1,58	1,74	2,35	3,9
	0,5	1,15	1,24	1,40	1,60	2,1
	1	0,56	0,58	0,61	0,69	0,92
	2	1,23	0,236	0,25	0,30	0,40
	4	0,14	0,145	0,16	0,18	0,23
	∞	0	0	0	0	0
$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \overline{C}_n}{\partial H}$	$H = 0$	2,2	2,35	2,6	3,1	4,5
	0,05	2,1	2,2	2,4	2,7	3,3
	0,1	1,9	2,1	2,1	1,95	1,95
	0,2	1,6	1,5	1,3	1	0,84
	0,5	−0,07	−0,05	−0,02	0	0,06
	1	−0,174	−0,185	−0,20	−0,22	−0,17
	2	−0,084	−0,09	−0,13	−0,17	−0,21
	4	−0,024	−0,033	−0,06	−0,08	−0,10
	∞	0	0	0	0	0

Tabela

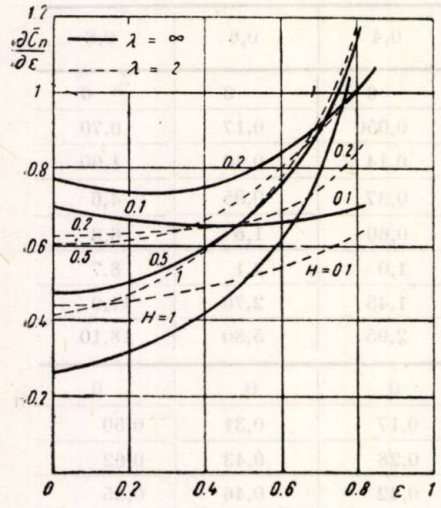
Caracteristicile dinamice de funcționare

	ε	0	0,2	0,4	0,6	0,8
$\overline{C_t}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,04	0	0,00016	0,00062	0,00033	0,0367
	0,1	0	0,00097	0,00385	0,0193	0,146
	0,2	0	0,00375	0,0146	0,0637	0,330
	0,5	0	0,0217	0,0725	0,229	0,774
	1	0	0,0675	0,190	0,468	1,290
	2	0	0,151	0,374	0,807	1,960
	4	0	0,229	0,551	1,130	2,58
	∞	0	0,3335	0,7966	1,6349	3,6652
$\frac{\overline{C_t}}{\varepsilon}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,04	0,00053	0,0008	0,00155	0,0055	0,0459
	0,1	0,0044	0,00485	0,0096	0,0322	0,182
	0,2	0,0154	0,0188	0,0365	0,106	0,412
	0,5	0,104	0,1085	0,181	0,382	0,968
	1	0,31	0,338	0,475	0,780	1,61
	2	0,677	0,755	0,935	1,345	2,45
	4	1,062	1,145	1,38	1,88	3,23
	∞	1,57	1,667	1,995	2,72	4,59
$\overline{C_n}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,04	0	0,00599	0,0141	0,029	0,0675
	0,1	0	0,0149	0,0348	0,0696	0,1385
	0,2	0	0,0295	0,068	0,126	0,211
	0,5	0	0,0684	0,146	0,232	0,357
	1	0	0,110	0,217	0,308	0,383
	2	0	1,1305	0,247	0,337	0,407
	4	0	0,105	0,203	0,282	0,335
	∞	0	0	0	0	0
$\frac{\overline{C_n}}{\varepsilon}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,04	0,029	0,030	0,0353	0,0484	0,0845
	0,1	0,070	0,075	0,087	0,116	0,173
	0,2	0,13	0,148	0,170	0,210	0,264
	0,5	0,333	0,342	0,365	0,387	0,397
	1	0,584	0,550	0,543	0,513	0,479
	2	0,655	0,561	0,618	0,562	0,509
	4	0,564	0,53	0,507	0,47	0,419
	∞	0	0	0	0	0

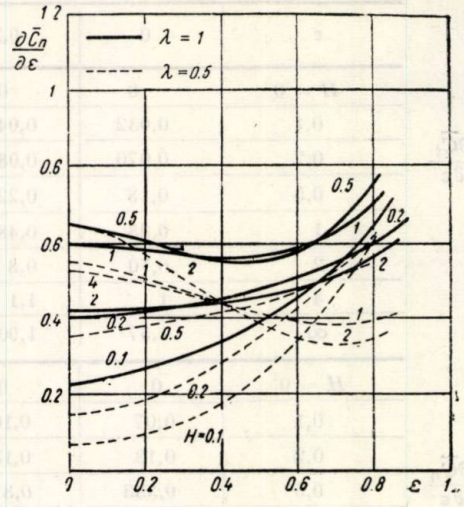
4

pentru lagăre circulare de alungire $\lambda = 0{,}5$

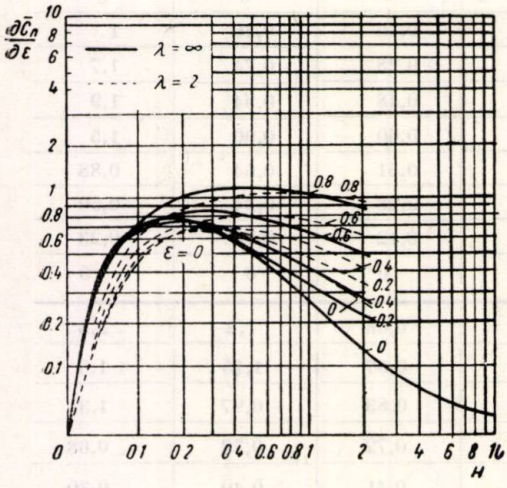
	ε	0	0,2	0,4	0,6	0,8
$\frac{\partial \overline{C}_t}{\partial \varepsilon}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,1	0,032	0,040	0,050	0,17	0,70
	0,2	0,070	0,080	0,14	0,40	1,90
	0,5	0,18	0,22	0,37	0,95	4,6
	1	0,38	0,48	0,60	1,6	6,8
	2	0,70	0,8	1,0	2,1	8,7
	4	1	1,1	1,45	2,70	11,0
	∞	1,57	1,90	2,95	5,80	18,10
$\frac{\partial \overline{C}_n}{\partial \varepsilon}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,1	0,07	0,10	0,17	0,31	0,50
	0,2	0,13	0,18	0,28	0,43	0,62
	0,5	0,333	0,37	0,42	0,46	0,55
	1	0,58	0,51	0,44	0,39	0,40
	2	0,655	0,57	0,44	0,35	0,35
	4	0,60	0,55	0,38	0,26	0,23
	∞	0	0	0	0	0
$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \overline{C}_t}{\partial H}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,05	0,06	0,10	0,16	0,46	1
	0,1	0,11	0,17	0,28	0,74	1,7
	0,2	0,24	0,32	0,48	0,94	1,9
	0,5	0,42	0,48	0,60	0,90	1,5
	1	0,38	0,43	0,51	0,64	0,88
	2	0,20	0,23	0,28	0,34	0,50
	4	0,90	0,105	0,12	0,15	0,23
	∞	0	0	0	0	0
$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \overline{C}_n}{\partial H}$	$H = 0$	0,72	0,76	0,88	1,2	2,3
	0,05	0,72	0,75	0,87	1,15	1,9
	0,1	0,71	0,74	0,83	0,97	1,3
	0,2	0,68	0,69	0,72	0,73	0,68
	0,5	0,42	0,42	0,41	0,40	0,30
	1	0,16	0,16	0,16	0,15	0,12
	2	−0	−0,01	−0,01	−0,02	−0,04
	4	−0,04	−0,05	−0,06	−0,065	−0,08
	∞	0	0	0	0	0


$\frac{\partial \bar{C}_n}{\partial \varepsilon}$
λ = ∞
λ = 2
H=0.1
H=1
ε

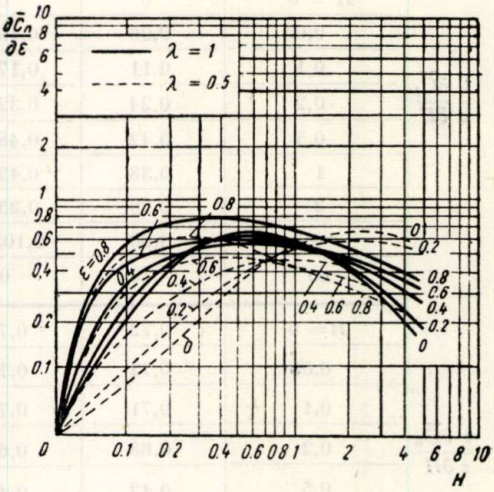
a


$\frac{\partial \bar{C}_n}{\partial \varepsilon}$
λ = 1
λ=0.5
H=0.1
ε

b


$\frac{\partial \bar{C}_n}{\partial \varepsilon}$
λ = ∞
λ = 2
ε = 0
H

c


$\frac{\partial \bar{C}_n}{\partial \varepsilon}$
λ = 1
λ = 0.5
ε=0.8
H

d

Fig. 2

variația coeficientului C_n cu H și în special cu ε este mai neregulată, curbele intersectîndu-se între ele. Aceste aparente anomalii se pot datora eventual unor imprecizii de calcul, însă este probabil că ele se datoresc în primul rînd faptului că, în raport cu H, coeficientul $\overline{C}_n$ crește, prezintă un maximum, iar apoi scade, tinzînd către zero cînd H crește foarte mult. Această particularitate alterează, după cum se va vedea, toate derivatele componentei $\overline{C}_n$, și, după toate probabilitățile, are consecințe importante și asupra stabilității. Considerațiile de mai sus apar ilustrate în figu-

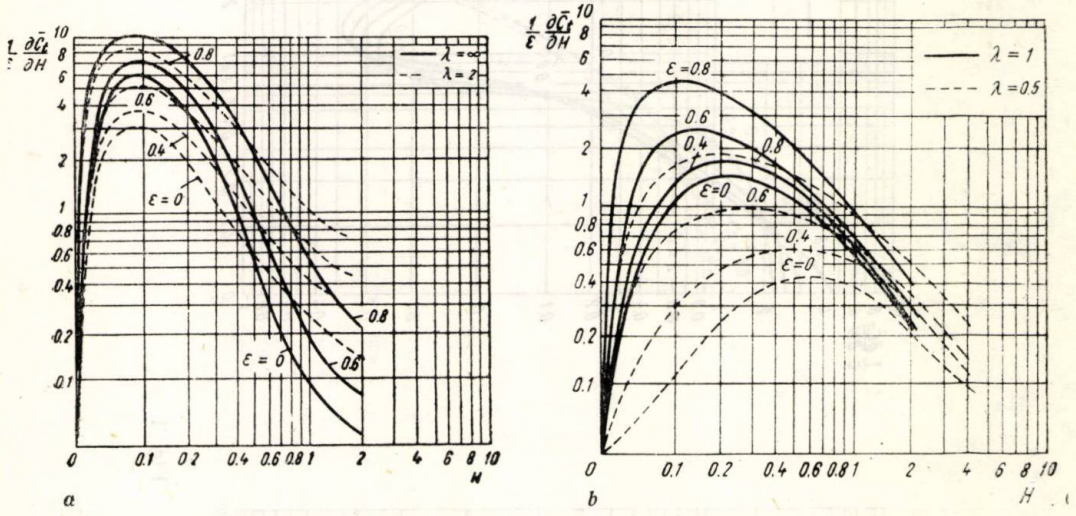


Fig. 3

rile 1 și 2, în care s-au reprezentat derivatele $\partial\overline{C}_t/\partial\varepsilon$ și $\partial\overline{C}_n/\partial\varepsilon$ în funcție de ε, H pentru diferite alungiri λ. Astfel, în timp ce derivata $\partial\overline{C}_t/\partial\varepsilon$ are o variație continuă și de același sens cu toți parametrii menționați (ε, H, λ), derivata $\partial\overline{C}_n/\partial\varepsilon$ are o variație neregulată atît cu ε (fig. 2 a, b) cît și cu H (fig. 2 c, d), cauzată în primul rînd de existența unei creșteri, iar apoi a unei scăderi a coeficientului $\overline{C}_n$ cu H. Este interesant de remarcat că și O. Pinkus și B. Sternlicht în lucrarea [6], vrînd să reprezinte grafic valorile $\partial\overline{C}_n/\partial\varepsilon$ deduse numeric, au obținut anomalii asemănătoare.

De asemenea din figura 1 (îndeosebi fig. 1 a, b) se constată că excentricitatea conduce la o creștere apreciabilă a derivatei $\partial\overline{C}_t/\partial\varepsilon$ (în tot cazul mult mai importantă decît pentru derivata $\partial C_n/\partial\varepsilon$), cu consecințe favorabile asupra stabilității, prin mărirea coeficientului C_2, așa cum s-a arătat mai înainte.

În continuare, în figurile 3 și 4 s-au reprezentat derivatele $\partial\overline{C}_t/\partial H$ și $\partial\overline{C}_n/\partial H$ în funcție de H, ε și pentru diferite alungiri λ. După cum era de așteptat, ambele derivate se anulează pentru cazul extrem $H \to \infty$. În cazul derivatei $\partial\overline{C}_t/\partial H$, această tendință de scădere cu H apare după un maximum și este influențată destul de puțin de excentricitate (curbele sînt aproape asemenea), fiind în schimb influențată de alungire în sensul că, întocmai ca și pentru $\overline{C}_n(H)$, scăderea derivatei $\partial\overline{C}_t/\partial H$ cu H este mai

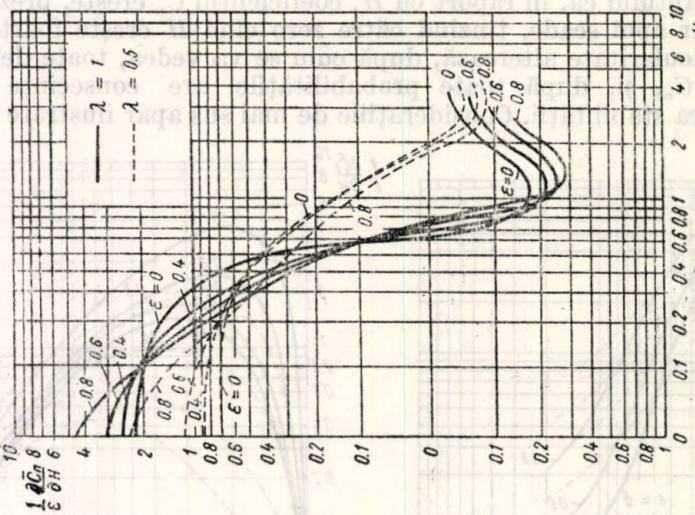
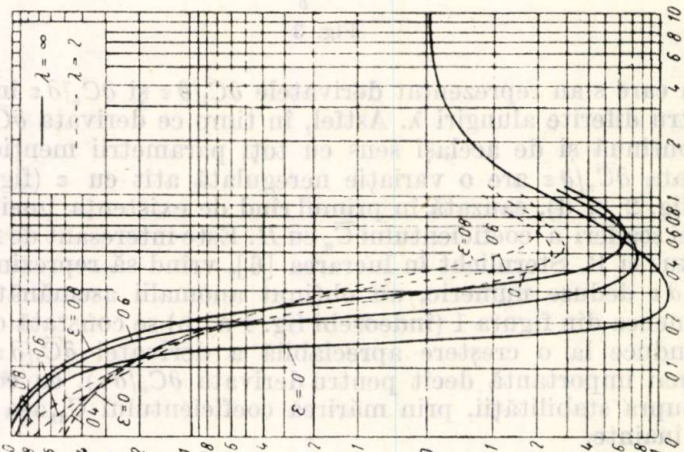


Fig. 4



lentă și apare la numere H mai mari cînd alungirea scade. În cazul derivatei $\partial\overline{C}_n/\partial H$ particularitatea cea mai importantă care poate fi scoasă în evidență din figura 4 a, b este faptul că derivata $\partial C_n/\partial H$ se anulează pentru un anumit număr H_n (corespunzător maximului curbelor $\overline{C}_n(H)$), după care este negativă, tinzînd însă către zero cînd $H \to \infty$.

În sfîrșit în figura 5 s-a reprezentat variația derivatei $\partial C_t/\partial\dot{\varepsilon}$ cu H și ε, dedusă cu ajutorul ultimei relații (8) pentru $\lambda = \infty$, pentru care va-

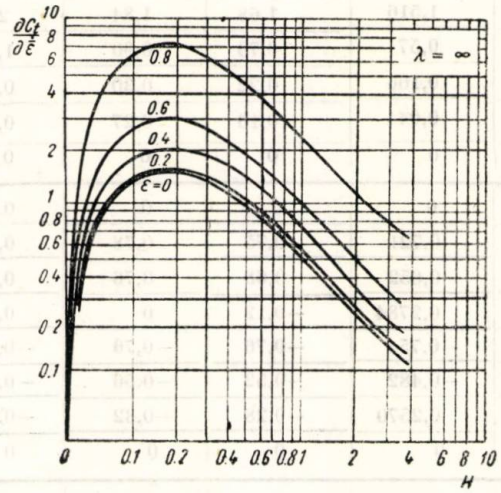


Fig. 5

lorile $\partial C_t/\partial\dot{\varepsilon}$ în ipoteza că se poate neglija compresibilitatea sînt cunoscute [1]

$$\left(\frac{\partial C_t}{\partial\dot{\varepsilon}}\right)_{H=0} = \frac{6\,\pi H}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}. \tag{13}$$

Nu s-a reprezentat această derivată pentru alte alungiri deoarece nici în regim incompresibil nu există o soluție analitică, fiind necesară determinarea soluției prin metode numerice sau aproximative.

Rezultatele de mai sus reprezintă un punct de plecare pentru calculul coeficienților ecuației în ν (1). Se constată că considerațiile calitative menționate mai înainte (9)—(12) sînt verificate, în special faptul că mărirea excentricității are un efect stabilizator prin dependența sensibilă a derivatei $\partial C_t/\partial\varepsilon$ de ε.

Valorile $\overline{C}_t$, $\overline{C}_n$, $\partial\overline{C}_t/\partial\varepsilon$, $\partial\overline{C}_n/\partial\varepsilon$ pot fi utilizate direct în calculul coeficienților C_i (4). Valorile $\partial\overline{C}_t/\partial H$ și $\partial\overline{C}_n/\partial H$ permit la rîndul lor calculul derivatelor $\partial C_t/\partial\dot{\varphi}$ și $\partial C_n/\partial\dot{\varphi}$ cu ajutorul relațiilor corespunzătoare (8). Aceste derivate sînt prezentate pentru diferite valori H, ε, λ în tabela 5.

Tabela

Derivatele $\partial Ct,\ n/\partial\dot{\varphi}$ pentru lagăre

	ε	0	0,2	0,4	0,6	0,8
$-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial C_t}{\partial\dot{\varphi}}$ $\lambda=\infty$	$H=0$	0	0	0	0	0
	0,05	0,48	0,5	0,52	0,56	0,92
	0,1	1,224	1,28	1,36	1,42	2,04
	0,2	1,516	1,68	1,84	2	2,96
	0,5	0,57	0,70	0,90	1,1	2,3
	1	0,166	0,22	0,30	0,40	1,08
	2	0,044	0,10	0,27	0,24	0,74
	∞	0	0	0	0	0
$-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial C_n}{\partial\dot{\varphi}}$ $\lambda=\infty$	$H=0$	0	0	0	0	0
	0,05	0,721	0,75	0,78	0,82	0,86
	0,1	0,652	0,68	0,76	0,94	1,06
	0,2	0,2784	−0,12	0	0,176	0,48
	0,5	−0,754	−0,76	−0,76	−0,77	−0,56
	1	−0,482	−0,52	−0,56	−0,64	−0,76
	2	0,2570	−0,28	−0,32	−0,36	−0,48
	∞	0	0	0	0	0
$-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial C_t}{\partial\dot{\varphi}}$ $\lambda=2$	$H=0$	0	0	0	0	0
	0,05	0,26	0,29	0,31	0,42	0,78
	0,1	0,62	0,66	0,72	1,02	1,64
	0,2	0,80	0,92	1,08	1,52	2,36
	0,5	0,58	0,80	0,93	1,5	2,3
	1	0,52	0,66	0,84	1,34	2,04
	2	0,48	0,60	0,80	1,24	1,9
	∞	0	0	0	0	0
$-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial C_n}{\partial\dot{\varphi}}$ $\lambda=2$	$H=0$	0	0	0	0	0
	0,05	0,39	0,39	0,40	0,45	0,50
	0,1	0,50	0,48	0,46	0,42	0,50
	0,2	0,208	0,216	0,228	0,24	0,248
	0,5	−0,24	−0,26	−0,27	−0,28	−0,12
	1	−0,16	−0,18	−0,20	−0,24	−0,34
	2	−0,15	−0,16	−0,18	−0,22	−0,32
	∞	0	0	0	0	0

5

circulare pe diferite alungiri

	ε	0	0,2	0,4	0,6	0,8
$-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial C_t}{\partial \dot{\varphi}}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,05	0,05	0,055	0,065	0,14	0,34
	0,1	0,22	0,244	0,28	0,48	0,90
	0,2	0,60	0,632	0,696	0,94	1,56
$\lambda = 1$	0,5	1,15	1,24	1,40	1,60	2,1
	1	1,12	1,16	1,22	1,38	1,84
	2	0,92	0,944	1,0	1,2	1,6
	∞	0	0	0	0	0
$-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial C_n}{\partial \dot{\varphi}}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,05	0,21	0,22	0,24	0,27	0,33
	0,1	0,38	0,42	0,42	0,39	0,39
	0,2	0,64	0,60	0,52	0,4	0,336
	0,5	−0,07	−0,05	−0,02	0	0,06
$\lambda = 1$	1	−0,348	−0,37	−0,40	−0,44	−0,34
	2	−0,336	−0,36	−0,52	−0,68	−0,84
	4	−0,172	−0,264	−0,48	−0,64	−0,80
	∞	0	0	0	0	0
$-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial C_t}{\partial \dot{\varphi}}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,05	0,006	0,01	0,016	0,046	0,1
	0,1	0,022	0,034	0,056	0,148	0,34
	0,2	0,096	0,128	0,192	0,376	0,76
	0,5	0,42	0,48	0,60	0,90	1,5
$\lambda = 0{,}5$	1	0,76	0,86	1,02	1,28	1,76
	2	0,80	0,92	1,12	1,36	2,0
	4	0,72	0,84	0,96	1,2	1,84
	∞	0	0	0	0	0
$-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial C_n}{\partial \dot{\varphi}}$	$H = 0$	0	0	0	0	0
	0,05	0,72	0,075	0,087	0,115	0,19
	0,1	0,142	0,148	0,166	0,190	0,26
	0,2	0,272	0,276	0,288	0,292	0,27
	0,5	0,42	0,42	0,41	0,40	0,30
$\lambda = 0{,}5$	1	0,32	0,32	0,32	0,30	0,24
	2	0	−0,04	−0,04	−0,08	−0,16
	4	−0,32	−0,40	−0,48	−0,52	−0,64
	∞	0	0	0	0	0

Aceleași derivate sînt reprezentate grafic în diagramele din figurile 6 și 7. Se constată că, în linii generale, $\partial C_t/\partial\dot{\bar{\varphi}}$ și $\partial C_n/\partial\dot{\bar{\varphi}}$ au o variație asemănătoare derivatelor $\partial C_t/\partial H$ și $\partial C_n/\partial H$. Apar unele deosebiri la

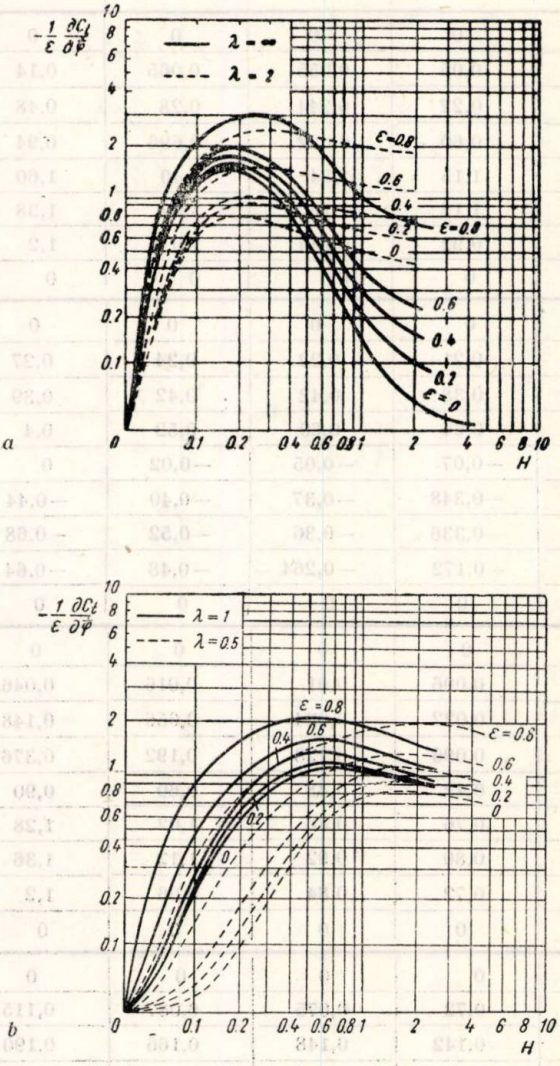
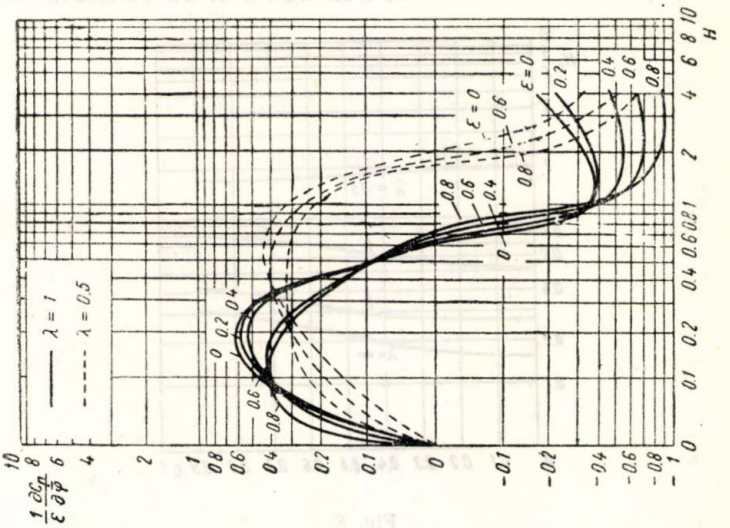


Fig. 6

$H=0$, unde $\partial C_n/\partial\dot{\bar{\varphi}}$ se anulează, în timp ce $\partial C_n/\partial H$ ia valori diferite de zero și de asemenea la numere H mari, pentru care scăderea derivatelor $\partial C_t/\partial\dot{\bar{\varphi}}$ și $\partial C_n/\partial\dot{\bar{\varphi}}$ cu H în valoare absolută este ceva mai lentă decît scăderea derivatelor $\partial\bar{C}_t/\partial H$ și $\partial\bar{C}_n/\partial H$.



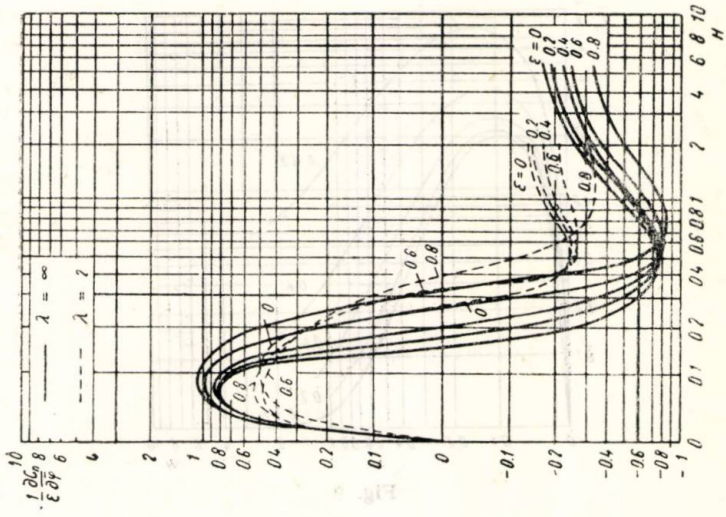


Fig. 7

Numărul $H = H_n$, pentru care $\overline{C}_n(H)$ prezintă un maxim, respectiv pentru care derivatele $\partial\overline{C}_n/\partial H$ și $\partial\overline{C}_n/\partial\dot{\varphi}$ se anulează, este reprezentat în funcție de ε și pentru diferite valori λ în figura 8. Se constată că excentri-

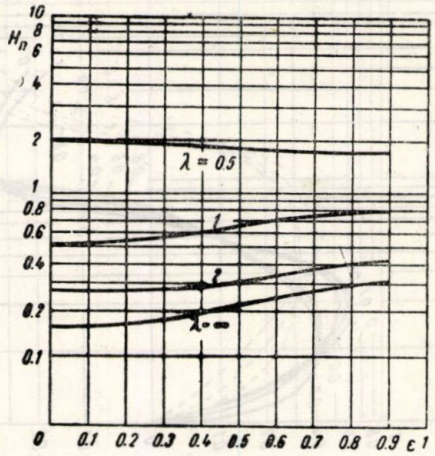


Fig. 8

citatea are o influență redusă asupra numărului H_n. În schimb alungirea are o influență importantă asupra numărului H_n, acesta crescînd apreciabil pe măsură ce alungirea scade.

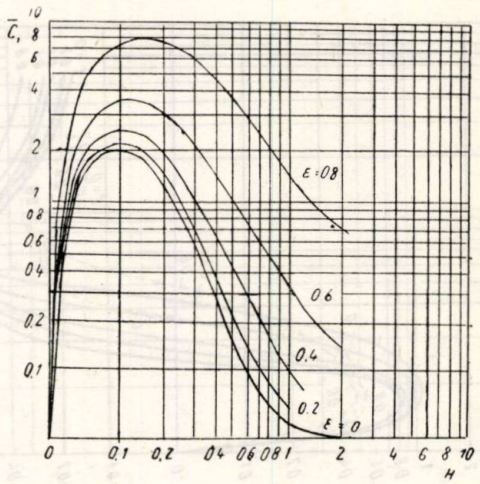


Fig. 9

Cu ajutorul relațiilor (8), al valorilor din tabelele 1—5 și al diagramelor 1—8 s-au calculat coeficienții $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, $\overline{C}_3$, $\overline{C}_4$ (9) (4) pentru diferite valori H, ε, M^* în cazul $\lambda = \infty$. Rezultatele sînt prezentate în diagramele din figurile 9—12. Aplicațiile numerice menționate au fost ex-

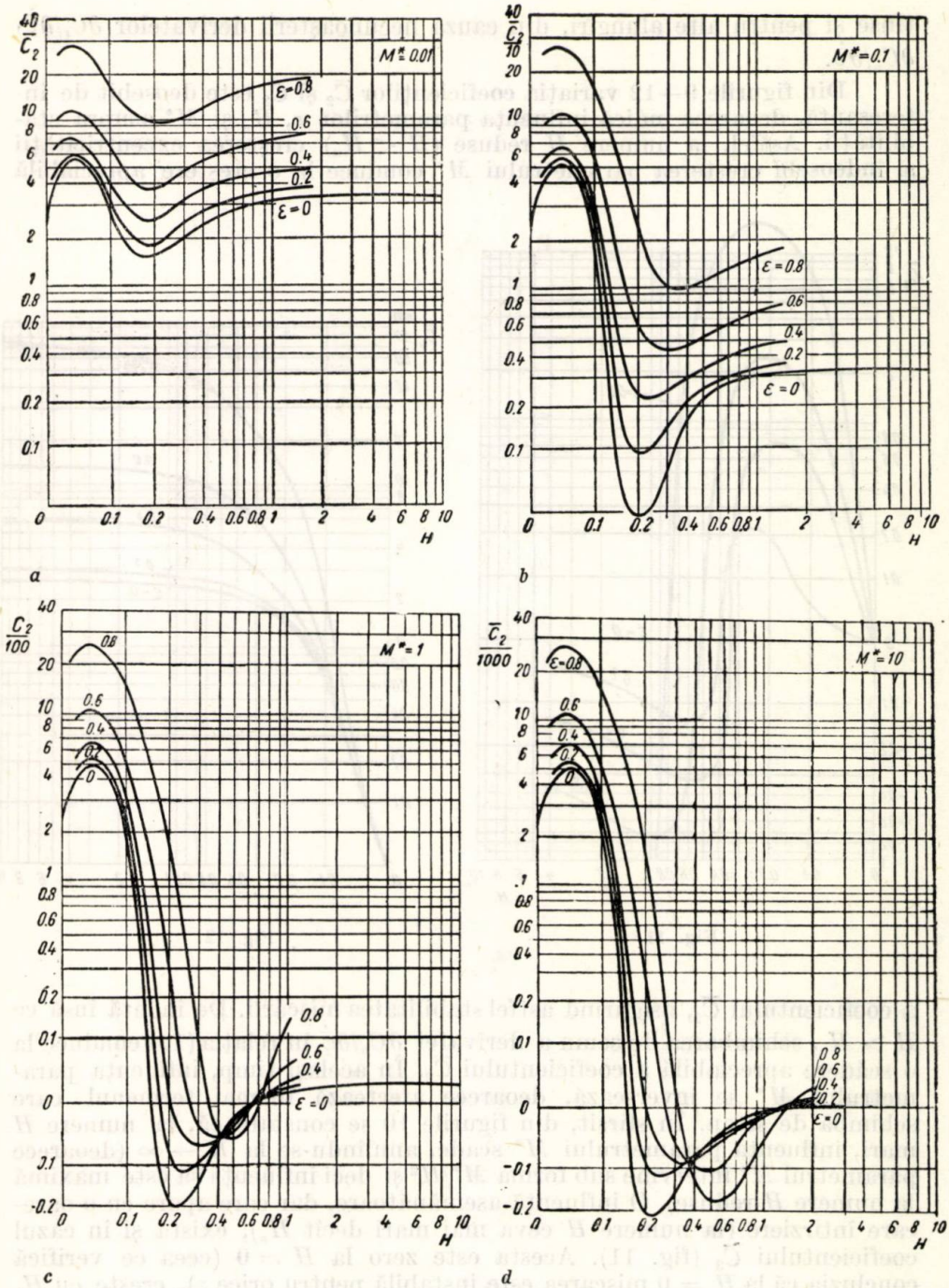

$\frac{C_2}{C_2}$
$M^* = 0.01$
$\varepsilon = 0.8$
0.6
0.4
0.2
$\varepsilon = 0$
H
a
$M^* = 0.1$
b
$\frac{C_2}{100}$
$M^* = 1$
c
$\frac{C_2}{1000}$
$M^* = 10$
d

Fig. 10

tinse şi pentru alte alungiri, din cauza necunoaşterii derivatelor $\partial C_t/\partial\dot{\bar{\varepsilon}}$, $\partial C_n/\partial\dot{\bar{\varepsilon}}$.

Din figurile 9—12 variaţia coeficienţilor $\bar{C}_2$ şi $\bar{C}_3$ este deosebit de interesantă, deoarece indică influenţa parametrilor ε, H_n şi M^* asupra stabilităţii. Astfel, la numere H reduse ($H < H_n$) creşterea excentricităţii şi îndeosebi creşterea parametrului M^* conduce la o creştere apreciabilă

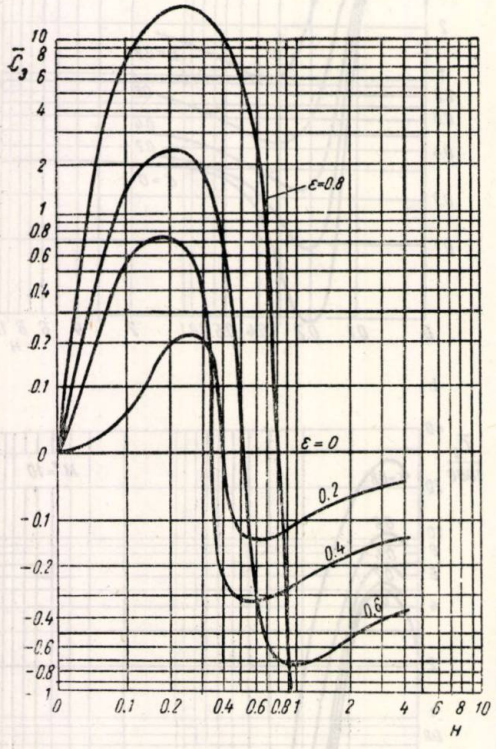


Fig. 11

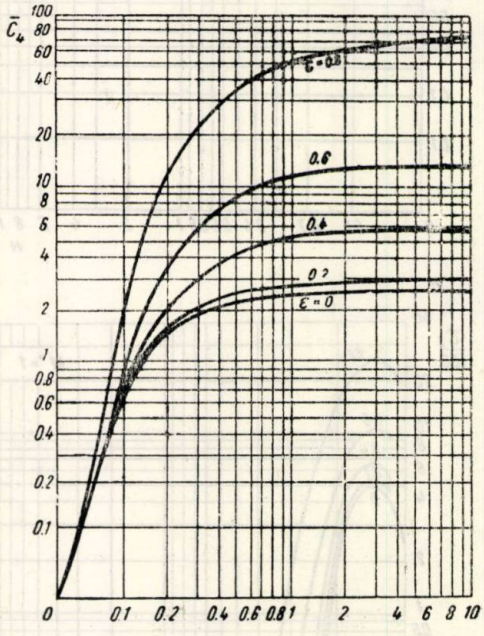


Fig. 12

a coeficientului $\bar{C}_2$, asigurînd astfel stabilitatea mişcării. De îndată însă ce $H > H_n$, schimbarea de semn a derivatei $\partial C_n/\partial\dot{\varphi}$ în relaţia (12) conduce la o scădere apreciabilă a coeficientului $\bar{C}_2$. În acelaşi timp, influenţa parametrului M^* se inversează, deoarece afectează tocmai termenul care schimbă de semn. În sfîrşit, din figurile 10 se constată că, la numere H mari, influenţa parametrului M^* scade, anulîndu-se la $H \to \infty$ (deoarece parametrul M^* intervine sub forma M^*/H^2 şi deci influenţa sa este maximă la numere H reduse). O influenţă asemănătoare, dar care apare cu o oarecare întîrziere (la numere H ceva mai mari decît H_n), există şi în cazul coeficientului $\bar{C}_3$ (fig. 11). Acesta este zero la $H = 0$ (ceea ce verifică concluzia că la $H = 0$ mişcarea este instabilă pentru orice ε), creşte cu H,

iar apoi scade, devenind negativ la numere H mai mari, unde, în consecință, mișcarea va fi instabilă.

Se poate conchide deci că la numere H reduse sau, mai precis, pentru $H < H_n$, pentru valori H și M^* date există o excentricitate $\varepsilon_s < 1$, astfel încît mișcarea este instabilă dacă $\varepsilon < \varepsilon_s$ și stabilă dacă $\varepsilon > \varepsilon_s$. Excentri-

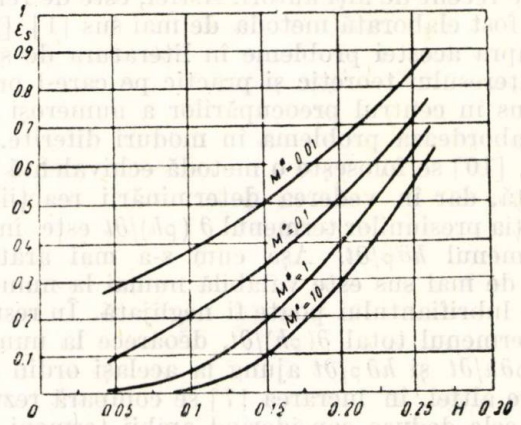


Fig. 13

citatea ε_s scade cînd parametrul M^* crește. În schimb ε_s crește cu H, această creștere devenind accentuată de îndată ce numărul H depășește valoarea H_n. Aceste considerații sînt ilustrate în diagrama din figura 13, în care s-au reprezentat valorile ε_s în funcție de H pentru diferite valori M^*, calculate din condiția (11), cu ajutorul valorilor din diagramele 9—12.

În concluzie, se poate afirma că rezultatele calculelor de mai sus confirmă rezultatele calitative obținute în lucrările anterioare [1], [2], [3] precum și considerațiile calitative prezentate la începutul lucrării. Astfel, în timp ce la $H = 0$, din cauza antisimetriei distribuției presiunilor în regim staționar mișcarea rezultă instabilă, de îndată ce $H > 0$ mișcarea devine stabilă la excentricități mari, rămînînd instabilă la excentricități mici ($\varepsilon \to 0$). Parametrul M^* are o influență importantă asupra stabilității mișcării. După depășirea numărului H_n mișcarea devine instabilă prin scăderea coeficientului $\overline{C}_2$. La numere H mai mari acest efect instabilizator este atenuat; în schimb coeficientul $\overline{C}_3$ devine negativ, astfel încît mișcarea rămîne în continuare instabilă. La numere H foarte mari regăsim stabilitatea neutră menționată anterior, deoarece $\overline{C}_3 \to 0$, dar prin valori negative.

Aceste concluzii sînt deduse pentru lagăre de alungire infinită, dar sînt valabile calitativ și pentru lagăre de alungire finită, după cum rezultă din examinarea figurilor 1—7. Există însă o deosebire importantă, și anume numărul H_n crește cu $1/\lambda$. Astfel, în timp ce pentru $\lambda = \infty$ instabilitatea apare după depășirea valorii $H = H_n \sim 0{,}2$ (fig. 8), pentru $\lambda = 2$ $H_n \sim 0{,}35$, pentru $\lambda = 1$ $H_n \sim 0{,}65$, iar pentru $\lambda = 0{,}5$ $H_n \sim 1{,}9$. Ar rezulta

deci că, din acest punct de vedere, scăderea alungirii ar permite lărgirea intervalului de valori H pentru care este posibilă stabilizarea mişcării prin alegerea unor parametri de funcţionare ε, M^* în mod convenabil.

În încheiere dorim să examinăm rezultatele de mai sus, şi în special aproximaţiile folosite în deducerea relaţiilor (8), în comparaţie cu unele rezultate obţinute recent de alţi autori. Astfel, este de remarcat că, în momentul în care a fost elaborată metoda de mai sus [1], [2], existau foarte puţine studii asupra acestei probleme în literatura de specialitate. Între timp, datorită interesului teoretic şi practic pe care-l prezintă, problema stabilităţii a ajuns în centrul preocupărilor a numeroşi autori [7]—[14]. Lucrările citate abordează problema în moduri diferite. De exemplu, în lucrările [6], [9], [10] se foloseşte o metodă echivalentă în unele privinţe cu metoda de faţă, dar în vederea determinării reacţiilor în filmul de lubrifiant în ecuaţia presiunilor termenul $\partial(\rho h)/\partial t$ este înlocuit cu $\rho\partial h/\partial t$, neglijîndu-se termenul $h\partial\rho/\partial t$. Aşa cum s-a mai arătat anterior [1], [2], aproximaţia de mai sus este valabilă numai la numere H mici, cînd compresibilitatea lubrifiantului poate fi neglijată. În rest, este preferabil să se neglijeze termenul total $\partial(\rho h)/\partial t$, deoarece la numere H mai mari cei doi termeni $\rho\partial h/\partial t$ şi $h\partial\rho/\partial t$ ajung la acelaşi ordin de mărime şi de semne diferite. De altfel, în lucrarea [7] se compară rezultatele obţinute în acest mod cu cele deduse considerînd ambii termeni menţionaţi şi se pun în evidenţă erorile neglijării termenului $h\,\partial\rho/\partial t$ la numere H mai mari.

O indicaţie în privinţa aproximaţiilor introduse de relaţiile (8) se poate obţine din lucrările [7], [11], care se referă însă numai la cazul excentricităţilor reduse. De altfel analiza condiţiilor de stabilitate date în lucrarea [11] coincide cu rezultatele metodei din lucrarea de faţă, rezultînd din ambele metode că mişcarea este instabilă la $\varepsilon \to 0$. Din comparaţia cu rezultatele menţionate şi în special cu cele din lucrarea [7] rezultă că ultima relaţie (8) ar fi valabilă numai la numere H reduse, iar în rest derivata $\partial C_n/\partial\dot{\bar{\varepsilon}}$ poate fi diferită de zero, anulîndu-se însă la numere H mari (considerarea derivatei $\partial C_n/\partial\dot{\bar{\varepsilon}}$ în calculul coeficientului $\overline{C}_2$ poate atenua într-o oarecare măsură efectul instabilizator al schimbării de semn a derivatei $\partial C_n/\partial\dot{\bar{\varphi}}$ la numere H mai mari decît valoarea H_n). În lucrarea [7] se arată însă că, pentru excentricităţi mici, cel puţin există relaţia

$$\frac{1}{2}\frac{\partial C_n}{\partial\dot{\bar{\varphi}}} \cong \frac{\partial C_t}{\partial\dot{\bar{\varepsilon}}}, \tag{14}$$

ambele derivate anulîndu-se pentru un număr H_n' care are, în funcţie de alungire, valori sensibil egale cu cele deduse în figura 8 pentru H_n. În aceste condiţii, pentru $H > H_n'$ mişcarea devine instabilă, respectiv aceeaşi concluzie ca şi în lucrarea de faţă.

În sfîrşit, în lucrările 12—14 stabilitatea mişcării este analizată plecînd de la ecuaţiile de mişcare ale celor două corpuri şi de la ecuaţia diferenţială a presiunilor pentru care soluţia se deduce fie printr-o liniarizare a ecuaţiei în „ph" [12], fie prin calcul numeric [13], fie aplicîndu-se metode variaţionale [14]. O comparaţie între rezultatele date în lucrările [12] [14] şi cele prezentate în figura 13 este arătată în diagrama din figura

14. Se constată că, pentru $H < H_n$, rezultatele concordă între ele. În schimb la numere H mai mari apar diferențe în sensul că din figura 8 mișcarea rezultă instabilă, în timp ce rezultatele lucrărilor [12], [14] admit încă cazuri de mișcări stabile pentru anumite valori ale parametrului M^*. Mai precis, din aceste lucrări rezultă că pentru orice H și ε mișcarea poate fi stabilă dacă parametrul M^* are valori suficient de mari, în timp ce prin metoda de față aceeași concluzie este valabilă pentru numere H mici, existînd însă numere H de la care mișcarea este instabilă pentru orice M^*.

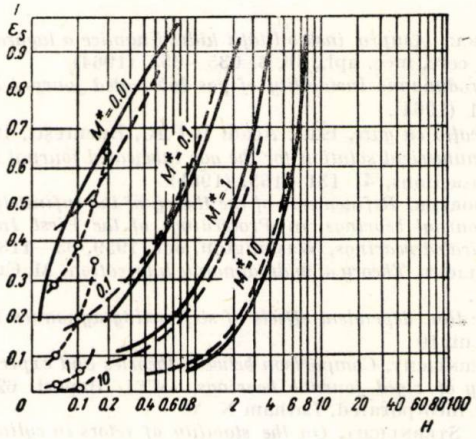


Fig. 14. — ——— adaptat după Cheng—Trumpler [14]
— — — adaptat după Ausman [13]
— —○— — puncte calculate

Dată fiind dificultatea problemei, este greu să se precizeze care rezultate sînt mai corecte, fiecare dintre metode introducînd aproximații diferite. Astfel, relativ la lucrările [12], [14] este de remarcat că stabilitatea depinde într-o măsură determinantă nu de reacțiunile din filmul de lubrifiant (rezultanta presiunilor), ci de derivatele acestora în raport cu ε, $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\varphi}$. Or, este cunoscut că metodele de liniarizare sau de soluționare aproximativă a ecuației presiunilor (care este neliniară) pot introduce erori relativ reduse asupra rezultantei presiunilor și chiar asupra distribuției presiunilor, în schimb erorile asupra derivatelor în raport cu ε, $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\varphi}$ pot fi mari (o eroare numai de cîteva procente asupra rezultantei presiunilor poate conduce pe anumite porțiuni la erori de ordinul a 100% asupra derivatelor). În aceste condiții, nu se poate preciza *a priori* eroarea introdusă de o metodă de calcul sau de liniarizare, mai ales cînd studiul stabilității este efectuat concomitent cu integrarea ecuației diferențiale a presiunilor.

Ținînd seama de cele de mai sus, este de preferat o metodă de studiu al stabilității care să pornească de la aceleași principii ca metoda din lucrarea de față, respectiv să permită studiul stabilității separat de modul în care s-au determinat reacțiunile din filmul de lubrifiant și deriva-

tele acestora în funcţie de ε, $\dot{\varepsilon}$, $\dot{\varphi}$. În plus, faptul că variaţia coeficientului C_n în funcţie de H schimbă de semn pentru un anumit număr H_n sugerează un efect şi asupra stabilităţii, şi anume un efect instabilizator, aşa cum a rezultat din studiul stabilităţii prin metoda de faţă.

Primită la redacţie la 15 decembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Asupra instabilităţii hidrodinamice a lagărelor circulare lubrificate cu gaze.* St. cerc. mec. apl., **16**, *3*, 635–655, (1964)
2. * * * *On hydrodynamic instability of gas lubricated journal bearings*, ASMF Paper, **64** Lub. 24 (1964).
3. * * * *Lubrificaţia cu gaze*, Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1963.
4. A. A. Raimondi, *A numerical solution for the gas lubricated journal bearings of finite length*, ASLE Transactions, *4*, 131–155, (1961).
5. H. Elrod, A. Burgdorfer, *Refinements of the theory of the infinitely – long self acting gas lubricated journal bearings*, in *Proceedings of the First International Symposium on Gas lubricated bearings*, Washington, oct. 1959, 93–118.
6. O. Pinkus, D. Sternlicht, *Theory of hydrodynamic lubrication*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1961.
7. C. H. T. Pan, *On the time dependent effects of self acting dynamics journal bearings*, ASME Paper, 62 Lub 10
8. C. H. T. Pan, B. Sternlicht, *Comparison between theories and experiments for the threshold of instability of rigid journal bearings*, MTI Report 62 TR 13, Mechanical Technology Incorporated, Latham N. Y.
9. G. M. Rentzepis, C. Sternlicht, *On the stability of retors in cylindrical journal bearings*, ASME Transactions, series D, basic Eng., **24**, *4*, 521–532, (1962).
10. B. Sternlicht, L. W. Winn, *On the load capacity and stability of rotors in self-acting gas lubricated plain cylindrical journal bearings*, ASME Transactions, series D, J. basic Eng. **85**, *4*, 503–512, (1963).
11. R. A. McCann, *Stability of unloaded gas lubricated bearings*, ASME Transactions, series D, J. basic Eng., **85**, *4*, 513–518, (1963).
12. J. S. Ausman, *Linearized pH stability theory for translatory half-speed whirl of long, self-acting gas lubricated journal bearings*, ASME Transactions, series D, J. basis Eng., **85**, *4*, 611–619, (1963).
13. V. Castelli, H. G. Elrod, *Two approaches to the solution of the stability problems for the 360 degree gas – lubricated journal bearings*. Franklin Institute Report I–A 2049, 20 martie, 1963.
14. H. S. Cherg, P. R. Trumpler, *Stability of the high-speed journal bearing under steady load*, partea a II-a, *The compressible film*, ASME Transactions, series B. J. Eng. Industry, **85**, *3*, 274–280, (1963).

STUDII

REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR CURGERII NESTAȚIONARE A GAZELOR PRIN CONDUCTE MAGISTRALE[1])

de H. PASCAL și F. MUNTEANU

Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R., București
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

532

În lucrare se prezintă rezolvarea numerică a ecuațiilor care descriu curgerea nestaționară a gazelor prin conducte magistrale, aplicîndu-se în acest scop metoda dreptelor. Sînt obținute soluțiile problemelor întîlnite în transportul gazelor pentru cazul general, cînd condițiile la limită sînt funcții oarecare de timp. În ceea ce privește condiția inițială, se consideră cazul cînd în momentul inițial curgerea se efectuează în regim staționar.

Din punct de vedere matematic, problema este redusă la rezolvarea numerică a unui sistem de ecuații diferențiale, care poate fi efectuată cu ajutorul mașinilor analogice de calcul.

Într-o lucrare anterioară [1] am examinat curgerea nestaționară a gazelor prin conducte magistrale pentru diferite cazuri întîlnite frecvent în practică. Ca punct de plecare pentru descrierea matematică a curgerii, am utilizat anumite procedee care permit liniarizarea ecuațiilor, determinînd în felul acesta soluții aproximative ale problemelor studiate, cu ajutorul cărora putem prevedea comportarea parametrilor curgerii în punctul de alimentare în funcție de valorile acestora în punctul de consum sau invers.

Pentru liniarizarea ecuațiilor a fost necesar să admitem unele ipoteze referitoare la termenul datorit frecării care, din punct de vedere cantitativ, pot introduce erori și de aceea soluțiile analitice obținute sînt utile în scopul obținerii unor informații, într-o primă aproximație, cu privire la variația în timp și de-a lungul conductei a parametrilor curgerii.

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. techn. — Mécanique appliquée", **10**, *3* (1965) (în limba franceză).

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 19, Nr. 3 p. 517–541 BUCUREȘTI 1965

MŰSZAKI EGYETEM

Ţinînd seama că aplicarea metodelor numerice nu mai prezintă dificultăţi, dat fiind că în prezent pot fi utilizate maşini electronice de calcul, vom prezenta în cele ce urmează rezolvarea numerică a unor probleme importante din punct de vedere practic, referitoare la curgerea nestaţionară a gazelor prin conducte magistrale, fără a mai utiliza ipotezele care au permis liniarizarea ecuaţiilor, utilizate în lucrarea [1].

§ 1. ASUPRA CONDIŢIILOR LA LIMITĂ ŞI INIŢIALE ÎNTÎLNITE ÎN CURGEREA GAZELOR PRIN CONDUCTE MAGISTRALE

După cum s-a arătat în lucrarea [1], curgerea nestaţionară a gazelor prin conducte magistrale este descrisă de un sistem de ecuaţii neliniare de tip parabolic

$$-\frac{\partial p^2}{\partial x} = a\,Q^2 \qquad -\frac{\partial p}{\partial t} = b\,\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1}$$

unde

$$a = \frac{16\,c^2\,\lambda}{\pi^2 D^5 g^2}; \qquad b = \frac{4\,c^2}{\pi D^2 g} \tag{2}$$

Semnificaţiile fizice ale notaţiilor utilizate în sistemul (1) sînt: p- presiune, Q debitul gravimetric, c viteza sunetului, λ coeficientul de frecare hidrodinamic şi D diametrul conductei.

Dificultăţile de rezolvare a sistemului (1) depind de natura problemelor studiate. Din acest motiv, este necesar să expunem consideraţiile preliminare referitoare la problemele care apar în transportul gazelor prin conducte în general.

Determinarea funcţiilor $p(x, t)$ şi $Q(x, t)$, soluţii ale sistemului (1), necesită cunoaşterea condiţiilor la limită şi iniţiale. În transportul gazelor se pot întîlni condiţii la limită şi iniţiale foarte variate, a căror cunoaştere este condiţionată de numeroşi factori impuşi de necesităţile practice de exploatare. Din acest motiv, vom rezolva sistemul (1) în cazul unor condiţii la limită şi iniţiale întîlnite mai frecvent.

În acest scop, este necesar ca, în prealabil, să facem o enumerare a acestora, analizînd condiţiile de natură fizică pe care trebuie să le satisfacă soluţia sistemului de ecuaţii (1). Mai departe, vom considera felul condiţiilor care se pun în transportul gazelor pentru a putea stabili problemele la limită şi iniţiale necesare rezolvării ecuaţiilor curgerii nestaţionare a gazelor prin conducte.

În cazul curgerii staţionare, trebuie să cunoaştem evoluţia presiunii la cele două extremităţi ale conductei, respectiv în punctele de alimentare şi consum, care reprezintă condiţiile la limită. Deoarece curgerea gazelor

prin conducte magistrale este practic nestaționară, întrucît în punctele de consum apar variații mari în timp ale debitului, datorită variației aleatoare a consumului, atunci, în afară de condițiile la limită, este necesar să cunoaștem și condițiile inițiale, respectiv condițiile pe care trebuie să le satisfacă soluția sistemului de ecuații (1) cînd curgerea începe din stare de repaus sau cînd în momentul inițial curgerea este staționară.

În transportul gazelor întîlnim, în general, două regimuri de curgere, și anume : curgerea în regim tranzitoriu și în regim variabil periodic. Rezultă deci că pentru fiecare regim se pun anumite condiții la limită și inițiale. Astfel, curgerea tranzitorie apare atunci cînd se trece de la un regim staționar la altul sau cînd curgerea începe din starea de repaus. De exemplu cazul unei conducte la care la extremitățile acesteia debitele masice sînt egale, curgerea fiind în acest caz staționară, iar la un anumit moment se produce o variație a debitului în punctul de consum sau de alimentare. Această schimbare produce un efect de umplere sau de golire parțială a conductei, după cum debitul corespunzător consumului este mai mare sau mai mic decît cel de alimentare. În acest caz, condițiile la limită și inițiale pentru sistemul (1) vor fi :

$$\begin{aligned} t > 0 \quad & Q(0, t) = \varphi_2(t) \\ & Q(l, t) = \psi_2(t) \\ t = 0, \quad & Q(x, 0) = k = \text{const.} \end{aligned}$$

Pentru $Q(x, 0) = \text{const.}$ corespunde la momentul inițial următoarea distribuție a presiunii : $p(x, 0) = \sqrt{p^2(0,0) - ak^2x}$.

O altă problemă de curgere tranzitorie este aceea corespunzătoare alimentării conductei la o presiune variabilă sau constantă, unde în punctul de consum putem avea, din punctul de vedere al cunoașterii, două situații : fie o presiune variabilă în timp, fie un debit variabil în timp.

În ceea ce privește condiția inițială, putem considera curgerea staționară la momentul inițial. Pe de altă parte, putem avea de asemenea și cazul cînd la momentul inițial presiunea este constantă de-a lungul conductei, curgerea gazelor începînd din starea de repaus, impunîndu-se pentru condițiile la limită anumite valori ale presiunii sau debitului la extremitățile conductei. Problemele analizate mai sus conduc la următoarele condiții la limită și inițiale pentru sistemul (1) :

$$\begin{aligned} t > 0 \quad & \begin{cases} p(0, t) = \varphi_1(t) \\ p(l, t) = \psi_1(t) \end{cases} \\ t = 0 \quad & p(x, 0) = \Phi(x) \text{ sau } p(x, 0) = p_k = \text{const.} \qquad (3) \\ t > 0 \quad & \begin{cases} Q(0, t) = \varphi_3(t) \\ p(l, t) = \psi_3(t) \end{cases} \\ t = 0, \quad & p(x, 0) = \Phi(x) \text{ sau } p(x, 0) = p_k = \text{const.} \qquad (4) \end{aligned}$$

Un caz particular al condițiilor menționate mai sus este acela cînd, din motive tehnice, este necesar să efectuăm o golire totală a conductei,

la o valoare dată a debitului, prin întreruperea alimentării acesteia, respectiv să avem debitul nul la o extremitate a conductei. De asemenea pentru rezolvarea problemelor de etanşare şi rezistenţă conducta trebuie umplută cu gaze pînă la o anumită valoare impusă a presiunii, unde prin întreruperea consumului vom avea debitul nul la extremitatea acesteia corespunzătoare punctului de consum. Condiţiile la limită şi iniţiale pentru aceste probleme sînt :

a)
$$t > 0 \begin{cases} Q(0, t) = 0 \\ Q(l, t) = \psi(t) \end{cases}$$
$$t = 0, \quad Q(x, 0) = 0$$

sau

b)
$$t > 0 \begin{cases} Q(0, t) = \varphi(t) \\ Q(l, t) = 0 \end{cases}$$
$$t = 0, \quad Q(x, 0) = 0.$$

Dacă golirea conductei se efectuează printr-o duză, unde în aval presiunea este mult inferioară celei din amonte, este posibil că viteza gazelor, în faza iniţială a golirii, să fie egală cu viteza sunetului şi, în consecinţă, debitul va fi $Q(0, t) = C\,p(0, t)$, p fiind valoarea presiunii din amontele duzei, iar C o constantă care depinde de caracteristicile duzei şi gazului.

Prin urmare, condiţiile la limită în punctul de consum devin

$$t > 0 \begin{cases} Q(0,t) = C\,p(0,t) \\ Q(l, t) = 0 \end{cases}$$
$$t = 0, \quad Q(x,0) = 0.$$

După cum am menţionat mai sus, în afara regimului tranzitoriu, în practică întîlnim destul de frecvent, mai ales în timpul iernii, situaţia cînd în punctul de consum debitul prezintă o variaţie periodică în timp. În acest caz, stabilirea evoluţiei debitului şi a presiunii în punctul de alimentare poate fi efectuată rezolvînd sistemul (1) fără a ţine seama de condiţia iniţială, întrucît influenţa acesteia este importantă numai în primele momente ale curgerii. Exprimînd variaţia debitului în punctul de consum printr-o serie Fourier, condiţiile la limită vor fi :

$$p(l, t) = \varphi(t)$$
$$Q(0, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos n \frac{2\pi}{T} t + B_n \sin n \frac{2\pi}{T} t \right), \tag{5}$$

T fiind perioada de variaţie a debitului.

Analiza condiţiilor de natură fizică întîlnite la curgerea gazelor prin conducte magistrale, redată mai sus, conduce la concluzia că la extremităţile conductei putem cunoaşte funcţia $p(x, t)$, respectiv presiunea sau

derivata acestei funcții, care reprezintă debitul masic. În alte cazuri, aceste două feluri de condiții la limită apar în aceeași problemă, în sensul că la o extremitate a conductei este dată presiunea, iar la cealaltă debitul. Din acest motiv, curgerea nestaționară a gazelor prin conducte magistrale conduce la trei feluri de condiții la limită. În ceea ce privește condiția inițială, aceasta este aceeași pentru toate problemele la limită și necesită cunoașterea distribuției presiunii la momentul inițial, adică

$$p(x, 0) = f(x) \text{ petnru } t = 0$$

$f(x)$ putînd fi o constantă cînd presiunea este constantă de-a lungul conductei, respectiv cînd curgerea începe din starea de repaus.

Prima problemă la limită constă în stabilirea soluției sistemului (1), care satisface condiția inițială atunci cînd la fiecare dintre extremitățile conductei cunoaștem evoluția presiunii în timp. A doua problemă la limită constă în obținerea soluției sistemului (1), care satisface condiția inițială cînd se cunosc valorile debitului la extremitățile conductei. În sfîrșit, pentru ultima problemă soluția sistemului trebuie stabilită atunci cînd la o extremitate a conductei cunoaștem presiunea, iar la cealaltă debitul. Bineînțeles, condiția inițială trebuie să fie de asemenea satisfăcută.

Problemele referitoare la existența și unicitatea soluției sistemului (1) au fost studiate în lucrările [2], [3], [4], așa încît în cele ce urmează nu le vom mai discuta.

În afară de cazurile examinate mai sus, în practică întîlnim conducte neuniforme din punctul de vedere al dimensiunilor geometrice. Astfel, vom menționa situația cînd o conductă magistrală este alcătuită din mai multe tronsoane, avînd lungimi și diametre diferite. Pe de altă parte, abraziunea particulelor solide și coroziunea produc în timp o variație a rugozității conductei și, în consecință, coeficientul de frecare hidrodinamic poate avea valori diferite pe anumite porțiuni ale conductei, mai ales pe porțiunea din apropierea punctului de consum. Rezultă deci că o conductă magistrală poate fi neomogenă și din acest punct de vedere.

Atît în cazul discontinuității secțiunii, cît și al variației discontinue a coeficientului de frecare hidrodinamic, trebuie să avem asigurată continuitatea presiunii și a debitului la trecerea de la un tronson la altul. Dacă notăm cu $p_1(x, t)$, $p_2(x, t)$ și $Q_1(x, t)$, $Q_2(x, t)$ funcțiile necunoscute corespunzătoare celor două tronsoane de lungimi l_1 și l_2, atunci vom avea următoarele condiții de continuitate:

$$p_1(l_1, t) = p_2(l_1, t)$$

și

$$\left.\frac{\partial p_1^2}{\partial x}\right|_{x=l_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left.\frac{\partial p_2^2}{\partial x}\right|_{x=l_1}$$

Ultima dintre aceste două condiții se mai poate scrie

$$Q_1(l_1, t) = Q_2(l_1, t)$$

pentru variația discontinuă a coeficientului de frecare.

Dacă ne referim la situaţia cînd, în afară de variaţia discontinuă a coeficientului de frecare, avem şi discontinuitate de secţiune, rezultă

$$p_1 (l_1, t) = p_2 (l_1, t)$$

şi

$$\left.\frac{\partial p_1^2}{\partial x}\right|_{x=l_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{d_2}{d_1}\left.\frac{\partial p_2^2}{\partial x}\right|_{x=l_1}.$$

§ 2. INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAŢIILOR CURGERII GAZELOR PRIN CONDUCTE MAGISTRALE. METODA DREPTELOR

Înainte de a trece la rezolvarea problemelor expuse în § 2, referitoare la curgerea tranzitorie a gazelor prin conducte magistrale, vom transforma sistemul de ecuaţii (1) cu ajutorul formulelor :

$$\xi = \frac{x}{l} \text{ şi } \tau = \frac{t}{T}. \tag{6}$$

în sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p^2}{\partial \xi} &= a_1 Q^2, \\ -\frac{\partial p}{\partial \tau} &= b_1 \frac{\partial Q}{\partial \xi}, \end{aligned} \tag{7}$$

unde $a_1 = al$ şi $b_1 = \frac{bT}{l}$. Sistemul de ecuaţii (7) se va integra cu condiţiile la limită şi iniţiale deduse din condiţiile (3), (4) şi (5), cînd se consideră formulele (6), şi anume :

$$\tau > 0, \begin{cases} p(0, \tau) = \varphi_1 (T\tau) \\ p(1, \tau) = \psi_1 (T\tau) \end{cases} \tag{8}$$

$$\tau = 0, \quad p(\xi, 0) = \Phi (l\xi),$$

$$\tau > 0, \begin{cases} Q(0, \tau) = \varphi_2 (T\tau) \\ Q(1, \tau) = \psi_2 (T\tau) \end{cases} \tag{9}$$

$$\tau = 0, \quad Q(\xi, 0) = k \text{ sau } p(\xi, 0) = \sqrt{p^2(0,0) - a_1 k^2 \xi},$$

$$\tau > 0, \begin{cases} Q(0, \tau) = \varphi_3 (T\tau) \\ p(1, \tau) = \psi_3 (T\tau) \end{cases} \tag{10}$$

$$\tau = 0, \quad p(\xi, 0) = \Phi (l\xi).$$

Pentru rezolvarea problemelor propuse vom folosi o metodă de integrare numerică, numită metoda dreptelor, care constă în a înlocui în sistemul (7) derivatele funcţiilor necunoscute p şi Q în raport cu ξ, prin

valori ale acestor funcții pe anumite drepte de ecuații $\xi = \xi_i$, $0 \leqslant \xi_i \leqslant 1$. În felul acesta, vom reduce integrarea sistemului de ecuații cu derivate parțiale (7) la rezolvarea unui sistem de ecuații diferențiale. În acest scop vom folosi formulele de derivare numerică redate în anexa 1, de la sfîrșitul lucrării.

În cele ce urmează expunem pe larg aplicarea metodei amintite la sistemul (7). Pentru aceasta împărțim intervalul [0, 1] de variație al lui ξ în n părți egale prin punctele $h, 2h, \ldots, (n-1)h$, $h = \frac{1}{n}$ și notăm cu $p_i(\tau)$ și $Q_i(\tau)$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$ valorile funcțiilor $p(\xi, \tau)$ și $Q(\xi, \tau)$ pe dreptele de ecuații $\xi = ih$, adică

$$\begin{aligned} p_i(\tau) &= p(ih, \tau) \\ Q_i(\tau) &= Q(ih, \tau). \end{aligned} \quad (i = 0,1, \ldots, n) \tag{11}$$

Dacă în sistemul (7) punem $\xi = ih$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$ atunci obținem următoarele relații:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial p^2}{\partial \xi}\right|_{\xi=ih} &= -a_1 Q^2(ih, \xi) \\ \left.\frac{\partial p}{\partial \tau}\right|_{\xi=ih} &= -b_1 \left.\frac{\partial Q}{\partial \xi}\right|_{\xi=ih} \end{aligned} \tag{12}$$

unde prin înlocuirea derivatelor $\left.\frac{\partial p^2}{\partial \xi}\right|_{\xi=ih}$ și $\left.\frac{\partial Q}{\partial \xi}\right|_{\xi=ih}$ prin valorile acestor funcții pe dreptele de ecuații $\xi = ih$ vom obține sistemul de ecuații diferențiale amintite mai sus.

Utilizînd formulele de derivare numerică $(I_1 - I_5)$, sistemul (12) devine:

$$\frac{1}{12h}[-25p_0^2 + 48p_1^2 - 36p_2^2 + 16p_3^2 - 3p_4^2] + R_0 = -a_1 Q_0^2$$

$$\frac{1}{12h}[-3p_0^2 - 10p_1^2 + 18p_2^2 - 6p_3^2 + p_4^2] + R_1 = -a_1 Q_1^2 \tag{13}$$

$$\frac{1}{12h}(p_{i-2}^2 - 8p_{i-1}^2 + 8p_{i+1}^2 - p_{i+2}^2) + R_i = -a_1 Q_i^2 \quad (i=2, 3, \ldots, n-2)$$

$$\frac{1}{12h}(p_{n-4}^2 - 6p_{n-3}^2 + 18p_{n-2}^2 - 10p_{n-1}^2 - 3p_n^2] + R_{n-1} = -a_1 Q_{n-1}^2$$

$$\frac{1}{12h}(-3p_{n-4}^2 + 16p_{n-3}^2 - 36p_{n-2}^2 + 48p_{n-1}^2 - 25p_n^2) + R_n = -a_1 Q_n^2$$

$$p_0' = -\frac{b_1}{12h}(-25Q_0 + 48Q_1 - 36Q_2 + 16Q_3 - 3Q_4) = b_1 R_0^*$$

$$p_1' = -\frac{b_1}{12h}(-3Q_0 - 10Q_1 + 18Q_2 - 6Q_3 + Q_4) - b_1 R_1^*$$

$$p_i' = -\frac{b_1}{12h}(Q_{i-2} - 8Q_{i-1} + 8Q_{i+1} - Q_{i+2}) - b_1 R_i^*$$

$$(i = 2, 3, \ldots, n-2) \tag{14}$$

$$p_{n-1}' = -\frac{b_1}{12h}(Q_{n-4} - 6Q_{n-3} + 18Q_{n-2} - 10Q_{n-1} - 3Q_n) - b_1 R_{n-1}^*$$

$$p_n' = -\frac{b_1}{12h}(-3Q_{n-4} + 16Q_{n-3} - 36Q_{n-2} + 48Q_{n-1} - 25Q_n) - b_1 R_n^*$$

În conformitate cu formulele (I_6), resturile din (13) şi (14) sînt delimitate în felul următor:

$$\left.\begin{aligned} |R_0| \text{ şi } |R_n| &\leqq \frac{h^4}{5}P_5 \\ |R_1| \text{ şi } |R_{n-1}| &\leqq \frac{h^4}{20}P_5 \end{aligned}\right\}, \quad \text{unde } P_5 \geqq \max_{\substack{0\leqslant\xi\leqslant 1\\ 0\leqslant\tau\leqslant 1}} \left|\frac{\partial^5 p^2}{\partial \xi^5}\right| \tag{15}$$

$$|R_i| \leqq \frac{h^4}{30} P_5 \quad (i = 2, \ldots, n-2)$$

şi

$$\left.\begin{aligned} |R_0^*| \text{ şi } |R_n^*| &\leqq \frac{h^4}{5}Q_5 \\ |R_1^*| \text{ şi } |R_{n-1}^*| &\leqq \frac{h^4}{20}Q_5 \end{aligned}\right\}, \quad \text{unde } Q_5 \geqq \max_{\substack{0\leqslant\xi\leqslant 1\\ 0\leqslant\tau\leqslant 1}} \left|\frac{\partial^5 Q}{\partial \xi^5}\right| \tag{16}$$

$$|R_i^*| \leqq \frac{h^4}{30} Q_5 \quad (i = 2, 3, \ldots, n-2)$$

Sistemele (13) şi (14) conţin $2n + 2$ ecuaţii în raport cu funcţiile $p_0, p_1, \ldots, p_n, Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$, iar rezolvarea acestora depinde de tipul problemelor la limită, menţionate în paragraful precedent.

a) Astfel, în cazul cînd cunoaştem evoluţia presiunii la cele două extremităţi ale conductei şi considerăm la momentul iniţial curgerea staţionară, condiţiile la limită şi iniţiale (8) se vor transcrie cu notaţiile (11), în felul următor:

$$\tau > 0 \begin{cases} p_0(\tau) = \varphi_1(T\tau) \\ p_n(\tau) = \psi_1(T\tau) \end{cases} \tag{17}$$

$$p_i(0) = \Phi(lih) = \Phi_i \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{18}$$

Rezultă deci că, pentru condiţiile (17) şi (18), sistemul de ecuaţii (13) şi (14) va conţine numai $2n$ funcţii necunoscute şi de aceea pentru rezolvarea

acestuia vom considera în sistemul (14) numai ecuațiile care conțin funcțiile necunoscute $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$.

Pe de altă parte, dacă înlocuim funcțiile $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ din ecuațiile (13) în (14) și neglijăm resturile $R_0, R_1, \ldots, R_n, R_1^*, R_2^*, \ldots, R_{n-1}^*$, se obține un sistem de $(n-1)$ ecuații diferențiale, cu funcțiile necunoscute $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, care, integrat cu condițiile inițiale (18), permite determinarea unor valori aproximative ale presiunii în punctele de diviziune considerate de-a lungul conductei. Sistemul de ecuații diferențiale obținut în felul arătat mai sus este neliniar, rezolvarea acestuia însă cu mașini analogice de calcul cu elemente neliniare poate fi efectuată.

Din delimitarea resturilor formulelor (13) și (14) se observă că precizia determinării distribuției presiunii de-a lungul conductei crește cu cît numărul nodurilor de diviziune ale intervalelor [0,1] este mai mare. Pe de altă parte, un număr mare de noduri conduce la un sistem cu multe ecuații, ceea ce constituie un inconvenient pentru integrarea numerică.

b) În cazul cînd se cunoaște evoluția în timp a debitului gravimetric la cele două extremități ale conductei și presupunem la momentul inițial curgerea staționară, vom avea, cu notațiile (11), următoarele condiții la limită și inițiale:

$$\tau > 0 \begin{cases} Q_0(\tau) = \varphi_2(T\tau) \\ Q_n(\tau) = \psi_2(T\tau) \end{cases} \tag{19}$$

$$p_i(0) = \sqrt{p^2(0,0) - ak^2 ih}, \quad i = 0,1, \ldots, n \tag{20}$$

Ținînd seama de faptul că Q_0 și Q_n sînt cunoscute din condițiile la limită (19), atunci pentru rezolvarea sistemului (13) și (14) vom considera în sistemul (13) numai ecuațiile care conțin funcțiile necunoscute $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$. Înlocuind aceste funcții în sistemul (14) și neglijînd resturile $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}, R_0^*, \ldots, R_n^*$, obținem un sistem de $(n+1)$ ecuații diferențiale, cu funcțiile necunoscute $p_0, p_1, \ldots, p_n$, care se integrează cu condițiile inițiale (20). Odată găsite funcțiile $p_0, p_1, \ldots, p_n$, ecuațiile (10) determină funcțiile $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$, respectiv valorile aproximative ale debitului gravimetric în anumite puncte de-a lungul conductei.

c) Rezultatele de mai sus pot fi aplicate și în cazul cînd la o extremitate a conductei cunoaștem evoluția în timp a debitului, iar la cealaltă presiunea. La fel ca și în cazurile tratate mai sus, vom presupune de asemenea la momentul inițial curgerea staționară.

Pentru această problemă, condițiile la limită și inițiale (10) vor fi, ținînd seama de notațiile (11), următoarele:

$$\tau > 0, \begin{cases} Q_0(\tau) = \varphi_3(T\tau) \\ p_n(\tau) = \psi_3(T\tau) \end{cases} \tag{21}$$

$$p_i(0) = \Phi(lih) = \Phi_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{22}$$

În acest caz, valorile aproximative ale debitului și presiunii în punctele de diviziune considerate se vor obține luînd din sistemul (13) ecuațiile care conțin funcțiile necunoscute $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, iar din sistemul (14) pe

cele care conţin funcţiile $p'_0, p'_1, \ldots, p'_{n-1}$. Procedînd ca mai sus, după înlocuirea funcţiilor $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ din ecuaţiile (13) în sistemul (14) şi neglijarea resturilor $R_1, R_2, \ldots, R_n, R_0^*, R_1^*, \ldots, R_{n-1}^*$ rezultă un sistem de ecuaţii diferenţiale cu funcţiile necunoscute $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ care se integrează cu condiţiile iniţiale (18).

§ 3. APLICAREA METODEI PERTURBAŢIILOR LA INTEGRAREA ECUAŢIILOR CURGERII GAZELOR PRIN CONDUCTE MAGISTRALE

Deoarece metoda de integrare numerică utilizată mai sus conduce la integrarea unui sistem de ecuaţii diferenţiale neliniare, a cărui rezolvare prezintă dificultăţi, ne propunem ca în cele ce urmează să liniarizăm în prealabil ecuaţiile curgerii nestaţionare a gazelor prin conducte magistrale. În acest scop, vom aplica metoda perturbaţiilor, care reduce rezolvarea sistemului (7) la rezolvarea unor ecuaţii parabolice liniare [5].

Dacă în sistemul (7) facem schimbarea de funcţii

$$\begin{aligned} p(\xi, \tau) &= p_0(\xi) + f(\xi\tau), \\ Q(\xi, \tau) &= Q_0 + g(\xi, \tau), \end{aligned} \tag{23}$$

atunci rezultă

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p_0^2}{\partial \xi} + 2\frac{\partial (p_0 f)}{\partial \xi} + \frac{\partial f^2}{\partial \xi} = -a_1 (Q_0^2 + 2\, gQ_0 + g^2), \\ &\frac{\partial p_0}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial \tau} = -b_1 \left(\frac{\partial Q_0}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \xi} \right), \end{aligned} \tag{24}$$

unde $p_0(\xi)$ şi Q_0 reprezintă distribuţia presiunii, respectiv debitul gravimetric în regim staţionar. Deoarece în regim staţionar debitul gravimetric este constant rezultă că funcţia $p_0(\xi)$ satisface următoarele ecuaţii:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p_0^2}{\partial \xi} = -a_1 Q_0^2 \\ &\frac{\partial p_0}{\partial \tau} = -b_1 \frac{\partial Q_0}{\partial \xi} = 0, \end{aligned} \tag{25}$$

de unde obţinem pentru funcţia $p_0(\xi)$

$$p_0^2(\xi) = -a_1 Q_0^2 \xi + p_{00}^2 = \alpha - \xi\beta,$$

p_{00} fiind valoarea presiunii în punctul de consum, $\xi = 0$.

Ţinînd seama de (25) şi notînd $p_0 f = \pi$, sistemul (24) devine

$$\begin{aligned} &2\frac{\partial \pi}{\partial \xi} + 2\frac{\pi}{p_0}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\pi}{p_0}\right) = -a_1 (2gQ_0 + g^2) \\ &\frac{1}{p_0}\frac{\partial \pi}{\partial \tau} = -b_1 \frac{\partial g}{\partial \xi}. \end{aligned} \tag{26}$$

În conformitate cu metoda perturbațiilor, soluția sistemului (26) se caută sub forma

$$\pi = \mu\pi_1 + \mu^2\pi_2 + \dots \qquad (27)$$
$$g = \mu\, g_1 + \mu^2 g_2 + \dots$$

unde μ este un parametru auxiliar.

Introducînd relațiile (27) în sistemul (26), se obține, după identificarea coeficienților parametrului μ, următorul sistem de ecuații:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial \xi} = -\, a_1 Q_0 g_1$$
$$\frac{\partial \pi_1}{\partial \tau} = -\, b_1 p_0 \frac{\partial g_1}{\partial \xi}, \qquad (28)$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial \xi} + a_1 Q_0 g_2 = V_2(\xi, \tau) \qquad (29)$$
$$\frac{\partial \pi_2}{\partial \tau} = -\, b_1 p_0 \frac{\partial g_2}{\partial \xi},$$

unde

$$V_2(\xi, \tau) = -\frac{\beta}{2p_0^4}\pi_1^2 - \frac{1}{p_0^2}\pi_1\frac{\partial \pi_1}{\partial \xi} - \frac{1}{2a_1 Q_0^2}\left(\frac{\partial \pi_1}{\partial \xi}\right)^2 \qquad (30)$$

Cu ajutorul notației

$$\frac{\pi_i}{p_0} = f_i \quad (i = 1, 2, \dots), \qquad (31)$$

termenul liber al ecuației neomogene (29) mai poate fi scris astfel:

$$V_2(\xi, \tau) = -\, f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi} - \frac{a_1}{2} g_1^2 \cdot \qquad (32)$$

În general, cînd egalăm coeficientul lui μ^i, rezultă următorul sistem

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial \xi} + a_1 Q_0 g_i = V_i(\xi, \tau)$$
$$\frac{\partial \pi_i}{\partial \tau} = -\, b_1 p_0 \frac{\partial g_i}{\partial \xi}, \quad (i = 2, 3, \dots) \qquad (33)$$

unde

$$V_i(\xi, \tau) = -\sum_{k=1}^{i-1} f_k \frac{\partial f_{i-k}}{\partial \xi} - \frac{a_i}{2}\sum_{k=1}^{i-1} g_k g_{i-k} \cdot \qquad (34)$$

În felul acesta, stabilirea soluției sistemului de ecuații neliniare (7) a fost redusă la rezolvarea sistemelor de ecuații (28) și (33) liniare, cu coeficienții variabili funcții de ξ.

Pentru rezolvarea sistemelor (28) şi (33) este necesar să stabilim condiţiile la limită şi iniţiale pe care trebuie să le satisfacă funcţiile $\pi_1, \pi_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots$

Astfel, în cazul exploatării conductei, cînd se cunoaşte variaţia presiunii în timp la fiecare dintre extremităţile acesteia şi se consideră la momentul iniţial curgerea staţionară, atunci funcţia $f(\xi, \tau)$ satisface următoarele condiţii la limită şi iniţiale:

$$\tau > 0, \begin{cases} f(1,\tau) = p(1,\tau) - p_0(1) \\ f(0,\tau) = p(0,\tau) - p_0(0) \end{cases} \tag{35}$$

$$\tau = 0, \quad f(\xi, 0) = 0$$

Deoarece avem $\pi = p_0 f$, iar pe de altă parte $\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \pi_n$, rezultă că condiţiile (35) pentru funcţia $\pi(\xi, \tau)$ devin:

$$\tau > 0; \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \pi_n(1,\tau) = p_0(1)\,[p(1,\tau) - p_0(1)] = \chi_1(\tau) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \pi_n(0,\tau) = p_0(0)\,[p(0,\tau) - p_0(0)] = \chi_0(\tau) \end{cases} \tag{36}$$

$$\tau = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \pi(\xi, 0) = 0.$$

Condiţiile (36) sînt satisfăcute dacă luăm

$$\tau > 0, \begin{cases} \pi_1(1,\tau) = \dfrac{1}{\mu}\chi_1(\tau) \\ \pi_1(0,\tau) = \dfrac{1}{\mu}\chi_0(\tau) \end{cases} \tag{37}$$

$$\tau = 0, \quad \pi_1(\xi, 0) = 0$$

şi

$$\tau > 0, \begin{cases} \pi_i(1,\tau) = 0 \\ \pi_i(0,\tau) = 0 \end{cases} \quad (i = 2, 3, \ldots) \tag{38}$$

$$\tau = 0, \quad \pi_i(\xi, 0) = 0.$$

Pentru situaţia cînd la extremităţile conductei cunoaştem evoluţia în timp a debitului gravimetric şi presupunem, ca şi în cazul anterior, la momentul iniţial curgerea staţionară, vom avea următoarele condiţii la limită şi iniţiale:

$$\tau > 0, \begin{cases} g(1,\tau) = Q(1,\tau) - Q_0 \\ g(0,\tau) = Q(0,\tau) - Q_0, \end{cases} \tag{39}$$

$$\tau = 0, \quad f(\xi, 0) = 0 \text{ sau } g(\xi, 0) = 0.$$

Ținînd seama de faptul că pentru funcția $g(\xi, \tau)$ s-a considerat dezvoltarea (27), atunci condițiile (39) sînt îndeplinite dacă funcțiile $g_1, g_2, \ldots$ satisfac următoarele relații :

$$\tau > 0, \begin{cases} g_1(1, \tau) = \dfrac{1}{\mu}\,[Q(1, \tau) - Q_0] \\ g_1(0, \tau) = \dfrac{1}{\mu}\,[Q(0, \tau) - Q_0] \end{cases} \qquad (40)$$

$$\tau = 0, \quad f_1(\xi, 0) = 0 \text{ sau } g_1(\xi, 0) = 0$$

și

$$\tau > 0 \begin{cases} g_i(1, \tau) = 0 \\ g_i(0, \tau) = 0 \end{cases} \quad (i = 2, 3, \ldots) \qquad (41)$$

$$\tau = 0 \quad f_i(\xi, 0) = 0 \text{ sau } g_i(\xi, 0) = 0$$

Vom scrie acum condițiile la limită și inițiale cînd în punctul de consum se cunoaște evoluția debitului în timp, iar în punctul de alimentare variația presiunii. Considerînd, ca și în celelalte două cazuri, la momentul inițial curgerea staționară, vom avea

$$\tau > 0, \begin{cases} g(0, \tau) = Q(0, \tau) - Q_0 \\ f(1, \tau) = p(1, \tau) - p_0(1) \end{cases} \qquad (42)$$

$$\tau = 0, \quad f(\xi, 0) = 0 \text{ sau } g(\xi, 0) = 0.$$

Procedînd ca mai sus, obținem pentru funcțiile π_i și g_i $(i = 1, 2, \ldots)$, condițiile :

$$\tau > 0, \begin{cases} g_1(0, \tau) = \dfrac{1}{\mu}\,[Q(0, \tau) - Q_0] \\ \pi_1(1, \tau) = \dfrac{1}{\mu}\,p_0(1)\,[p(1, \tau) - p_0(1)] \end{cases} \qquad (43)$$

$$\tau = 0, \quad \pi_1(\xi, 0) = 0 \text{ sau } g_1(\xi, 0) = 0$$

și

$$\tau > 0, \begin{cases} g_i(0, \tau) = 0 \\ \pi_i(1, \tau) = 0 \end{cases} \quad (i = 2, 3, \ldots) \qquad (44)$$

$$\tau = 0, \quad \pi_i(\xi, 0) = 0 \text{ sau } g_i(\xi, 0) = 0.$$

§ 4. REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE OBȚINUTE ÎN URMA APLICĂRII METODEI PERTURBAȚIILOR

După cum s-a arătat în § 3, rezolvarea sistemului de ecuații ale curgerii gazelor prin conducte magistrale s-a redus, cu ajutorul metodei perturbațiilor, la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare (28) și (33). Deoarece rezolvarea analitică a acestor sisteme este greu de efectuat, dat fiind

că au coeficienţii variabili, vom aplica pentru integrarea acestora, ca şi în paragraful 2, metoda dreptelor, care permite să obţinem soluţii aproximative ale problemelor curgerii gazelor pentru condiţiile la limită şi iniţiale arătate mai sus.

În acest sens vom utiliza pentru clasificarea problemelor terminologia introdusă de A. Houpeurt [6] referitoare la hidrodinamica exploatării zăcămintelor de hidrocarburi fluide, care prezintă avantajul de a fi sugestivă şi pentru problemele curgerii tranzitorii a gazelor prin conducte magistrale.

1°. PROBLEMA I, p–p

a) Eliminînd în prealabil din sistemul (28) funcţia g_1, vom integra, cu metoda dreptelor ecuaţia

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial \tau} = \frac{b_1 p_0}{a_1 Q_0} \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \xi^2}, \tag{45}$$

cu condiţiile la limită şi iniţiale (37).

Notînd, pentru simplificare,

$$\pi_1 (\xi, \tau) = y (\xi, \tau) \tag{46}$$

ecuaţia (45) şi condiţiile (37) se scriu:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{b_1 p_0}{a_1 Q_0} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}, \tag{47}$$

$$\tau > 0, \begin{cases} y (1, \tau) = \dfrac{1}{\mu} \chi_1 (\tau), \\ y (0, \tau) = \dfrac{1}{\mu} \chi_0 (\tau), \end{cases} \qquad \tau = 0, \quad y (\xi, 0) = 0. \tag{48}$$

Împărţim, ca şi în § 4, intervalul $[0, 1]$ de variaţie a lui ξ în n părţi egale prin punctele $h, 2h, \ldots, (n-1)\,h$, unde $h = \dfrac{1}{n}$, şi notăm

$$y_i (\tau) = y (ih, \tau). \qquad (i = 0,1, \ldots, n) \tag{49}$$

Dacă în ecuaţia (45) înlocuim pe rînd pe ξ cu ih, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ şi folosim notaţia (49), obţinem

$$y_i' = \frac{b_1 p_0 (ih)}{a_1 Q_0} \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\bigg|_{\xi = ih} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{50}$$

iar condițiile (48) devin

$$\tau > 0, \begin{cases} y_n(\tau) = \dfrac{1}{\mu}\chi_1(\tau) \\ y_0(\tau) = \dfrac{1}{\mu}\chi_0(\tau) \end{cases} \tag{51}$$

$$\tau = 0, \quad y_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{52}$$

PROCEDEUL I. APROXIMAȚII DE ORDINUL LUI h^2

Dacă în ecuația (50) înlocuim derivata $\left.\dfrac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right|_{\xi = ih}$ prin diferența divizată de ordinul al doilea pe nodurile considerate

$$\left.\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right|_{\xi = ih} = \frac{y[(i+1)h, \tau) - 2y(ih, \tau) + y[(i-1)h, \tau)}{h^2} + R_i \tag{53}$$

unde

$$|R_i| \leqq \frac{h^2}{12} M_4, \; M_4 \geqq \max_{\substack{0 \leqslant \xi \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \tau \leqslant 1}} \left|\frac{\partial^4 y}{\partial \xi^4}\right| \tag{54}$$

obținem sistemul de ecuații

$$y_i' = \delta_i (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + R_i \delta_i^*, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{55}$$

unde am notat $\delta_i = \dfrac{b_1 p_0 (ih)}{h^2 a_1 Q_0}$ și $\delta_i^* = \delta_i h^2$.

Neglijînd resturile $R_i \delta_i^*$ din ecuațiile (55) rezultă pentru determinarea unor valori aproximative ale funcțiilor $y_i(\tau)$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ sistemul de ecuații diferențiale :

$$\tilde{y}_i = \delta_i (\tilde{y}_{i+1} - 2\tilde{y}_i + \tilde{y}_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{56}$$

care se integrează cu condițiile inițiale (52).

În sistemul (56) funcțiile $y_0(\tau)$ și $y_n(\tau)$ sînt cunoscute din condițiile la limită (51).

În cazul $n = 3$, sistemul (56) și condițiile (51) și (52) devin

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= \delta_1 (-2\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) + \delta_1 y_0 \\ \tilde{y}_2' &= \delta_2 (\tilde{y}_1 - 2\tilde{y}_2) + \delta_2 y_3 \end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned} y_0(\tau) &= \frac{1}{\mu}\chi_0(\tau) \\ y_3(\tau) &= \frac{1}{\mu}\chi_1(\tau) \end{aligned} \tag{58}$$

$$y_1(0) = 0, \; y_2(0) = 0 \tag{59}$$

Dacă conducta este exploatată cu presiune constantă la capete, atunci $\chi_0(\tau)$ și $\chi_1(\tau)$ sînt constante și soluția sistemului (57) cu condițiile (59) devine

$$\tilde{y}_1(\tau) = \lambda_1^{(1)} e^{r_1\tau} + \lambda_1^{(2)} e^{r_2\tau} + \frac{1}{3\mu}[2k_0 + k_1]$$

$$\tilde{y}_2(\tau) = \lambda_2^{(1)} e^{r_1\tau} + \lambda_2^{(2)} e^{r_2\tau} + \frac{1}{3\mu}[k_0 + 2k_1] \tag{60}$$

unde

$$r_1 = -(\delta_1 + \delta_2) + \sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 + \delta_1\delta_2} = -(\delta_1 + \delta_2) + \sqrt{(\delta_1+\delta_2)^2 - 3\delta_1\delta_2},$$
$$r_2 = -(\delta_1 + \delta_2) - \sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 + \delta_1\delta_2} \tag{61}$$

$$\lambda_2^{(1)} = \frac{\lambda_1^{(1)}}{\delta_1}[\delta_1 - \delta_2 + \sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 + \delta_1\delta_2}]$$

$$\lambda_2^{(2)} = \frac{\lambda_1^{(2)}}{\delta_1}[\delta_1 - \delta_2 - \sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 + \delta_1\delta_2}] \tag{62}$$

$$\lambda_1^{(1)} = -\frac{1}{6\mu}\left[2k_0 + k_1 + \frac{\delta_1(k_1 - k_0) + \delta_2(2k_0 + k_1)}{\sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 + \delta_1\delta_2}}\right]$$

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{1}{6\mu}\left[2k_0 + k_1 - \frac{\delta_1(k_1 - k_0) + \delta_2(2k_0 + k_1)}{\sqrt{(\delta_1 - \delta_2)^2 + \delta_1\delta_2}}\right] \tag{63}$$

$$k_0 = \chi_0(\tau) = \text{const.}$$
$$k_1 = \chi_1(\tau) = \text{const.}$$

Se observă din (61) că numerele r_1 și r_2 sînt negative și, în consecință, valorile aproximative ale presiunii în punctele $\xi = h$ și $\xi = 2h$, date de formulele (60), descresc cu creșterea timpului. După un anumit interval de timp, se observă că aceste valori în punctele considerate tind către cele corespunzătoare regimului staționar.

b) Pentru determinarea funcției π_2 din dezvoltarea (27), vom rezolva ecuația ce se obține din sistemul (29) după eliminarea funcției $g_2(\xi, \tau)$, adică

$$\frac{\partial\pi_2}{\partial\tau} = \frac{b_1 p_0}{a_1 Q_0}\frac{\partial^2\pi_2}{\partial\xi^2} + \frac{b_1 p_0}{a_1 Q_0}\frac{\partial V_2}{\partial\xi} \tag{64}$$

unde conform formulelor (30) și (46), avem

$$\frac{\partial V_2}{\partial\xi} = -\frac{1}{a_1 Q_0}\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2} - \frac{1}{\alpha - \beta\xi}\left[y\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta^2}{(\alpha - \beta\xi)^2}y^2 + \frac{2\beta}{\alpha - \beta\xi}y\frac{\partial y}{\partial\xi}\right] \tag{65}$$

Pentru a aplica la integrarea ecuației (64) metoda dreptelor, trebuie să determinăm funcția $\frac{\partial V_2}{\partial \xi}$ pe dreptele de ecuații $\xi = ih$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

După cum reiese din (65), $\frac{\partial V_2}{\partial \xi}$ se exprimă prin y, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ și $\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}$ și, întrucît prin procedeul descris mai sus am determinat funcția $y(\xi, \tau)$ numai pentru $\xi = ih$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$, vom înlocui în expresia lui $\frac{\partial V_2}{\partial \xi}$ derivatele $\left.\frac{\partial y}{\partial \xi}\right|_{\xi=ih}$, $\left.\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right|_{\xi=ih}$ prin valori ale funcției $y(\xi, \tau)$ pentru $\xi = ih$, folosind în acest scop formula

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \xi}\right|_{\xi=ih} = \frac{y_{i+1}(\tau) - y_{i-1}(\tau)}{2h} + R_i \tag{66}$$

unde

$$|R_i| \leqq \frac{h^2}{6} M_3, \quad M_3 \geqq \max_{0 \leqslant \xi, \tau \leqslant 1} \left|\frac{\partial^3 y}{\partial \xi^3}\right|$$

și (53), ambele avînd restul de ordinul lui h^2.

Dacă introducem notațiile

$$\frac{b_1 p_0 (ih)}{a_1 Q_0} \left.\frac{\partial V_2}{\partial \xi}\right|_{\xi=ih} = W_i(\tau), \ \pi_2(ih, \tau) = z_i(\tau) \tag{67}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n)$$

și aplicăm ca mai sus metoda dreptelor, atunci rezolvarea aproximativă a ecuației (64) cu condițiile la limită și inițiale (38) se reduce la integrarea sistemului de ecuații diferențiale

$$z_i' = \delta_i (z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}) + W_i \tag{68}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1$$
$$z_0 = 0$$
$$z_n = 0$$

cu condițiile inițiale

$$z_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{69}$$

Acest sistem este de aceeași formă ca și (56), deosebindu-se numai prin termenul liber, de aceea rezolvarea la mașina electronică a celor două sisteme necesită o singură programare.

Pentru determinarea funcțiilor $\pi_3, \pi_4, \ldots$ se procedează în mod cu totul analog ca la determinarea funcției π_2, iar sistemele de ecuații diferențiale care determină aceste funcții au aceiași coeficienți ca și sistemele (56) și (66), deosebindu-se de acestea numai prin termenii liberi.

Dacă ne referim la cazul $n = 3$ şi $y_0(\tau)$ şi $y_3(\tau)$ constante, sistemul (68) şi condiţiile (69) devin

$$\begin{aligned} z_1' &= \delta_1(z_2 - 2z_1) + W_1 \\ z_2' &= \delta_2(-2z_2 + z_1) + W_2 \end{aligned} \tag{70}$$

$$z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 0 \tag{71}$$

unde funcţiile $W_1(\tau)$ şi $W_2(\tau)$, ţinînd seama de cele arătate mai sus, sînt exponenţiale în raport cu τ.

Soluţia sistemului (70) cu condiţiile (71) este de forma

$$\begin{aligned} z_1(\tau) &= \lambda_1^{(1)} e^{r_1\tau} + \lambda_1^{(2)} e^{r_2\tau} + Z_1 \\ z_2(\tau) &= \lambda_2^{(1)} e^{r_1\tau} + \lambda_2^{(2)} e^{r_2\tau} + Z_2, \end{aligned} \tag{72}$$

unde r_1 şi r_2 sînt date de (61); între constantele $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_1^{(2)}$ şi $\lambda_2^{(1)}$, $\lambda_2^{(2)}$) avem relaţiile (62), Z_1, Z_2 sînt soluţii particulare ale sistemului (64), avînd aceeaşi formă ca şi W_1, W_2, iar $\lambda_1^{(1)}$ şi $\lambda_1^{(2)}$ se determină din condiţiile iniţiale (71).

PROCEDEUL II. APROXIMAŢII DE ORDINUL h^4

În metoda de integrare numerică expusă mai sus am neglijat în sistemele (56), respectiv (68), termenii rest care erau de ordinul de mărime a lui h^2.

În cele ce urmează vom da o altă schemă de calcul pentru aceeaşi problemă, în care termenii rest vor avea ordinul de mărime a lui h^4. În acest scop, vom folosi formulele de derivare numerică expuse în anexa I pentru derivata de ordinul al doilea. Dacă în ecuaţiile (50) exprimăm derivata $\left.\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right|_{\xi = ih}$ cu ajutorul formulelor ($II_1 - II_4$), obţinem pentru determinarea funcţiilor $y_1, y_2, \ldots, y_i$ sistemul de ecuaţii diferenţiale :

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{1}{12}\delta_1 [10y_0 - 15y_1 - 4y_2 + 14y_3 - 6y_4 + y_5] + R_1 \\ y_i' &= \frac{1}{12}\delta_i [-y_{i-2} + 16y_{i-1} - 30y_i + 16y_{i+1} - y_{i+2}] + R_i \\ &\qquad (i = 2, 3, \ldots, n-2) \\ y_{n-1}' &= \frac{1}{12}\delta_{n-1} [y_{n-5} - 6y_{n-4} + 14y_{n-3} - 4y_{n-2} - 15y_{n-1} + 10y_n] + R_{n-1} \end{aligned} \tag{73}$$

cu condiţiile iniţiale

$$y_1(0) = y_2(0) = \ldots = y_{n-1}(0) = 0 \tag{74}$$

unde $|R_1|, |R_{n-1}| < \delta_1^* \frac{13}{180} h^4 M_6$

$$|R_i| < \delta_i^* \frac{1}{90} h^4 M_6 \tag{75}$$

$$M_6 \geqq \max_{0 \leqslant \xi, \tau \leqslant 1} \left| \frac{\partial^6 y}{\partial \xi^6} \right|.$$

Dacă în sistemul (73) neglijăm resturile R_i, rezultă un sistem de ecuații diferențiale liniare care, integrat, cu condițiile inițiale (74), determină valori aproximative ale presiunii în $(n-1)$ puncte echidistante ale conductei.

Pentru determinarea funcției $\pi_2(\xi, \tau)$ din dezvoltare (27) vom proceda ca și în cazul precedent, cu deosebirea că în funcția $\frac{\partial V_2}{\partial \xi}$ din (65) vom folosi pentru exprimarea derivatelor $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ și $\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}$ formulele de derivare numerică ($I_2 - I_4$) respectiv ($II_1 - II_4$), cu grad de precizie h^4, iar derivata $\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial \xi^2}$ din ecuația (64) o vom exprima de asemenea cu ajutorul formulelor ($II_1 - II_4$).

Putem face și aici aceeași observație ca și la punctul anterior, și anume : sistemele de ecuații diferențiale liniare corespunzătoare funcțiilor $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots$ au aceiași coeficienți, fapt care înlesnește programarea rezolvării lor la mașinile electronice de calcul.

2°. PROBLEMA II, Q–Q

Vom trece acum la integrarea numerică a sistemelor de ecuații (28) și (33) pentru condițiile la limită și inițiale (40), respectiv (41).

În acest scop vom elimina din sistemul (28) funcția π_1 și din sistemul (33) funcția π_i, obținînd în felul acesta ecuațiile

$$\frac{\partial g_1}{\partial \tau} = \frac{b_1}{a_1 Q_0} \left[p_0 \frac{\partial^2 g_1}{\partial \xi^2} - \frac{\beta}{2 p_0} \frac{\partial g_1}{\partial \xi} \right] \tag{76}$$

și

$$\frac{\partial g_i}{\partial \tau} = \frac{b_1}{a_1 Q_0} \left[p_0 \frac{\partial^2 g_i}{\partial \xi^2} - \frac{\beta}{2 p_0} \frac{\partial g_i}{\partial \xi} \right] + \frac{1}{a_1 Q_0} \frac{\partial V_i}{\partial \tau} \tag{77}$$

care trebuie integrate cu condițiile la limită și inițiale (40), respectiv (41).

Înainte de aplicarea metodei dreptelor, pentru integrarea ecuației (76) introducem notațiile

$$g_1(\xi, \tau) = \nu(\xi, \tau); \quad \nu(ih, \tau) = \nu_i(\tau) \tag{78}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n)$$

şi vom exprima derivatele funcţiei g_1 în raport cu ξ pentru $\xi = ih$ prin diferenţe divizate. În felul acesta, pentru determinarea funcţiei $\nu(\xi, \tau)$ pe dreptele de ecuaţii $\xi = ih$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, apare necesar să integrăm sistemul de ecuaţii

$$\nu_i' = \delta_i [\nu_{i+1} - 2\nu_i + \nu_{i-1}] + \eta_i [\nu_{i+1} - \nu_i] + R_i^{(1)} + R_i^{(2)} \tag{79}$$

unde am notat $\eta_i = -\dfrac{b_1 \beta}{4h\, a_1 Q_0\, p_0 (ih)}$.

Funcţiile $\nu_0(\tau)$ şi $\nu_n(\tau)$ sînt cunoscute din condiţiile la limită (40), iar condiţia iniţială devine

$$\nu_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{80}$$

Resturile $R_i^{(1)}$ şi $R_i^{(2)}$, care provin din înlocuirea derivatelor cu diferenţe divizate, au următoarele delimitări :

$$\begin{aligned} |R_i^{(1)}| &\leqq \frac{1}{12}\, \delta_i^*\, M_4 h^2; \quad M_4 \geqq \max_{0 \leqslant \xi, \tau \leqslant 1} \left| \frac{\partial^4 g_1}{\partial \xi^4} \right| \\ |R_i^{(2)}| &\leqq \frac{1}{3}\, |\eta_i^*|\, M_3 h^2; \quad M_3 \geqq \max_{0 \leqslant \xi, \tau \leqslant 1} \left| \frac{\partial^3 g_1}{\partial \xi^3} \right|; \quad \eta_i^* = h\eta_i \end{aligned} \tag{81}$$

unde

$$i = 1, 2, \ldots, n-1$$

Dacă integrăm sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare obţinut din (79), prin neglijarea resturilor, cu condiţiile iniţiale (80), obţinem valori cu aproximaţie ale funcţiei $g_1(\xi, \tau)$ pe dreptele de ecuaţii $\xi = ih$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Pentru determinarea funcţiei $g_2(\xi, \tau)$ integrăm, cu metoda indicată mai sus, ecuaţia ce se obţine din (77) pentru $i = 2$. Termenul liber al acestei ecuaţii $\dfrac{1}{a_1 Q_0} \dfrac{\partial V_2}{\partial \tau}$ se poate calcula pentru $\xi = ih$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, deoarece, după cum reiese din (30), $V_2(\xi, \tau)$ se exprimă astfel :

$$V_2(\xi, \tau) = \frac{a_1 Q_0}{p_0^2}\, \pi_1 g_1 - \frac{\beta}{2p_0^4}\, \pi_1^2 - \frac{a_1 Q_0}{2}\, g_1^2. \tag{82}$$

$g_1(ih, \tau)$ se determină din sistemul (79), iar $\pi_1(ih, \tau)$ se calculează din a doua ecuaţie a sistemului (28), prin integrare în raport cu τ, adică

$$\pi_1(ih, \tau) = -b_1 p_0 \int_0^\tau \left. \frac{\partial g_1}{\partial \xi} \right|_{\xi = ih} \mathrm{d}\tau \tag{83}$$

ţinînd seama că $\pi_1(ih, 0) = 0$, după cum reiese din condiţia iniţială (41). Substituind în (83) $\left. \dfrac{\partial g_1}{\partial \xi} \right|_{\xi = ih}$ prin $g_1 \dfrac{[(i+1)h, \tau] - g_1[(i-1)h, \tau]}{2h}$, obţinem pentru $\pi_1(ih, \tau)$ următoarea valoare aproximativă :

$$\pi_i(ih, \tau) = -\frac{b_1 p_0}{2h} \int_0^\tau \{g_1[(i+1)h, \tau] - g_1[(i-1)h, \tau]\} \mathrm{d}\tau \tag{84}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

După ce s-a determinat $V_2(ih, \tau)$ $(i = 1, \overline{n-1})$, integrarea ecuaţiei (77), pentru $i = 2$, se face analog cu integrarea ecuaţiei (76). Cînd trecem

de la ecuația (77), pentru $i = 2$, la următoarea nu apar probleme noi, comparativ cu cazul cînd se trece de la ecuația (76) la (77).

Pentru a obține o aproximație mai bună în metoda dreptelor, vom folosi acum, pentru exprimarea derivatelor în raport cu ξ ale funcției necunoscute, formule de derivare numerică cu grad de exactitate 4, și anume : formulele (I_2—I_5) și (II_1—II_4). În acest caz, ecuația (76), folosind notația (78), se transformă în următorul sistem de ecuații diferențiale :

$$\nu_1' = \frac{\delta_1}{12}[10\nu_0 - 15\nu_1 - 4\nu_2 + 14\nu_3 - 6\nu_4 + \nu_5] + \frac{\eta_1}{6}[3\nu_0 - 10\nu_1 + 18\nu_2 - 6\nu_3 + \nu_4] + R_1^{(1)} + R_1^{(2)} \tag{85}$$

$$\nu_i' = \frac{\delta_i}{12}[-\nu_{i-2} + 16\nu_{i-1} - 30\nu_i + 16\nu_{i+1} - \nu_{i+2}] + \frac{\eta_i}{6}[\nu_{i-2} - 8\nu_{i-1} + 8\nu_{i+1} - \nu_{i+2}] + R_i^{(1)} + R_i^{(2)}$$

$$\nu_{n-1} = \frac{\delta_{n-1}}{12}[\nu_{n-5} - 6\nu_{n-4} + 14\nu_{n-3} - 4\nu_{n-2} - 15\nu_{n-1} + 10\nu_n] + \frac{\eta_{n-1}}{6}[\nu_{n-4} - 6\nu_{n-3} + 18\nu_{n-2} - 10\nu_{n-1} + 3\nu_n] + R_{n-1}^{(1)} + R_{n-1}^{(2)},$$

unde

$$|R_1^{(1)}|, |R_{n-1}^{(1)}| \leqq \delta_1 \frac{13}{180} h^4 M_6$$

$$|R_i^{(1)}| \leqq \delta_i \frac{1}{90} h^4 M_6; \qquad M_6 \geqq \max_{0 \leqslant \xi, \tau \leqslant 1} \left| \frac{\partial^6 g_1}{\partial \xi^6} \right|, \tag{86}$$

și

$$|R_1^{(2)}|, |R_{n-1}^{(2)}| \leqq \frac{1}{10} |\eta_{n-1}| h^4 M_5$$

$$|R_i^{(2)}| \leqq \frac{1}{15} |\eta_i| h^4 M_5; \qquad M_5 \geqq \max_{0 \leqslant \xi, \tau \leqslant 1} \left| \frac{\partial^5 g_1}{\partial \xi^5} \right|. \tag{87}$$

Funcțiile $\nu_0(\tau)$ și $\nu_n(0)$ din sistemul (85) sînt cunoscute din condițiile la limită (40), rămînînd ca necunoscute funcțiile $\nu_1, \nu_2, .., \nu_{n-1}$, care pot fi determinate aproximativ din sistemul (85), neglijînd resturile și ținînd seama de condițiile inițiale (80).

Procedînd ca mai sus, poate fi determinată funcția $g_2(\xi, \tau)$, cu deosebirea că în formula (83) folosim pentru exprimarea derivatei $\frac{\partial g_1}{\partial \xi}$ formulele (I_2—I_4), obținînd :

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial \xi}\right|_{\xi = h} = \frac{1}{12h}[-3\nu_0 - 10\nu_1 + 18\nu_2 - 6\nu_3 + \nu_4] + R_1$$

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial \xi}\right|_{\xi = ih} = \frac{1}{12h}[\nu_{i-2} - 8\nu_{i-1} + 8\nu_{i+1} - \nu_{i+2}] + R_i; \; i = 2, 3, ..., n-2 \tag{88}$$

$$\left.\frac{\partial g_1}{\partial \xi}\right|_{\xi = (n-1)h} = \frac{1}{12h}[\nu_{n-4} - 6\nu_{n-3} + 18\nu_{n-2} - 10\nu_{n-1} - 3\nu_n] + R_{n-1}$$

unde, conform cu (I_2—I_4), avem pentru resturile R_i ($i = 1, 2,...,n-1$) delimitările

$$|R_1| \text{ și } |R_{n-1}| \leqq \frac{h^4}{20} G_5$$
$$|R_i| \leqq \frac{h^4}{30} G_5 \quad (i = 2,..., n-1) \tag{89}$$
$$G_5 \geqq \max_{0 \leqslant \xi, \tau \leqslant 1} \left| \frac{\partial^5 g_1}{\partial \xi^5} \right|$$

Dacă în ecuația (77) exprimăm derivatele $\frac{\partial^2 g_1}{\partial \xi^2}$ și $\frac{\partial g_1}{\partial \xi}$ cu ajutorul formulelor de derivare numerică (I_2—I_4) și (II_1—II_4), obținem pentru $g_2(ih, \tau)$, (i=1, 2,.., $n-1$) un sistem de ecuații diferențiale analog cu sistemul (85), în care $g_2(0, \tau)$ și $g_2(1, \tau)$ sînt cunoscute din condițiile la limită (40). Sistemul obținut se integrează cu condițiile inițiale $g_2(ih, 0) = 0$ ($i = 1, 2,..., n-1$).

Pentru determinarea funcțiilor $g_3(\xi, \tau)$, $g_4(\xi, \tau)$,... se procedează în mod cu totul analog.

3°. PROBLEMA III, p–Q

Dintre problemele expuse în § 3 a mai rămas de studiat problema la limită de tipul trei, cînd în punctul de consum al conductei se cunoaște debitul gravimetric, iar în punctul de alimentare presiunea. În acest caz, trebuie să integrăm sistemele (28) și (33) cu condițiile (43), respectiv (44). Considerațiile expuse mai sus, referitoare la problema I, pot fi aplicate și în acest caz, cu unele modificări proprii problemei tratate :

Astfel, în locul condițiilor (48) avem acum condițiile

$$y(1, \tau) = \frac{1}{\mu} \chi_1(\tau)$$
$$\left.\frac{\partial y}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = -\frac{a_1 Q_0}{\mu} [Q(0, \tau) - Q_0] = \frac{1}{\mu} \psi(\tau), \tag{90}$$

unde este ușor de observat că acestea nu permit, ca în cazul precedent, să cunoaștem funcția $y_0(\tau)$. Pentru a înlătura dificultatea apărută, vom exprima derivata $\left.\frac{\partial y}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}$ din condiția (90), prin valorile funcției $y(\xi, \tau)$ pe dreptele de ecuații $\xi = ih$, cu ajutorul formulei de derivare numerică (I_0), cu grad de exactitate h^2, pentru primul mod de rezolvare a problemei, și a formulei (I_1) pentru al doilea. Cu alte cuvinte, vom atașa sistemului (55) ecuația

$$\frac{1}{2h} [-3y_0 + 4y_1 - y_2] + R_1 = \frac{1}{\mu} \psi(\tau)$$

iar sistemului (73) ecuația

$$\frac{1}{12\,h}\,[-25\,y_0 + 48\,y_1 - 36\,y_2 + 26\,y_3 - 3y_4] + R_1^* = \frac{1}{\mu}\,\psi(\tau)$$

unde

$$|R_1| \leqq \frac{h^2}{3}\max\left|\frac{\partial^3 y}{\partial \xi^3}\right| \text{ și } |R_1^*| \leqq \frac{h^4}{5}\max\left|\frac{\partial^5 y}{\partial \xi^5}\right|$$

Vom proceda în mod analog și la determinarea următoarelor funcții din dezvoltarea (27), ținînd seama de faptul că $g_i(0,\tau) = 0$, $(i = 2,\ldots, n,\ldots)$, ceea ce ne conduce la relațiile

$$\frac{1}{2\,h}\,[-3\,\pi_i(0,\tau) + 4\,\pi_i(h,\tau) - \pi_i(2\,h,\tau)] + R_i = 0$$

unde

$$i = 2,3,\ldots$$

$$|R_i| \leqq \frac{h^2}{3}\max_{\substack{0\leqslant\xi\leqslant 1\\ 0\leqslant\tau\leqslant 1}}\left|\frac{\partial^3 \pi_i}{\partial \xi^3}\right|$$

și

$$\frac{1}{12\,h}[-25\,\pi_i(0,\tau) + 48\,\pi_i(h,\tau) - 36\,\pi_i(2h,\tau) + 16\,\pi_i(3\,h,\,\tau) - 3\,\pi_i(4\,h,\tau)] + R_i^* = 0$$

unde

$$(i = 2,3,\ldots)$$

$$|R_i^*| \leqq \frac{h^4}{5}M_5^{(i)} \text{ și } M_5^{(i)} \geqq \max_{1\leqslant\xi,\tau\leqslant 0}\left|\frac{\partial^5 \pi_i}{\partial \xi^5}\right|$$

pe care le vom alătura la sistemele de ecuații diferențiale ce conțin funcțiile necunoscute

$$\pi_i(0,\tau),\ \pi_i(h,\ \tau),\ \ldots,\ \pi_i[(n-1)\,h,\ \tau].$$

ANEXA 1

FORMULE DE DERIVARE NUMERICĂ APLICATE ÎN LUCRARE

1. *Derivata de ordinul întîi*

Fie $f(x)$ o funcție continuă împreună cu primele trei derivate în intervalul $[x_0,\ x_2]$ și fie x_1 mijlocul acestui interval. În aceste condiții, este adevărată formula

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\,[-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] + R \qquad (I_0)$$

unde

$$|R| \leqq \frac{h^2}{3} M_3, \qquad M_3 \geqq \max_{x \in [x_0, x_2]} |f'''(x)|$$

şi

$$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$$

Dacă $f(x)$ este definită şi continuă împreună cu primele cinci derivate în intervalul $[x_0, x_4]$ şi x_1, x_2, x_3 sînt trei puncte care împart intervalul $[x_0, x_4]$ în patru părţi egale de lungime h, atunci avem formulele :

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} [-25 f(x_0) + 48 f(x_1) - 36 f(x_2) + 16 f(x_3) - 3 f(x_4)] + R_0 \qquad (I_1)$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{12h} [-3 f(x_0) - 10 f(x_1) + 18 f(x_2) - 6 f(x_3) + f(x_4)] + R_1 \qquad (I_2)$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{12h} [f(x_0) - 8 f(x_1) + 8 f(x_3) - f(x_4)] + R_2 \qquad (I_3)$$

$$f'(x_3) = \frac{1}{12h} [f(x_0) - 6 f(x_1) + 18 f(x_2) - 10 f(x_3) - 3 f(x_4)] + R_3 \qquad (I_4)$$

$$f'(x_4) = \frac{1}{12h} [-3 f(x_0) + 16 f(x_1) - 36 f(x_2) + 48 f(x_3) - 25 f(x_4)] + R_5 \qquad (I_5)$$

Pentru resturile formulelor de sus, avem următoarele delimitări

$$|R_0| \text{ şi } |R_5| \leqq \frac{h^4}{5} M_5$$

$$|R_1| \text{ şi } |R_3| \leqq \frac{h^4}{20} M_5 \quad , \quad |R_2| \leqq \frac{h^4}{30} M_5,$$

unde

$$M_5 = \max_{[x_0, x_4]} |f^{V}(x)|$$

2. *Derivata de ordinul al II-lea*

Considerăm funcţie $f(x)$ definită şi continuă împreună cu primele şase derivate în intervalul $[x_0, x_5]$ şi fie x_1, x_2, x_3, x_4 patru puncte echidistante din acest interval, cu distanţa între ele h şi de asemenea $x_1 - x_0 = x_5 - x_4 = h$.

Pentru derivata de ordinul al doilea a funcţiei $f(x)$ pe nodurile x_0, x_1, ..., x_5 avem formulele de derivare numerică :

$$f''(x_1) = \frac{1}{12h^2} [10 f(x_0) - 15 f(x_1) - 4 f(x_2) + 14 f(x_3) - 6 f(x_4) + f(x_5)] + R_1, \qquad (II_1)$$

$$f''(x_2) = \frac{1}{12h^2} [-f(x_0) + 16 f(x_1) - 30 f(x_2) + 16 f(x_3) - f(x_4)] + R_2, \qquad (II_2)$$

$$f''(x_3) = \frac{1}{12h^2} [-f(x_1) + 16 f(x_2) - 30 f(x_3) + 16 f(x_4) - f(x_5)] + R_3, \qquad (II_3)$$

$$f''(x_4) = \frac{1}{12h^2} [f(x_0) - 6 f(x_1) + 14 f(x_2) - 4 f(x_3) - 15 f(x_4) + 10 f(x_5)] + R_4. \qquad (II_4)$$

Resturile acestor formule pot fi delimitate astfel

$$|R_1| \text{ și } |R_4| \leqq \frac{13h^4}{180} M_6$$

$$|R_2| \text{ și } |R_3| \leqq \frac{h^4}{90} M_6 \qquad (II_5)$$

unde

$$M_6 = \max_{[x_0, x_5]} |f^{VI}(x)| \ [x_0, x_5]$$

Observăm că atît din punctul de vedere al restului cît și din cel al coeficienților, care sînt simetrici, formulele II_2 și II_3 sînt mai avantajoase, de aceea în aplicații vom folosi pe cît posibil aceaste formule.

Primită la redacție la 18 decembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. H. Pascal, *Sur l'écoulement transitoire de gas par des conduites (pipe-line)*, Méc. appl., **3**, *2*, (1965).
2. G. Ciliberta, *Sulle equazioni quasilineari di tipo parabolico in due variabili*, Ricerche matematiche, **5**, *1* (1956).
3. O. A. Olenik, T. D. Vențel, *Prima problemă la limită și problema Cauchy pentru ecuația neliniară de tip parabolic*, Matematiceski sbornic, *1* (1957).
4. Cyan Ju-Lui, *Probleme la limită pentru ecuații parabolice neliniare*, Matematiceski sbornic, *4* (1959).
5. I. Maugis, M. Kahane, M. Renouerd, *Méthode de calcul numérique pour l'écoulement d'un gaz en régime variable*, Assoc. techn. industr. gaz France, Congrès, 1964.
6. A. Houpeurt, *Eléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux*, Paris, 1958.

ASUPRA UNEI CLASE DE ARIPI „ÎN SĂGEATĂ" ŞI „ÎN COADĂ DE RÎNDUNICĂ"

de E. CARAFOLI şi FR. ATANASIU

Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R., Bucureşti

Se studiază unele clase speciale de aripi subţiri, cu bordurile de fugă curbe, care pot înlocui aripile „în coadă de rîndunică" şi „în săgeată".

Se calculează prin aplicarea metodei reziduului caracteristicile aerodinamice ale aripilor cu bordurile de atac subsonice sau supersonice în mişcări omogene de ordinul $n = 1$ şi $n = 2$.

Prin metoda utilizată mai sus, calculul caracteristicilor aerodinamice ale aripilor cu linia de închidere curbă este foarte mult simplificat, deoarece putem aplica metoda reziduului.

În lucrarea de faţă vom studia unele aripi speciale, denumite aripi „în coadă de rîndunică" şi aripi „în săgeată", linia de închidere fiind o curbă analitică continuă.

CONSIDERAŢII PRELIMINARE

Fie o aripă $OC_1O'C_2$ simetrică în plan, cu bordul de fugă curb, raportată la un sistem trirectangular de axe $Ox_1x_2x_3$ cu originea în vîrful aripii, cu Ox_3 normală pe aripă şi cu Ox_1 paralelă cu viteza curentului neperturbat U_∞ (fig. 1).

Considerăm că, în planul $x_1 = \overline{OO'} = 1$, urma aripii este $A_2A_1 = 2l$. În acest plan vom considera un sistem Oyz unde coordonatele y şi z sînt date de relaţiile următoare:

$$y = \frac{x_2}{x_1}, \quad z = \frac{x_3}{x_1}. \tag{1}$$

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 19, Nr. 3. p. 543–553 BUCUREŞTI 1965

Presupunem mai departe că linia de închidere $C_2O'C_1$ este de forma unui polinom par în y:

$$x_1 = P(y) = 1 + a_2y^2 + a_4y^4 + \ldots, \tag{2}$$

unde a_2, a_4,... sînt coeficienţi constanţi, iar y este dat de relaţia (1).

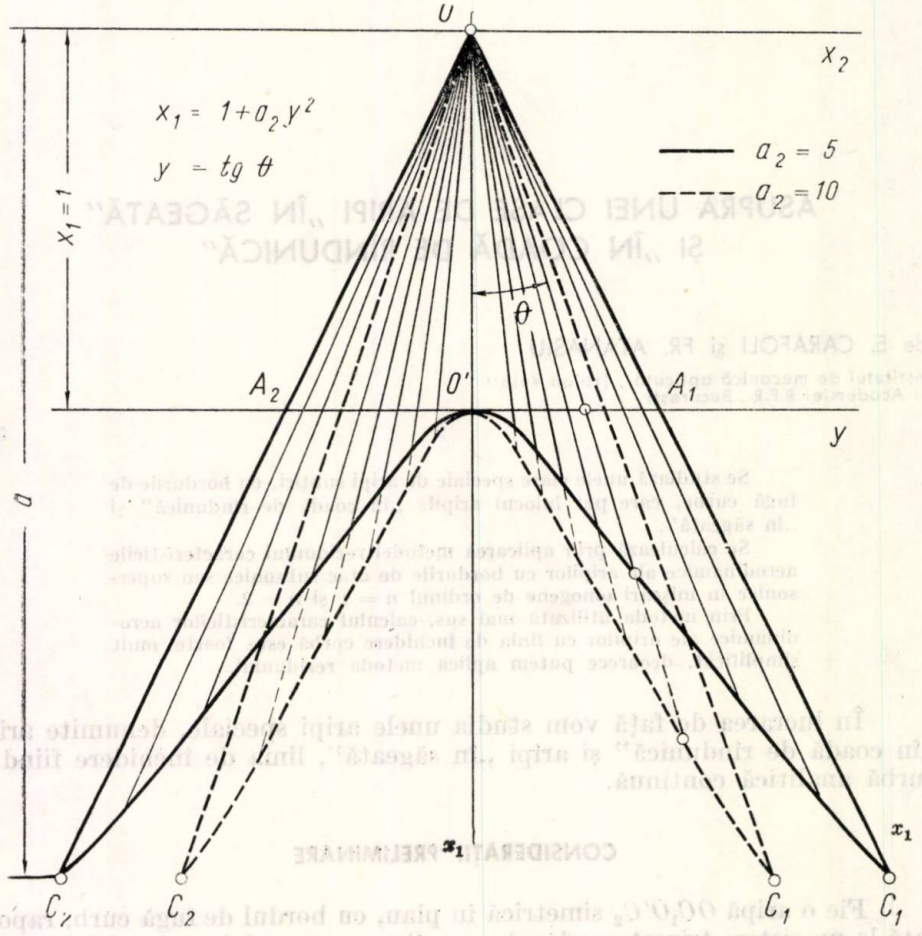


Fig. 1

Dînd diferite valori coeficienţilor a_2, a_4,..., se obţine o întreagă clasă de aripi cu bordurile de fugă foarte variate, de forma „în coadă de rîndunică" sau „în săgeată", ca în figurile 1 şi respectiv, 2.

Vom transforma planul $O\,y\,z$ prin transformarea geometrică a lui Busemann [1] într-un plan (ξ), iar acesta printr-o transformare conformă, în planul:

$$\left[x = \mathfrak{y} + i\mathfrak{z}, \left(\mathfrak{y} = \frac{y}{1 - B^2z^2},\ \mathfrak{z} = \frac{z\sqrt{1 - B^2r^2}}{1 - B^2z^2},\ r = \sqrt{y^2 + z^2}\right)\right., \tag{3}$$

definit într-o lucrare anterioară [1], unde pe Oy urma aripii este aceeaşi cu cea din planul real. În cazul unei distribuţii simetrice de incidenţă α sau de viteză verticală $w = \alpha U_\infty$:

$$w = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} w_{n-2k-1,2k}\, y^{2k}, \tag{4}$$

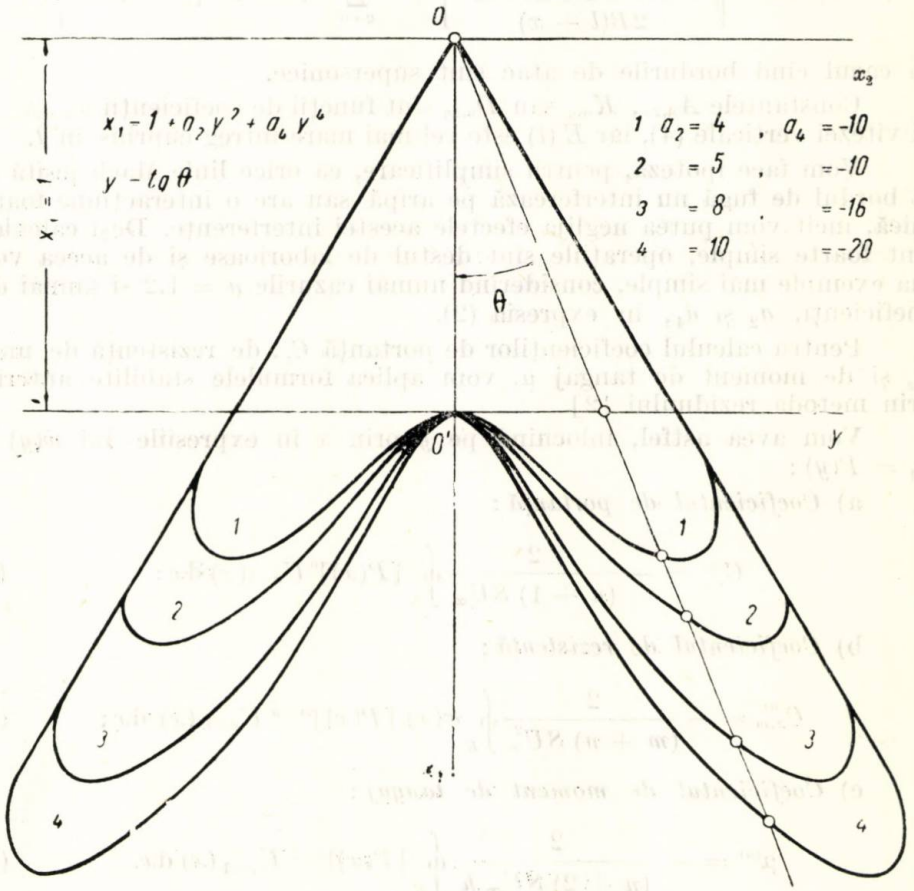


Fig. 2

unde $w_{n-2k-1,2k}$ sînt coeficienţi constanţi; viteza axială de perturbaţie u este de asemenea simetrică şi este dată de partea reală a unei funcţii U_{n-1} avînd expresia :

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = u_{n-1} = \mathrm{Re}\, U_{n-1}(x) = \mathrm{Re} \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{A_{n,2q}\, x^{2q}}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \tag{5}$$

în cazul cînd bordurile de atac ale aripii sînt subsonice și:

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = u_{n-1} = \operatorname{Re}\left\{\sum_{q=0}^{n-1} K_{n,q}\, x^q \left[\cos^{-1}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1-Bx)}{2B(l-x)}} + \right.\right. \tag{6}$$

$$\left.\left. + (-1)^q \cos^{-1}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(l+x)}}\right] + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} D_{n,2q}\, x^{2q}\sqrt{1-B^2x^2}\right\},$$

în cazul cînd bordurile de atac sînt supersonice.

Constantele $A_{n,2q}$, $K_{n,q}$ sau $D_{n,2q}$ sînt funcții de coeficienții $w_{n-2k-1,2k}$ ai vitezei verticale (4), iar $E(t)$ este cel mai mare întreg cuprins în t.

Vom face ipoteza, pentru simplificare, că orice linie Mach ieșită de la bordul de fugă nu interferează pe aripă sau are o interacțiune foarte mică, încît vom putea neglija efectele acestei interferențe. Deși calculele sînt foarte simple, operațiile sînt destul de laborioase și de aceea vom lua exemple mai simple, considerînd numai cazurile $n = 1,2$ și numai doi coeficienți, a_2 și a_4, în expresia (2).

Pentru calculul coeficienților de portanță C_z, de rezistență de undă C_x și de moment de tangaj μ, vom aplica formulele stabilite anterior prin metoda reziduului [2].

Vom avea astfel, înlocuind pe y prin x în expresiile lui $w(y)$ și $x_1 = P(y)$:

a) *Coeficientul de portanță*:

$$C_z^{(n)} = -\frac{2}{(n+1)\,SU_\infty}\oint_K [P(x)]^n\, U_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x; \tag{7}$$

b) *Coeficientul de rezistență*:

$$C_{x,m}^{(n)} = -\frac{2}{(m+n)\,SU_\infty^2}\oint_K w(x)\,[P(x)]^{m+n}\,U_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x; \tag{8}$$

c) *Coeficientul de moment de tangaj*:

$$\mu^{(n)} = -\frac{2}{(n+2)\,SU_\infty\,h}\oint_K [P(x)]^{n+2}\,U_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

În formulele de mai sus, S este suprafața aripii, h o lungime de referință (înălțimea aripii spre exemplu), iar K este un contur închis rectificabil la infinit.

Pentru aripa cu bordul de închidere de formă generală (2), suprafața este dată de:

$$S = \iint_{OC_1O'C_2} \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \int_{-l}^{+l}\frac{x_1^2}{2}\Big|_0^{P(y)}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-l}^{+l}[P(y)]^2\,\mathrm{d}y. \tag{10}$$

Avantajul acestei clase de aripi este foarte important, deoarece linia de închidere poate avea un rol important în alegerea aripii, totodată calculul caracteristicilor aerodinamice devenind simplu, prin faptul că se poate aplica metoda reziduului.

ARIPA „ÎN COADĂ DE RÎNDUNICĂ" : $P(y) = 1 + a_2 y^2$.

Să ne fixăm mai întîi suprafața aripii care intră în formulele coeficienților aerodinamici. Se vede ușor că, în cazul considerat, după (10) avem :

$$S = l\left(1 + 2a_2 \frac{l^2}{3} + a_2^2 \frac{l^4}{5}\right). \tag{11}$$

Portanța. Aplicînd formula (7) și ținînd seama de (5) pentru aripa cu bordurile subsonice, vom avea în cazul mișcărilor omogene de ordinul $n = 1$ și $n = 2$, respectiv :

$$C_z^{(1)} = \frac{2\pi A_{10}}{S U_\infty}\left(1 + a_2 l^2 + \frac{3}{8} a_2^2 l^4\right), \tag{12 a}$$

$$C_z^{(2)} = \frac{4\pi}{3 S U_\infty}\left[A_{20}\left(1 + \frac{3}{2} a_2 l^2 + \frac{9}{8} a_2^2 l^4 + \frac{5}{16} a_2^3 l^6\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{l^2}{2} A_{22}\left(1 + \frac{9}{4} a_2 l^2 + \frac{15}{8} a_2^2 l^4 + \frac{35}{64} a_2^3 l^6\right)\right], \tag{12 b}$$

iar în cazul aripii cu bordurile supersonice, ținînd seama de (6) și (7), vom avea, respectiv, pentru $n = 1$ și $n = 2$:

$$C_z^{(1)} = \frac{2\pi\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{B S U_\infty} K_{10}\left[1 + a_2 l^2 \frac{2B^2 l^2 + 1}{3 B^2 l^2} + a_2^2 l^4 \frac{8 B^4 l^4 + 4 B^2 l^2 + 3}{40 B^4 l^4}\right], \tag{13 a}$$

$$C_z^{(2)} = \frac{4\pi\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{3 B S U_\infty}\left\{K_{20}\left[1 + a_2 l^2 \frac{2B^2 l^2 + 1}{2B^2 l^2} + 3 a_2^2 l^4 \frac{8B^4 l^4 + 4B^2 l^2 + 3}{40 B^4 l^4} + \right.\right.$$
$$\left. + a_2^3 l^6 \frac{16 B^6 l^6 + 8 B^4 l^4 + 6 B^2 l^2 + 5}{112 B^6 l^6}\right] + \frac{l}{2} K_{21}\left[1 + 3 a_2 l^2 \frac{2 B^2 l^2 + 1}{4 B^2 l^2} + \right.$$
$$\left. + a_2^2 l^4 \frac{8 B^4 l^4 + 4 B^2 l^2 + 3}{8 B^4 l^4} + a_2^3 l^6 \frac{16 B^6 l^6 + 8 B^4 l^4 + 6 B^2 l^2 + 5}{64 B^6 l^6}\right] +$$
$$\left. + \frac{D_{20}}{2\sqrt{B^2 l^2 - 1}}\left[1 + \frac{3 a_2 l^2}{4 B^2 l^2} + \frac{3 a_2^2 l^4}{8 B^4 l^4} + \frac{5 a_2^3 l^6}{64 B^6 l^6}\right]\right\}. \tag{13 b}$$

Dacă cele două aripi $n = 1$ şi $n = 2$ formează o aripă complexă, atunci coeficientul total de portanţă C_z va fi suma celor doi coeficienţi daţi de formulele (12) sau (13).

Rezistenţa de undă. Aplicînd formula (8) pentru $m = 1{,}2$ şi $n = 1{,}2$ şi ţinînd seama de (4) şi (5), care se referă la aripa cu borduri subsonice, obţinem :

$$C_{x1}^{(1)} = -\frac{w_{0,0}}{U_\infty} C_z^{(1)}, \quad C_{x1}^{(2)} = -\frac{w_{0,0}}{U_\infty} C_z^{(2)}, \tag{14 a}$$

$$C_{x2}^{(1)} = -\frac{4\pi}{3 S U_\infty^2} w_{10} A_{10}\left(1 + \frac{3}{2} a_2 l^2 + \frac{9}{8} a_2^2 l^4 + \frac{5}{16} a_2^3 l^6\right), \tag{14 b}$$

$$C_{x2}^{(2)} = -\frac{\pi w_{10}}{S U_\infty^2}\left[A_{20}\left(1 + 2a_2 l^2 + \frac{9}{4} a_2^2 l^4 + \frac{5}{4} a_2^3 l^6 + \frac{35}{128} a_2^4 l^8\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{l^2}{2} A_{22}\left(1 + 3a_2 l^2 + \frac{15}{4} a_2^2 l^4 + \frac{35}{16} a_2^3 l^6 + \frac{63}{128} a_2^4 l^8\right)\right]. \tag{14 c}$$

În acelaşi fel, ţinînd cont de (4) şi (6) referitoare la bordurile supersonice, obţinem, respectiv :

$$C_{x1}^{(1)} = -\frac{w_{0,0}}{U_\infty} C_z^{(1)}, \quad C_{x1}^{(2)} = -\frac{w_{0,0}}{U_\infty} C_z^{(2)}, \tag{15 a}$$

$$C_{x2}^{(1)} = -\frac{4\pi w_{10}}{3 B S U_\infty^2} \sqrt{B^2 l^2 - 1}\left[1 + a_2 l^2 \frac{2B^2 l^2 + 1}{2B^2 l^2} + \right.$$
$$\left. + 3a_2^2 l^4 \frac{8B^4 l^4 + 4B^2 l^2 + 3}{40 B^4 l^4} + a_2^3 l^6 \frac{16B^6 l^6 + 8B^4 l^4 + 6B^2 l^2 + 5}{112 B^6 l^6}\right], \tag{15 b}$$

$$C_{x2}^{(2)} = -\frac{\pi \sqrt{B^2 l^2 - 1}}{B S U_\infty^2} w_{10} \left\{K_{20}\left[1 + 2 a_2 l^2 \frac{2 B^2 l^2 + 1}{3 B^2 l^2} + \right.\right.$$
$$+ 3 a_2^2 l^4 \frac{8B^4 l^4 + 4B^2 l^2 + 3}{20 B^4 l^4} + a_2^3 l^6 \frac{16 B^6 l^6 + 8B^4 l^4 + 6B^2 l^2 + 5}{28 B^6 l^6} +$$
$$\left. + \frac{a_2^4 l^8}{9} \frac{128 B^8 l^8 + 64 B^6 l^6 + 48 B^4 l^4 + 40 B^2 l^2 + 35}{128 B^8 l^8}\right] + \tag{15 c}$$
$$+ \frac{l}{2} K_{21}\left[1 + a_2 l^2 \frac{2 B^2 l^2 + 1}{B^2 l^2} + a_2^2 l^4 \frac{8 B^4 l^4 + 4 B^2 l^2 + 3}{4 B^4 l^4} + \right.$$
$$\left. + a_2^3 l^6 \frac{16 B^6 l^6 + 8 B^4 l^4 + 6 B^2 l^2 + 5}{16 B^6 l^6} + \right.$$

$$+ a_2^4 l^8 \frac{128 B^8 l^8 + 64 B^6 l^6 + 48 B^4 l^4 + 40 B^2 l^2 + 35}{640 B^8 l^8}\Bigg] + \tag{15 c}$$

$$+ \frac{D_{20}}{2\sqrt{B^2 l^2 - 1}}\left[1 + \frac{a_2 l^2}{B^2 l^2} + \frac{3 a_2^2 l^4}{4 B^4 l^4} + \frac{5 a_2^3 l^6}{16 B^6 l^6} + \frac{70 a_2^4 l^8}{128 B^8 l^8}\right]\Bigg\}.$$

Suma coeficienţilor (14) sau (15) constituie coeficientul total al aripii complexe.

Momentul de tangaj. Aplicînd formula (9), unde, conform cu expresia lui x_1 şi cu figura 1, obţinem :

$$h = a = 1 + a_2 l^2 \tag{16}$$

şi ţinînd seama de (5) şi (6), deducem respectiv

$$\mu^{(1)} = \frac{1}{h}\frac{U_\infty}{w_{10}} C_{x2}^{(1)},\ \mu^{(2)} = \frac{1}{h}\frac{U_\infty}{w_{10}} C_{x2}^{(2)}, \tag{17}$$

unde $C_{x2}^{(1)}$, $C_{x2}^{(2)}$ sînt date de (14 b, c) sau (15 b, c), după cum bordurile de atac sînt, respectiv, subsonice sau supersonice.

Observaţii asupra forţei de sucţiune. Coeficientul de sucţiune este dat de relaţiile generale [1] :

$$\sigma_m^{*(n)} = -\frac{2\pi\sqrt{1 - B^2 l^2}}{S l U_\infty^2}\left[\frac{u_{m-1}\, u_{n-1}}{m+n}(l - y)\right]_{y \to l} \times a^{m+n}, \tag{18}$$

unde a este proiecţia bordurilor de atac pe Ox_1, definită de formula (16).

Dacă $\sigma_m^{(n)}$ este coeficientul „intermediar" pentru o aripă delta propriu-zisă, se vede că pentru aripa „în coadă de rîndunică" acest coeficient este :

$$\sigma_m^{*(n)} = a^{m+n}\, \sigma_m^{(n)}.$$

Comparaţia cu aripa „în coadă de rîndunică" propriu-zisă. Să considerăm aripa cu bordurile de atac subsonice din figura 3, unde linia de închidere este definită de

$$x_1 = P(y) = 1 + 4 y^2,\ (a_2 = 4) \tag{19}$$

şi unde $l = 0{,}5$, deci :

$$S = 0{,}93. \tag{20}$$

Pentru cazul scurgerii conice propriu-zise ($n = 1$), aplicînd formulele (12 a) şi primele relaţii din (14 a) şi (17), se obţin următoarele valori pentru caracteristicile aerodinamice ale aripii cu simetrie de incidenţă :

$$C_z^{(1)} = 15{,}95 \frac{A_{10}}{U_\infty},\ C_{x1}^{(1)} = -15{,}95 \frac{w_{0.0}\, A_{10}}{U_\infty^2},$$

$$\mu^{(1)} = -8{,}85 \frac{A_{10}}{U_\infty},\ \sigma_1^{(1)} = -27{,}07 \frac{A_{10}^2}{U_\infty^2}\sqrt{1 - B^2 l^2} = -2{,}1 \frac{A_{10}^2}{U_\infty^2},\left(\frac{1}{B} = 0{,}8\right).$$

Să considerăm acum aripa „în coadă de rîndunică" $OC_2O'C_1$ (fig. 3), care are :

$$l = 0{,}5,\ \operatorname{tg}\delta = 1{,}09,\ S' = 0{,}91\ ; \tag{21}$$

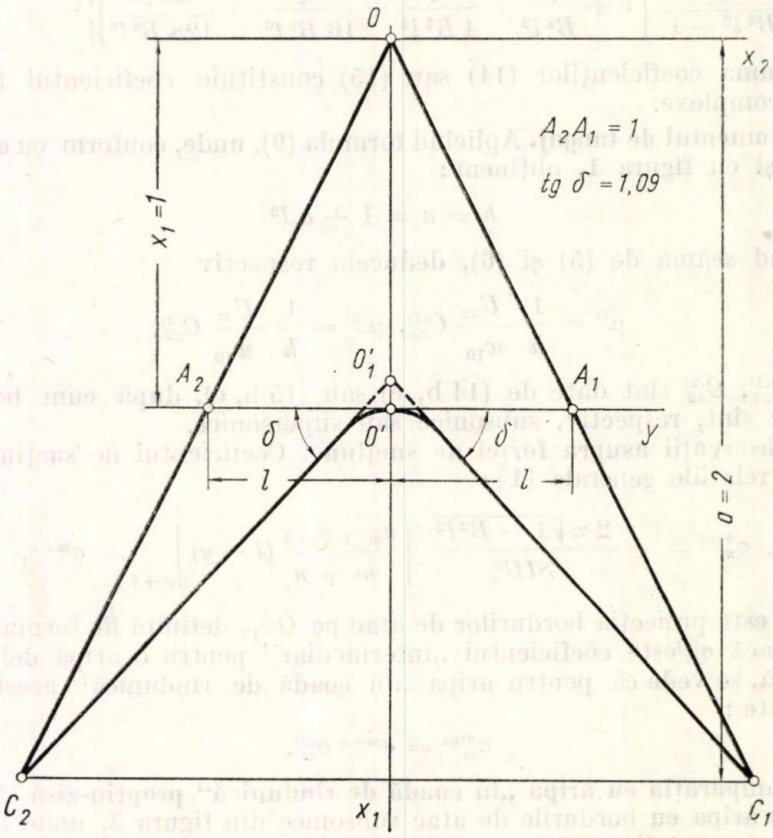


Fig. 3

aplicînd formulele (7, 8, 9, 19), vom obține

$$C_z^{(1)} = \frac{8}{2\,S'\,U_\infty}\int_0^l \frac{u_0\,dy}{(1-y\,\operatorname{tg}\,\delta)^2} = 16\,\frac{A_{10}}{U_\infty}\,, \tag{22 a}$$

$$C_{x1}^{(1)} = -\frac{8}{2\,S'\,U_\infty^2}\int_0^l \frac{w_{0.0}\,u_0\,dy}{(1-y\,\operatorname{tg}\,\delta)^2} = -16\,\frac{w_{00}\,A_{10}}{U_\infty^2}\,. \tag{22 b}$$

$$\mu^{(1)} = -\frac{8}{3\,S'\,h\,U_\infty}\int_0^l \frac{u_0\,dy}{(1-y\,\operatorname{tg}\,\delta)^3} = -8{,}88\,\frac{A_{10}}{U_\infty}\,, \tag{22 c}$$

$$\sigma_1^{(1)} = -\frac{2\,\pi\sqrt{1-B^2\,l^2}}{S'\,l\,U_\infty^2}\left[\frac{u_0^2}{2}(l-y)\right]_{y\to l} \times a^2 = -2{,}14\,\frac{A_{10}^2}{U_\infty^2}\,,\left(\frac{1}{B}=0{,}8\right) \tag{22 d}$$

unde

$$S' = \frac{l}{1 - l \operatorname{tg} \delta}, \quad h = a = 2 \text{ și } u_0 = \frac{A_{10}}{\sqrt{l^2 - y^2}}.$$

Comparînd aceste rezultate cu cele obținute pentru aripa a cărei curbă de închidere este dată de (19), se vede direct că diferențele sînt de ordinul 1%, astfel că aripile „în coadă de rîndunică" propriu-zise pot fi foarte bine înlocuite cu aripi a căror linie de închidere este definită de primii doi termeni din (2).

ARIPA „ÎN SĂGEATĂ" : $P(y) = 1 + a_2 y^2 + a_4 y^4$

În acest caz, suprafața aripii care intră în expresiile caracteristicilor aerodinamice este, după (10) :

$$S = l\left[1 + 2 a_2 \frac{l^2}{3} + (a_2^2 + a_4) \frac{l^4}{4} + 2 a_2 a_4 \frac{l^6}{7} + a_4^2 \frac{l^8}{9}\right]. \tag{23}$$

Vom considera numai mișcarea conică propriu-zisă ($n = 1$), pentru care expresiile (5) și (6) se reduc la următoarele forme :

$$U_0 = \frac{A_{10}}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \tag{24 a}$$

$$U_0 = K_{10}\left(\cos^{-1}\sqrt{\frac{(1 + Bl)(1 - Bx)}{2B(l - x)}} + \cos^{-1}\sqrt{\frac{(1 + Bl)(1 + Bx)}{2B(l + x)}}\right). \tag{24 b}$$

Introducînd expresiile de mai sus în formulele coeficienților aerodinamici, vom găsi succesiv :

a) *Coeficientul de portanță* :

$$C_z = \frac{2\pi}{S U_\infty} A_{10}\left[1 + a_2 l^2 + \frac{3}{8}(a_2^2 + 2 a_4) l^4 + \frac{5}{8} a_2 a_4 l^6 + \frac{35}{128} a_4^2 l^8\right], \tag{25 a}$$

$$C_z = \frac{2\pi\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{B S U_\infty} K_{10}\left[1 + \frac{2 a_2}{3 B^2 l^2}\left(B^2 l^2 + \frac{1}{2}\right) l^2 + \frac{a_2^2 + 2 a_4}{5 B^4 l^4}\left(B^4 l^4 + \right.\right.$$

$$+ \frac{1}{2} B^2 l^2 + \frac{3}{8}\Big) l^4 + \frac{2 a_2 a_4}{7 B^6 l^6}\left(B^6 l^6 + \frac{1}{2} B^4 l^4 + \frac{3}{8} B^2 l^2 + \frac{5}{16}\right) l^6 + \tag{25 b}$$

$$+ \frac{a_4^2}{9 B^8 l^8}\left(B^8 l^8 + \frac{1}{2} B^6 l^6 + \frac{3}{8} B^4 l^4 + \frac{5}{16} B^2 l^2 + \frac{35}{128}\right) l^8\Big];$$

b) *Coeficientul de rezistență* :

$$C_x = -\frac{w_{0.0}}{U_\infty} C_z; \tag{26}$$

c) *Coeficientul momentului de tangaj* :

$$\mu = -\frac{4\pi}{3\,S\,h\,U_\infty} A_{10}\left[1 + \frac{3}{2}a_2 l^2 + \frac{9}{8}(a_2^2 + a_4) l^4 + \frac{5}{16}(a_2^2 + 6\,a_4)\,a_2 l^6 + \right. \tag{27 a}$$
$$\left. + \frac{105}{128} a_4 (a_2^2 + a_4) l^8 + \frac{198}{256} a_2 a_4^2 l^{10} + \frac{231}{1024} a_4^3 l^{12}\right],$$

$$\mu = -\frac{4\pi\sqrt{B^2 l^2 - 1}}{3\,B\,S\,h\,U_\infty} K_{10}\left[1 + \frac{a_2}{B^2 l^2}\left(B^2 l^2 + \frac{1}{2}\right) l^2 + 3\,\frac{a_2^2 + a_4}{5\,B^4 l^4}\left(B^4 l^4 + \right.\right.$$
$$+ \frac{1}{2} B^2 l^2 + \frac{3}{8}\Big) l^4 + \frac{a_2(a_2^2 + 6\,a_4)}{7\,B^6 l^6}\left(B^6 l^6 + \frac{1}{2} B^4 l^4 + \right.$$
$$+ \frac{3}{8} B^2 l^2 + \frac{5}{16}\Big) l^6 + \frac{a_4(a_2^2 + a_4)}{3\,B^8 l^8}\left(B^8 l^8 + \frac{1}{2} B^6 l^6 + \frac{3}{8} B^4 l^4 + \right. \tag{27 b}$$
$$+ \frac{5}{16} B^2 l^2 + \frac{35}{128}\Big) l^8 + 3\,\frac{a_2 a_4^2}{11\,B^{10} l^{10}}\left(B^{10} l^{10} + \frac{1}{2} B^8 l^8 + \frac{3}{8} B^6 l^6 + \right.$$
$$+ \frac{5}{16} B^4 l^4 + \frac{35}{128} B^2 l^2 + \frac{63}{256}\Big) l^{10} + \frac{a_4^3}{13\,B^{12} l^{12}}\left(B^{12} l^{12} + \frac{1}{2} B^{10} l^{10} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{3}{8} B^8 l^8 + \frac{5}{16} B^6 l^6 + \frac{35}{128} B^4 l^4 + \frac{63}{256} B^2 l^2 + \frac{231}{1024}\right)\right],$$

unde S este dată de (23), iar h, conform cu expresia lui x_1, este dat de

$$h = a = 1 + a_2 l^2 + a_4 l^4. \tag{28}$$

Observaţie asupra forţei de sucţiune. Ca şi în cazul precedent, cînd bordurile de atac sînt subsonice, coeficientul de sucţiune $\sigma_m^{*(n)}$ este dat de aceleaşi expresii (18), unde însă a va avea expresia (28).

Remarcă generală. Prin metoda utilizată mai sus, calculul caracteristicilor aerodinamice ale aripilor cu linia de închidere curbă este foarte mult simplificat, deoarece putem aplica metoda reziduului.

Studiul claselor de aripi cu linia curbă de închidere poartă interes, deoarece aceste aripi pot înlocui foarte bine aripile cu bordul de fugă frînt, care nu sînt realizate practic din cauza fuzelajului.

ANEXĂ

Pentru aripile cu borduri subsonice :

$$A_{10} = -\frac{w_{0,0}\,l^2}{\omega_{10}}, \qquad A_{20} = \frac{2\,l^2\,w_{10}}{3\,\omega_{12}}, \qquad A_{22} = -\frac{w_{10}}{3\,\omega_{12}},$$

unde

$$\omega_{10} = E(k), \qquad (k = \sqrt{1 - B^2 l^2})$$

$$\omega_{12} = -\frac{(1 - 2\,B^2 l^2)\,E(k) + B^2 l^2 K(k)}{3\,(1 - B^2 l^2)}.$$

Pentru aripile cu borduri supersonice:

$$K_{10} = -\frac{2\,w_{0,0}}{\pi\,B}\,\frac{B\,l}{\sqrt{B^2\,l^2-1}}, \qquad K_{20} = -\frac{2\,w_{10}\,l}{\pi}\,\frac{B^2\,l^2-2}{(B^2\,l^2-1)^{3/2}}$$

$$K_{21} = -\frac{2\,w_{10}}{\pi}\,\frac{1}{(B^2\,l^2-1)^{3/2}}, \qquad D = -\frac{2\,w_{10}}{\pi}\,\frac{B\,l}{\sqrt{B^2\,l^2-1}}$$

Primită la redacție la 16 februarie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *High Speed Aerodynamics*, Edit. tehnică, București, 1956.
2. — *Aplicarea metodei reziduului la calculul caracteristicilor aerodinamice în mișcările conice de ordin superior*, București, 1963 (lucrare nepublicată).

ASPECTE ALE DEPENDENȚEI PERIOADEI INIȚIALE A UZURII DE FACTORII MECANICI ȘI CHIMICI ÎN CAZUL FRECĂRII DE ALUNECARE MIXTE SAU LIMITĂ[1])

de DAN PAVELESCU

Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R. P. R., București

539.6

Lucrarea își propune să pună în concordanță problema ridicată de uzura micro- și macrogeometriei în prima perioadă (rodaj) precum și anumite aspecte privind reducerea acestei perioade în cazul utilizării unor aditivi de E.P. „chimic activi". Se studiază evoluția uzurii cu două instalații de măsură, respectiv cu un cuplu de frecare simplificat și cu un cuplu de frecare complex (în condiții variate de micro- și macrogeometrie), cu metodele trasori-radioactivi și gravimetrie.

În cazul rodajului chimic anumiți aditivi de *E P* definesc atît un caracter de „antiuzură" cît și un caracter de „antigripaj", care se suprapun. Datorită primului, se prelungește perioada de uzură inițială iar datorită celui de-al doilea, se reduce față de un rodaj normal, durata pînă la care este posibilă o sarcină sau o viteză mai mare. În cazul rodajului cu aditivi de E.P. sînt necesare criterii mai selective și anume diferențieri de terminologie.

INTRODUCERE

1. În perioada de început a uzurii unor suprafețe metalice cu mișcare relativă de alunecare, în condiții de ungere mixtă sau la limită, au loc o serie de fenomene, parțial definite, conturate în general pe bază de ipoteze. Dependența frecare-uzură, multitudinea și complexitatea fenomenelor,

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. techn. Mécanique appliquée", **10**, *3* (1965) (în limba engleză).

precizia experimentării limitată de erorile de măsură și îndeosebi de caracterul acestora, au creat dificultăți cercetării. Modul diferit de acceptare a unora sau a altora dintre ipotezele privitoare la evoluția fenomenului frecare-uzură a condus la admiterea sau la clasificarea diferită a variatelor tipuri de uzură (adezivă sau de contact, prin oxidare, termică, abrazivă corozivă, de oboseală, cavitațională etc. [1], [2], [3], [4]).

Prima perioadă a uzurii, cunoscută în literatura de specialitate sub denumirea de „rodaj", subînțelege uzura controlată a suprafețelor metalice noi și adaptarea lor progresivă — din punctul de vedere al micro- și macrogeometriei — spre o situație portantă optimă și, totodată, spre o „stare de suprafață" [2]) care să asigure pentru perioada următoare de lungă durată o viteză de uzură cît mai redusă, și deci un randament optim al sistemului mecanic. Datorită complexității fenomenului, chiar definirea exactă, cuprinzătoare, a rodajului este dificilă, situație reflectată uneori și de denumirea comună a fenomenului și a perioadei respective.

În această perioadă este mai bine definită pierderea de metal și modificarea progresivă a stării de suprafață, cu consecințe pentru perioada de uzură ce urmează. De asemenea se constată o unanimitate de păreri în ceea ce privește apariția — ca în cazul frecării uscate — a unor gradienți ridicați de temperatură la suprafața de frecare și posibilitatea dezvoltării instantanee a unor temperaturi mai mari în anumite puncte ale suprafeței, aspecte explicate însă diferit, fie prin deformările elastice sau plastice ce intervin în stratul superficial, fie prin ruperi, microașchieri etc. produse de distrugerea coeziunii moleculare în cazul contactului direct [1], [5], [8], [10]. Bowden indică în cazul frecării uscate apariția unor temperaturi ce depășesc 500°C [10].

În perioada și în cazul menționat, cînd acționează limitat în timp numai o anumită categorie de factori, pot — în mod obiectiv — evolua numai unele dintre tipurile de uzură enumerate. Admitem acțiunea uzurilor adezive și abrazive în ceea ce privește pierderea de metal și că ea descreștе continuu în importanță. Uzura de abraziune, al cărei proces principal se consideră de mulți autori a fi microașchierea [2], [4], [11], trebuie privită ca o suprapunere de efecte : acțiunea inițială, directă, a microasperităților suprafeței mai dure, care au străpuns pelicula de lubrifiant (în cazul existenței ei), acțiunea de microașchiere a particulelor desprinse din diferite cauze (oboseală prin deformări repetate ale stratului superficial, ruperi prin contact sau sudări locale, desprinderi prin supraîncălziri, ruperi prin suprapresiuni în microcavități etc. [1], [4], [10], [12]. Mediul în prezența căruia are loc frecarea, prin acțiunea sa de natură complexă fizico-chimică, complică evoluția fenomenului, contribuind direct sau indirect la accelerarea sau la încetinirea lui [2], [11], [13], [14].

Dezideratul „reducerii" primei perioade a uzurii, fără consecințe nefavorabile pentru starea de suprafață și, respectiv, perioada de „uzură

[2]) „Starea de suprafață" este definită de mulți autori prin rugozitatea la scară microgeometrică datorită prelucrării [3], [5]. Noi înțelegem prin stare de suprafață mai mult decît granița metal-mediu ambiant, și anume rugozitatea suprafeței împreună cu transformările de structură create prin frecare sau datorite mediului în straturile superficiale pe o adîncime de ordinul micronilor [7] [8] [9].

normală", a condus la cercetări și soluții diferite. Sînt cunoscute metode care au la bază o acțiune pur mecanică, prin intensificarea dirijată a uzurii abrazive (acțiunea unor pulberi introduse fie în aerul aspirat, fie — de dată mai recentă — produse prin arderea combustibilului [3]), metode cu acțiune chimică directă (anumiți aditivi de extremă presiune [3], [16], [17]) sau metode ce se adresează îmbunătățirii condițiilor de frecare la extremă presiune (anumiți aditivi de extremă presiune — adaosuri solide în ulei [3], [11], [15][3]).

Definirea exactă a uzurii ca fenomen și evoluția ei în prima perioadă sînt însă esențiale pentru rezolvarea din punct de vedere științific a problemei. Faptul că unele păreri sau rezultate obținute sînt divergente provine uneori și din condiții diferite.

Cu unele excepții [5], [10], [18], s-a creat opinia că microgeometria suprafețelor nu are contribuția cea mai importantă la desfășurarea „procesului de rodaj", subliniindu-se în mod just importanța majoră a macrogeometriei și a unui anumit raport între micro- și macrogeometrie [3], [5]. Totuși, există tendința de a explica și de a trata evoluția fenomenului numai prin prisma uneia sau a alteia dintre cele două stări amintite ale cuplului în frecare, admițînd drept criterii de definire criterii specifice mai ales uneia dintre stări (de pildă pentru microgeometrie aspectul curbei de uzură sau al suprafeței respective; pentru macrogeometrie consumul de ulei, randamentul mecanic, puterea maximă etc.).

ENUNȚAREA PROBLEMEI

2. În lucrarea de față, ne vom ocupa de cîteva aspecte ale perioadei rodajului prin uzură dirijată („chimică impusă"[4] — prin anumiți aditivi de extremă presiune, și „uzură mecanică" conjugată) în cazul frecării unor suprafețe metalice noi cu mișcare relativă de alunecare și în condiții de ungere mixtă sau la limită.

Aceste aspecte sînt, desigur, dependente de evoluția reală a fenomenului uzurii în perioada respectivă și deci în mod simultan de situația microgeometriei și a macrogeometriei. Cele două stări datorite prelucrării mecanice, asamblării, tehnologiei în general etc. pot subzista cu ponderi diferite funcție de complexitatea sistemului mecanic respectiv. Dacă în cazul unui cuplu de frecare relativ simplu se poate asigura o formă geometrică cvasiideală prin eliminarea defectelor macrogeometriei și prin realizarea unei anumite microgeometrii, în cazul unui sistem mecanic mai complex, produs în mare serie, ca de pildă, subansamblul piston-cilindru, bielă-arbore cotit etc. ale unei mașini termice, raportul dintre cele două stări este de natură statistică. Prin faptul că în special cea de-a doua stare

---

[3]) Ca aditivi de rodaj cu acțiune chimică directă sînt utilizați o serie de aditivi de extremă presiune sau antigripanți pe bază de sulf, fosfor, clor, amestecuri etc.

Adaosurile solide (grafit coloidal, bisulfură de molibden), deși nu au acțiune chimică directă, sînt socotite uneori în categoria metodelor chimice.

[4]) Denumim „uzură chimică impusă", uzura provocată prin aditivii de rodaj, spre deosebire de „uzura de coroziune" care poate fi o uzură accidentală, nedirijată.

(definită uneori prin ondulații cu o anumită lungime de undă, ovalități, conicități, nealinieri, jocuri diferite etc.) nu poate fi impusă decît în anumite limite, în perioada de început a uzurii ea va influența evoluția uzurii primei stări de asemenea natură, încît nu poate fi vorba de un „raport" în înțelesul limitat matematic, ci de natură complexă mecanică-fizică-chimică.

În ceea ce privește aditivii de E.P., aceștia au fost studiați și utilizați mai ales pentru a mări durata de funcționare a mașinilor [16], [19], [20], [22], [23]; cu toată importanța acestei probleme, relativ mai puține lucrări se referă la acțiunea aditivilor de E.P. în timpul rodajului; predomină lucrările românești [2], [6], [17].

Ne-a interesat în special un „paradox" aparent și anume: utilizarea pentru a reduce perioada de rodaj — în care o anumită cantitate de metal trebuie îndepărtată prin uzură — a unor aditivi care prin excelență sînt cunoscuți pentru calitățile lor de «anti-uzură».

METODE EXPERIMENTALE

3. Aspectele experimentale la care ne vom referi se bazează pe utilizarea a două sisteme mecanice și de măsură diferite (utilizînd atît trasori radioactivi cît și determinări gravimetrice), și anume:

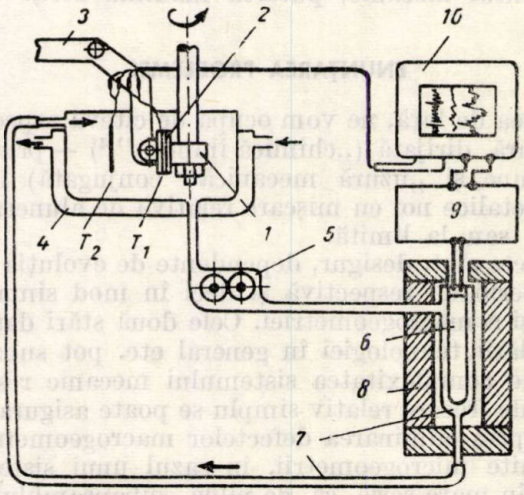


Fig. 1. — Schiță de principiu a instalației experimentale pentru măsurarea continuă a uzurii unui sistem de frecare simplu:

1. — bucșă radioactivă de Bz;
2. — placă de oțel;
3. — pîrghie de încărcare;
4. — cuva de ulei;
5. — pompă pentru recircularea lubrifiantului;
6. — contor G—M;
7. — circuite de ulei;
8. — protecție la Pb;
9. — numărător — integrator;
10. — potențiometru electronic înregistrator.

a) un cuplu mecanic simplu, care să permită eliminarea defectelor de macrogeometrie ; s-a folosit sistemul mecanic și instalația de măsură din figura 1. Cuplul de frecare respectiv asigură un contact „liniar" între o suprafață plană fixă și o suprafață cilindrică în rotație ; ca trasor radioactiv a fost utilizat In ^{114}, sistemul de măsură fiind descris în lucrarea [25] ;

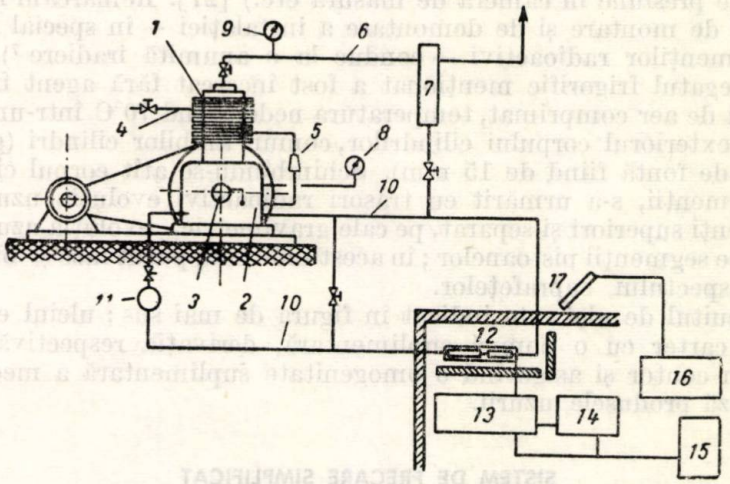


Fig. 2. — Schița de principiu a instalației experimentale pentru măsurarea uzurii unui sistem de frecare complex.

1. — Corpul cilindrilor ; 2. — carter ;
3. — pompă de ungere ;
4. — conductă de aspirație ;
5. — conductă de egalizare ;
7. — separator de ulei ;
8. — manometru de ulei (presiune, ungere) ;
9. — idem (presiune refulare) ;
6. și 10. — conductă de circulație a uleiului ;
11. — pompă de circulație a uleiului ; 12. — contor GM ;
13. — numărător de impulsuri ;
14. — integrator ;
15. — stabilizator de tensiune ;
16—17. — dozimetru ;

b) un cuplu mecanic complex, care să conțină ambele stări, în limite elocvente ; s-a utilizat sistemul de măsură și ansamblul din figura 2.

Instalația permite studiul uzurii segmenților unui compresor de tip frigorific, echicurent cu piston, cu doi cilindri verticali de fontă [5]). Pentru a elimina dificultățile — cauză de erori — legate de utilizarea știfturilor radioactive, s-a preferat iradierea întregului segment de fontă. Secțiunea eficace a izotopului Fe ^{59} indicînd un timp prea lung de iradiere, s-a ales ca trasor Ir ^{192} [6]). Funcție de secțiunea sa eficace, masa segmentului (aprox. 12 g) și fluxul de neutroni disponibil, s-a stabilit necesar procentul de 0,1 Ir^{192}, care să conducă la o activitate de 4—6 Cu/segment. De ase-

[5]) Alte caracteristici : 2 cilindri verticali cu alezajul de 65 Ø și orificiu comun de aspirație și refulare ; pistoanele, din fontă cu cîte 4 segmenți de compresiune și cîte un segment de ungere ; cursa 65 mm ; turația 575 rot/min ; volumul general de piston : 14,87 m^3/oră ; sistemul de ungere central, alimentare cu pompă cu roți dințate.

[6]) Secțiunea eficace 1 000 barn (pentru atom de izotop) ; T/2 : 74,4 zile ; radiații β și γ de diferite energii.

menea s-a preferat un sistem traductor studiat [26], şi anume doi contori G.M. în paralel, plasaţi în axul unui recipient de sticlă, astfel ca geometria de măsură să fie simplă, reproductibilă, şi coeficientul geometric să poată atinge valoarea 0,4. S-a preferat acest sistem traductorului cu scintilaţie pentru a se elimina anumiţi factori de eroare (variaţii de temperatură, variaţii de presiune în camera de măsură etc.) [27]. Remarcăm faptul că operaţiile de montare şi de demontare a instalaţiei — în special manipularea segmenţilor radioactivi — conduc la o anumită iradiere [7]).

Agregatul frigorific menţionat a fost încercat fără agent frigorific, cu sarcină de aer comprimat, temperatura nedepăşind 70°C într-un anumit punct la exteriorul corpului cilindrilor, comun ambilor cilindri (grosimea peretelui de fontă fiind de 15 mm). Schimbîndu-se atît corpul cilindrilor cît şi segmenţii, s-a urmărit cu trasori radioactivi evoluţia uzurii celor doi segmenţi superiori şi separat, pe cale gravimetrică, evoluţia uzurii fiecăruia dintre segmenţii pistoanelor ; în acest mod s-au putut face şi observaţii asupra aspectului suprafeţelor.

Circuitul de ulei este indicat în figura de mai sus ; uleiul era recirculat în carter cu o pompă suplimentară, derivaţia respectivă reglînd debitul în contor şi asigurînd o omogenitate suplimentară a mediului ce vehiculează produsele uzurii.

SISTEM DE FRECARE SIMPLIFICAT

4. Să presupunem pentru început evoluţia uzurii a două suprafeţe în frecare, fără defecte de macrogeometrie, cu rugozitate bine cunoscută şi în condiţiile celorlalţi parametri bine determinaţi. Într-o astfel de condiţie simplificată, complexitatea fenomenului poate conduce, totuşi, la o fluctuaţie aleatoare a curbelor uzurii, regiunea dispersiei (fig. 3) putînd fi limitată mai mult sau mai puţin, fără însă a fi redusă pe cale experimentală la o anumită medie, ca în figura 4, în care etapa de început a uzurii este definită printr-o curbă a evoluţiei fenomenului în timpul t_1.

O astfel de imagine poate reprezenta schematic fie evoluţia uzurii unei singure suprafeţe, fie, global, uzura unui ansamblu de suprafeţe.

După cum s-a arătat [27], [28], metoda izotopilor radioactivi [8]) în cazul uzurii nu este de natură să simplifice măsurătoarea datorită caracterului statistic atît al evoluţiei fenomenului cît şi al metodei radioactive. Evoluţia aleatoare a uzurii „modulează" prin intermediul activităţii produselor respective numărarea dezintegrărilor radioactive, cu caracter de asemenea statistic. Se produce continuu o variaţie a erorilor, care influenţează reproductibilitatea şi reduce precizia măsurătorii. Repartiţia duratelor t_1, t_2, t_3,..., este aleatoare şi neconcordantă cu ordinea 1, 2, 3,... a curbelor respective ; împrăştierea „punctelor" unei curbe sau a curbelor reproduse de un număr de ori, marchează o anumită zonă.

[7]) Menţionăm că în această privinţă literatura de specialitate nu este concludentă, indicînd diferite doze în cazul unor instalaţii similare.

[8]) Metoda trasorilor radioactivi intervine favorabil din punctul de vedere al sensibilităţii, înregistrării continue, a aspectelor cantitative de transfer, difuziune etc. [3], [9] [25] [28].

Sistemul de măsură arătat în figura 1 deși simplificat, nu a permis reducerea fluctuațiilor sub o abatere medie de $\pm 25\%$. Reținînd aceste aspecte, vom considera pentru simplificare că frecarea în condițiile arătate

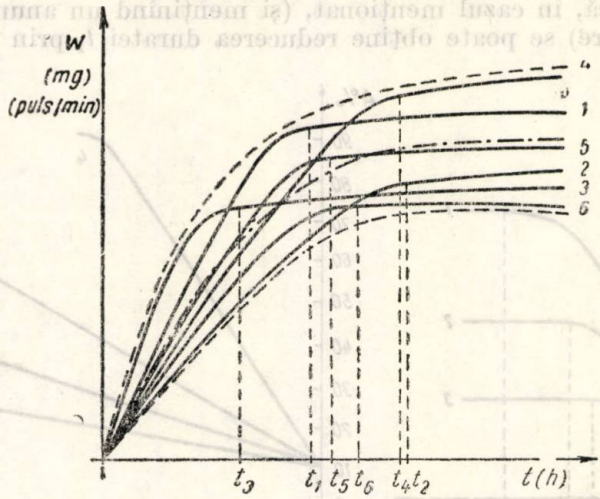


Fig. 3. — Zonă de dispersie (schematizată) a curbelor de uzură în cazul schimbării cuplului de frecare (W — uzura ; T — timp).

generează uzura, a cărei evoluție este reprezentată, totuși, printr-o „medie", ca în figura 1.

Rezultatele obținute au arătat că, în cazul micșorării progresive a rugozității (al reducerii înălțimii medii a asperităților suprafețelor prin

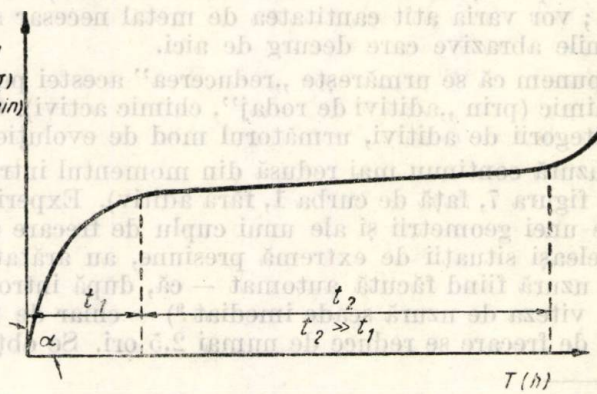


Fig. 4. — Schița evoluției uzurii în perioada inițială t_1 (de rodaj) și în perioada de funcțiune normală t_2 (W — uzura ; T — timp).

diferite moduri de prelucrare), rezultă în mod implicit o familie de curbe de uzură ca în figura 5, în care perioada cea mai redusă de rodaj corespunde

înălțimii medii celei mai reduse a asperităților; aceeași constatare se exprimă în figura 6 [29] prin prisma „suprafeței de contact", după părerea noastră mai greu de apreciat (chiar prin metode electrice).

Rezultă că, în cazul menționat, (și menținînd un anumit regim de frecare și ungere) se poate obține reducerea duratei t_1 prin realizarea în

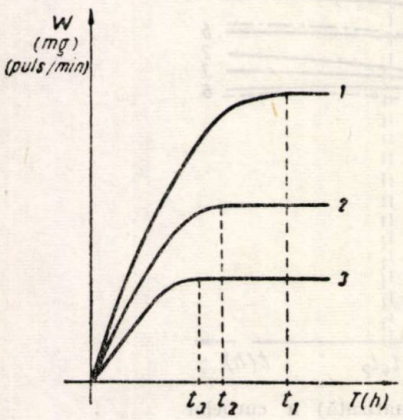


Fig. 5. — Schiță privind durata uzurii inițiale, funcție de calitatea suprafețelor (curba 1 — rugozitatea medie cea mai mare) W — uzura; T — timp.

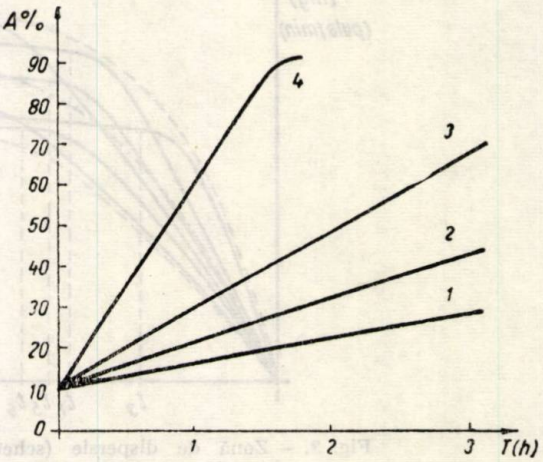


Fig. 6. — Durata rodajului în funcție de netezimea inițială a pieselor

1. — Suprafața de clasă 1, 2 și 3; 2. — cl. 4; 3. — cl. 5; 4. — cl. 6 [29] (A — suprafața de contact %)

prealabil a unei anumite rugozități și că, în mod implicit, orice variație a rugozității suprafețelor de frecare conduce la variații în același sens ale perioadei t_1; vor varia atît cantitatea de metal necesar să fie îndepărtat cît și acțiunile abrazive care decurg de aici.

Presupunem că se urmărește „reducerea" acestei perioade printr-un procedeu chimic (prin „aditivi de rodaj", chimic activi). Sesizăm, ca efect a acestei categorii de aditivi, următorul mod de evoluție a uzurii:

— O uzură continuu mai redusă din momentul introducerii aditivului (curba 2 figura 7, față de curba 1, fără aditiv). Experimentările făcute în condițiile unei geometrii și ale unui cuplu de frecare simplificat, efectuate în aceleași situații de extremă presiune, au arătat — înregistrarea curbelor de uzură fiind făcută automat — că, după introducerea aditivului de E.P., viteza de uzură scade imediat [9] — chiar de 28 de ori —, iar coeficientul de frecare se reduce de numai 2,5 ori. Se obține astfel un tip

[9]) Astfel de rezultate au fost obținute cu 2,5% aditiv de E. P. (1,5% ulei sulfurizat și 1% ditiofosfat de zinc) în ulei STAS 410; cuplul de frecare Bz 6 + 1% în pe oțel de arbore călit. De asemenea s-au obținut efecte similare cu: 6% parafină clorurată + 1% naftenat de plumb; 5% ulei sulfurizat; 10% ditiofosfat de zinc etc. în uleiurile STAS 10004 V și 10003 T. la cca. 50°C și 0,35 m/s viteza de alunecare. S-au făcut încercări și la 100°C și sarcini specifice pînă la 5560 kgf/cm (după Hertz) cu aditivii menționați sau cu alți aditivi și uleiuri [23], [24].

de evoluție a uzurii ca în figura 8, care explică o pierdere de metal (specifică sau globală) mai mică decît cea obținută în cazul uzurii fără aditivi.

S-au obținut și rezultate care, arată că, în prezența aditivului [10]), deși inițial uzura este mai mare, ea se diminuează foarte repede, în timp ce uleiul mineral fără aditivi dă inițial uzuri mici, dar care evoluează treptat, depășind la un moment dat uzura provocată de aditivi [6], [11] [18], și ar rezulta o evoluție ca în figura 7 (curba 3), care ar explica astfel reducerea perioadei t (nu este precizată încărcarea diferită).

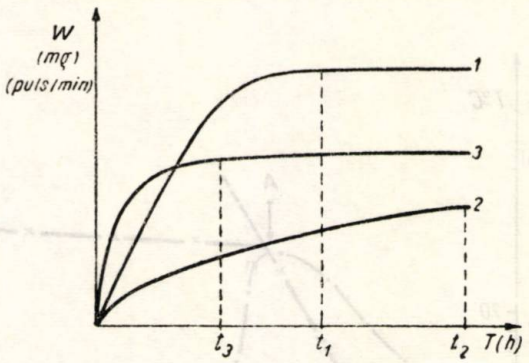


Fig. 7. — Schița evoluției uzurii *1* — fără aditiv; *2* și *3* — cu aditiv.

Asupra aspectelor diferite atît în ceea ce privește evoluția uzurii în prima fază cît și durata întregii perioade vom reveni.

Se admite totuși că, eliminînd printr-o acțiune chimică directă a aditivului de antigripaj, declanșată de supraîncălziri, începuturile de lipiri sau de gripaj pe microsuprafețe, și asigurîndu-se, totodată, straturi polare rezistente, lubrifiantul cu aditiv va conduce la o pierdere în greutate uniformă și apreciabil mai mică [6], [17] [11]).

Cercetările efectuate cu instalația din figura 1 în condițiile cuplului de frecare simplificat și ale uneia dintre suprafețe degradate în prealabil (cu rizuri și ciupituri pronunțate) au arătat că aditivii de extremă presiune, menționați, reușesc să evite gripajul, să reducă viteza de uzură din prima fază și, după un timp mai lung, să aducă remedieri calității suprafeței, fără a reuși să elimine complet urmele defectelor macrogeometrice inițiale. În această perioadă, cuplul respectiv a suportat sarcini ridicate, lucrînd în condiții severe, de extremă presiune, în toată perioada respectivă.

[10]) Este vorba de adaosuri pe bază de sulf și respectiv de lecitină, substanță organică din grupa fosfatidelor; se arată că se descompune la aprox. 120—130°C, eliminînd acidul ortofosforic, care reacționează cu metalul la „punctele" respective de contact.

[11]) Sînt arătate diferite moduri de acțiune chimică specifice compușilor respectivi. Pentru lecitină se arată, în afară de acțiunea cu metalul în punctele cu temperatură mai ridicată a acidului ortofosforic și eliberarea a 2 mol polare de acizi grași, pasivizarea suprafeței prin fosfat și realizarea peliculei protectoare rezistente a substanțelor polare.

Rezultă că anumiți aditivi de E.P. utilizați ca aditivi de rodaj, au ca efect ameliorarea suprafeței printr-o acțiune mai lentă de pierdere în greutate, înlesnind, totodată, prin efect polar și transformări de structură în straturile superficiale, creșterea capacității portante etc., aplicarea unor presiuni specifice mai ridicate chiar în timpul rodajului. Această perioadă

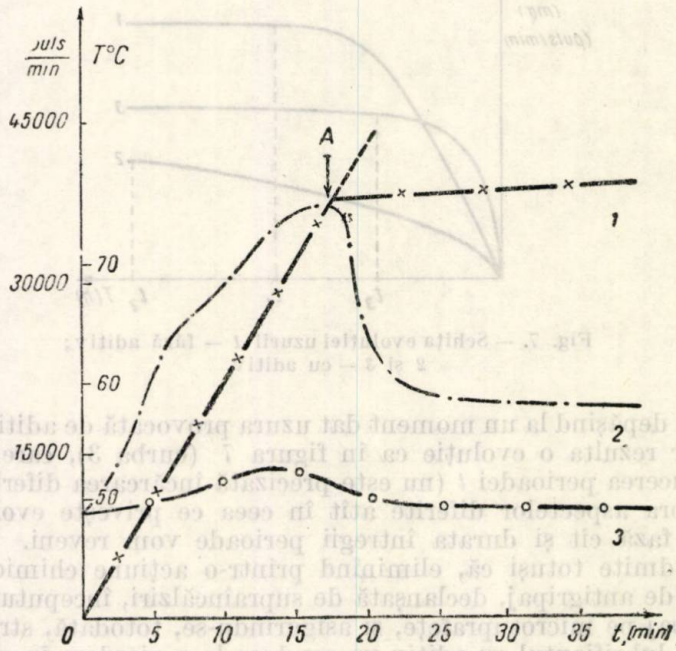


Fig. 8. — Diagrama evoluției uzurii (1): *A* — introducerea aditivului. Evoluția temperaturii suprafeței (2) și a uleiului (3).

se prelungește și nu poate fi definită riguros prin „criterii" ca : aspectul de suprafață sau alura curbei de uzură, care nu concordă cu sarcinile suportate. Considerăm că acțiunea de natură fizico-chimică a aditivilor de E.P. este diferită în condițiile variate ale modificării viscozității [30], în mod esențial în timpul trecerii de la regimul mixt la diferite regimuri de extremă presiune și în prezența unor particule abrazive.

În ceea ce privește alura de „uzură intensă" în prima fază (fig. 7, curba 3) aceasta ar putea fi explicată fie ca o acțiune a unor anumiți aditivi pe bază de sulf, care conduc la compuși cu rezistență mai mare la forfecare (așa cum o dovedesc cercetările recente efectuate cu mijloace moderne [9], [31]), fie prin schimbarea regimului de sarcină.

SISTEM DE FRECARE COMPLEX

5. Evoluția fenomenului se complică în cazul în care cele două suprafețe în frecare fac parte dintr-un agregat de mare serie, cînd nu se pot evita fluctuațiile de calitate.

O geometrie defectuoasă, nealinieri, jocuri neuniforme etc. intervin nefavorabil asupra uzurii ansamblului de suprafețe și îndeosebi a unor anumite suprafețe. Ne referim, de pildă, la efectul produs de nealinierea arborelui cotit asupra evoluției uzurii unor suprafețe (cuzinet — fus — — cilindru), deși acestea fuseseră în prealabil superfinisate. Un astfel de sistem geometric defectuos conduce la o evoluție a uzurii care reflectă o uzură mai intensă pe o perioadă mai mare. Spre deosebire de situațiile prezentate mai sus, în cazul unui astfel de ansamblu, cantitatea globală de material îndepărtat de pe aceeași pereche de suprafețe în frecare (în regim similar de frecare — ungere) este, evident, mai mare și se datorește în special „adaptării" macrogeometriei.

Anumite accidente (suduri locale începuturi de gripaj, etc.) survenite pe parcursul rodajului inițial normal, dar defectuos continuat (suprasarcini, viteze ridicate, defecte de ungere etc.), conduc la evoluții ale uzurii ca în cazurile tipice schimbărilor repetate de regim.

În general, astfel de situații sînt complicate în funcționarea unei mașini termice prin interacțiunea unor factori interni, astfel că se ajunge la o variație statistică a punctelor experimentale sau a curbelor de uzură, cu abateri medii mai mari.

Experiențele efectuate în laboratorul de radioizotopi I.M.A., cu instalația din figura 2, sînt concludente asupra influenței preponderente a macrogeometriei suprafețelor și geometriei asamblării. La o parte dintre cilindrii de fontă [12]) experimentați au fost determinate în prealabil anumite defecțiuni de prelucrare : ovalități de ordinul a 4...6 sutimi și, totodată, conicități de 5...6 sutimi ; în majoritatea cazurilor s-au remarcat și ondulații pe generatoare (cu lungimea de undă de 5...10 mm), precum și variații ale diametrului interior (65 Ø) între 1...3 sutimi. Unii segmenți prezentau rizuri de prelucrare și ovalități. S-au constatat, totodată, și jocuri diferite la piciorul bielelor. Remarcăm deci existența condițiilor cerute de studiul nostru.

Ungerea fiind făcută cu ulei 5004 F neaditivat, s-au obținut curbe medii de uzură ale celor doi segmenți superiori, marcați cu Ir^{192}, ca în figura 9.

Deși s-a menținut regimul de frecare, rezultă că trecerea de la perioada uzurii inițiale la aceea a uzurii normale (de exploatare) se face prin parcurgerea mai multor faze ; în cazul respectiv, evoluția fenomenului definește existența a trei faze distincte, în concordanță cu anumite rezultate obținute alte lucrări [32] și [33] la rodarea unor motoare cu ardere

[12]) Analizele au indicat o fontă obișnuită de cilindri și de segmenți, cu structură metalurgică corespunzătoare. Segmenții din aceeași șarjă au fost selectați pe bază de greutate și elasticitate. La obținerea datelor experimentale fiind ajutat de ing. I. Iliuc și ing. E. Buzilă, le aducem mulțumiri și pe această cale.

internă. Marcarea pronunţată a unor zone distincte deosebeşte esenţial rezultatele de cele obţinute în cazul unei macrogeometrii normale (curbe cu alură continuă) şi confirmă faptul că macrogeometria caracte-

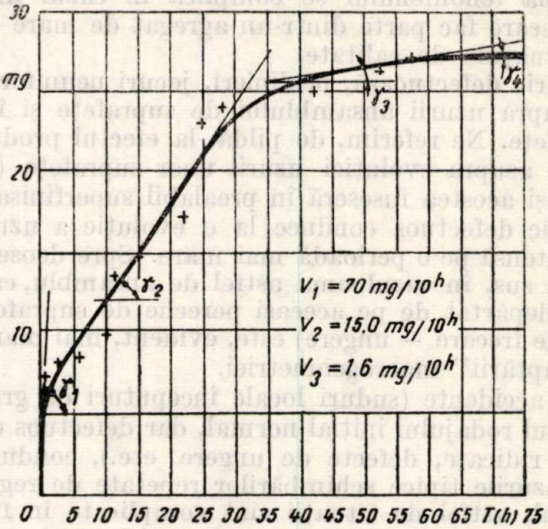


Fig. 9 — Curba de uzură medie a segmenţilor superiori de compresie (cilindrică 1 şi 2) — metoda radioactivă.

rizează alura curbei de uzură şi fazele ei. Astfel de faze diferite apar cu atît mai mult cu cît „rodajului" îi revine suplinirea anumitor defecte de prelucrare şi montare.

Evoluţia fenomenului care reflectă deci multitudinea şi interacţiunea factorilor care determină perioada respectivă nu este însă totdeauna simplificată prin intervenţia unor aditivi chimici.

Să remarcăm în special primele două faze ale evoluţiei uzurii (fig. 9) în situaţia utilizării unui lubrifiant neaditivat. În prima fază, care durează circa 2 ore, se remarcă cea mai ridicată viteză de uzură datorită unor fenomene adezive şi abrazive. În a doua fază, viteza de uzură este aproape constantă, iar acumularea produselor (radioactive) ale uzurii creşte liniar în timp. Este, desigur, faza în care s-au creat suficiente microzone „netede", şi deci o portanţă mai corespunzătoare, iar uzurile de adeziune şi abraziune evoluează, cu acţiune din ce în ce mai limitată

a) În cazul aplicării din primul moment — cum pare logic mai ales în condiţii de laborator — a unei anumite metode chimice pentru a evita procesul de uzură intensivă sau tendinţele de gripare, s-a admis că aditivul de extremă presiune cu „acţiune chimică directă" intervine în condiţiile unor temperaturi mai ridicate, la punctele de „contact" ale microgeometriei şi de asemenea în microzonele de contact „impuse" de macrogeometrie. Funcţie de modul de acţiune de natură fizico-chimică caracteristic diferitelor tipuri de aditivi (pe bază de fosfor, clor, sulf etc.) menţionăm :

— In prima fază, în care se adaptează microgeometria în condițiile unor presiuni specifice corespunzătoare situației macrogeometriei, ale trecerii de la un regim mixt la unul limită, ale variațiilor viscozității, se poate obține — la fel ca în situația prezentată la capitolul anterior o anumită evoluție a uzurii caracterizată, în general, prin limitarea trep-

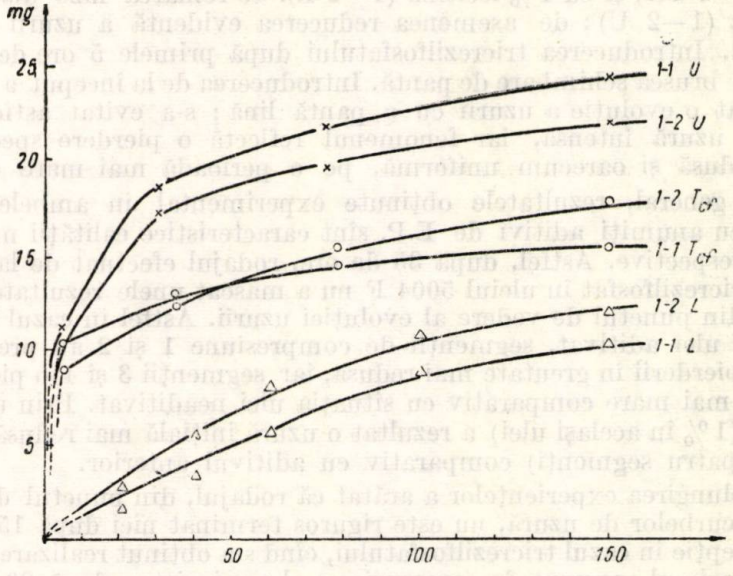


Fig. 10 — Curbele de uzură (individuale) ale segmenților superiori.
1 și 2 de compresie (cilindrul 1) — metoda gravimetrică — obținute după 150 ore în trei situații : U — ulei 5004F ; Tcf — ulei 5004 F + 2% tricrezil fosfat, după primele 5 ore ; L — ulei 5004 F + 1% lecitină, de la început.

tată a adeziunii și abraziunii, evitarea gripajului etc. (datorită „tocirii" sau ruperilor limitate ale microasperităților în contact, măririi polarității „filmului" de lubrifiant, a capacității portante etc.).

— De asemenea în faza a doua (fig. 9, în care adaptarea microgeometriei nu mai are pondere însemnată în ceea ce privește pierderea de metal, datorită creșterii caracteristicii de portanță, eventual a prezenței unor produse chimice cu calități de ungere) uzura evoluează după o curbă cu pantă mai mică și, evident, cu probabilitate de gripaj mai îndepărtată, deși frecarea suprafețelor decurge încă în condiții severe (nu s-au înlăturat defectele de macrogeometrie și nu s-au redus încă presiunile specifice ridicate).

b) S-a studiat de asemenea și evoluția uzurii în cazul utilizării unei „formule mixte" : ulei neaditivat în prima fază și ulei aditivat în faza a doua și următoarele (ale perioadei inițiale). La fel ca în situația arătată pentru un cuplu de frecare simplificat, s-a obținut o reducere însemnată a vitezei de uzură, după introducerea aditivului. Caracterul uzurei primei

faze (fără aditiv), din punctul de vedere al pierderii de metal a influențat evoluția fenomenului în întreaga perioadă, aditivului revenindu-i, evident, pe această linie o sarcină mai mică.

În figura 10 sînt prezentate comparativ curbele de uzură (obținute cu metoda gravimetrică) ale primilor doi segmenți de compresiune ai aceluiași piston în perioada rodajului cu ulei 5004 F (1—2 U), cu 2 % tricrezil fosfat (1—2 Tcf) și cu 1% lecitină (1—2 L). Se remarcă faze distincte în special la (1—2 U); de asemenea reducerea evidentă a uzurii în cazul aditivării. Introducerea tricrezilfosfatului după primele 5 ore de uzură a produs o bruscă schimbare de pantă. Introducerea de la început a lecitinei a provocat o evoluție a uzurii cu o pantă lină; s-a evitat astfel prima fază de uzură intensă, iar fenomenul reflectă o pierdere specifică de metal redusă și oarecum uniformă, pe o perioadă mai mare de timp.

În general, rezultatele obținute experimental în ambele situații (a și b) cu anumiți aditivi de E.P. sînt caracteristice calității macrogeometriei respective. Astfel, după 35 de ore, rodajul efectuat de la început cu 2% tricrezilfosfat în uleiul 5004 F nu a mascat unele rezultate contradictorii din punctul de vedere al evoluției uzurii. Astfel în cazul aceluiași piston și ulei aditivat, segmenții de compresiune 1 și 2 au prezentat o pantă a pierderii în greutate mai redusă, iar segmenții 3 și 4 o pierdere în greutate mai mare comparativ cu situația ulei neaditivat. Prin utilizarea lecitinei (1% în același ulei) a rezultat o uzură inițială mai redusă (pentru toți cei patru segmenți) comparativ cu aditivul anterior.

Prelungirea experiențelor a arătat că rodajul, din punctul de vedere al alurii curbelor de uzură, nu este riguros terminat nici după 150 de ore (cu o excepție în cazul tricrezilfosfatului, cînd s-a obținut realizarea perioadei t_1 la primul segment de compresiune al unui piston după 80 de ore). Fluctuația rezultatelor de la un cilindru la altul (al aceluiași bloc) și de la un bloc la altul s-a dovedit totuși importantă, în genul arătat în figura 3. Zona de împrăștiere a curbelor celor 8 segmenți de compresiune a reflectat, în general, o abatere de $\pm$ 35%. față de o curbă medie, Este interesant de remarcat că și în cazul utilizării acestor aditivi s-a definit existența a unor zone distincte de uzură. Temperatura medie măsurată în același punct exterior corpului de fontă, comun ambilor cilindri, a fost mai redusă cu aproximativ 8 % față de rodajul fără aditivi.

Din punctul de vedere al „aspectului" suprafețelor, după 35 de ore în cazul tricrezilfosfatului și după 21 de ore în cazul lecitinei, segmenții prezentau o suprafață asemănătoare celei obținute după 45 de ore cu ulei fără aditiv; în toate aceste determinări s-au menținut pete și rizuri pe segmenți, aspecte aparent în concordanță cu curbele de uzură respective care nu indicau încă atingerea zonei de „uzură normală". După 150 de ore de funcționare, aspectul suprafețelor celor opt segmenți de compresiune era diferit, în general predominînd porțiunile lustruite. După acest timp, după aspect, nu s-au putut deosebi în mod esențial segmenții rodați cu aditivi față de situația fără aditivi. Aspectul suprafețelor indica însă încheierea perioadei t_1 uneori în contradicție oarecum cu alura curbelor de uzură respective.

Utilizarea acidului ortofosforic (0,5% în uleiul 5004 F) a condus la schimbarea radicală a aspectului suprafeței segmenților și cilindrilor după primele 2 ore (aspect de coroziune).

Rezultă că, în perioada de rodaj, cantitatea de metal pierdută nu depinde ca pondere, exclusiv de metoda chimică utilizată, ci îndeosebi de calitatea uzinării în general. În nici un caz metoda chimică nu poate „egaliza" prin perioade inițiale a uzurii de aceeași durată, situații diferite (mecanice și metalurgice). În cazul unui agregat care prezintă suprafețele în frecare cu un grad avansat de rectificare și totodată, este realizat fără defecte de macrogeometrie și montaj, în general metoda chimică va asigura în plus performanțe de calitate ale suprafețelor și evoluția fenomenului fără tendințe de gripaj.

DURATA ȘI ÎNCHEIEREA PERIOADEI DE UZURĂ INIȚIALĂ

6. Cele expuse anterior ne permit să abordăm un alt aspect pe care îl socotim deosebit de important, și anume privind terminarea perioadei de uzură inițială.

Este evident că macrogeometria constituie un factor esențial pentru prelungirea duratei menționate, activînd factorii de uzură de natură mecanică.

Încheierea „rodajului" unui cuplu de două suprafețe în mișcare relativă de alunecare și în condiții de ungere mixtă sau la limită, aparținînd unui sistem mecanic mai complex, este destul de dificil de apreciat în mod riguros numai după aspectul suprafețelor sau al alurii curbei de uzură. Este evident că nu se poate vorbi de încheierea rodajului anumitor suprafețe (segment, palier, cilindru etc.) fără a avea certitudinea terminării procesului respectiv de uzură pentru agregat în ansamblul său, pe baza altor criterii (curba de putere, de consum de ulei etc.)

Totodată, în cazul unei „uzuri chimic impuse", datorită specificului acțiunii aditivilor de extremă presiune — utilizați ca aditivi de rodaj —, încheierea perioadei de uzură inițială, după cum s-a văzut, nu poate fi de asemenea indicată în mod riguros de criterii obișnuite, aspect complicat prin acțiunea diferită, caracteristică aditivului respectiv. De asemenea regimurile termice și de ungere diferite (hidrodinamic, semifluid, sau limită) întîlnite în cazul aceluiași agregat, sau chiar în cazul unui singur cuplu de suprafețe (piston-cilindru), creează condiții diferite de acțiune a aditivului. Ne referim desigur la acei aditivi care s-au dovedit eficace și au prezentat o evoluție după o curbă ca în figura 8.

Dacă admitem condiții perfect similare de frecare, cu și fără aditiv — deși practic comparația nu poate fi obținută în mod riguros datorită schimbării cuplului de frecare la fiecare experiență — și admitem că aditivul de rodaj facilitează realizarea unor suprafețe de frecare adecvate și limitează acțiunea adezivă sau abrazivă conducînd la o pierdere în greutate uniformă și apreciabil mai mică, este evident că perioada de uzură va comporta un timp mai lung pentru îndepărtarea aceleiași cantități de metal. De asemenea în cazul în care aditivul respectiv acționează numai

„în punctele calde", pentru a rezolva totuși defectele de macrogeometrie — care reprezintă ponderea cea mai mare de pierdere de metal —, el va impune o perioadă de uzură mai îndelungată comparativ cu situația cunoscută a lubrifiantului neaditivat [13]) (care conduce la o viteză de uzură mai mare mai ales în prima fază).

Aceste concluzii, se bazează pe următoarele constatări experimentale :

a) Evoluția uzurii din figura 10 (în condiții de presiune normală pentru cuplul respectiv și în prezența unor aditivi de E.P.), indică o viteză de uzură aproape constantă și limitată, care pentru îndepărtarea unei anumite cantități de metal prelungește uzura un timp mai lung, curbele prezentînd pante din ce în ce mai mici, care sînt dificil de diferențiat în mod riguros (dacă se ține seama și de fluctuațiile statistice amintite). Efectul uzurii în prima fază (de 5 ore) rezultă clar, ca pondere, din diferența ordonatelor curbelor celor doi aditivi.

b) Experimentînd, în condiții variate de E.P. (instalația fig. 1), în prezența aditivului (6% parafină clorurată + 1% naftenat de plumb în ulei STAS 10004 V), suprafețe rugoase și deteriorate de Bz 6 (pe oțel lăpuit), deși raportul de durități era dezavantajos pentru suprafața deteriorată în prealabil, totuși după 6 ore de rodaj curba de uzură a indicat o pierdere redusă de metal (0,07 mg pe oră), iar suprafața și-a menținut macrodefectele. Rezultă că aditivul respectiv a creat un strat rezistent, protector (cloruri și oxizi) și a îmbunătățit, totodată, condițiile de frecare, *prelungind* în acest mod de cîteva ori perioada de uzură din punctul de vedere al cantității metalului de îndepărtat și *reducînd* perioada respectivă din punctul de vedere al condiției de sarcină fără gripaj.

În cursul experiențelor menționate s-a dovedit că timpul de răspuns al aditivilor de E.P. este foarte redus (de ordinul secundelor), avînd ca efect imediat reducerea vitezei de uzură, indiferent de rugozitate, deteriorarea suprafeței, condiții mai severe etc.

Aditivul de E.P. utilizat ca aditiv de rodaj acționează și împiedică gripajul în special în perioada cea mai critică, în care suprapresiunile sînt excesive, iar microrugozitatea „optimă" nu poate fi un factor suficient de evitare a gripajului.

c) Cu același cuplu de frecare a apărut totuși gripajul prin prelungirea duratei anumitor încercări și eliminarea aditivului, la epruvetele la care în prealabil rodajul părea terminat (prin alura globală a curbei de uzură — care se menținea la o pantă redusă —, aspectul suprafeței, evoluția temperaturii, încercarea la sarcină). Este interesant faptul că gripajul a reapărut în condiții egale de sarcină și viteză (față de încercările anterioare), la un anumit timp după înlocuirea lubrifiantului cu aditiv prin lubrifiant neaditivat. De asemenea griparea a coincis cu dispariția stratului „colorat" de pe suprafața bucșei de bronz. Au apărut, desigur, și aspecte de transfer de metal.

d) În sfîrșit, rodarea „la rece" a unor segmenți de fontă în prezența acidului ortofosforic (0,5% în ulei 5004 F) a decurs timp de 5 ore (deci

[13]) Menționăm că Uzina „Tehnofrig" din Cluj a confirmat pe o serie mai mare de agregate, de diferite tipuri, concluziile autorului privind durata rodajului cu anumiți aditivi de E.P.

tocmai în prima fază de uzură intensă), fără pierdere sensibilă de metal, iar suprafața segmenților a fost acoperită cu un strat de fosfat de fier. Dispariția acestui strat prin îndepărtarea aditivului a provocat o fază de uzură mai intensă.

Aceste aspecte indică destul de elocvent faptul că acțiunea chimică dirijată are efect preponderent asupra uzurii mecanice atît în cazul unui sistem de frecare simplu, cît și al unui sistem mai complex. Ea face ca influența macrogeometriei asupra uzurii microgeometriei să nu conducă în mod normal la fenomene de gripaj. În ambele situații fenomenul de uzură mecanică se prelungește datorită caracterului de antiuzură al unor aditivi, care prin efecte specifice de natură fizico-chimică creează stări de suprafață care promovează o viteză de uzură redusă și limitată.

Totodată, sistemul mecanic respectiv, datorită acțiunii de antigripaj a acelorași aditivi de E.P., poate suporta temporar, chiar în perioada rodajului, anumite suprasarcini și regimuri severe de frecare.

Această situație nu poate fi sesizată riguros cu criteriile obișnuite, în mod separat (fiecare în parte nefiind suficient de precis). Datorită caracterului complex al unor aditivi de E.P. folosiți ca aditivi de rodaj (includem de această dată și aditivii cu acțiune chimică indirectă) perioada de uzură inițială decurge fără pericol de gripaj pînă cînd se realizează complet regimul de stabilizare a uzurii și se crează jocurile adecvate funcționării optime a ansamblului mecanic (putere maximă de durată, consum minim de ulei etc.).

Aspectele de mai sus arată că utilizarea unor aditivi de E.P. ca aditivi de rodaj, care s-au dovedit eficace atît în ce privește reducerea uzurii cît și evitarea gripajului — în condițiile severe impuse printr-o mașină de încercat — este desigur perfect acoperitoare pentru rodarea cuplului piston-cilindru, lagăr-arbore cotit etc. cu presiuni specifice mai reduse. De asemenea va rezolva cu succes și anumite situații de presiune extremă create de defectele de fabricație. De asemenea nu se justifică introducerea aditivilor după consumarea primei faze a uzurii și nici eliminarea lor înainte de terminarea efectivă a întregii perioade de uzură inițială.

ASUPRA METODELOR MIXTE DE UZURĂ MECANICĂ ȘI CHIMICĂ

7. În lumina acestor aspecte și admițînd că supratemperaturile la punctele de contact sau prin deformări ale rugozităților, sînt inerente frecării, utilizarea unor aditivi de E.P. cu acțiune chimică directă în aceste puncte sau microzone pare a fi principial eficace atît în cazul rodării „la rece" cît și „la cald" (prin antrenare externă și respectiv prin autoacționare a agregatului). Totuși sînt de luat în seamă și următoarele aspecte :

— Funcționarea agregatelor „la rece" (chiar în sarcină de aer comprimat), nu va asigura toate condițiile întîlnite în exploatarea mașinii termice respective (dilatări, tensiuni în stratul superficial, acțiune corozivă a mediului etc.) ;

— Funcționarea agregatelor „la cald", presupunînd în cazul motoarelor termice temperaturi medii mai ridicate (zone peste 200°C în camera

de ardere) poate declanșa global reacția chimică (care normal necesită temperaturi mai reduse), iar noul produs chiar în cantități reduse nu va mai avea acțiunea chimică localizată, dorită inițial.

Modul de a acționa al unor aditivi a preocupat din ce în ce mai mult, în ultimii ani realizîndu-se diferite studii [9], [21], [22], [31], în special privind caracterul de anti-uzură în anumite situații. Totuși datorită condițiilor diferite de frecare și ungere ce apar în funcționarea unei mașini termice, în perioada rodajului au fost recomandate formule mixte (uzură mecanică și chimică) cît mai acoperitoare care, incluzînd toate posibilitățile (rodaj la rece fără aditiv, rodaj la rece cu aditiv, rodaj la cald cu aditiv în condiții diferite de sarcină) să conducă în acest mod la rezultate globale eficiente (înlăturarea pericolului de gripaj și posibilitatea de abordare a unui regim de sarcină normală după un timp cît mai redus), deziderate asigurate, după cum s-a arătat, de însăși caracterul antigripant al aditivilor respectivi.

CONCLUZII

8. Considerațiile de mai sus ne permit să tragem următoarele concluzii :

Acțiunea chimică controlată are efect preponderent asupra uzurii mecanice, atît în cazul unui sistem de frecare simplu cît și a unui sistem mai complex. În ambele situații procesul de uzură mecanică se prelungește datorită unor aditivi de E.P care prin efecte specifice de natură fizico-chimică [14]) promovează o viteză de uzură mai redusă.

Din literatura de specialitate se constată că pentru a mări durata de funcționare a mașinilor pe calea reducerii uzurii în exploatare se caută aditivi cu caracter pronunțat de „antiuzură" iar pentru a evita gripajul în anumite regimuri severe de sarcină sau viteză, aditivi cu caracter pronunțat de antigripaj. Unii aditivi cunoscuți nu întrunesc ambele caractere ca de ex : fosfiți alchilici, uleiuri animale sulfurate etc., care deși pot împiedica griparea în condiții de suprasarcină, în regim normal conduc la uzuri mai mari [22].

În cazul rodajului chimic anumiți aditivi de E.P. definesc atît „caracterul de antiuzură" cît și „caracterul antigripant". Datorită caracterului de antiuzură procesul de uzură se prelungește (reducîndu-se viteza de uzură mecanică) iar datorită caracterului antigripant devine posibil mai devreme (decît în cazul frecării fără aditivi) un regim normal de sarcină sau viteză, înainte de consumarea perioadei inițiale. Întreruperea acțiunii aditivului într-o fază de uzură mai intensă, scoate în evidență clar rolul diferențiat jucat de acesta.

Din punct de vedere terminologic se constată nediferențieri în denumirile „E.P.", „antigripaj", „antiuzură", care se dau unor aditivi.

În cazul deosebit de important al utilizării aditivilor de E.P. criteriile obișnuite de apreciere a rodajului nu constituie criterii riguroase de definire

[14]) Există oarecare îndoieli asupra caracterului diferențiat chimic (susținut de Bowden) sau fizic (Frewing)al interacțiunii metal lubrifiant în cazul frecării limită [13].

a încheierii perioadei uzurii inițiale; sînt necesare deci criterii specifice utilizării aditivilor de E.P. (inclusiv a celor cu acțiune chimică indirectă), ca aditivi de rodaj, pentru a se defini riguros ambele aspecte : durata efectivă a uzurii mecanice și chimice de rodaj (mai lungă), după care se obțin caracteristicile optime de funcționare și durata efectivă (mai redusă), după care sistemul mecanic poate suporta un regim quasi-normal, fără pericol de gripaj.

Primită la redacție la 25 ianuarie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. И. В. Гращельский, *Трение и износ*. Машгиз, Москва, 1962, p. 5—30, 117, 236—248.
2. N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al, Nica, O. Biță, *Lagăre cu alunecare*, Edit. Acad. R.P.R., București, 1962, p. 373—381, 384.
3. A. Schilling, *Les huiles pour moteurs et le gressage des moteurs*, I, Edit. Techniq., Paris, 1962, p. 259—266, 298—302.
4. M. M. Hruşciov, *Resistance of Metals to wear by Abrasion as Related to Hardness*, Proc. of Conf. on Lubrication and Wear, London, 1957, Inst. of Mech. Eng., 1958, p. 655—659.
5. A. D. Dubinin, *Frecarea și uzura la organele de mașini*, I.D.T., București (tr. 1.r), 1958, p. 42—45, 72—80, 88.
6. L. Rozeanu, O. Preoțescu, *Considerații asupra ansamblurilor de frecare în perioada de rodaj*, SCMA, *1*, 94, 97, 101, 104, 106 (1957).
7. J. Pons, *Étude de certains exemples de l'influence du frottement sec et lubrifié sur la modification des couches superficielles des métaux*, Rev. I.F.P., **XV**, *10*, 1 482, 1 493, 1 548 (1960).
8. Г. В. Виноградов, *Применение и механизмов действия фосфорорганических соединений как противоизносных присадок к маслам*. Химия и применение фосфорорганических соединений, Издат. АН СССР, 1957.
9. T. Sakurat, S. I. Keda, H. Okobe, *The mechanism of reaction of sulfur compounds with steel surface during boundary lubrication using S^{35} as a tracer*, ASLE, Trans., *5*, 73—75 (1962).
10. F.P. Bowden and D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solids*, Oxford Univ. Press, 1954, p, 5—20; 36—48.
11. L. Pons, G. Egli, *Contribution à l'étude de certaines relations entre le frottement, l'usure et l'état de surface*. Rev. T.F.P., **XVI**, *11*, 1 357—1 360 (1961).
12. O. Biță, I. Dincă, *Date noi în tehnica rodării motoarelor cu ardere internă*. Consf. asupra tehnicii așchierii și rodajului, 1960, I.D.T., București, 1962, p. 20, 22—24.
13. П. А. Ребиндер, Г. И. Епифанов, *Влияние поверхностно-активной среды на граничное трение и износ*, Издат. АН СССР, Москва, 1957, p. 47—50.
14. H. H. Znidenro, *The performance of lubricating oils*, Book, Div Reinhold Published Corp. New York, p. 1—8.
15. R. L. Brooks, M. L. Atkin, *Observation of the lubrificating oil film between piston ring and cylinder of running engine, The effects of lubrificant properties and additives*. Council for Scient. and ind. research, ACA-42, Australia, 1948, p. 3—13.
16. H. G. Wengeroth, *Untersuchungen über den Verschleiss von Grauguss mit einer Prüfmaschine für hin-und hergeheude Bewegung*. Dissert. Tech. Univers., Berlin, 1960, D 83, p. 42—50.
17. O. Biță, I. Dincă, *Reducerea timpului de rodaj prin metode chimice*, Conf. asupra tehnicii așchierii și rodajului 1960, I.D.T., București, 1962.

18. I. Conte, *Sujestions mécaniques et géométriques du rodage. Perspectives offertes par l'utilisations des esters*, Ingénieurs de l'automobile, **34**, 6, 325—335 (1960).
19. K. R. Williams, S. G. Daniel, *The Running in of Engines; Choi Cylinder Bore Finish.* Proc. of the Auto. Division (1954—1955).
20. И. Ф. Виноградова, *Присадки к маслам для снижения трения и износа*, Гостоптехиздат, Москва, 1963, p. 26—46.
21. Ю. С. Заславски, Г. И. Шов, П. И. Шнеерова и др., *Присадки к маслам и топливам*. Гостоптехиздат, Москва, 1961, p. 168, 264, 333.
22. П. И. Санин, А. В. Улсанова, *О механизме действия противоизносных присадок*, Труды всес. научн. техн. сов. по присадкам к маслам и топливам, Гостоптехиздат, 1961.
23. D. Pavelescu, I. Iliuc, S. Barbul, *Issledovanie radioaktivnog metoda dlia oţenki smazocinîh kaciestv masel o prisadkami po iznosu poverhnostei. II*, Rev. méc. appl., **7**, 2, 389 (1962)
24. D. Pavelescu, I. Iliuc, S. Barbul, *Aspecte privind proprietăţile de antiuzură ale unor aditivi de extremă presiune la temperaturi ridicate*, St. cerc. mec. ap., **14**, *6*, 1480—1483 (1963).
25. — *On the evolution of wear and temperature of some bronze-steel friction pairs*, Rev. méc. appl., **8**, *3*, 433—439 (1963).
26. — *Study on a radioactive method for estimating the lubricating qualities of compound oils by using the wear of surfaces*, Rev. méc. appl., Buc., **6**, 4, 541—542 (1961).
27. — *On the measurement errors and their magnit. in the case of the examination of wear with radioactive isotopes*, Rev. méc. appl., **8**, *4*, 656—672 (1963).
28. J. J. Cumbleton, *Piston Ring and Cylinder wear Measurements Illustrations of Radioactive Technique*, S.A.E. Trans., **70**, 333—340 (1962).
29. С. В. Малтев, *Применение осерненного масла при приработке узлов трения судовых механизмов*. Речной трансп. **17**, *12*, 27—29, (1958).
30. A. Cameron, *The Viscosity wedge*, Lubricat. Sci. Tech., **1**, *2*, 248—253 (1958).
31. D. Godrey, *Chemical Changes in Steel Surfaces During Extreme Pressure Lubrication*, ASLR Trans., *5*, 58 (1962).
32. A. N. Nikitiin, *Influenţa condiţiilor de rodaj asupra uzurii motoarelor în exploatare*, Bul. constr. maş. (trad. Vest. Maş.), *12* (1955) .
33. K. Petresov, *Determinarea calităţii reparaţiilor după rezultatele obţinute la rodajul motoarelor*, Intreţ. şi util., Caiet selectiv, **11** (1959) trad. Avtombilinii transport **12** (1958).

CONTRIBUȚII LA CALCULUL PIERDERILOR VOLUMICE PRIN JOCUL FRONTAL AL POMPELOR CU ROȚI DINȚATE[1])

de M. P. POPOV, S. GOGONEA și I. MITRICĂ

Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R., București

621.01

În articol se studiază unele aspecte ale mișcării fluidului în jocul frontal al pompelor cu roți dințate. Se determină distribuția de presiune, precum și debitul scurs prin jocul frontal. Se prezintă formule de debit scurs pentru diverse repartiții ale jocului în raport cu suprafețele de etanșare ale roților dințate.

În ultima parte, spre exemplificare, se aplică rezultatele obținute pe un caz concret.

În această lucrare se continuă studiile referitoare la mișcarea fluidului în jocurile aparaturii hidrostatice, abordate anterior. În lucrările [1] și [2] s-au cercetat probleme legate de mișcarea fluidului prin jocul radial al pompelor și motoarelor volumice, îndeosebi repartiția presiunii și pierderile de debit.

De astă dată se va aborda studiul mișcării fluidului în jocul frontal al pompelor cu roți dințate, adică în spațiul cuprins între suprafața frontală și capacul de etanșare.

Efectuarea acestor studii apare necesară, deoarece experimental s-a dovedit că pierderile volumice frontale la aceste pompe au cea mai mare pondere în determinarea randamentului volumic. Pe de altă parte, studiile efectuate în scopul obținerii unor formule generale de calcul au condus la elaborarea unor formule empirice și teoretice. Încercările teoretice întreprinse nu au dus la rezultate acceptabile, deoarece ipotezele utilizate se îndepărtează prea mult de realitate. De exemplu, se admite ca

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. techn. Mécanique appliquée", **10**, *3* (1965) (în limba franceză).

ipoteză fundamentală [3] faptul că în jocul frontal există numai o variaţie radială de presiune, ceea ce contravine în mod evident fenomenului real, avînd în vedere distribuţia presiunii pe periferia roţii [1].

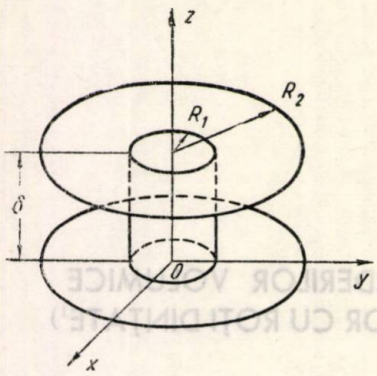


Fig. 1. — Schema jocului frontal.

În cele ce urmează se determină distribuţia de presiune în jocul frontal, precum şi debitul de fluid pierdut prin acest joc. Pentru aceasta se consideră mişcarea fluidului între două plăci circulare paralele, reprezentînd, respectiv, suprafaţa de etanşare fixă şi suprafaţa frontală a roţii dinţate. În acest mod, asimilăm roata dinţată cu o placă circulară ce se roteşte în planul său cu o viteză unghiulară ω.

Mişcarea fluidului este descrisă de sistemul de ecuaţii Navier-Stokes care în cazul general se scrie sub forma:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

şi de ecuaţia de continuitate pentru fluide incompresibile:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Vom alege ca plan xOy planul plăcii fixe, placa mobilă fiind situată în planul $z = \delta$, unde δ reprezintă mărimea jocului frontal.

Se ştie că sub această formă integrarea sistemului prezintă dificultăţi deosebit de mari. În consecinţă, este nevoie să se recurgă la cîteva ipoteze simplificatoare, sugerate de natura problemei. De altfel aspecte similare se întîlnesc şi în teoria hidrodinamică a lubrificaţiei [4].

În primul rînd se consideră că mişcarea este permanentă şi se neglijează forţele de masă, care sînt relativ foarte mici.

În al doilea rînd se neglijează şi restul termenilor din membrul stîng al ecuaţiilor (1), care reprezintă acceleraţiile. Ipoteza este justificată de faptul că mişcarea fluidului este datorată numai antrenării straturilor prin mişcarea de rotaţie a plăcii, iar jocul extrem de mic împiedică apariţia acceleraţiilor mari. În acelaşi timp, termenii din membrul al doilea sînt comparativ mult mai mari, ei reprezentînd influenţa presiunii, respectiv a viscozităţii, factori preponderenţi în fenomenul studiat.

În ceea ce privește componentele vitezelor se pot observa următoarele :

Componenta w este extrem de mică, deoarece mișcarea fluidului în sensul axei Oz este practic împiedicată de dimensiunile reduse ale jocului și, în consecință, această componentă va fi neglijată împreună cu derivatele sale.

Componentele u și v au variații mult mai mari pe direcția Oz, unde pe o grosime foarte mică ele trec de la valoarea minimă la valoarea maximă, față de variațiile pe direcțiile Ox și Oy. Ca urmare, se neglijează în sistemul de ecuații (1) derivatele în raport cu x și y în prezența derivatelor în raport cu z.

În aceste condiții, sistemul (1) devine :

$$\left.\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Se păstrează ecuația de continuitate (2), deoarece termenii care figurează în ea pot avea ordine de mărime comparabile.

Ținînd seama de configurația mișcării fluidului, vor fi utilizate următoarele condiții la limită :

$$u = v = w = 0, \text{ pentru } z = 0 \tag{4}$$

$$w = 0 ; \; u = -\omega y ; \; v = \omega x, \text{ pentru } z = \delta \tag{5}$$

De asemenea se presupun cunoscute valorile presiunii pe periferia axului roții dințate de rază R_1 și pe periferia discului de rază R_2, care se rotește cu viteza unghiulară ω (fig. 1). Ca rază R_2, se alege raza cercului primitiv al roții dințate.

Prin integrarea sistemului (3) se obține

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z^2 + C_1 z + C_2 \\ v &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} z^2 + C_3 z + C_4 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

unde C_1, C_2, C_3 și C_4 sînt constante care se determină cu ajutorul condițiilor la limită (4) și (5).

Rezultă astfel

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - \delta z) - \frac{\omega y z}{\delta} \\ v &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial y} (z^2 - \delta z) + \frac{\omega x z}{\delta} \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Din ecuaţia de continuitate rezultă că

$$w = -\int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz. \tag{8}$$

Ecuaţia presiunii se obţine înlocuind în (8) derivatele parţiale calculate din (7) şi ţinînd seama de (5) :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0. \tag{9}$$

Presiunea este deci o funcţie armonică în variabilele x şi y.

Odată determinată presiunea, cu ajutorul relaţiilor (7) se obţin în mod simplu componentele vitezelor. Totul se reduce deci la rezolvarea problemei lui Dirichlet pentru ecuaţia (9), cu condiţiile la limită :

$$p = p_1(\theta) \qquad \text{pentru } r = R_1 \tag{10}$$

$$p = p_2(\theta) \qquad \text{pentru } r = R_2, \tag{11}$$

unde s-au notat prin r şi θ coordonatele polare :

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} \end{aligned} \right\}. \tag{12}$$

În figura 2 sînt reprezentate suprafeţele frontale ale roţilor în mişcare. Axele figurate sînt paralele cu axele de coordonate din figura 1. Studiul se va face pe o singură suprafaţă, aceasta fiind posibil datorită simetriei constructive.

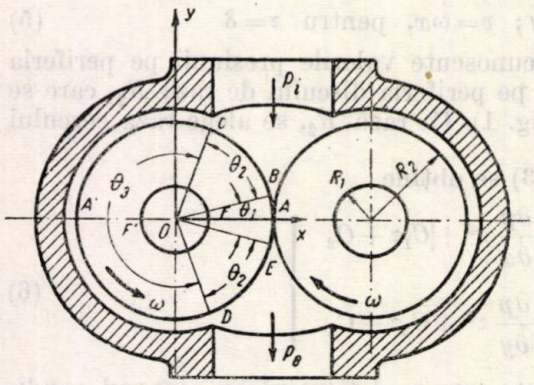


Fig. 2. — Suprafeţele frontale ale roţilor în agrenare.

Semnificaţia unghiurilor ce apar în figura 2 este următoarea :

θ_1 — unghiul corespunzător zonei de angrenare ;

θ_2 — unghiul corespunzător deschiderii camerelor de aspiraţie şi refulare ;

$\theta_3 = 2\pi - (\theta_1 + 2\theta_2)$ şi corespunde unghiului de etanşare radială a roţii dinţate.

Pentru valorile presiunii p_1 pe axul roţii şi p_2 pe periferia roţii dinţate se consideră următoarele repartiţii :

$$\text{a)} \quad p_1(\theta) = p_a = \text{const.} \tag{13}$$

S-a admis această ipoteză întrucît în mod real scurgerea fluidului în lagăr nu influenţează decît în mică măsură fenomenul studiat.

b) În mod firesc vom avea pe arcul BC, $p_2=p_i$ (p_i fiind presiunea de aspirație), iar pe arcul DE, $p_2=p_e$ (p_e fiind presiunea de refulare). Se admite că pe arcul CD presiunea crește liniar de la valoarea p_i la valoarea p_e [1]. De asemenea se admite că pe arcul EB căderea de presiune de la p_e la p_i va fi tot liniară, astfel încît pentru $\theta=0$ vom avea $p_2=p_m$, unde

$$p_m=\frac{p_i+p_e}{2}. \tag{14}$$

Notînd cu

$$\Delta p=p_e-p_i, \tag{15}$$

funcția (11) va avea următoarea formă

$$p_2(\theta)=\begin{cases} p_m-\dfrac{\Delta p}{\theta_1}\cdot\theta & , \quad 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\theta_1}{2} \\ p_i & , \quad \dfrac{\theta_1}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi-\dfrac{\theta_3}{2} \\ p_i+\dfrac{\Delta p}{\theta_3}\left[\theta-\left(\pi-\dfrac{\theta_3}{2}\right)\right] & , \quad \pi-\dfrac{\theta_3}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi+\dfrac{\theta_3}{2} \\ p_e & , \quad \pi+\dfrac{\theta_3}{2}\leqslant\theta\leqslant 2\pi-\dfrac{\theta_1}{2} \\ p_e-\dfrac{\Delta p}{\theta_1}\left[\theta-\left(2\pi-\dfrac{\theta_1}{2}\right)\right] & , \quad 2\pi-\dfrac{\theta_1}{2}\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{cases}. \tag{16}$$

Pentru rezolvarea ecuației (9), se folosesc condițiile la limită menționate (13) și (16), iar ecuația (9) se transcrie în coordonate polare sub forma :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2}=0. \tag{17}$$

Utilizînd metoda separării variabilelor, se caută soluția sub forma :

$$p(r,\theta)=F(r)\cdot G(\theta). \tag{18}$$

Se obțin astfel două ecuații diferențiale, și anume :

$$\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}\theta^2}+n^2G=0, \tag{19}$$

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r^2}+r\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}-n^2F=0. \tag{20}$$

Ecuația (19) admite soluții de forma

$$G_n=A_n^*\cos n\theta+B_n^*\sin n\theta, \tag{21}$$

unde n este un număr întreg pozitiv.

Pentru $n=0$, ecuaţia (20) admite soluţia :

$$F_0 = C_0^* + D_0^* \ln r, \tag{22}$$

iar pentru $n \geqslant 1$, se admit soluţii de forma :

$$F_n = C_n^* r^n + \frac{D_n^*}{r^n}, \tag{23}$$

A_n, B_n, C_n şi D_n sînt constante de integrare.

Ţinînd seama de (18), soluţia generală a ecuaţiei (9) este :

$$p(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^n} \right) \cos n\theta + \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right) \sin n\theta \right], \tag{24}$$

unde A_n şi B_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) sînt constante ce trebuie determinate prin condiţiile la limită (13) şi (16).

Pentru determinarea coeficienţilor soluţiei generale (24) se dezvoltă în serie Fourier funcţia $p_2(\theta)$.

$$p_2(\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta). \tag{25}$$

Pentru determinarea expresiei coeficienţilor din (25) se utilizează valorile din relaţia (16) şi, aplicînd formulele cunoscute, se obţine :

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_0 = p_m, \quad \alpha_n = 0 \\ &\beta_n = \frac{2\Delta p}{\pi n^2} \left[\frac{(-1)^n}{\theta_3} \sin \frac{n\theta_3}{2} - \frac{1}{\theta_1} \sin \frac{n\theta_1}{2} \right]. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Introducînd în relaţia (24) $p = p_a$, $r = R_1$ şi apoi $p = p_2$, $r = R_2$, se obţine în final valoarea coeficienţilor din soluţia generală care au următoarea formă :

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \frac{p_m \ln R_1 - p_a \ln R_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}}, \quad B_0 = \frac{p_a - p_m}{\ln \frac{R_1}{R_2}}, \\ A_n &= B_n = 0 \\ C_n &= \frac{2\Delta p}{\pi n^2} \left[\frac{(-1)^n}{\theta_3} \sin \frac{n\theta_3}{2} - \frac{1}{\theta_1} \sin \frac{n\theta_1}{2} \right] \frac{R_2^n}{R_2^{2n} - R_1^{2n}}, \\ D_n &= -\frac{2\Delta p}{\pi n^2} \left[\frac{(-1)^n}{\theta_3} \sin \frac{n\theta_3}{2} - \frac{1}{\theta_1} \sin \frac{n\theta_1}{2} \right] \frac{R_1^{2n} R_2^n}{R_2^{2n} - R_1^{2n}}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Odată cunoscută valoarea coeficienţilor (27), expresia presiunii (24) capătă forma

$$p(r,\theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right) \sin n\theta \right]. \tag{28}$$

Formula finală a presiunii (28) este relativ simplă, însă prezintă inconvenientul că are în componența sa o serie infinită. Pentru calculul numeric însă va fi suficient să păstrăm un număr oarecare de termeni care ne vor da soluția cu aproximația dorită. Aceasta revine la a aproxima dezvoltarea (25) printr-un polinom trigonometric.

Calculînd din relația (28) derivatele parțiale necesare și introducîndu-le în (7), se obțin pentru componentele vitezei următoarele expresii:

$$\left.\begin{aligned} u = \frac{1}{2\mu}(z^2 - \delta z)\left\{\cos\theta\left[\frac{B_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} n\left(C_n r^{n-1} - \frac{D_n}{r^{n+1}}\right)\sin n\theta\right] - \right. \\ \left. - \frac{\sin\theta}{r}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n\left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n}\right)\cos n\theta\right]\right\} - \frac{\omega z}{\delta} r\sin\theta, \\ v = \frac{1}{2\mu}(z^2 - \delta z)\left\{\sin\theta\left[\frac{B_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} n\left(C_n r^{n-1} - \frac{D_n}{r^{n+1}}\right)\sin n\theta\right] + \right. \\ \left. + \frac{\cos\theta}{r}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n\left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n}\right)\cos n\theta\right]\right\} + \frac{\omega z}{\delta} r\cos\theta. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Aceste expresii ale componentelor vitezei fluidului vor servi în continuare la determinarea formulei pierderilor de debit prin jocul frontal. Pierderea are loc datorită diferenței de presiune dintre camerele de refulare și aspirație. Anume, o parte din fluidul aflat în camera de refulare se scurge înapoi prin jocul frontal spre camera de aspirație.

Pentru început se va determina debitul scurs pe o singură suprafață frontală a unei roți dințate, urmînd ca la calculul debitului total scurs să se însumeze rezultatele obținute.

În mod firesc, se va calcula debitul ce se scurge din camera de refulare spre camera de aspirație prin secțiunile determinate de planul perpendicular pe suprafața roții și care conțin axa Ox. Cele două secțiuni sînt două dreptunghiuri de înălțime δ și ale căror baze sînt, respectiv, segmentele AF și $A'F'$ (fig. 2).

Pentru secțiunea AF, caracterizată prin faptul că $\theta=0$, calculul debitului se va face cu formula

$$Q_1 = \iint v\,(r, o, z)\,\mathrm{d}S. \quad (30)$$

Calculînd valoarea corespunzătoare din (29) și integrînd, se obține în final următoarea expresie:

$$Q_1 = -\frac{\delta^3}{12\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n(R_2^n - R_1^n) - D_n\left(\frac{1}{R_2^n} - \frac{1}{R_1^n}\right)\right] + \frac{\omega\delta}{4}(R_2^2 - R_1^2). \quad (31)$$

Un calcul analog se face și pentru secțiunea $A'F'$, în care $\theta=\pi$. Se obține astfel

$$Q_2 = \frac{\delta^3}{12\mu}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[C_n(R_2^n - R_1^n) - D_n\left(\frac{1}{R_2^n} - \frac{1}{R_1^n}\right)\right] - \frac{\omega\delta}{4}(R_2^2 - R_1^2). \quad (32)$$

Formulele (31) şi (32) conţin termeni similari. Primul termen al acestor expresii reprezintă acea parte din debitul pierdut datorată exclusiv căderii de presiune Δp care figurează în coeficienţii C_n şi D_n. Al doilea termen al acestor formule reprezintă debitul scurs datorat antrenării fluidului de către suprafaţa roţii. Diferenţa de semn provine din faptul că în primul caz (31) fluidul este antrenat în sensul căderii de presiune, iar în al doilea caz (32) în sens contrar.

Pentru a calcula debitul total pierdut prin jocurile frontale ale pompei este necesar să se ţină seama de modul cum este repartizat jocul de o parte şi de alta a roţilor.

Astfel, dacă cele două roţi au acelaşi joc total 2δ, repartizat simetric, debitul total pierdut se calculează din (31) şi (32), cu formula :

$$Q_f = \frac{\delta^3}{3\mu}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n-1]\left[C_n(R_2^n-R_1^n)-D_n\left(\frac{1}{R_2^n}-\frac{1}{R_1^n}\right)\right]\right\}. \qquad (33)$$

Se consideră în continuare cazul cînd jocul total nu este repartizat simetric de o parte şi de alta a roţilor în angrenare. Fie δ_1 şi δ_2 jocurile pe cele două părţi ($\delta_1+\delta_2=2\delta$). Atunci din (31) şi (32) se obţine pentru debitul total pierdut expresia :

$$Q_f^* = \frac{\delta_1^3+\delta_2^3}{6\mu}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n-1]\left[C_n(R_2^n-R_1^n)-D_n\left(\frac{1}{R_2^n}-\frac{1}{R_1^n}\right)\right]\right\}. \qquad (34)$$

Pentru a scoate în evidenţă condiţiile în care repartiţia jocurilor frontale conduce la pierderi minime, se va calcula $Q_f^* - Q_f$. Se obţine în final următoarea expresie :

$$Q_f^*-Q_f=\frac{\delta}{4\mu}(\delta_1-\delta_2)^2\left\{\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n-1]\left[C_n(R_2^n-R_1^n)-D_n\left(\frac{1}{R_2^n}-\frac{1}{R_1^n}\right)\right]\right\}. \qquad (35)$$

Din această expresie se vede că $Q_f^* > Q_f$ şi diferenţa (35) va fi cu atît mai mare cu cît $(\delta_1-\delta_2)^2$ va avea valori mai mari. De unde rezultă evident că, cu cît repartiţia nesimetrică a jocurilor frontale este mai pronunţată, cu atît va fi mai mare valoarea acestei diferenţe. Această observaţie este deosebit de importantă, deoarece pune în evidenţă faptul că la jocuri totale egale repartiţia simetrică a jocului duce la debite pierdute minime. De aici rezultă importanţa deosebită care trebuie acordată montării corecte a roţilor dinţate.

Se mai poate ivi posibilitatea ca la acelaşi joc total repartiţia jocurilor să fie diferită de la o roată la cealaltă. În acest caz debitul scurs se calculează tot cu formulele (31) şi (32) pentru cele patru jocuri.

Tabela

n	1	2	3	4	5	6	7
C_n	− 3,774	− 0,958	− 0,348	− 0,147	− 0,073	− 0,041	− 0,022
D_n	1,358	0,125	0,016	0,003	0,0004	9.10^{-5}	2.10^{-5}

Aceste formule sînt de asemenea aplicabile și în cazul cînd cele două roți în angrenare sînt de diametre diferite.

Observația făcută relativ la calculul numeric al valorilor funcției de presiune este valabilă și în cazul calculului debitului. Este suficient să înlocuim seriile ce figurează în formulele (33) și (34) cu o sumă ce conține un număr finit de termeni.

Ținînd seama de valorile lui C_n și D_n din (27), expresiile (33) și (34) se mai pot scrie, respectiv, astfel :

$$Q_f = \frac{\delta^3}{3\mu}\left\{\sum_{n=1}^{N}[(-1)^n-1]E_n\frac{R_2^n-R_1^n}{R_2^n+R_1^n}\right\}, \tag{36}$$

$$Q_f^* = \frac{\delta_1^3+\delta_2^3}{6\mu}\left\{\sum_{n=1}^{N}[(-1)^n-1]E_n\frac{R_2^n-R_1^n}{R_2^n+R_1^n}\right\}, \tag{37}$$

unde :

$$E_n = \frac{2\Delta p}{\pi n^2}\left[\frac{(-1)^n}{\theta_3}\sin\frac{n\theta_3}{2}-\frac{1}{\theta_1}\sin\frac{n\theta_1}{2}\right]. \tag{38}$$

După cum se observă, toți termenii din sumă corespunzători pentru n par se anulează. Această observație, precum și faptul că întotdeauna R_1 este de cîteva ori mai mic decît R_2, dau posibilitatea ca în calculul numeric N să aibă valoare mică. De asemenea valoarea lui N este influențată în special de mărimea unghiului θ_1.

În scopul unei verificări preliminare a rezultatelor teoretice, s-au efectuat calcule în cazul unei pompe cu roți dințate cu următoarele caracteristici :

$Q = 25$ 1/min ; $p_{max} = 16$ kgf/cm^2

$R_1 = 0{,}6$ cm ; $R_2 = 1{,}42$ cm

$\theta_1 = 29°20'$; $\theta_2 = 42°$; $\theta_3 = 246°\,40'$.

Calculele s-au efectuat pentru căderea de presiune $\Delta p = 10$ kgf/cm^2 și pentru patru trepte ale viscozității cinematice a uleiului măsurate în cSt.

63,64 ; 28,84 ; 16,98 ; 8,87

corespunzătoare, respectiv, temperaturilor de

31°C ; 45°C ; 60°C ; 70°C.

În tabela 1 sînt calculați, cu ajutorul formulelor (27) și al datelor rezultate din măsurători pentru $\Delta p = 10$ kgf/cm^2, primii 15 coeficienți C_n și D_n.

1

8	9	10	11	12	13	14	15
− 0,012	− 0,005	− 0,0018	− 0,00044	9.10^{-6}	1.10^{-4}	$1{,}4.10^{-4}$	$1{,}8.10^{-4}$
3.10^{-6}	5.10^{-7}	$6{,}6.10^{-8}$	-5.10^{-9}	-4.10^{-10}	-2.10^{-10}	-9.10^{-11}	-4.10^{-11}

Pentru cazul studiat se observă că valorile coeficienţilor C_n şi D_n descresc repede o dată cu creşterea lui n şi în acelaşi timp la un moment dat schimbă de semn. Din acest motiv, în funcţie de precizia de calcul dorită, ne putem limita la un număr mai mic sau mai mare de termeni, care nu are sens să depăşească cifra 10. Dintre aceştia, în calcul intervin numai cinci termeni, şi anume cei corespunzători lui n impar, aşa cum s-a arătat mai sus.

În figura 3 sînt trasate curbele de debit total scurs în funcţie de jocul frontal. Calculele au fost efectuate cu formula (33) corespunzătoare repartiţiei simetrice a jocului total şi făcînd $N=10$.

Se observă că debitul scurs creşte rapid o dată cu mărimea jocului frontal. Această creştere este cu atît mai pronunţată, cu cît viscozitatea uleiului este mai mică. Pe de altă parte, se observă că debitul pierdut creşte, pentru acelaşi joc frontal, o dată cu scăderea viscozităţii.

Rezultatele calculelor efectuate cu formula (34) în cazul unei repartiţii nesimetrice a jocului total sînt redate în figura 4.

Curbele reprezintă variaţia debitului scurs în funcţie de viscozitate pentru patru cazuri de repartiţie a jocului total $\delta_1+\delta_2=0{,}20$ mm. Pentru

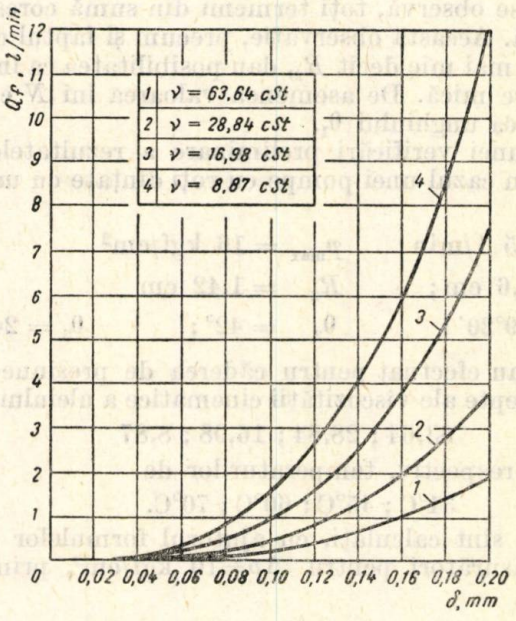


Fig. 3. — Variaţia debitului total pierdut în funcţie de jocul frontal la diferite viscozităţi ale uleiului.

comparaţie s-a trasat şi curba 1, corespunzătoare cazului $\delta_1=\delta_2$. Iese în evidenţă faptul că debitul este cu atît mai mare, cu cît disimetria repartiţiei jocului frontal este mai pronunţată.

În scopul unei verificări calitative a rezultatelor teoretice, s-au efectuat un grup de experienţe preliminare. Aceste lucrări experimentale au

avut drept scop determinarea influenței diferiților parametri evidențiați de către studiul teoretic.

Studiindu-se variația pierderilor totale ale pompei cu caracteristicile menționate mai sus, funcție numai de jocul frontal, se pot face o serie de aprecieri.

— Viscozitatea uleiului joacă un rol important în mărimea debitului pierdut.

—Montajul roților dințate în interiorul pompei cu jocuri simetrice sau asimetrice influențează de asemenea asupra debitului pierdut prin jocul frontal, mărindu-l o dată cu creșterea asimetriei.

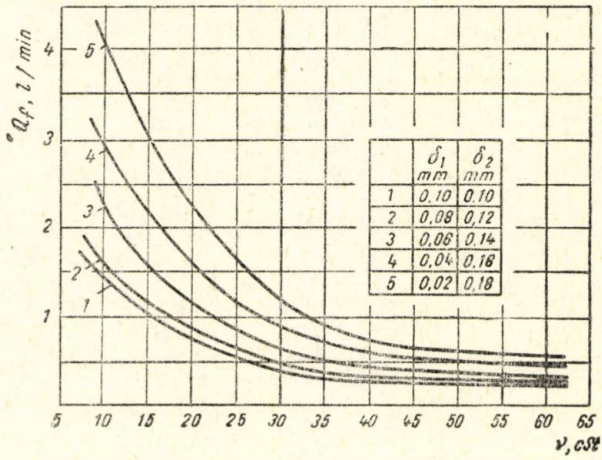


Fig. 4. — Variația debitului total pierdut în funcție de viscozitatea uleiului pentru diferite repartiții ale jocului total.

— O creștere mică a jocului frontal atrage după sine o creștere rapidă a pierderilor volumetrice prin aceste jocuri.

Toate aceste rezultate calitative experimentale vin să confirme rezultatele teoretice obținute. Studiul experimental al pierderilor volumice prin pompele cu roți dințate va forma obiectul altor lucrări.

Trebuie de asemenea arătat că modelul de calcul adoptat poate fi extins fără modificări esențiale și în alte cazuri, ca, de exemplu, pentru o altă distribuție de presiuni pe frontiere sau pentru cazul pompelor cu mai mult de două roți dințate.

Primită la redacție la 15 decembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. M. P. Popov, E. D. Deciu și I. Mitrică, *Contribuții la calulul pierderilor radiale în cazul pompelor și motoarelor volumice*, St. cerc. mec. apl., **15**, 2 (1964).
2. M. P. Popov, I. Mitrică, *Influența parametrilor constructivi ai pompelor cu roți dințate și pistoane asupra pierderilor volumice radiale*, St. cerc. mec., apl., **15**, 5 (1964).
3. E. A. Rîbkin, A. A. Usov, *Șesterennie nasosi dlia metalorejuşcih stankov*, Maşghiz, Moscova, 1960.
4. N. Tipei, *Hidroaerodinamica lubrificației*, Edit. Acad. R.P.R., București, 1957.

CONTRIBUȚIE LA STUDIUL AGLOMERĂRII DE ZĂPADĂ PE CONSTRUCȚII SUB ACȚIUNEA VISCOLULUI

de CRISTEA MATEESCU
Membru corespondent al Academiei R.P.R.

539.4

Se studiază aglomerările de zăpadă pe construcții prin modelare cu materii pulverulente. Se produce în laborator vîntul simultan cu ninsoarea. Se studiază materiile similare zăpezii, gama de viteze, criteriile și domeniul de similitudine. Se determină formele și indicii numerici de aglomerare pe două tipuri de hale. Prin corelație cu grosimea maximă a zăpezii pe sol și cu observațiile în natură, se obțin încărcările de calcul, cu zăpadă.

1. STADIUL ACTUAL AL PROBLEMEI

Aglomerarea zăpezii este un fenomen meteoric natural, avînd aspectul unui proces evolutiv sub acțiunea mai multor factori fizico-mecanici. Cei mai importanți sînt ninsoarea și vîntul, urmați de: acțiunile termice (topire, înghețare, sublimare), îndesarea zăpezii prin greutatea proprie, presiunea vîntului și circulația oamenilor și vehiculelor.

În afară de aglomerările obișnuite ale zăpezii, prezintă un interes deosebit formarea avalanșelor, a ghețarilor și înzăpezirea rîurilor.

Aglomerările de zăpadă trebuie luate în considerare la asigurarea stabilității construcțiilor, a circulației pe drumuri, căi ferate și pe aerodromuri, a zborului avioanelor în timp de iarnă, a funcționării liniilor aeriene de transport, a energiei electrice (mare și mică tensiune, telecomunicații), a stabilității turnurilor și pilonilor, a funcționării canalelor de aducție și a prizelor de apă etc

Cu progresul civilizației și cu dezvoltarea științei, construcțiile de orice fel expuse acțiunii zăpezii și a vîntului au devenit mai numeroase și mai importante, iar pretențiile omenirii la siguranța și buna lor funcționare au crescut. Multe forme de construcții s-au depărtat considerabil de formele tradiționale și comportarea lor la acțiunea aglomerărilor de zăpadă nu este suficient cunoscută.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 19, Nr. 3 p. 587–640 BUCUREȘTI 1965

Pe de altă parte, în calculele de rezistență se iau coeficienți de siguranță din ce în ce mai reduși, ca urmare a cunoașterii din ce în ce mai aprofundate a materialelor și a fenomenelor elasto-statice, fără a se lua îndeajuns în considerare faptul că forțele accidentale și cele excepționale sînt mărimi întîmplătoare, supuse legilor probabilității, și valorile lor extreme nu sînt încă cunoscute, depinzînd de numeroși parametri, la rîndul lor insuficient cunoscuți.

De aceea accidentele în construcții, din care unele cu caracter catastrofal, sînt datorite actualmente nu atît unui calcul static insuficient sau unei execuții proaste, ci mai cu seamă apariției unor forțe accidentale subevaluate fie din lipsă de observații de lungă durată, fie din lipsa unor studii aprofundate ale efectelor unor asemenea forțe asupra construcțiilor înseși. În aceste condiții se face uz de ipoteze necontrolate, de prescripții perimate sau de corelații îndoielnice cu fenomene asemănătoare.

Una dintre căile cele mai eficiente de reducere a accidentelor, a avariilor și a defecțiunilor în construcții este în stadiul actual al cunoștințelor noastre cercetarea sarcinilor accidentale și excepționale.

Aglomerările de zăpadă constituie sarcini accidentale de mărimi variabile, putînd atinge uneori valori foarte mari, dar cu o frecvență foarte mică, și atunci devin sarcini excepționale. Această distincție este necesară pentru aplicarea unor coeficienți de siguranță diferențiați. Cum aglomerările de zăpadă sînt puternic influențate de acțiunea vîntului, studiul lor trebuie să ia în considerație și modul cum acționează vîntul.

O cercetare sistematică în acest scop necesită următoarele faze:

— Studiul hidrometeorologic al formării aglomerărilor de zăpadă în natură, prin observații, măsurări și prelucrări statistice ale rezultatelor.

— Studiul proprietăților fizico-mecanice ale zăpezii [14], [15], [16].

— Studiul acțiunii vîntului la diferite viteze, cunoscînd că vitezele moderate contribuie la formarea de aglomerări de zăpadă, pe cînd la viteze mari vîntul spulberă zăpada depusă.

— Observații în natură asupra depunerilor de zăpadă pe sol, pe acoperișuri, în orașe etc. [12], [13].

— Studiul teoretic al dinamicii mediului bifazat: aer-zăpadă.

— Studii în laborator pe modele reduse ale fenomenelor de aglomerare a zăpezii.

Numai după efectuarea unui volum suficient de asemenea cercetări se va putea proceda la stabilirea sarcinilor de calcul pe construcții datorite diferitelor forme de aglomerări ale zăpezii.

2. ELEMENTE DE NIVOLOGIE FIZICĂ ȘI TEHNICĂ

2.1. Zăpada, materie dispersă-granulară. Compoziția, natura zăpezii și a particulelor din care este formată sînt cunoscute prin studiile fizicienilor și meteorologilor. Este necesar să amintim aici că granulele primare sînt cristalele de gheață, în formă de prisme în sistem exagonal de 0,1...2 m/m grosime și cîțiva m/m lungime. La temperaturi apropiate de 0°C

aceste cristale se grupează în steluțe sau plăci cu 6 brațe, cu grosimi de 0,1 m/m sau chiar în fulgi mai mari, formați din mai multe elemente.

La temperaturi foarte joase, cristalele au dimensiuni foarte mici, ajungînd la grosimi de 0,005 mm. Sub efectul abraziv al vîntului, fulgii și cristalele se sfărîmă și se formează granule rotunjite, asemenea unui nisip fin, prăfos.

2.2. **Zăpada în strat.** Așezată în strat pe sol sau pe obiectele de pe pămînt, zăpada este supusă de îndată unui proces evolutiv. Căzută liniștit, se depune în grosime aproape uniformă, îmbrăcînd suprafețele corpurilor pe care cade (fig. 1 ; 2). Zăpada formează strat și pe suprafețe înclinate pînă la 50°, între 50 și 70° rămîne aderentă numai în strat subțire, iar peste 70° alunecă și nu se prinde. Zăpada în strat, cum s-a așezat, se îndeasă cu timpul sub propria greutate și pierde din grosime, cîștigînd în greutate volumetrică. Se evaporează și sublimează chiar la temperaturi scăzute sau crește în greutate prin înghețarea vaporilor condensați din atmosferă, în funcție de umiditatea aerului. Sub efectul radiațiilor solare sau al unei surse de căldură de pe sol rezultă o cantitate de apă care îmbibă zăpada, excesul scurgîndu-se la pămînt. Se produce în scurt timp la suprafață o crustă de zăpadă. În zonele reci se formează „zăpada eternă", albă, cu numeroase bășici de aer și, după cicluri numeroase de înghețări succesive, această zăpadă perenă se constituie în „ghețar".

2.3. **Vîntul** contribuie la compactarea și întărirea zăpezii și îi sporește coeziunea. Rezistența zăpezii la suprafața crustei este de 1...3 kg/cm², la zăpada adusă de vîrtejuri, de 3...6 kg/cm². La zăpada comprimată de vîntul la sol de 6...11 kg/cm² sub acțiunea unui vînt puternic.

Se numește *viscol* vîntul care transportă zăpada, fie produsă simultan în atmosferă, fie antrenată de pe sol sau de pe înălțimi și transportată uneori la mari distanțe.

Concentrația viscolului este cantitatea în g/min × cm² care trece printr-o secțiune dreaptă perpendiculară direcției vîntului în m/s. Concentrația — sau intensitatea — i crește cu viteza vîntului conform unei legi de tipul $i = 0{,}41\ V - 2{,}5$ [14].

Din această relație rezultă că viscolește numai dacă $v > 6$ m/s. Pînă la $V = 10$ m/s concentrația viscolului este neglijabilă, iar peste 15 m/s i crește brusc cu 4...5 g/min × cm². Concentrația scade repede cu înălțimea de la sol, astfel că la 1 m înălțime scade la 1/50.

2.4. **Coeziunea zăpezii** proaspete, uscate, este slabă, ea crește prin înghețarea parțială, atîrnînd de acoperișuri sau formînd punți peste ramurile copacilor (fig. 3). Zăpada uscată, cu granule fine are proprietățile unei materii disperse ; de îndată ce a fost supusă unor fenomene termice, devine o materie plastică și coezivă.

2.5. **Greutatea volumetrică** a zăpezii depuse are valori diverse, funcție de tipul particulelor, de timp, temperatură, vînt.

Zăpada căzută proaspăt are greutatea volumetrică $\gamma = 60-80$ kg/m³, scăzînd chiar la $\gamma = 30$ kg/m³. Îmbibată cu apă, cîntărește 200... 800 kg/m³, în ghețari tinde asimptotic cu adîncimea spre valoarea $\gamma = 917$ kg/cm³ (gheață). Zăpada uscată, îndesată și de circulația oamenilor, are $\gamma = 410$ kg/m³, iar dacă se adaugă circulația vehiculelor, 460 kg/m³.

Zăpada umedă, îndesată prin greutatea proprie, are $\gamma = 450$ kg/m^3, iar dacă e saturată 790 kg/m^3. Circulaţia vehiculelor o poate aduce la 850 kg/m^3, iar dacă zăpada este amestecată cu noroi > 1300 kg/m^3.

Fig. 1. — Zăpada depusă fără vînt are grosime uniformă.

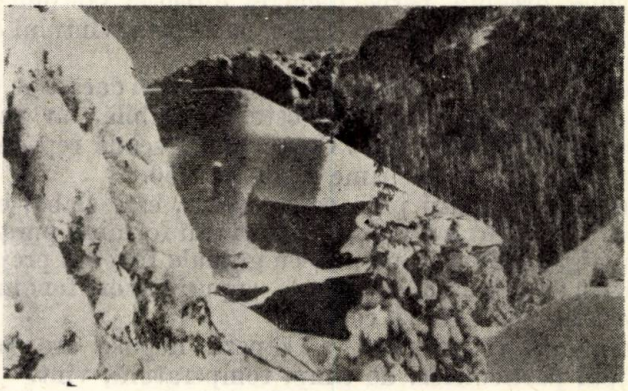


Fig. 2. — Zăpada sudată prin îngheţare formează bolţi şi punţi.

În ţara noastră s-au făcut măsurători ale greutăţii volumetrice a zăpezii mai ales după 1956. S-au găsit pe sol următoarele valori : la Bucureşti — Băneasa, între 114 şi 346, în medie 230 kg/m^3.

În 6 localități de la munte și deal, „200....334, în medie 275" și excepțional 590 kg/m³ (Iași, 1957, 10—I).

Alte observații făcute la București, pe acoperișul unei hale, au arătat valori între 198...496, în medie 300 kg/m³.

Se constată creșterea, în general, a lui γ de la începutul spre sfîrșitul iernii în raportul 1,5/1...2/1.

După observații făcute la clădiri în U.R.S.S. s-a propus să se ia γ între 220...325 kg/m³ [8].

3. FORMELE DE ACUMULARE ȘI EROZIUNE ALE PĂTURII DE ZĂPADĂ

3.1. **Pe teren,** aceste forme sînt foarte variate, depinzînd de viteza vîntului, de turbulență, de relieful terenului și de diferitele obstacole locale.

Micile accidente ale terenului nu se mai deosebesc sub zăpada de grosime obișnuită. Cînd zăpada are grosime foarte mare, relieful suprafeței zăpezii este mult mai șters decît al terenului acoperit de zăpadă. În Antarctica și Groenlanda munți ascuțiți, de mii de metri înălțime, nici nu sînt bănuiți sub pătura de zăpadă groasă pînă la 3000 m care la suprafață apare ca un podiș de gheață, cu relief șters [10]. Vîntul începe să deplaseze zăpada mai intens la viteze peste 6 m/s, formînd diferite aglomerări; cu apariția și întărirea crustei, viteza de antrenare inițială crește la 8—10 m/s. Dacă însă viteza este mai mare de 18 m/s, vîntul distruge aglomerările formate la viteze moderate. Formele de aglomerare fundamentale sînt duna sau valul (troian) lung și înalt sau brazdele de eroziune lungi și paralele (fig. 4).

3.2. **Depunerea zăpezii pe clădiri** nu a făcut pînă acum obiectul unui studiu sistematic. Constructorii, cunoscînd cîteva aspecte mai caracteristice ale fenomenului, au adaptat construcțiile în diferite regiuni condițiilor climatice. Astfel, în regiunile adăpostite de vînt, dar cu zăpezi mari, căzute liniștit, s-au dezvoltat acoperișurile cu pante peste 60°, pe cînd în zonele cu vînturi frecvente și puternice au fost folosite acoperișurile plate. S-a mai observat că adeseori apar sarcini nesimetrice, zăpada menținîndu-se numai pe unul dintre versanții acoperișurilor plane, în două ape.

În ultimii 7 ani s-au făcut unele măsurători sistematice ale aglomerărilor de zăpadă pe clădiri în U.R.S.S. și R.P.R., țări în care s-au observat mari nepotriviri — uneori primejdioase — între încărcările reale și cele prescrise în normele de calcul.

3.2.1. *Observații făcute la București*

În iarna 1962—1963 au fost măsurate pe acoperișul unei hale de la București depunerile maxime de zăpadă prin relevee topografice de precizie, a fost determinată greutatea specifică a zăpezii depuse în mai multe puncte, iar în stațiunea meteorologică Băneasa, din apropiere, erau măsurate toate elementele necesare pentru calcul, ca: temperatura, direcția și viteza vîntului, greutatea specifică a zăpezii cumulate pe sol*. Intervalul de timp

* Aceste studii au fost efectuate de Institutul de proiectări în construcții și de materiale de construcții, împreună cu Institutul meteorologic din București.

Fig. 3. — Zăpadă căzută liniştit. Unghiul taluzului natural ~70°. Pe acoperişuri mici înclinate sub 60°, are grosimea crescînd de la streaşină spre coamă, suprafaţa urmînd taluzul natural.

Fig. 4. — Val (troian) de zăpadă în comuna Ţăndărei (Bărăgan), atingînd 3 m grosime (fig. din 19.II.1933).

în care s-au produs depunerile cauzate de viscol a fost 17...31 ianuarie 1963. În acest timp, temperatura aerului a fost cuprinsă între −2 și −12°C, iar zăpada a căzut cu intermitențe, grosimea maximă a stratului de zăpadă ajungînd la 31.I de 45 cm pe sol în Stațiunea Băneasa.

Vîntul a bătut în acest interval :

din spre N—E, de la 17...22 ianuarie (6 zile) cu viteza de 8...16 m/s
„ S—V „ 23...27 „ (5 „) „ 5...7 „
„ N—E „ 28...30 „ (3 „) „ 8...16 „

Întrucît vîntul de la S—V a avut viteza la limita vitezei de antrenare (5—7 m/s), se poate spune că acțiunea predominantă a fost a vîntului de N—E, cu viteze de 8...16 m/s, timp de 9 zile.

Greutatea volumetrică a zăpezii a ajuns la 223...292 kg/m³ pe cupolă și între 198...496 kg/m³ pe terasa periferică. În figura 5 se reprezintă acoperișul cu formele de aglomerație a zăpezii, în proiecție pe plan orizontal, cu curbe de grosime egală (pe verticală). Făcînd planimetrarea ariilor dintre izoliniile reliefului și calculul volumelor de zăpadă, s-a găsit că :

Zăpada rămasă pe calota sferică (fără cupoletă) acoperă cca. 16% din suprafața totală a calotei, iar volumul zăpezii rămase a fost de 27% din volumul stratului de 45 cm care ar fi acoperit calota întreagă dacă acest strat ar fi avut grosimea uniformă egală cu aceea cumulată măsurată pe platforma Stațiunii meteorologice Băneasa la 31.I, cînd a încetat viscolirea

Grosimea medie a stratului de zăpadă cumulată rămasă pe suprafața acoperită a fost de 0,73 m. Grosimile maxime, de 1,40 m și 1,60 m pe cele două mameloane ale aglomerației. Rapoartele între grosimea maximă locală și grosimea medie a aglomerației

$$a_{max} = \frac{1{,}60}{0{,}73} = 2{,}2, \text{ resp. } \frac{1{,}4}{0{,}73} = 1{,}92.$$

Indice de aglomerare medie față de grosimea stratului pe sol :

$$a_{med} = \frac{0{,}73}{0{,}45} = 1{,}6\,.$$

Rezultă din acești indici că aglomerarea zăpezii pe cupolă dă o încărcare asimetrică care s-a dovedit periculoasă.

Forma aglomerării are aspectul în plan al unui rinichi sau al unui corn (de aluat), sau amintește forma bancurilor de aluviuni în albia unui rîu.

Pe terasa inelară, periferică. Depunerea zăpezii s-a menținut mai ales pe partea S—E, unde grosimile maxime se realizează la contactul cu marginea calotei între meridianele 12 și 22, atingînd...3,50 m (fig. 5). Această aglomerare se explică prin acțiunea de transport a vîntului care îmbracă lateral de ambele părți calota și terasa, precum și ca efectul unor prăbușiri de zăpadă care alunecă de pe calotă pe terasă, în urma eroziunii zăpezii în zona joasă a calotei de pe partea aval.

Experiențele făcute pe model, în tunel aerodinamic, au confirmat această explicație.

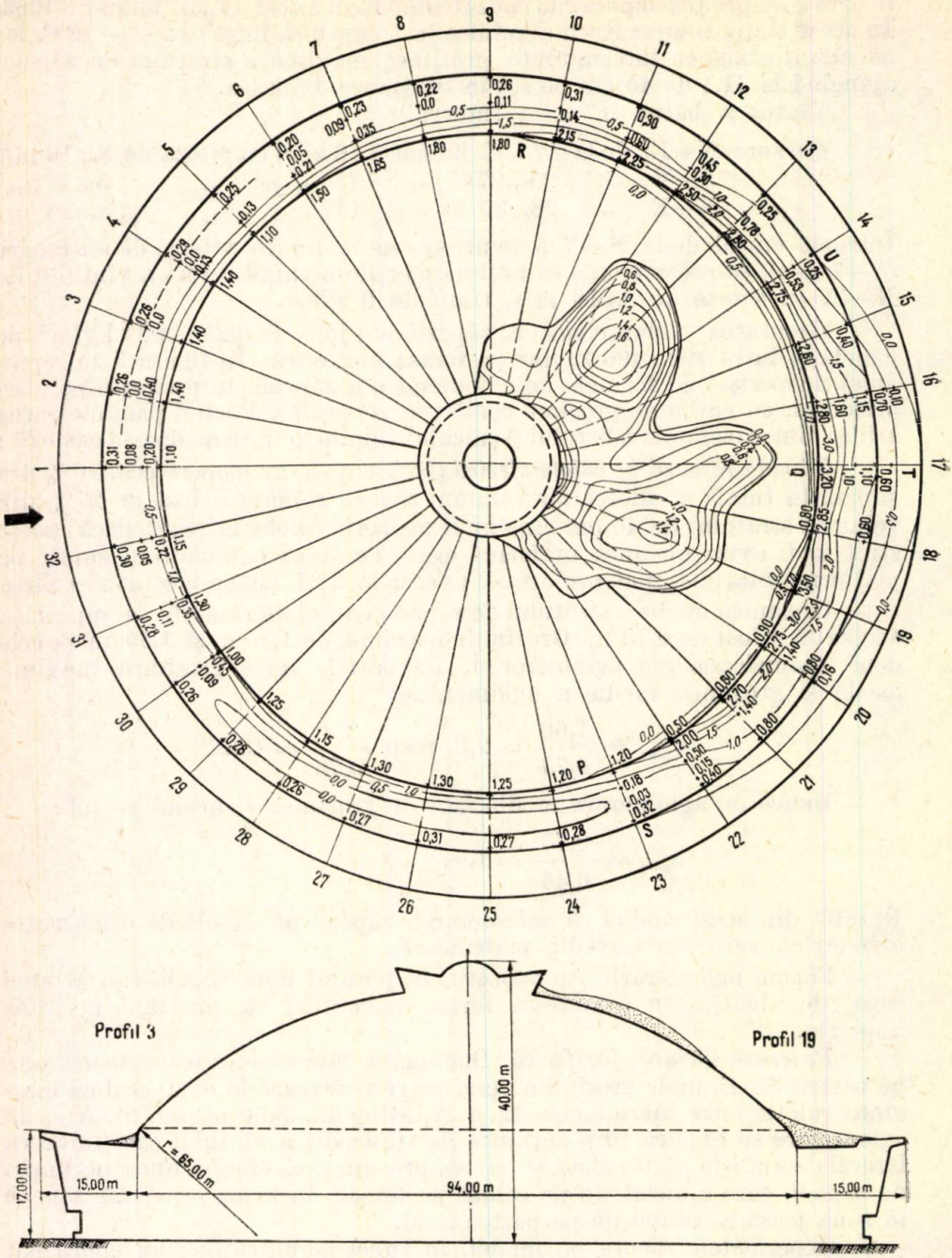


Fig. 5. — Acoperişul cupolă al unei hale, cu releveul depunerilor de zăpadă viscolită.

3.3. **Observații făcute în U. R. S. S., pe acoperișurile halelor industriale.** În anii 1958 și 1959 au fost efectuate observații asupra a 50 de acoperișuri cu profiluri diferite în mai multe regiuni cu regimuri climatice diferite [8]. Concluziile trase din aceste observații au fost următoarele :

Pe acoperișurile în formă de boltă, zăpada se depune în volum mult mai mare decît prevăd normele în vigoare.

— De pe panta înclinată bătută de vînturi puternice, zăpada este luată și deplasată pe panta opusă, pe care se produc mari depuneri.

— Sarcina reală la încărcări numai a unei jumătăți de deschidere este de două ori mai mare decît cea impusă în calcul (la vînturi puternice).

— Dacă vîntul este slab, se produc depuneri și în partea bătută de vînt, dar mai mari decît cele normate.

La halele cu luminatoare

— Zăpada se strînge în jurul luminatoarelor, în general, în formă de depuneri triunghiulare.

— O bună parte din zăpada de pe luminator este luată de vînt și depusă pe acoperiș în umbra aerodinamică a luminatorului.

— La adăpostul unor clădiri învecinate, zăpada se depune mai uniform.

— La sarcini simetrice uniforme p, se consideră pe luminator sarcina 0,8 p, iar pe sectoarele de lîngă luminator 1,2 p.

— Îngrămădirea zăpezii pe părțile frontale ale luminatoarelor este foarte mare și periclitează acoperișul.

— La acoperișuri cu plan dreptunghiular, sarcina în zona acumulărilor nu depășește 2 p.

— La acoperișurile cu mai multe deschideri, acumulări importante se produc la dolii.

— La asemenea acoperișuri trebuie să se facă mai multe ipoteze de calcul : vînt dintr-o parte, vînt din partea opusă, vînt în lungul luminatorului etc.

— În regiuni cu vînturi puternice, o parte din zăpadă este spulberată și construcțiile revin mai economice.

— Pe acoperișurile clădirilor care emit căldură se prevede reducerea sarcinilor de zăpadă cu 20%, dat fiind că o parte din zăpadă se topește.

— Dat fiind că un vînt de lungă durată face ca zăpada să se depună numai pe 1/2 din deschidere, se va calcula acoperișul și la o asemenea încărcare.

— Se impune controlul depunerii de zăpadă pentru ca, în cazul cînd se fac depuneri depășind pe cele prescrise, să se procedeze la curățirea zăpezii, dar în acest caz trebuie să se calculeze acoperișul la acoperiri parțiale cu zăpadă.

4. DINAMICA NINSORII ŞI A VISCOLULUI

4.1. Mişcarea particulei de zăpadă în cădere liberă, în aer stătător Pentru căderea particulelor foarte mici, cvasisferice, se poate folosi modelul mecanic Stokes, în regim laminar sau laminar-turbulent ; pentru cristale mai mari şi fulgi s-ar folosi legile mişcării în regim turbulent. Cazul căderii în aer stătător prezintă însă interes practic pentru formarea numai a stratului de zăpadă uniform.

Aglomerările mari de zăpadă — care sînt adeseori nesimetrice — se fac sub acţiunea unui vînt de cel puţin 5—6 m/s ; însă chiar la viteze de 1 m/s, vîntul trece în regim turbulent, astfel că, oricare ar fi mărimea diametrului particulei, aglomerările de zăpadă se fac în regim turbulent.

4.2. Viteza de antrenare iniţială a particulei dintr-un strat depus se obţine, ca şi în cazul mişcării nisipului în dune sau al aluviunilor în albiile rîurilor, prin aflarea valorii critice a vitezei pentru care forţa motrice a greutăţii este egalată de rezistenţa aerodinamică. Se obţine viteza de antrenare iniţială a particulei pe sol, ρ_s şi ρ fiind densitatea particulei solide, respectiv a aerului :

$$V_0 = f\left(Re, \frac{\Delta}{h}\right) \cdot \sqrt{g\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) D} \qquad (2)$$

în care $Re = \frac{V_0 h}{\nu}$, fiind grosimea stratului limită al atmosferei la suprafaţa zăpezii, Δ rugozitatea absolută, D diametrul particulei, f o funcţie adimensională. Cum gama de viteze „constructive" care produc aglomerări de zăpadă prin deplasări ale materialului, fără treceri apreciabile în atmosferă, este destul de îngustă (6—16 m/s) şi numărul Re ia valori într-un interval îngust, funcţia f poate fi considerată ca o constantă numerică.

Menţionăm că suprafaţa zăpezii are o rugozitate absolută Δ cu mult mai mare decît substratul laminar δ ($\Delta > 5$ m/m şi $\delta < 0{,}5$ mm) [3], astfel că mişcarea particulei se produce direct în regim turbulent. Şi în cazul de pornire a particulei prin saltaţie, viteza critică de antrenare se exprimă printr-o formulă de tipul (2).

La pornirea particulei intervine însă într-un mod deosebit „efectul de pavaj", mai ales după formarea crustei, cînd particulele sînt lipite prin îngheţare şi trebuie deci învinse forţele de coeziune sporite între particule ; în acest caz, valoarea factorului f poate creşte cu cîteva sute %.

4.3. Mişcarea zăpezii sub acţiunea vîntului. Fulgii de zăpadă formaţi în nori, dacă aerul este nemişcat, cad vertical, în masă, cu viteze de cădere mai mici decît ar cădea izolat, datorită efectului rezistiv al concentraţiei. Dacă vîntul are viteza inferioară vitezei de sedimentare V_s şi aceasta este mai mică decît V_0, fulgii de zăpadă în cădere din nori iau traiectorii cvasirectilinii şi paralele şi se depozitează pe obiectele solide, formînd un strat paralel cu formele terenului, de grosimi — măsurate pe verticală — aproape constante, la pante egale ale suprafeţei solide.

Particulele de zăpadă desprinse din strat sub efectul unei rafale urmează traiectorii cvasicicloidale și revin la teren dacă viteza vîntului a scăzut sub V_s, fiind din nou antrenate la o rafală următoare.

Dacă viteza vîntului se menține mai mică decît V_s, își face apariția mișcarea mediului bifazat aer-zăpadă, care a fost descrisă la paragraful 2.3 pentru condițiile unui teren fără obstacole.

Dacă se află un obstacol fix în cîmpul vitezelor, acest cîmp suferă modificări importante în imediata apropiere a obstacolului, vitezele vîntului tangente la suprafața corpului fix putînd lua valori mult mai mari decît cîmpul exterior, astfel că se vor putea produce efecte de eroziune a zăpezii depuse pe corpul fix chiar dacă vitezele în cîmpul uniform sînt mai mici decît V_0. Particulele astfel desprinse vor fi antrenate, dar, datorită greutății lor specifice mari, ele nu vor urma traiectoriile moleculelor de aer, ci vor cădea pătrunzînd în zonele mai calme ale dîrelor și vor fi mai departe influențate de regimul vitezelor din interiorul acestor zone.

Pentru explicarea fenomenelor de aglomerație este deci necesar studiul cinematic al mișcării aerului pe cale teoretică și experimentală; nu însă la vitezele curentului principal, la care se produc presiunile extreme pe suprafața corpului (30 m/s...50 m/s), ci la vitezele moderate „constructive" (6...12 m/s).

Studiul aerodinamic mai poate furniza următoarele cunoștințe utile: liniile de dezlipire ale stratului-limită, suprafețele de separație ale dîrei în spatele corpului, în fața lui sau lateral în unghiurile moarte dintre curentul principal și corp, caracteristicele vîrtejurilor staționare din zonele calme (dîre) și ale vîrtejurilor alternate și antrenate în dîra posterioară, caracteristicile curenților secundari (vene și jeturi); în sfîrșit, structura în mare și structura în detaliu a curentului în vecinătatea corpului, cu date privitoare în primul rînd la mărimea și direcția vitezelor. Muchiile vii, vîrfurile ascuțite, anumite detalii arhitecturale sau ornamentale (luminatoare, coșuri, streșini ș.a.) determină în bună măsură detaliile geometrice ale formelor pe care le capătă aglomerările de zăpadă pe construcție și în imediata ei apropiere, pe sol.

Formele de aglomerare a zăpezii, rezultînd într-o primă fază ca efecte ale cîmpului de viteze în jurul solidului dat, se modifică apoi, în urma schimbării suprafeței de contur a volumului format din corpul solid împreună cu aglomerările inițiale; după un timp mai îndelungat a unei mișcări sub regim constant al aerului, forma de aglomerare se stabilizează, urmînd numai o îndesare lentă a zăpezii, creșterea greutății volumetrice și scăderea volumului de zăpadă depus.

Dintre toate formele succesive pe care le ia aglomerarea de zăpadă trebuie considerate pentru calculul sarcinilor exterioare ale construcției acelea care conduc la eforturile cele mai mari în structura de rezistență.

5. MODELAREA MECANICĂ A AGLOMERAȚIILOR DE ZĂPADĂ

5.1. Considerații generale. Modelarea mecanică a aglomerărilor de zăpadă este posibilă în măsura în care sînt posibile modelările vîntului și ale proprietăților fizico-mecanice ale zăpezii (statice, dinamice și termice).

În ceea ce privește acțiunea vîntului asupra construcțiilor, se amintește că s-au făcut studii în natură și pe modele, în tunele aerodinamice începînd prin 1930 [2] [4], [5]. Asemenea studii sînt continuate și astăzi [6], dar fără considerarea și a zăpezii. S-au determinat pentru un număr mare de forme de construcții presiunile locale pe pereți, pe acoperiș și în interior și forțele de presiune rezultante. O concluzie importantă în legătură cu aplicarea metodei similitudinii mecanice este că la corpurile cu muchii vii stratul-limită se dezlipește la muchii, oricare ar fi mărimea corpului și viteza aerului. Trebuie totuși ca mișcarea în natură și pe model să rămînă în aceleași zone definite prin anumite valori critice.

La corpurile cu suprafețe curbe, fără discontinuități, poziția liniilor de dezlipire a stratului-limită variază cu numărul *Re* și însăși structura dîrelor variază cu acest număr. Întrucît nu este cu putință ca fenomenul din natură și cel simulat pe model să aibă același număr *Re* (în stratul-limită), se caută ca obiectul să fie, dacă nu în aceeași zonă de automodelare ca și modelul, să se afle fiecare în cîte o zonă în care mărimile ce interesează în calcul nu sînt funcție de *Re* sau variază puțin în raport cu *Re*. Modelarea proprietăților fizico-mecanice ale zăpezii întîmpină serioase dificultăți.

Trebuie ca materialul folosit ca simili-zăpadă în model să fie o materie dispersă avînd același talus natural, același unghi de frecare internă, aceeași coeziune și unghi de frecare cu terenul ca și zăpada; să fie un material care să se taseze tot atît prin presiune ca și zăpada. De altfel, zăpada însăși nu este un material cu proprietăți constante din cauza marii diversități a formei și mărimii particulelor care se schimbă chiar în timpul mișcării. Materialul cel mai bun pentru experimentare ar fi deci însăși zăpada uscată (de tipurile mai frecvente), iar laboratorul să lucreze numai sub 0°C, prin instalații frigorifice sau în localități unde temperatura se menține mai multe luni sub 0°C.

Dacă se renunță să se facă experimentări în care intervin fenomene termice, de care totuși se va ține seama pe altă cale, problema experimentării se simplifică mult și se pot folosi alte materiale care să aibă proprietăți apropiate de ale zăpezii. Se va arăta mai departe rezultatul unor experiențe făcute cu mai multe materiale simulînd zăpada.

5.2. **Modelarea mișcării zăpezii.** 5.2.1. *Mișcarea particulei.* În căderea pe verticală a particulei este dominantă — la formarea stratului de zăpadă — mișcarea uniformă în regim turbulent. În acest caz, pentru similitudine, trebuie ca raportul dintre greutatea aparentă și rezistența aerodinamică să fie același în natură și la model, adică :

$$\frac{g(\rho_{sn} - \rho_n) D_n^3}{C_n \rho_n V_n^2 D_n^2} = \frac{g(\rho_{sm} - \rho_m) D_m^3}{C_m \rho_m V_m^2 D_m^2}, \tag{2}$$

de unde rezultă coeficientul de scară al vitezei particulei :

$$\alpha_V = \frac{V_n}{V_m} = \sqrt{\frac{C_m}{C_n} \cdot \frac{D_n}{D_m} \cdot \frac{\rho_{sn} - \rho_n}{\rho_n} \cdot \frac{\rho_m}{\rho_{sm} - \rho_m}}. \tag{3}$$

Experiențele făcîndu-se în același mediu ca în natură și ρ_{aer} fiind neglijabil în raport cu ρ_{sn} și ρ_{sm}, relația (4) se simplifică :

$$\alpha_V = \sqrt{\frac{C_m}{C_n} \cdot \frac{D_n}{D_m} \cdot \frac{\rho_{sn}}{\rho_{sm}}} \,. \tag{4}$$

La aceeași relație se ajunge și formînd condiția de similitudine pentru vitezele critice : viteza de pornire (V_0), viteza de sedimentare V_s, întrucît structura formulelor care exprimă pe V_0 și V_0 este aceeași cu (2), coeficienții C_m și C_n fiind însă diferite funcțiuni de numărul $Re = \frac{VD}{\nu}$ și de rugozitatea relativă $\frac{\Delta}{h}$. Aceste funcțiuni variază lent în raport cu Re, iar diapazonul de valori Re în care se petrece fenomenul de producere a aglomerării este restrîns la vitezele vîntului de la 6 ... 18 m/s — în natură — și la viteze corespunzătoare — mai mici — în laborator. În aceste condiții, pentru aceeași experiență, C_m / C_n poate fi privit ca o constantă numerică. Fie, de exemplu : $D_m = 0{,}001$ m, $D_m = 0{,}0002$ m, $\nu_{aer} = 1{,}3 \times 10^5 \text{m}^2/\text{s}$ și viteza viscolului V_a să fie considerată la limitele intervalului în care se produc aglomerările : 6 m/s și 18 m/s. Raportul ρ_{sn}/ρ_{sm} se va lua $0{,}92/1{,}63 = 0{,}56$, admițînd că se folosește ca material pentru simularea zăpezii rumegușul de lemn care trece prin sita cu ochiuri de $D = 0{,}3$ mm. Coeficientul α_V va fi calculat pentru particule de trei forme diferite : sfera, cilindrul și discul, pentru care coeficienții aerodinamici C sînt cunoscuți din literatură. Nefiind cunoscută viteza V_m, vom proceda prin încercări, admițînd vitezele $V_m = 1{,}9$, resp. 6,0 m/s, corespunzînd vitezelor V_n de mai sus. În tabela 1 sînt date rezultatele calculelor, iar α_V s-a calculat din (2) cu formula (5) și datele numerice admise

$$\alpha_V = \sqrt{C_m / C_n} \sqrt{\frac{0{,}001}{0{,}0002}} \cdot 0{,}56 = 1{,}67 \sqrt{C_m/C_n}.$$

Tabela nr. 1.

Forma particulei	Viteza V_n m/s	Viteza V_m m/s	Re $\frac{V_n D}{\nu}$	Re $\frac{V_m D}{\nu}$	C_n	C_m	$\sqrt{\frac{C_m}{C_n}}$	α_V	Obs.
sferă	6,0	1,9	$4{,}6 \cdot 10^2$	$2{,}9 \cdot 10^1$	0,60	2,1	1,87	3,12	media lui $\sqrt{\frac{C_m}{C_n}}$ = 1,72.
	18,0	6,8	$1{,}4 \cdot 10^3$	$1{,}1 \cdot 10^2$	0,42	1,0	1,58	2,64	
cilindru	6,0	2,8	$4{,}6 \cdot 10^2$	$4{,}2 \cdot 10^1$	1,30	2,1	1,27	2,12	
	18,0	8,2	$1{,}4 \cdot 10^3$	$1{,}3 \cdot 10^2$	1,00	1,7	1,30	2,18	
disc	6,0	3,5	$4{,}6 \cdot 10^2$	$4{,}6 \cdot 10^1$	1,14	1,2	1,02	1,70	
	18,0	10,7	$1{,}4 \cdot 10^3$	$1{,}6 \cdot 10^2$	1,15	1,2	1,01	1,68	

Din această tabelă se vede că pentru fiecare formă de granulă raportul $\sqrt{C_m / C_n}$ variază pentru viteze de la 6 ... 18 m/s în natură în cel mult

$\pm 10\%$ în jurul mediei (la sferă), iar la celelalte forme variațiile sînt mult mai mici, deci se realizează o automodelare.

5.2.2. *Pentru modelarea transportului în suspensie* al particulelor de concentrație c, la înălțimea y față de sol, coeficientul de scară al concentrației α_c se poate lua [3]:

$$\alpha_c = \frac{N_n}{N_m} \frac{\rho_{sn}}{\rho_{sm}} \frac{gD_n^3}{gD_m^3}$$

în care cu N_n și N_m s-a notat numărul particulelor de diametru mediu echivalent în unitatea de volum în natură și model.

Mișcarea pe verticală a materiei solide se exprimă prin ecuația:

$$C W_s + \varepsilon_s \frac{\partial C}{\partial z} = q \tag{5}$$

în care W_s este viteza de transport a particulei solide pe verticala z, ε_s coeficientul de difuzie al particulei solide. Astfel, primul termen reprezintă cantitatea de zăpadă ce cade pe $s \cdot m^2$; termenul al doilea, transportul în sus al zăpezii funcție de concentrație și q este creșterea netă a cantității (în greutate) zăpezii pe unitatea de suprafață și pe secundă.

Creșterea grosimii stratului de zăpadă în unitatea de timp este exprimată prin $W = \frac{g}{\gamma}$, în care γ este greutatea volumetrică a zăpezii depuse. Pentru modelarea vitezei de acumulare rezultă deci scara:

$$\alpha_q = \frac{q_n}{q_m} = \frac{\gamma_n}{\gamma_m} \cdot \frac{W_{sn}}{W_{sm}}. \tag{6}$$

5.2.3. *Coeficientul de scară al timpului*, α_t, pentru a avea un sens precis, trebuie definită însăși durata t_n a fenomenului natural. Aglomerările de zăpadă mai importante se produc ca un rezultat al unui proces de ninsori succesive cu vînt simultan sau intercalat și cu intervale de timp liniștit. Putem totuși defini un timp efectiv echivalent ca suma duratelor de viscol cu viteze mai mari ca 6 m/s simultan sau urmînd unei ninsori importante. Coeficientul de scară al timpului este:

$$\alpha_t = \alpha_l \, \alpha_V^{-1}. \tag{7}$$

Dacă în exemplul precedent coeficientul de scară al lungimii obiectului $\alpha_l = 400$ și α_V pentru $V_n = 6$ m/s este 3,12, rezultă $\alpha_t = 400/3{,}12 = 128$. Deci, dacă durata viscolului efectiv este de 16 ore în natură, în modelul ales va fi $57600/128 \sim 450$ secunde sau 7 min și 30 s.

Viteza de creștere a stratului de zăpadă W, exprimată mai sus prin g/γ, se poate scrie și sub forma creșterii diferențiale a grosimii z în raport cu timpul, deci $W = \frac{dz}{dt}$. Cum z se măsoară la scara lungimilor obiectului solid (a construcției), rezultă coeficientul:

$$\alpha_t = \alpha_l \, \alpha_W^{-1}. \tag{8}$$

Comparînd formula (9) cu (10), rezultă că vitezele aerului și viteza de creștere a stratului de zăpadă au același coeficient de scară. În ceea ce privește grosimea stratului de zăpadă acumulat, în cazul exemplului

admis, o depunere importantă, de 1 m în natură, ar fi de 2,5 mm pe model, strat prea subțire pentru a putea fi măsurat cu o exactitate admisibilă. De aceea vom considera în ceea ce privește grosimea stratului de zăpadă, o ninsoare mai intensă, deci o anumită *distorsiune* pentru scara concentrației și a grosimii stratului.

6. STUDIUL EXPERIMENTAL AL AGLOMERĂRILOR DE ZĂPADĂ PE MODELELE UNOR CONSTRUCȚII DATE*

6.1. **Alegerea materialului pentru modelarea zăpezii.** Au fost încercate pînă în prezent următoarele materiale : diatomit măcinat, azbest pulverizat, rumeguș de lemn, pilitură de lemn, ampora. Pentru a obține un material asemănător unui tip de zăpadă obișnuită în climatul nostru, materia primă a fost fărîmițată prin zdrobire în creuzet (diatomitul, azbestul), prin așchiere (rumeguș de brad rezultat de la ferăstrăul circular), prin pilire (lemn de brad, pilit la polizor) sau tocat mecanic (ampora = = spumă ureoforaldehidică).

Din aceste materiale s-au folosit fracțiunile trecute prin site de sîrmă, cu ochiuri pătrate de 0,3 mm, iar în unele experiențe, fracțiunea sub 0,1 mm.

6.2. **Granulometria.** Curbele granulometriei obținute (fig. 6) ne permit să clasăm aceste materiale astfel :

azbest	0,3 mm	nisip fin făinos pînă la praf făinos	conțin și puțin nisip mijlociu
diatomit	„	nisip fin făinos	
rumeguș	„	nisip fin	
ampora	„	nisip mijlociu fin.	

Coeficientul de uniformitate $u = \frac{D_{60}}{D_{10}}$ variază de la 2,57 (azbest) la 1,48 (ampora), valori sub 5 ; deci materialele se consideră uniforme.

6.3. **Analiza microscopică** a fost efectuată în laboratorul de mineralogie al Institutului de petrol și gaze (asist. M. Mărcuș și ing. V. Berbente, fotografiile cu mărirea de 30 de ori, desenele de 60 de ori. Din aspectul desenelor reiese că nici unul dintre cele patru materiale folosite nu au granule de o formă dominantă, existînd în amestec granule mai fine rotunde, bastonașe, plăci sau forme complicate cu prelungiri așchioase (rumeguș) sau scămoase (ampora) (fig.7 și 8). Ar fi foarte indicată și folosirea de polistiren expandat sau de bachelit sub formă de nisip fin-prăfos.

6.4. **Greutățile volumetrice** au fost determinate pentru fiecare material în stare uscată (cu umiditatea naturală) ; în următoarele stări de îndesare :

— afînată, obținută prin căderea de la cîțiva centimetri.

— îndesată, făcînd să cadă de 5 ori la rînd de la 10 cm un piston cu axă verticală, de 1,5 kg greutate și de 5 cm diametru, deasupra materialului afînat conținut într-un cilindru coaxial cu pistonul. Nu s-a

* Experiențele au fost executate în laboratorul hidrotehnic al Institutului de construcții București, în anii 1963—1964.

determinat şi procentul de umiditate naturală conţinut în materia pulverulentă.

— Greutatea specifică medie a granulelor înseşi s-a determinat în general prin metoda picnometrică, obţinîndu-se şi porozitatea, care a fost calculată atît pentru starea afînată cît şi pentru cea îndesată.

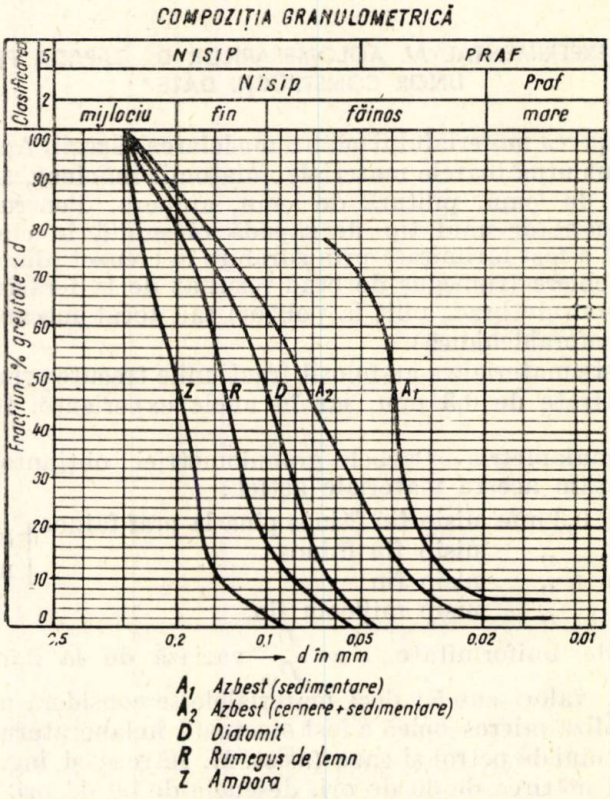


Fig. 6. — Compoziţia granulometrică a pulberelor încercate ca simili-zăpadă.

La ampora s-a folosit şi comprimarea la presă.

În tabela 2 se dau rezultatele medii ale măsurătorilor făcute pe un număr redus de probe:

Tabela 2

Materialul trecut prin sită cu ochiul de 0,3 mm latură	Greutăţi volumetrice		Porozitatea		Greutatea specifică a granulei g/cm³
	afînat g/cm³	îndesat g/cm³	*p* afîn. %	*p* îndes. %	
Azbest	0,345	0,75. . .0,99	88	75. . .51	2,85
Diatomit	0,463	0,62	83	77	2,76
Rumeguş de lemn	0,226	0,31	86	81	1,67
Pilitură de lemn	0,213	0,30	85	79	1,42
Ampora	0,022	0,08	93	72	0,30 (?)

Comparînd aceste materiale cu zăpada, a cărei greutate volumetrică poate fi luată de 0,09—0,12 (afînată) și de 0,25—0,35 (îndesată), iar greutatea specifică absolută 0,917 g/cm^3, rezultă că materialele pulverulente

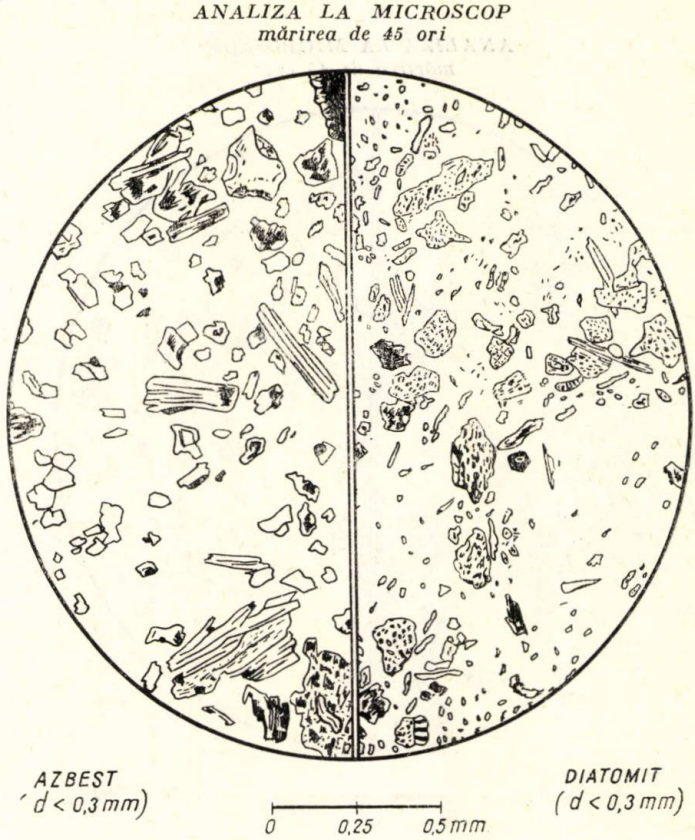


Fig. 7. — Analiza la microscop a azbestului măcinat și a diatomitului măcinat

Azbest pulverizat: Apar granule de minereu, și anume: cromit și magnetit, destul de numeroase, și *crisotilul* (*serpentină fibroasă*) care dă majoritatea mineralelor fibroase. Acesta este incolor, cu relief foarte slab, cenușiu, cu birefrigerență scăzută. Apar și sub formă de paiete cu contur neregulat, mai rar circular. Unele granule de crisotil au forme palmate, altele triunghiulare, așchioase și altele cu margini rotunjite. În general predomină formele colțuroase și semicolțuroase. Din cauza mărunțirii fine a materialului, fibrele apar în cantitate mică; în orice caz, se observă fibre a căror lățime este mai mică de 0,001 mm, iar lungimea depășește de 5—10 ori lățimea. Se observă și agregate de fibre paralele. Mai apar rar paiete de *antigonit lamelar*.

Diatomit pulverizat: Predomină dintre diatomee formele alungite, care apar în secțiune, aciculare. Mai apar unele diatomee circulare. Se mai găsește o pulbere foarte fină, alcătuită din opal și minerale argiloase, care dau la microscop un caracter de opacizare. Apar și granule de cuarț așchioase și agregate de calcedonie fibroasă.

cu proprietățile cele mai apropiate de proprietățile zăpezii sînt rumegușul și pilitura de lemn de brad.

6.5. Încercări ale materialelor pulverulente în echilibru pe suprafețe plane. Pentru ca să realizeze o ninsoare liniștită omogenă, sita prin care s-a cernut materialul pulverulent care simulează zăpada este compartimentată în pătrate prin pereți despărțitori, iar materialul ce se pune pe

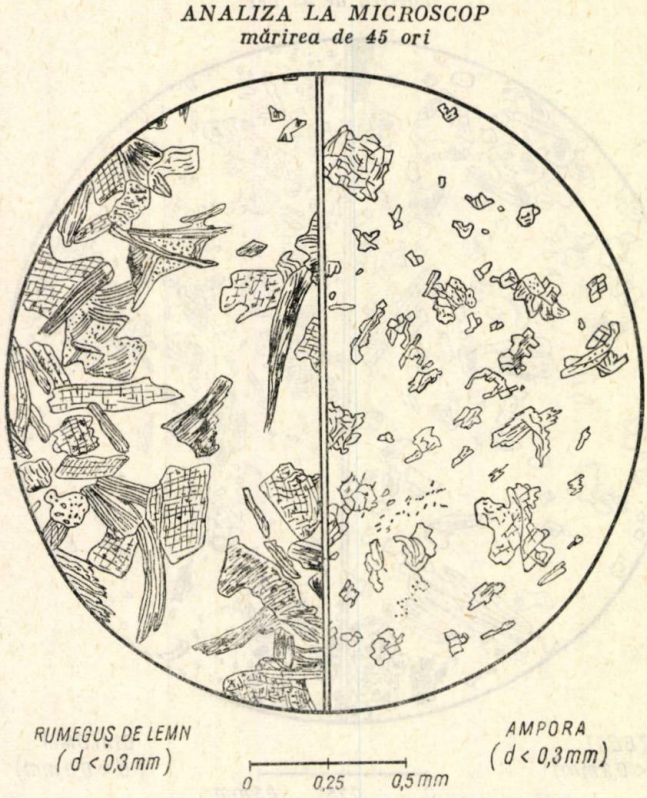


Fig 8. — Analiza la microscop a rumegușului de lemn și a amporei măcinate

Rumeguș de lemn:
Totul apare sub formă de fibre aşchioase, fără a prezenta nici un grad de rotunjire; sînt aşchioase şi fragmentate.

Ampora pulverizată:
Particule de forme cu totul nedefinite, cu prelungiri scămoase; apar numeroşi pori. Predomină granulele de nisip fin între 0,1 şi 0,3 mm.

sită se așază cu o grosime egală cu ajutorul unui răzuitor calibrat. Căderea zăpezii este provocată de mici mișcări orizontale sacadate efectuate de la aceeași înălțime.

În tabela 3 se dau rezultatele acestor încercări efectuate pe plăcuțe pătrate de 12 × 12 cm, din scîndură de lemn negeluit. În figurile 9 și 10, în care mira este marcată la cm, se arată conformațiile depunerii liniștite, în figura 11 se arată aderența unui strat subțire pînă la o înclinare a plăcii de 75—90°.

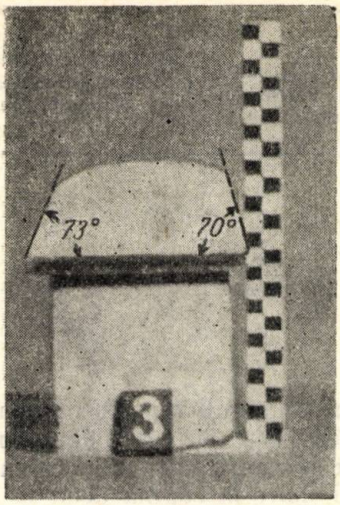


Fig. 9. — Diatomit măcinat, D sub 0,3 mm, depus pe placă orizontală.

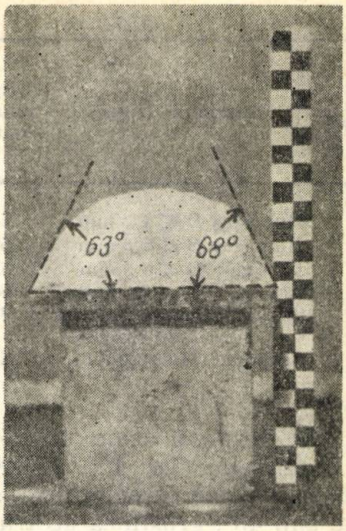


Fig. 10. — Rumeguş de lemn, D sub 0,3 mm, depus pe placă orizontală.

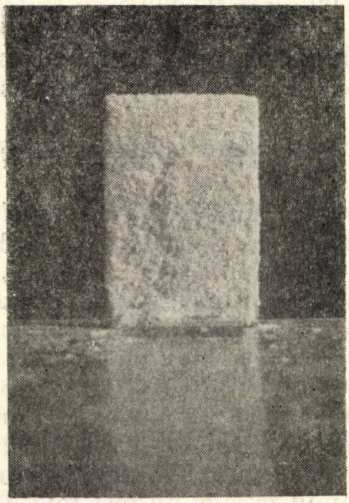


Fig. 11. — Pilitură de lemn, D sub 0,3 mm, depusă în strat subţire pe o placă orizontală, aderă de placă pînă aproape de poziţia verticală.

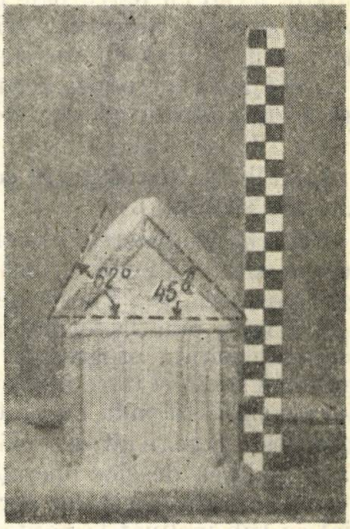


Fig. 12. — Acoperiş în două ape, la 45°. Rumeguşul $D \leqslant 0{,}3$ mm are grosime variabilă, căci panta la suprafaţa stratului este de 62° la streaşină.

Tabela 3

Nr. exper.	Materialul depus	Unghiul taluzului natural	Înclinarea plăcii la prima alunecare internă	Grosimea stratului	Înclinarea plăcii la care încetează adeziunea unui strat subțire
1	Rumeguș $D \leqslant 1$ mm	67°	52°	9	—
2	Rumeguș $D \leqslant 0{,}3$ mm	51°	53°	9	72°
3	Diatomit $D \leqslant 0{,}3$ mm	74°	62°	6	90°
4	Azbest $D \leqslant 0{,}3$ mm	81°	—	4,5	75°—80°
5	Pilitură de lemn la polizor $D \leqslant 0{,}3$ mm	82°	—	4,5	75°—80°
6	Ampora, $D \leqslant 0{,}3$ mm	45°	—	3,0	85°

Se constată asemănarea depunerilor de simili-zăpadă obținute cu cele de zăpadă (fig. 12). Astfel, la înclinări peste 60—70°, depunerea în strat gros își pierde echilibrul, alunecînd pe pantă ; pe un acoperiș în două pante sub 45°, grosimea stratului este mai mare la coamă decît la streașină (fig. 12).

6.6. **Dispozitivele experimentale.** Cea mai mare parte a experiențelor de aglomerare a zăpezii pe construcții s-au făcut pe machete, în tunelul unei mici suflerii construite ad-hoc. Vitezele care produc aceste fenomene cu materialele pulverulente alese fiind relativ mici (2...4 m/s), s-a folosit un ventilator axial cu patru pale de Ø 400 mm, difuzor de tablă și un tunel cu pereți și tavan de sticlă, avînd $h = 17$ cm, $b = 62$ cm și $L = 125$ cm. Ventilatorul, cuplat cu un electromotor de 0,6 kw la viteza de rotație $n = 2880$ t/min, introduce aerul în tunel după trecerea prin site de omogenizare a cîmpului de viteze. S-au realizat viteze medii în tunel pînă la 4 m/s (fig. 13 și 14).

Instalația, foarte puțin costisitoare, s-a dovedit suficientă în primul stadiu al studiului.

Pentru producerea viscolului (ninsoare simultan cu vînt), sita de cernere a simili-zăpezii a fost plasată sub tavanul tunelului, dîndu-i-se mișcări sacadate. S-a folosit de multe ori și alt procedeu : ninsoare liniștită, fără vînt, pînă la formarea unui strat de grosimea dorită, urmată de vînt de intensitate progresivă. Urmărirea fenomenelor s-a putut face tot timpul prin sticlă și între fazele experimentale s-au făcut releveuri ale depunerilor de simili-zăpadă cu ajutorul unui coordonatometru tridimensional. Tavanul este constituit din plăci de cristal care se pot demonta și monta ușor, în vederea deselor operații de așezare a machetei, cernere, măsurători etc. Controlul vitezelor aerului s-a făcut cu un micromanometru diferențial cu tub înclinat la panta 1/25. Ca simili-zăpadă au fost folosite mai ales : rumeguș de lemn trecut prin sită de $D \leqslant 0{,}3$ mm și ampora tocată și cernută prin aceeași sită.

Cîmpul de viteze realizat nu este perfect uniform, întrucît și în natură vîntul prezintă mari neregularități și numeroase vîrtejuri.

S-a folosit teoria similitudini expusă anterior. S-a constatat că timpul de formare a aglomerărilor pe modele corespunde îndeajuns timpului obținut prin similitudine cu fenomenele din natură.

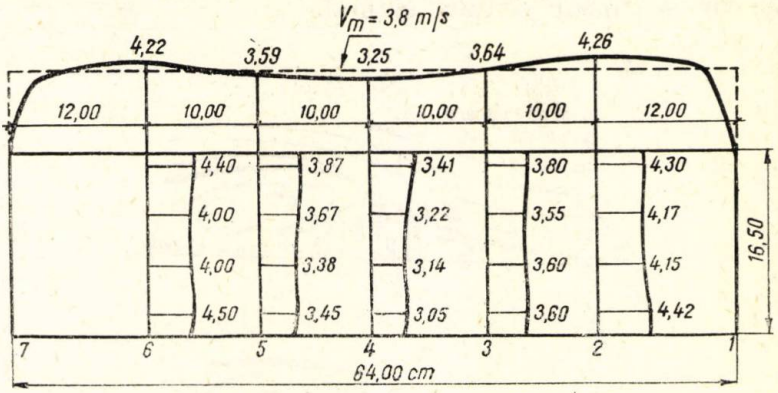
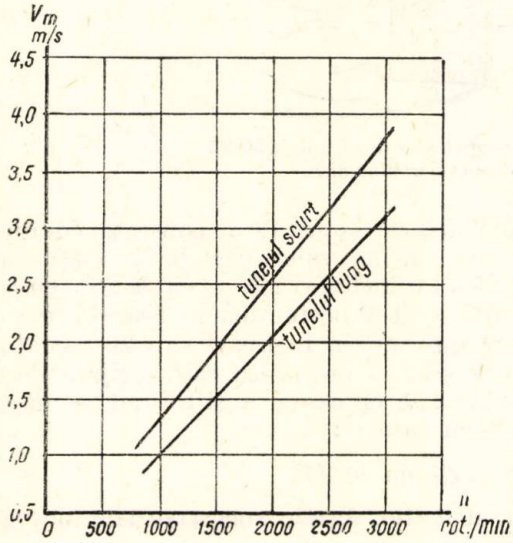


Fig. 13. — Distribuția vitezelor în tunelul aerodinamic (cel scurt).



n rot./min.	Tunel scurt	Tunel lung
1200	1,50	1,17
1300	1,66	1,30
1400	1,80	1,40
1500	1,92	1,50
1600	2,04	1,60
1700	2,15	1,72
1800	2,28	1,82
1900	2,46	1,92
2000	2,54	2,05
2100	2,69	2,15
2200	2,80	2,25
2300	3,00	2,35
2400	3,14	2,50
2500	3,27	2,60
2600	3,40	2,70
2700	3,50	2,80
2800	3,65	2,90
2880	3,75	3,00

Fig. 14. — Viteza medie în tunel, funcție de turație.

7. ÎNCERCĂRI CU AGLOMERĂRI DE ZĂPADĂ PE MODELE

7.1. Încercări cu aglomerări de zăpadă pe case cu acoperiș plan, în două ape. S-au încercat trei modele constînd din cîte o căsuță drepunghiulară în plan, de dimensiunile și pantele următoare (h este înălțimea coamei deasupra solului, α = înclinarea acoperișului) :

a) $l = 20$ cm $b = 10$ cm $h = 7$ cm $\alpha = 45°$ (100 %)
b) $l = 20$ „ $b = 10$ „ $h = 5{,}5$ „ $\alpha = 30°$ (58 %)
c) $l = 24$ „ $b = 12$ „ $h = 6$ „ $\alpha = 6°$ (10 %)

Drept simili-zăpadă s-a folosit rumeguș de lemn $D \leqslant 0{,}3$ mm. Casa este așezată cu lungimea perpendicular pe direcția curentului principal. Solul este chiar pardoseala tunelului, deci modelul se află într-un gradient de viteză similar vîntului natural.

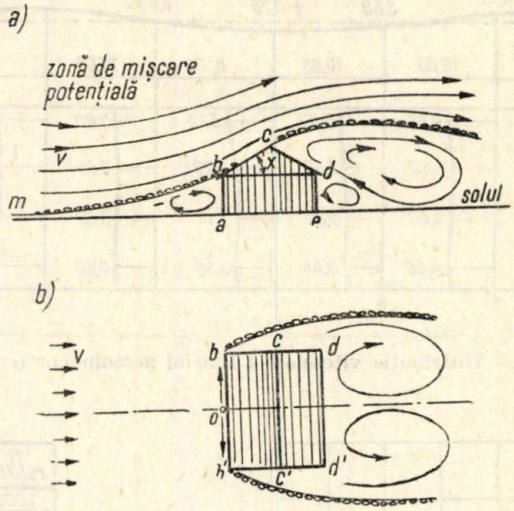


Fig. 15. — Casă cu acoperiș în două ape, așezată în vînt, Schema aerodinamică.

Încercarea, mai mult calitativă, are scopul de a constata comportarea acoperișului la pante mai mari sau mai mici decît panta critică de 20°, observată de Nökkentved [4] [5]. La înclinări mai mari de 20°, curentul îmbracă acoperișul, stratul-limită se dezlipește abia la coamă, presiunea pe acoperiș este dirijată către interior, la înclinări sub 20°, stratul-limită se desprinde chiar de la streașină și presiunea este dirijată de la interior spre exterior (fig. 1.5). Încercările cu casele a și b fiind asemănătoare, vom descrie numai pe acele cu casa a ;

— a). *Acoperiș în două ape, înclinate la 45°*

Fazele experienței (în textul următor, fazele succesive sînt despărțite prin cîte o linie verticală) :

— Ninge (fără vînt) un strat de zăpadă de 1,5 mm la streașină și 2,5 mm la coamă (fig. 16) | Zăpadă + vînt de 1,30 m/s timp de 3 min. Pe fața amonte, grosimea rămîne la valorile precedente, dar începe dezvelirea de zăpadă la colțurile de jos ; pe fața aval, grosimea crește la 2,5 mm la streașină și la 5 mm la coamă.

— Vînt (2,00 m/s) timp de 3 min. Fața amonte este complet dezvelită, pe fața aval se formează goluri la colțuri, grosimea scade. Continuă dezvelirea marginilor laterale și la creastă (fig. 17) | Vînt de 2,75 m/s. Pe acoperiș rămîne un petec lunguieț de zăpadă în centrul versantului aval, de 2 mm grosime. Pe sol, în aval, se văd mișcările particulelor produse de

vîrtejuri alternante cu axele pe două linii paralele. Aceste vîrtejuri nu au puterea de a eroda sensibil zăpada depusă (fig. 18)|Vînt de 3,45 m/s.

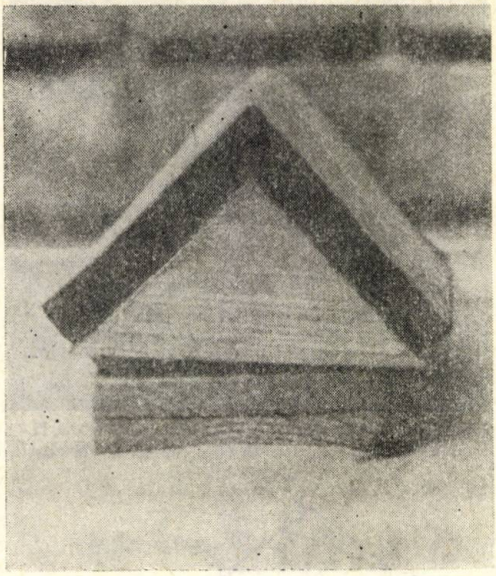


Fig. 16. — Acoperiș în două ape, la 45°. Rumeguș sub 0,3 mm, depus liniștit, prin cernere.

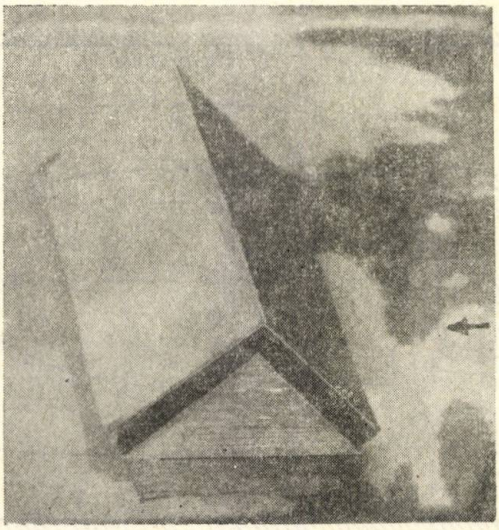


Fig. 17. — Acoperiș în două ape, la 45°. Faza II : Viscol. Versantul amonte complet dezvelit.

Dispare complet zăpada pe acoperiș, iar pe sol rămîne în spate o suprafață redusă, acoperită cu zăpadă, despărțită de o zonă complet spălată de

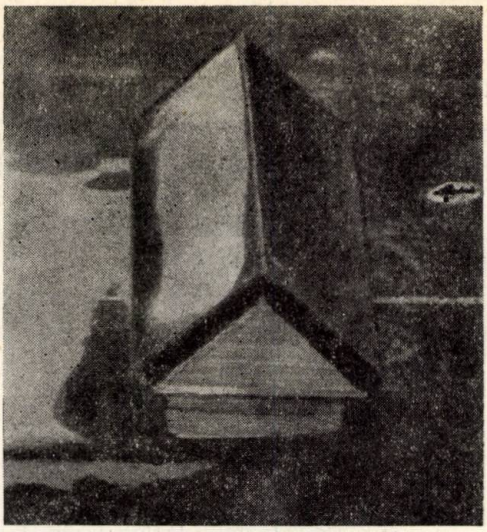


Fig. 18. — Acoperiş în două ape la 45°. Faza III : Viscol intens. Începe dezvelirea şi a versantului aval.

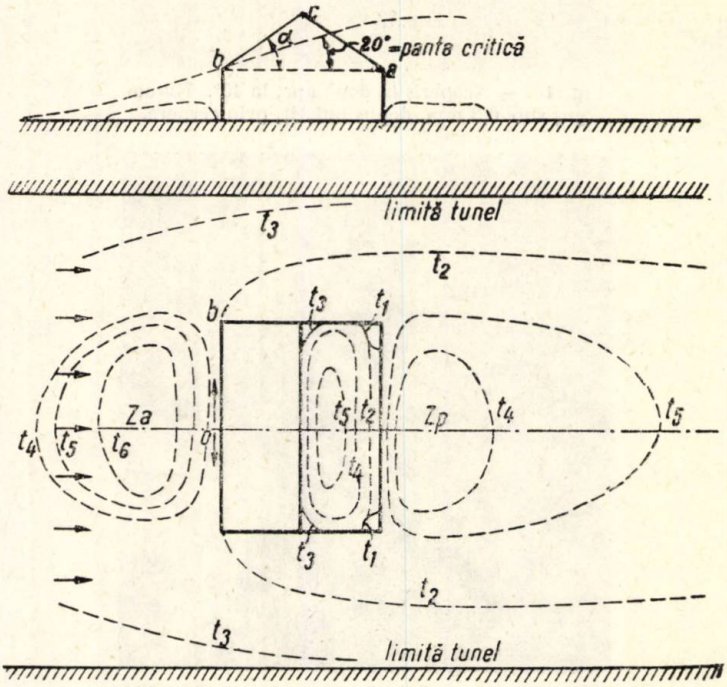


Fig. 19. — Acoperiş în două ape la 45°. Schema aerodinamică.
a) Separaţia dîrelor în plan vertical
b) Separaţia dîrelor în plan orizontal
şi reprezentarea etapelor de spălare a zăpezii la timpii succesivi t_1, t_2 .. t_6 sub acţiunea vîntului.

zăpadă, în jurul clădirii (fig. 19, schemă). Vîrtejurile alternante se întăresc ; după 5 min, cît a durat ultima fază, a dispărut orice zăpadă de pe sol.

b) *Acoperiș cu înclinări de 30°*. Fenomenele sînt similare cu cazul a).

c) *Acoperiș plat în două ape, cu pante de 10%*.

— *Fazele experienței* : modelul așezat în lungime, transversal direcției vîntului.

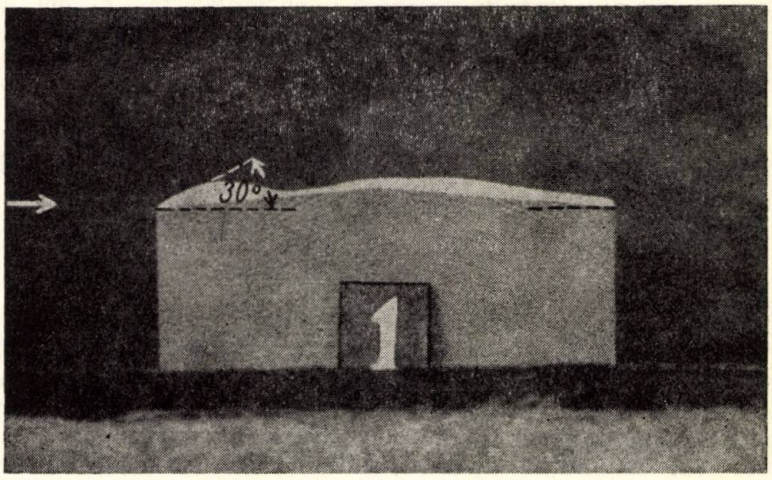


Fig. 20. — Acoperiș plat (pante 10%, în două ape). După ninsoare de rumeguș, $D \leqslant 0{,}3$ mm, urmată de viscol, rămîne pe versantul amonte un val cu profil curb.

Ninge liniștit 4,5 mm | Vînt moderat | Ninge liniștit 4 mm | Vînt mai intens (fig. 20 și fig. 21, releveul zăpezii).

Grosimea totală de zăpadă așezată uniform, 8,5 mm.

— *Caracterizare* : Aglomerarea pe versantul amonte apare cu o suprafață curbă convexă în sus, simetrică față de planul de simetrie vertical amonte-aval. La muchia amonte, tangenta la suprafața zăpezii în secțiuni transversale este înclinată de 30°, urmînd suprafața de separație a stratului limită. Grosimea maximă a stratului format este de 10,5 mm la $x = 0{,}25\ a$ și $y = 0$ (în planul de simetrie vertical), grosimea scade în același plan la 4 mm, la distanța de $x = 0{,}75\ a$. Grosimea scade lent și spre capete, iar la distanțe din planul median de $y = \pm 0{,}31\ b$, grosimea scade la cca. 7,5 mm în dreptul a două zone de eroziune formate din doi curenți turbionari cu cîte o axă

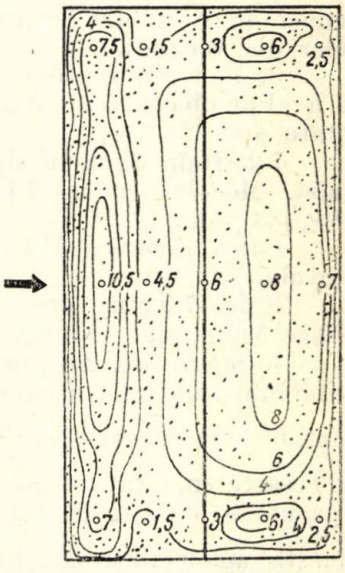


Fig. 21. — Acoperiș plat (releveu la fig. 20), cu cote și izolinii ale grosimii stratului în mm.

paralelă cu curentul principal și cîte o ramificație laterală — dreaptă și stînga — unde grosimea zăpezii scade la 1,5 mm.

Pe versantul aval se formează o aglomerare similară cu cea din amonte, dar mai plată, cu grosimea maximă de 8 mm.

Pe teren, în jurul machetei, zăpada se aglomerează în amonte și în aval în zonele calme ale dîrelor, iar lateral este erodată. Se desenează lateral liniile de dezlipire ale stratului-limită și două brazde mai adînci, deoparte și de alta a modelului continuînd în aval :

Indici de aglomerare

Indice de aglomerare locală maximă $a_{max} = \frac{10,5}{8,5} = 1,24.$

Indicele de aglomerare pe întreaga suprafață a acoperișului este subunitar, deoarece grosimea medie a zăpezii rămase este de 5,5 mm, deci $a_i = \frac{5,5}{8,5} = 0,65.$

Concluzii

1. Conformația depunerii de zăpadă viscolită pe un acoperiș în două ape depinde în primul rînd de panta acoperișului. La înclinări peste 20° rezultă, la un moment dat, o încărcare parțială, numai pe versantul aval, cu un indice de aglomerare medie pe versant nu mai mare de 1, iar în cazul unei înclinări sub 20° apar pe amîndoi versanți o încărcare aproape egală, precum și o ușoară aglomerare locală pe versantul amonte, în apropiere de bordul de atac (fig. 18).

2. Dezgolirea începe de la colțuri și muchii, suprafețele acoperite reducîndu-se treptat la petece care persistă spre centrele de figură ale celor doi versanți.

3. Pe teren se produc două aglomerări mai importante, în amonte și în aval de obiect, cea din aval fiind ultima dezgolită, la un vînt de intensitate sporită.

7.2. **Hală dintr-un singur panou, scurtă, cu luminator de lungimea halei.** Modelul ca la 7.1. acoperiș plat. Simili-zăpadă din rumeguș $D \leqslant 0,3$ mm.

Fazele experienței. Poziția : lungimea l perpendiculară pe direcția vîntului.

Ninge 7,5 mm, apoi vînt (fig. 22) | Ninge 5 mm, apoi vînt (fig. 23) | Ninge 5 mm, apoi vînt (fig. 24 și 22). | Vînt puternic (fig. 26).

Caracterizare. Aglomerarea pe versantul amonte după două ninsori cumulînd 12,5 mm, urmate de vînt moderat, începe de la muchie, cu o suprafață curbă convexă cu grosimi maxime pe o linie $x = \frac{a}{3}$. Tangenta la această suprafață lîngă muchia amonte are o înclinare de 38° față de orizontală (32° față de versant). Indicii de aglomerare locală maximă la creasta aglomerării din amonte sînt $\frac{20}{12,5} = 1,6$ la sfertul lungimii și $\frac{14}{12,5} = 1,1$ în axa de simetrie (fig. 24 și 25).

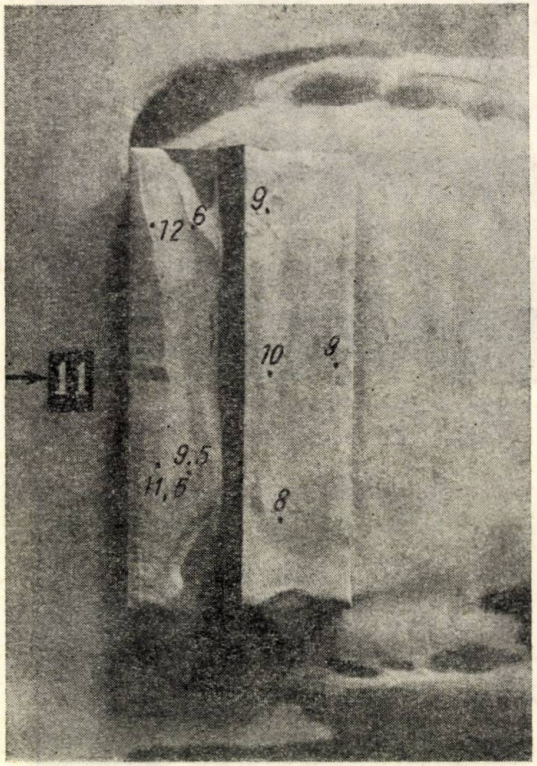


Fig. 22. — Hală dintr-un panou scurt, cu luminator de aceeaşi lungime. Apar spre capete curenţi secundari.

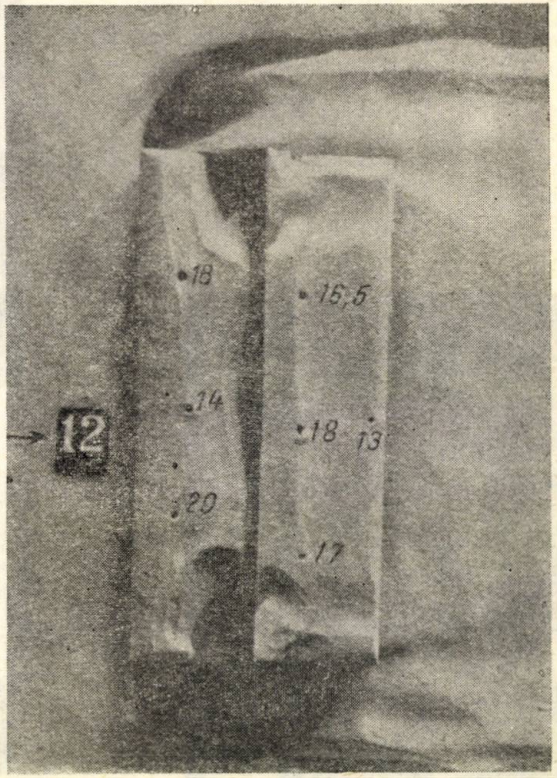


Fig. 23. — Pe modelul din figura 22, din nou ninsoare (rumeguş *D* sub 0,3 mm), urmată de vînt. Se menţine conformaţia zăpezii, sporind grosimile.

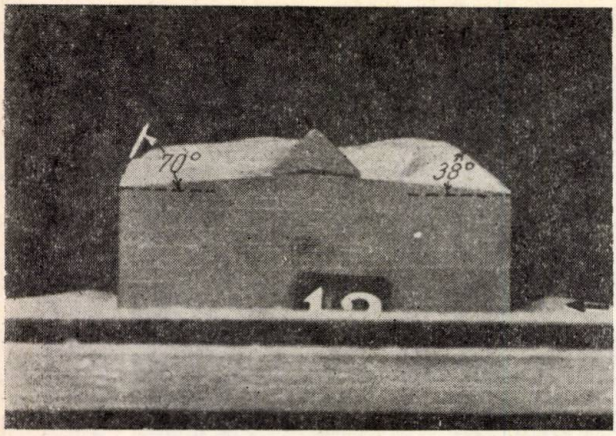


Fig. 25. — Vedere din profil transversal a halei din fig. 22—24.

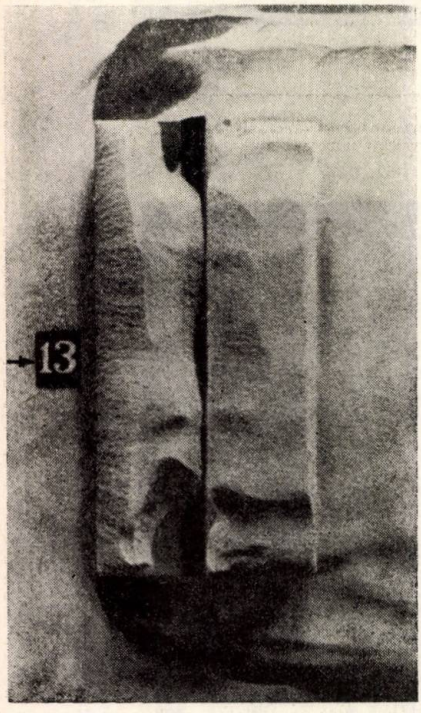


Fig. 24. — La vînt mai intens, curenţii laterali secundari produc eroziuni accentuate.

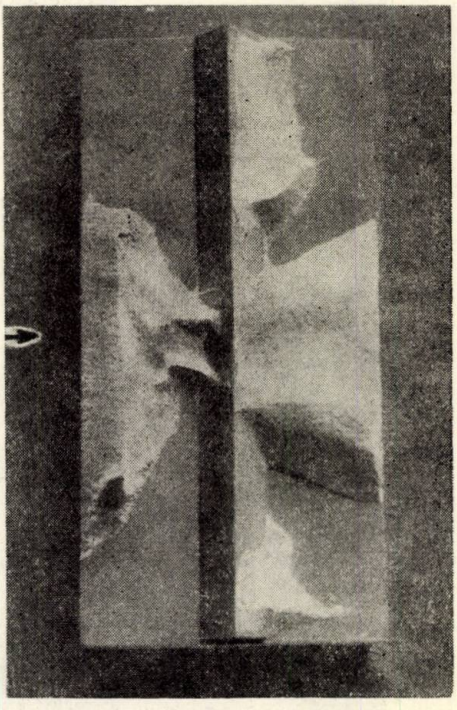


Fig. 26. — În faza finală, vîntul puternic, fără nouă ninsoare, creează o configuraţie deosebită.

Trebuie evidențiat rolul luminatorului în realizarea formei de aglomerare. În zona calmă de sub stratul limită, un vîrtej cu axă orizontală în lungul coamei luminatorului spală zăpada de lîngă coamă, deplasînd-o în sens contrar curentului principal și îngrămădind-o pe versantul amonte.

Se remarcă două forme de eroziune în partea dreaptă și stîngă a acoperișului machetei, ca niște gropi prelungite cu jghiaburi și pe versantul aval. Zăpada este complet spălată în aceste gropi pînă la marginile laterale ale machetei. Pe versantul aval, zăpada se menține pînă la coama luminatorului pînă la viteze mai mari ale vîntului. Indicele de aglomerare locală la baza aval a luminatorului este aproape constant, valoarea lui maximă fiind : $\frac{18}{12,5} = 1,4$. Taluzul aval al zăpezii este înclinat la 70°, corespunzînd cu starea-limită de echilibru a taluzului natural (V, fig. 25). La un vînt mai puternic, se desăvîrșește eroziunea laterală, sporindu-se ușor aglomerația în zona centrală (se realizează încărcare parțială cu zăpadă), așa cum rezultă din configurațiile succesive (fig. 26), cu vederi din profil (fig. 25).

7.3. **Hală din panou unic cu luminator scurtat la capete.** Machetă similară, dar presupusă de lungime foarte mare și, în consecință, o extremitate a ei este lipită de peretele tunelului; cealaltă extremitate este îndepărtată de peretele opus, iar luminatorul este mai scurt în această parte, spre a se studia efectul de capăt al machetei și al luminatorului. Materialul folosit ca simili-zăpadă este ampora $D \leqslant 0,3$ mm.

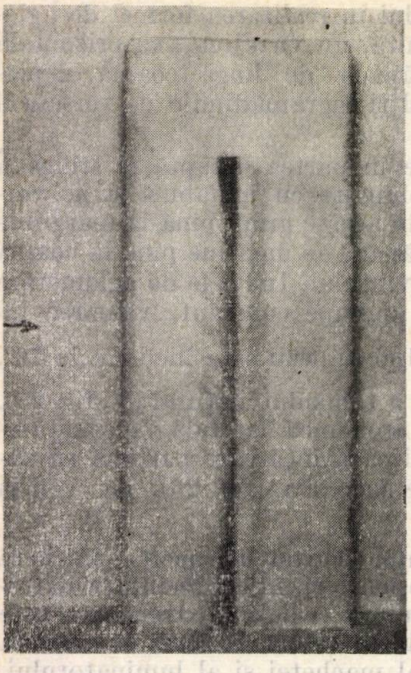
Fazele experienței. Poziția lungimii l, perpendiculară pe direcția vîntului.

Ninge 6,5 mm | Vînt de 1,2 m/s (fig. 27) | Vînt de 1,6 m/s (fig. 28 și 29) și releveu (fig. 30) | Vînt de 2 m/s (fig. 31).

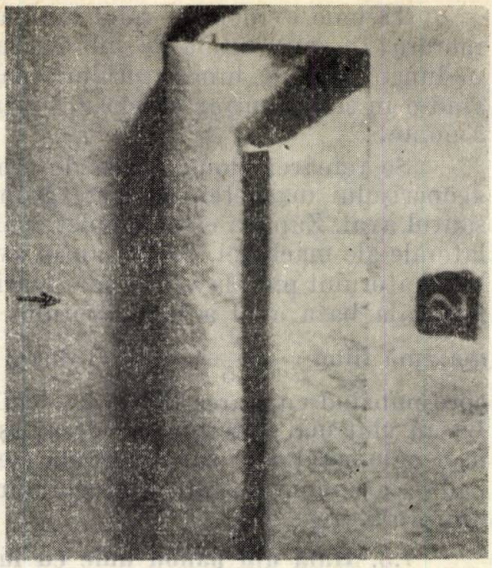
Caracterizare. În prima fază începe dezgolirea numai a luminătorului pe versantul amonte. O dată cu dezvelirea completă a acestuia apare un curent oblic pe la capătul luminatorului, producînd un canal de eroziune în zăpadă pînă la învelitoare (fig. 28). Aglomerările maxime au loc datorită deplasării zăpezii suflate îndărăt, depe luminator, pe versantul amonte, cu indici maximi de $\frac{10,5}{6,5} = 1,6$; pe același versant indicele de grosime medie este $\frac{9}{6,5} = 1,4$. În ultima fază, versantul amonte este dezgolit aproape total și versantul amonte ia grosime maximă de 8 mm $\left(\text{indice } \frac{8}{6,5} = 1,23\right)$ și indicele de grosime medie aproximativ $\frac{6,5}{6,5} = 1$. Deci în *ipoteza unei încărcări parțiale, adică numai pe un versant, încărcarea cu zăpadă nu depășește pe aceea de pe sol, în cazul unui vînt moderat.*

7.4. **Hală din panou unic scurt, cu luminator de aceeași lungime, dar întrerupt la mijloc.** Se studiază efectul întreruperii luminatorului.

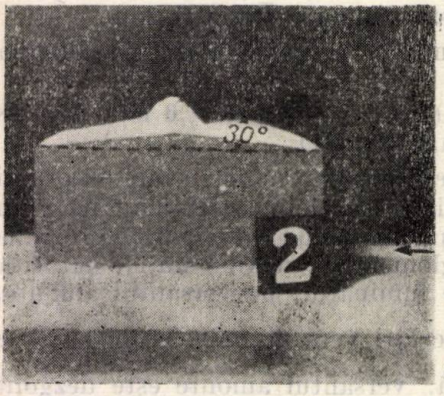
Fazele experienței. Ninge rumeguș, $D \leqslant 0,3$ mm, de 5 mm, apoi vînt (fig. 32 și 33). | Vînt în continuare, după o nouă ninsoare, de 5 m/m. (fig. 34).



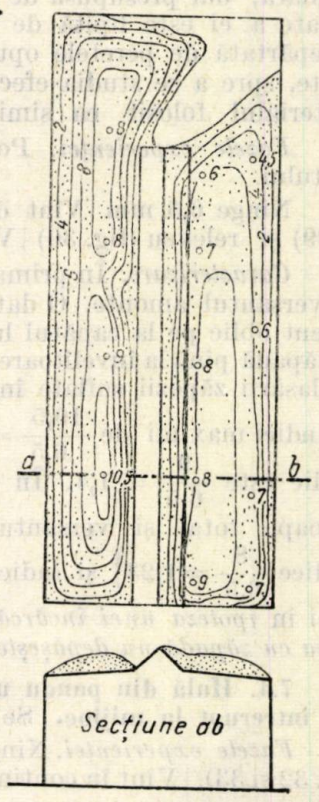
27



28



29



30

Fig. 27. — Panou unic, cu luminător scurtat. Ampora $D \leqslant 0{,}3$ mm. După ninsoare liniştită urmată de vînt slab se dezvelește numai versantul amonte al luminatorului.

Fig. 28. — După ce se dă vînt mai intens pe modelul din figura 27, apare curentul lateral, în direcţia 45°, de la capătul luminatorului.

Fig. 29. — Profil transversal la cazul din figura 28.

Fig. 30. — Releveu la poz. din figurile 28 şi 29.

Caracterizare. Pe versantul amonte, spălare completă a luminatorului, iar pe acoperiş apare configuraţia complicată datorită unor curenţi formaţi de la cele două capete spre centru, unde se întrunesc spre a ieşi prin deschizătura din mijlocul luminatorului. Formelor de eroziune le corespund forme foarte caracteristice de aglomerare.

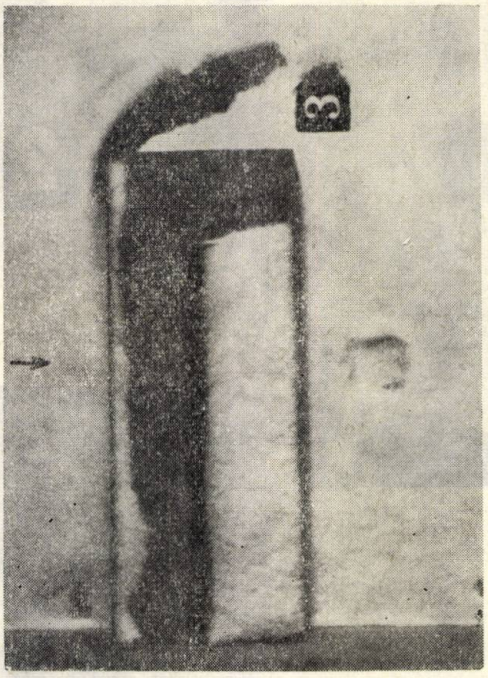
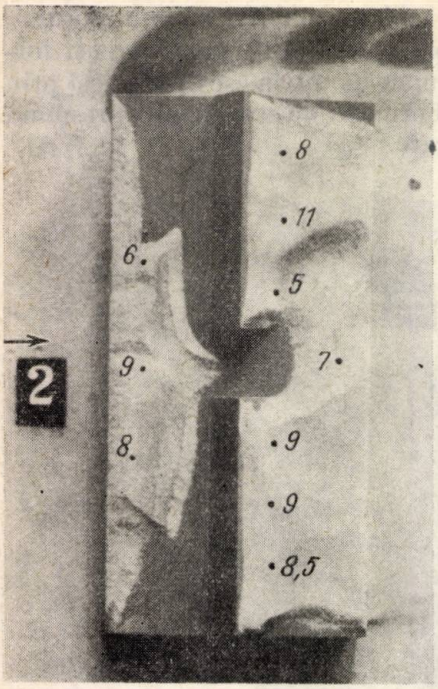


Fig. 31. — Continuînd acţiunea vîntului, zăpada este spălată pe toată jumătatea amonte a modelului şi la capătul stîng.

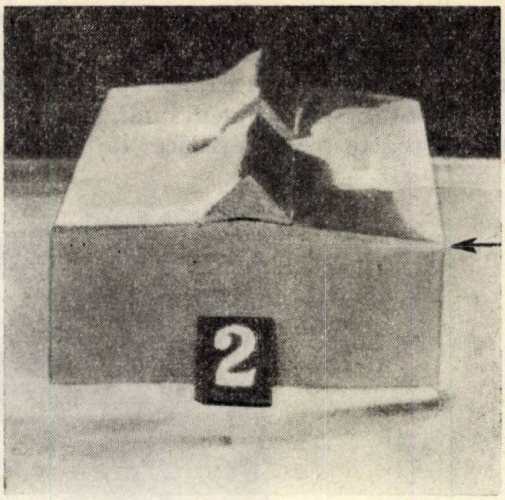
Indicele maxim de aglomerare $\frac{11}{5} = 2{,}2$ pe versantul aval. În aval de luminator, mişcarea este paralelă cu curentul principal, înlăturînd zăpada pe 60% din suprafaţa versantului aval al acoperişului înclinat al luminatorului. Indici de aglomerare maximi locali $\frac{9}{5} = 1{,}8$, resp. $\frac{11}{5} = 2{,}2$ (fig. 32).

În faza a doua (fig. 34) se păstrează aceeaşi configuraţie, cu grosimi sporite. Indicii de aglomerare maximi locali devin : $\frac{20}{10} = 2$, resp. $\frac{15}{10} = 1{,}5$, deci mai scăzuţi ca în faza 1.

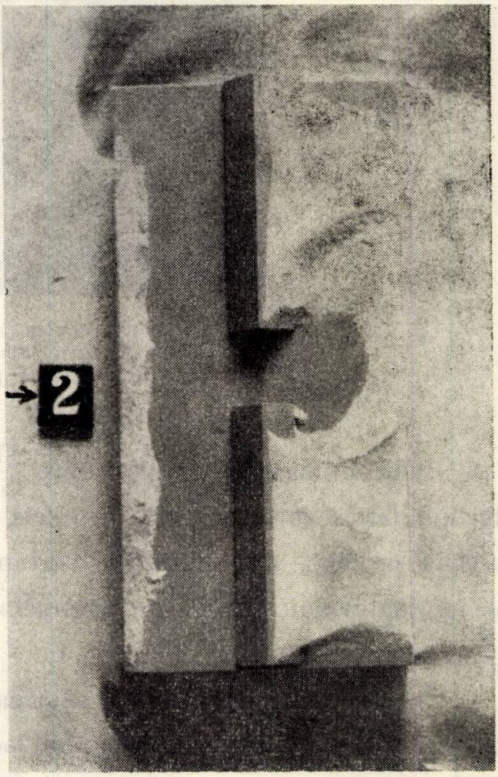
MUSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA BUDAPEST 1848



32



33



34

Fig. 32. — Hală din panou unic scurt, luminator întrerupt la mijloc. Ampora $D \leqslant 3$ mm. După ninsoare și vînt, formă complicată a depunerii, datorită unor curenți secundari.

Fig. 33. — Profil transversal la hala din figura 32.

Fig. 34. — După vînt mai intens, versantul amonte se dezvelește aproape complet; cresc cele trei zone de eroziune din aval.

Ariile aglomerațiilor maxime sînt foarte scăzute, astfel că indicii mari de aglomerare maximă nu conduc la sarcini totale mari. O caracteristică pentru incidența la 45° a vîntului este că, în acest caz, nu se mai realizează încărcări uniforme pe un singur versant, ca în cazul vîntului perpendicular pe axa în lung a halei.

7.5. **Hală din două* panouri, cu luminatoare continue, lungi.** Montajul modelului cu extremitățile lipite de pereții laterali. Ca simili-zăpadă s-a întrebuințat ampora $D \leqslant 0{,}3$ mm.

Fazele experienței. Ninge 7 mm | Vînt de 2 m/s (fig. 35). Vînt de 3 m/s pînă la dezvelirea versantului amonte (fig. 36 și figura releveu 37).

Caracterizare. În prima fază de viscol, dezvelirea parțială a ambelor luminatoare pe fața amonte ; pe versantul amonte al primului panou, valul cu profil curb caracteristic. Grosimile maxime se află la piciorul aval al luminatorului primului panou, cu o medie a cinci puncte măsurate de 9 mm și cu un indice de aglomerare medie $\frac{9}{7} = 1{,}3$. Grosimea maximă locală, aproape de axa curentului, 11,5 mm, iar indicele de aglomerare respectiv $\frac{11{,}5}{7} = 1{,}65$.

Raportul de neuniformitate pe aceeași linie este $\frac{11{,}5}{6{,}5} = 1{,}77$ (vezi fig. releveu 37).

În faza următoare, la un vînt mai puternic, versanții amonte ai ambelor panouri sînt spălați, se menține aglomerarea pe versantul aval al primului panou, dar se erodează apreciabil versantul aval al panoului al doilea. Deci și în acest caz se realizează o încărcare parțială a unui panou pe jumătate din lățimea lui.

7.6. **Hală din 4 panouri cu luminator continuu și un bloc înalt așezat frontal, în axa curentului.**

Fazele experienței. După două ninsori însumînd 9 mm grosime, cu intercalări de vînt de 2 ... 2 m/s, se formează eroziunile și aglomerările din fig. 38 și fig. 39 releveu.

În spate apare axial o grosime de 19 mm $\left(\text{indicele local max} = \frac{19}{9} = 2{,}1\right)$ și alta spre colț de 18 mm. Grosimea medie de aglomerare din spate înscrisă în triunghiul E.F.G. este de 12 mm, cu indicele $\frac{12}{9} = 1{,}33$.

7.7. **Hală din 3 panouri, toate cu luminator întrerupt și atic la muchia aval a acoperișului.**

Fazele experienței. Ninge 4,5 mm, apoi vînt de 2,5 m/s pînă la dezvelirea a 30% din suprafața acoperișului (fig. 40) cu grosimile zăpezii marcate, rezultă că : aglomerările maxime nu mai sînt pe versantul amonte al primului panou, ci în spatele primului luminator. Toate configurațiile arată o simetrie satisfăcătoare a curentului. Grosimile maxime 11 mm, cu indicii locali $\frac{11}{4{,}5} = 2{,}44$. Aticul din fațada aval nu are o influență demnă de reținut.

* La unele încercări de hale din mai multe panouri a colaborat și C. Iamandi.

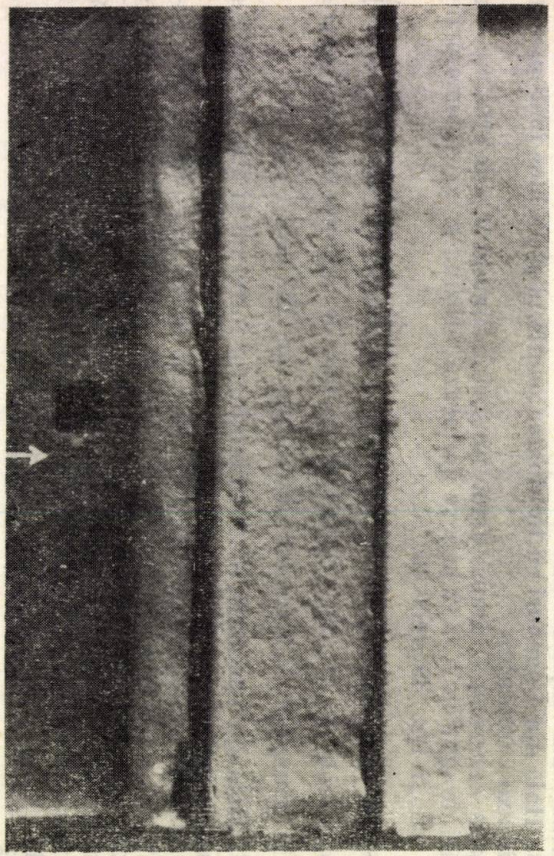


Fig. 35. — Hală din două panouri lungi, luminatoare lungi. Ampora, *D* sub 0,3 mm. După ninsoare urmată de vînt moderat, sînt dezvelite feţele amonte ale luminatoarelor.

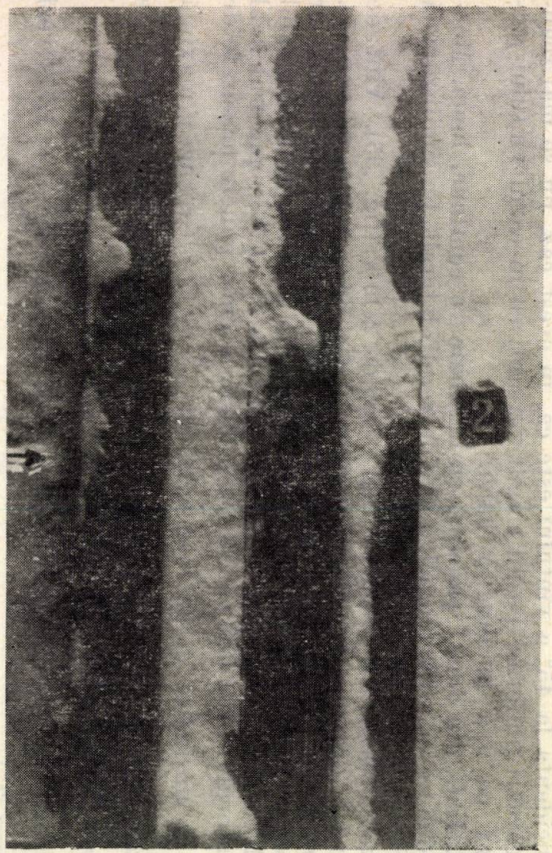


Fig. 36. — După vînt mai intens, modelul din figura 35, zona mai încărcată este faţa aval a primului panou.

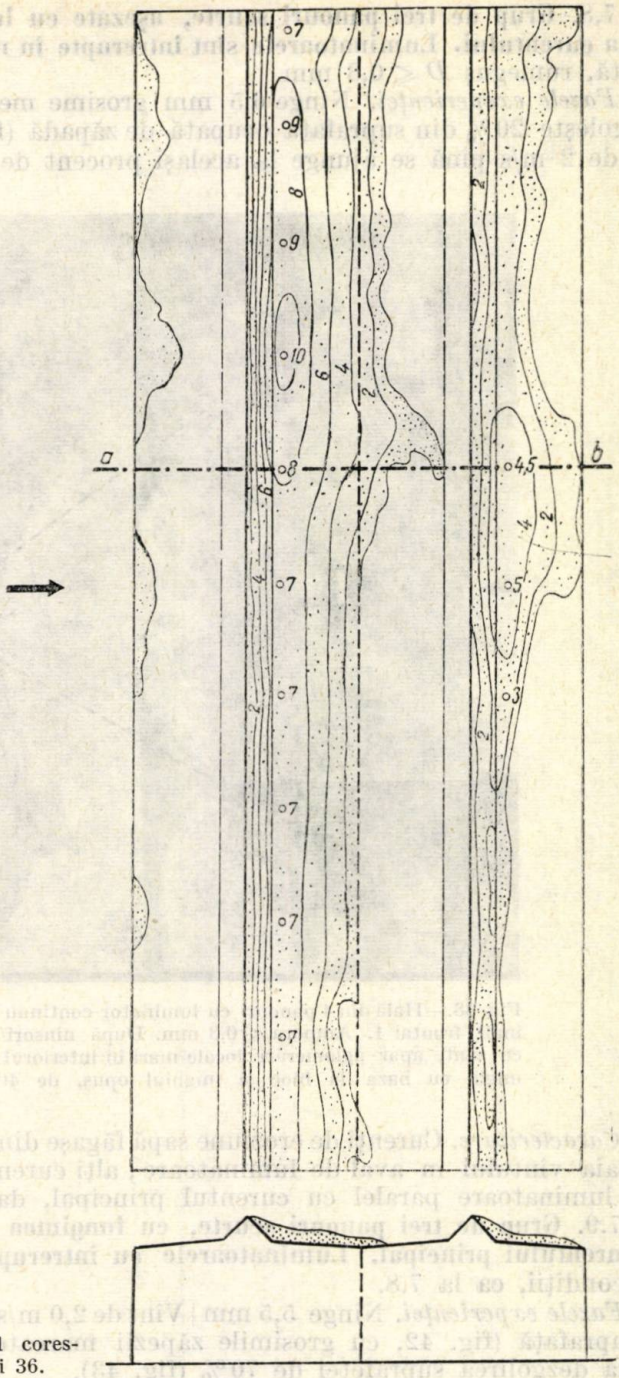


Fig. 37. — Releveul corespunzător figurii 36.

7.8. **Grup de trei panouri scurte, aşezate cu lungimea formînd 45° cu axa curentului. Luminatoarele sînt întrerupte în mijloc.** Simili-zăpadă folosită, rumeguş $D \leqslant 0{,}3$ mm.

Fazele exeperienţei. Ninge 6,5 mm grosime medie | Vînt de 2,0 m/s, care goleşte 20% din suprafaţa ocupată de zăpadă (fig. 41) | Ninge 4 mm Vînt de 2 m/s pînă se ajunge la acelaşi procent de dezgolire a zăpezii.

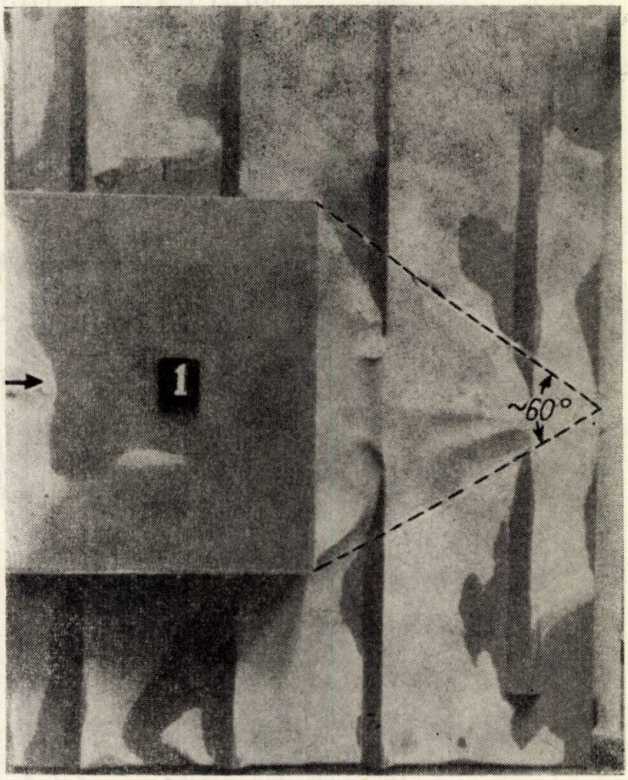


Fig. 38. — Hală din 4 panouri cu luminator continuu şi un bloc înalt frontal 1. Ampora $\leqslant 0{,}3$ mm. După ninsori alternînd cu vînt, apar aglomerări locale mari în interiorul unui triunghi cu baza la bloc şi unghiul opus, de 40° . . . 60°.

Caracterizare. Curenţi de eroziune sapă făgaşe din toate colţurile aflate în bătaia vîntului în aval de luminatoare; alţi curenţi de deversare trec peste luminatoare paralel cu curentul principal, dar cu devieri.

7.9. **Grup de trei panouri scurte, cu lungimea halei făcînd 20° cu axa curentului principal. Luminatoarele cu întrerupere la mijloc.** Celelalte condiţii, ca la 7.8.

Fazele experienţei. Ninge 5,5 mm | Vînt de 2,0 m/s, care goleşte ~20% din suprafaţă (fig. 42, cu grosimile zăpezii marcate) | Vînt de 3,0 m/s pînă la dezgolirea suprafeţei de 70% (fig. 43).

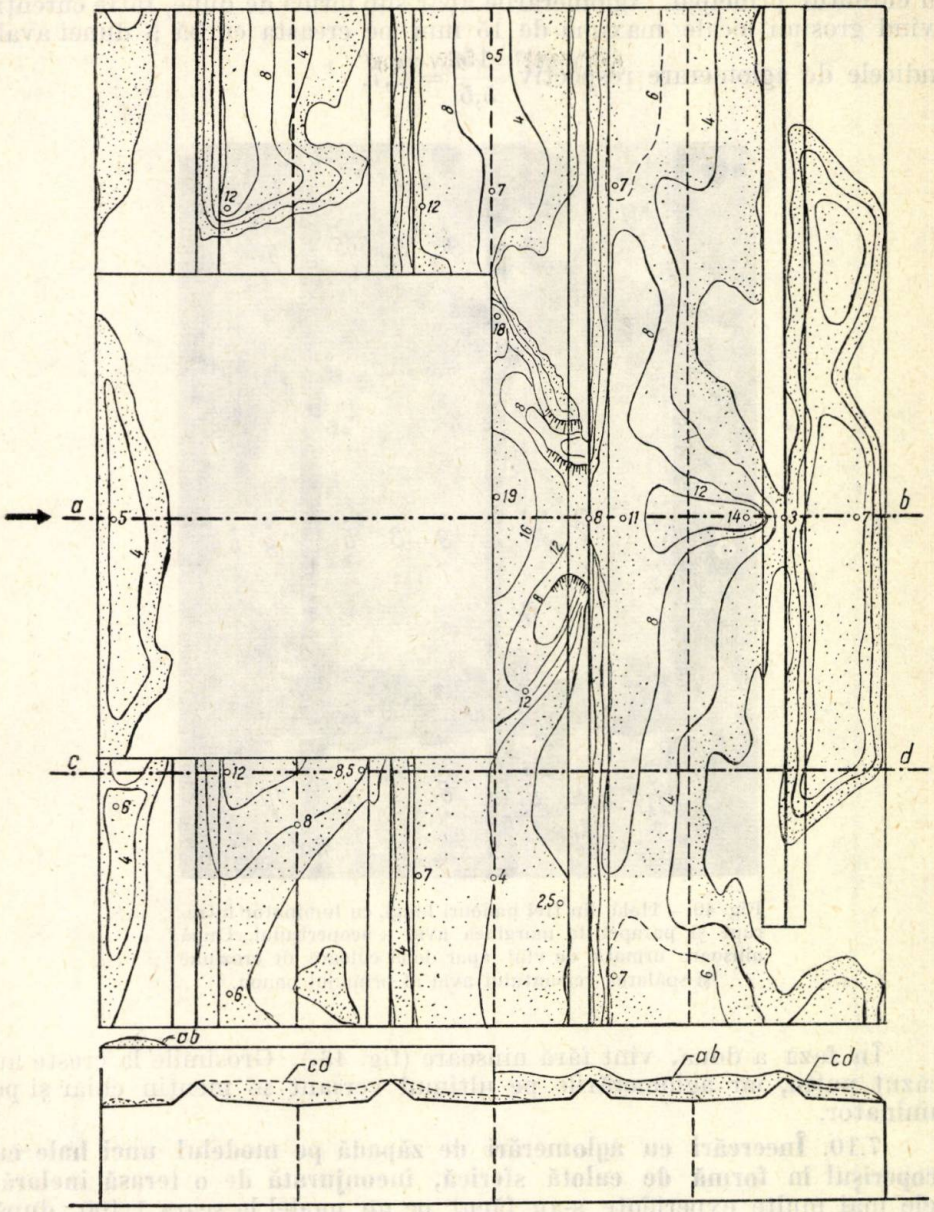


Fig. 39. — Releveu la modelul din figura 38.

Caracterizare. Curenții de eroziune pornind de la extremitățile stîngi ale luminatoarelor, sapă făgașe curbe, ieșind de pe machetă aproape paralel cu curentul principal. Aglomerările apar sub forma de dune, între curenți, avînd grosimi locale maxime de 15 mm pe creasta curbă a dunei aval. Indicele de aglomerare respectiv $\frac{15}{5,5} = 2,7$.

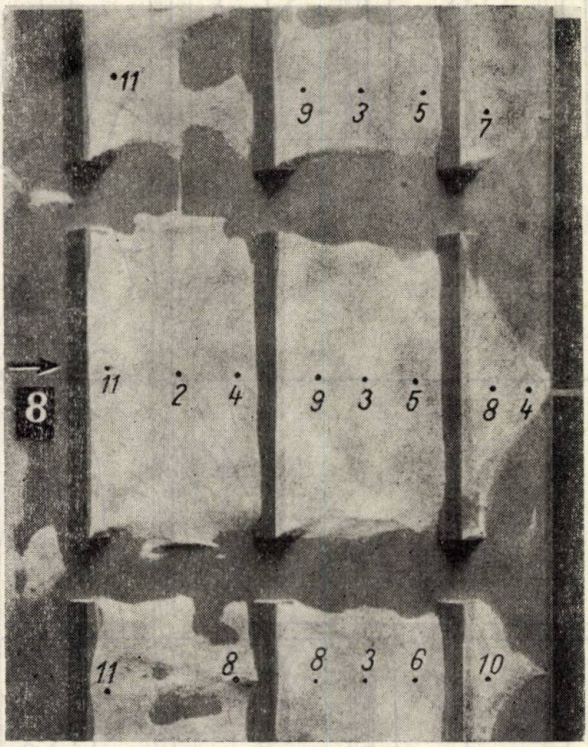


Fig 40.— Hală din trei panouri lungi, cu luminator întrerupt și parapet la marginea aval a acoperișului. După ninsoare urmată de vînt apar două culoare de eroziune și spălarea versantului aval al primului panou.

În faza a doua, vînt fără ninsoare (fig. 43.). Grosimile la creste au scăzut puțin, iar aglomerările pe ultimul versant se mențin chiar și pe luminator.

7.10. Încercări cu aglomerări de zăpadă pe modelul unei hale cu acoperișul în formă de calotă sferică, înconjurată de o terasă inelară. Cele mai multe experiențe s-au făcut pe un model la scara 1/400, după încercări pe un model mai mic au arătat că se pot folosi oricare dintre materialele studiate pentru simularea zăpezii, dar mai avantajoase ne-au părut rumegușul de lemn $D \leqslant 0,3$ mm și ampora $D \leqslant 0,3$ mm.

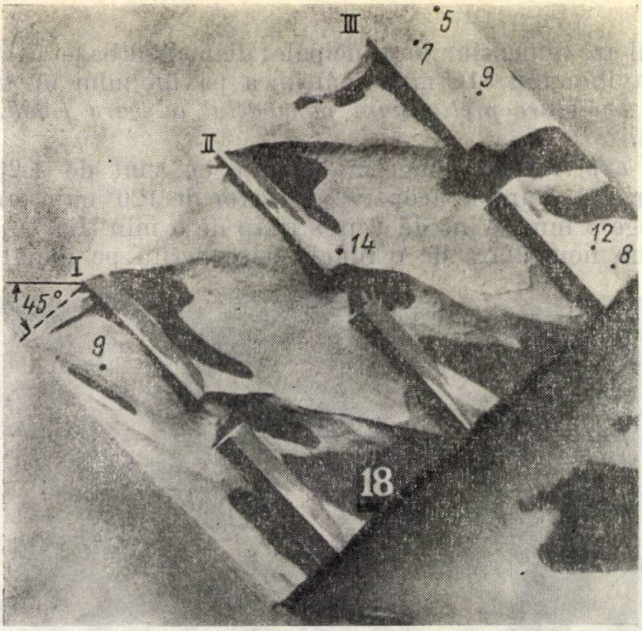


Fig. 41. — Grup de trei panouri scurte cu luminator întrerupt, aşezate la 45° faţă de direcţia curentului. Se formează dune şi creste de eroziune paralele cu vîntul.

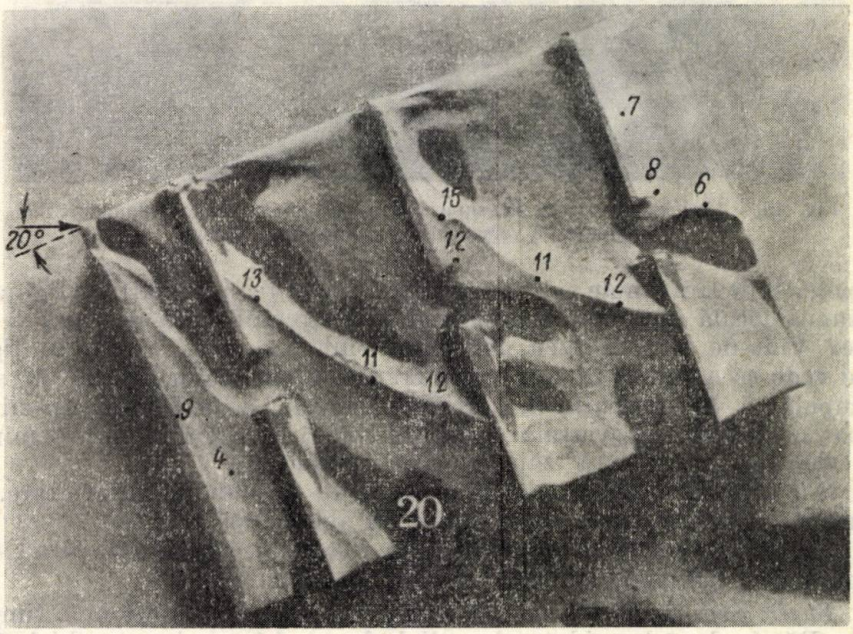


Fig. 42. — Modelul din figura 41 face $\sphericalangle$ 20° cu curentul. Canalele şi dunele de eroziune încep în stînga în linie curbă şi tind să devină paralele cu curentul.

Modelul are dimensiunile principale: diametrul bazei calotei 235 mm, diametrul pavilionului 310 mm, înălțimea pavilionului în axă 140 mm.

7.10.1. *Încercare preliminară pe modelul la scara 1/600, cu rumeguș* $D \leqslant 0{,}3$ *mm.*

Fazele experienței. Ninge 2—3 mm cu vînt de 1,25 m/s timp de 2 min (fig. 45). Rămîne acoperit un sector de 120° cu o eroziune ovală în aval. Ninge 3 mm | Vînt de 2 m/s timp de 5 min (fig. 46). Acoperișul se acoperă din nou, afară de o lunulă descoperită pe jumătatea amonte

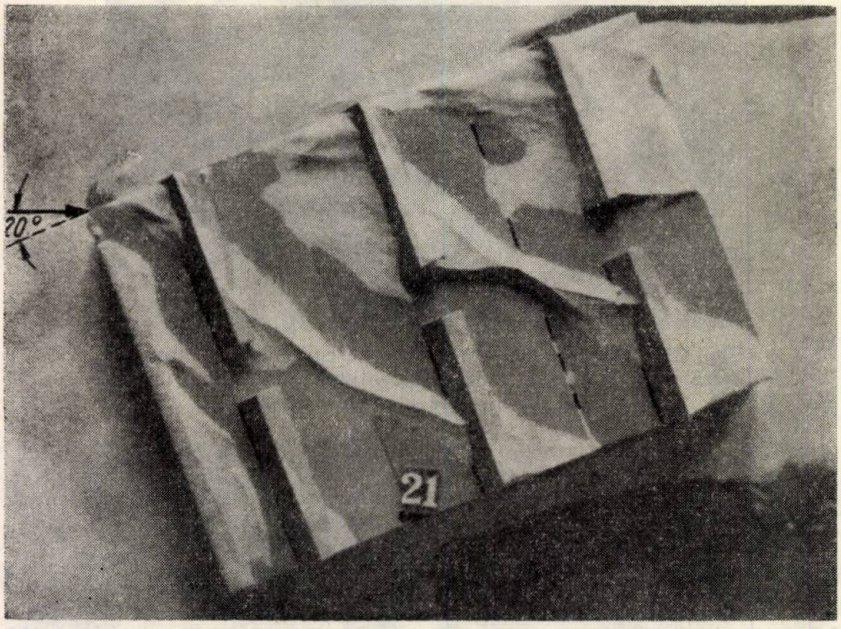


Fig. 43. — Modelul din figura 42, supusă unui vînt mai puternic. Aglomerări mai persistente pe versantul aval al ultimului panou.

a cupolei și de trei lunule subțiri pe terasă (amonte și lateral). În figura 47, eroziunea locală pe teren înconjurînd semicircumferința de bază a machetei | Vînt de 2,95 m/s, cu ninsoare | Vînt 3,5 m/s, 7 min. În figura 48 se vede că a rămas zăpada aglomerată într-un sector de 120° în aval, pe cupolă și pe jumătate din lățimea terasei. La suprafața zăpezii s-a format o creastă transversală cu grosimi de 5 mm. După încă 3 min de vînt de 3,5 m/s, toată zăpada este spulberată.

S-a urmărit desfășurarea procesului de eroziune și aglomerare. Nu s-a urmărit determinarea unui indice de aglomerare.

7.10.2. *Încercări la vînt de direcție constantă, pe modelul* scara 1/400 : Ampora $D \leqslant 0{,}3$ mm. Direcția vîntului constantă.

Fazele experienței. Ninge 2,5 mm | Vînt de la 1,9 la 3,6 m/s, timp de 7 min. Rămîn două benzi laterale radiale formînd în aval un unghi de 120°. Eroziunea din centru se datorește influenței cupoletei. Grosimile maxime

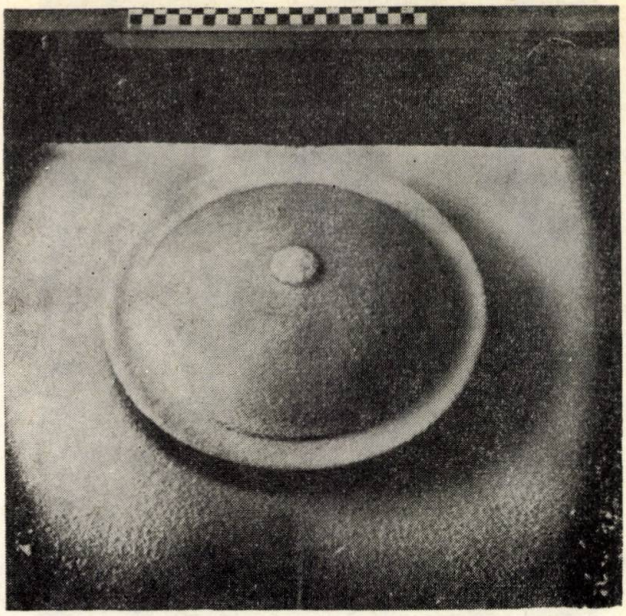


Fig. 44. — Modelul unei hale cu cupolă, înconjurată cu terasă, după ninsoare liniştită cu rumeguş $D \leqslant 0{,}3$ mm.

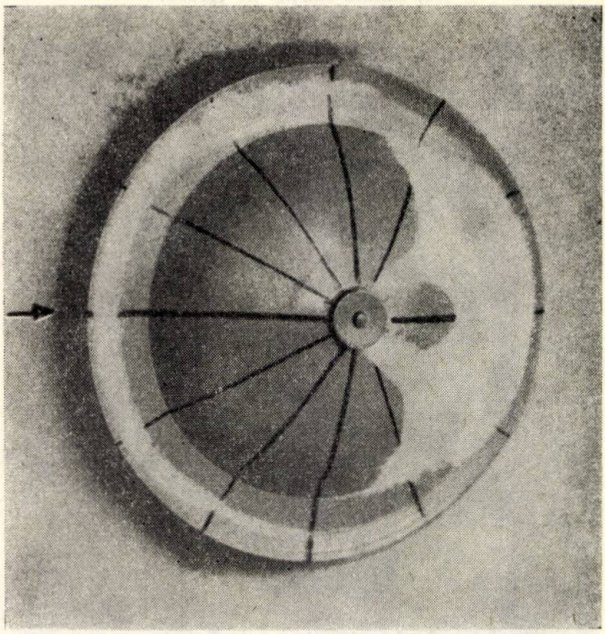


Fig. 45. — Viscol moderat (vînt + zăpadă) pe modelul din figura 44.

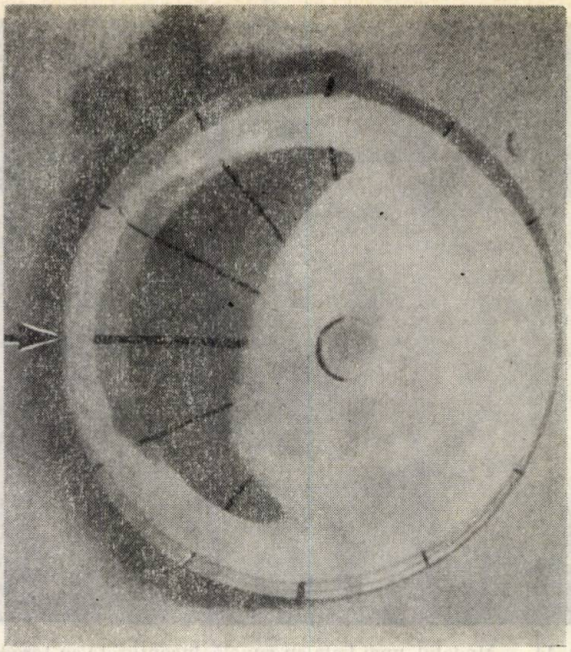


Fig. 46. — Peste stratul depus (fig. 45) ninge din nou, apoi vînt. Apar : pe cupolă o lunulă mare de eroziune şi trei lunule subţiri pe terasă.

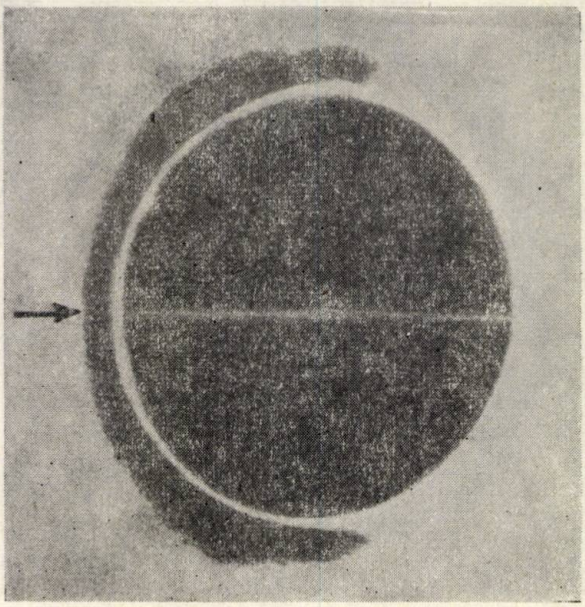


Fig. 47. — Pe teren, după ridicarea modelului, se vede semiinelul caracteristic de erodare a zăpezii.

6 mm. Indice de aglomerare maximă locală $a_{max} = \frac{6}{2,5} = 2,4$ (fig. 49)| Ninge 2,5 mm. | Vînt de 2,54 ... 3,65 m/s. Se formează în aval pe cupolă o aglomerare transversală ușor curbată, convex spre amonte, ca un rinichi, cu grosimile maxime situate pe două meridiane închizînd 120°

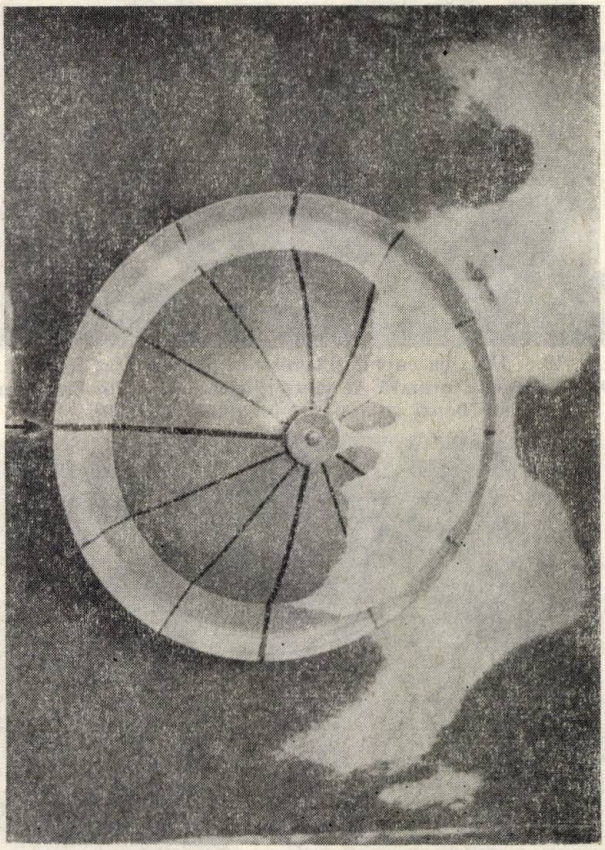


Fig. 48. — După vînt mai îndelungat, a rămas pe cupolă a aglomerare într-un segment aval depășind și pe terasă.

(fig. 50 și fig. releveu 51). Indice de aglomerare maximă locală $\frac{9,5}{2,5 + 2,5} = 1,9$, | Se constată asemănarea aglomerării cu aceea de pe hala descrisă la paragraful 3 punctul 2.

7.10.3. *Vânt succesiv din două direcții opuse. Fazele experienței.* Ampora $D \leqslant 0,3$ mm. Ninge 2,5...3 mm | Vînt de la 2,0...3,0 m/s timp de 7 min. Se dezvelește calota în amonte, se îngroașă zăpada pe cupola aval pe o bandă transversală de asemenea se dezvelește zona de la baza calotei aval. Zone de aglomerare moderată pe terasă (fig. 52).

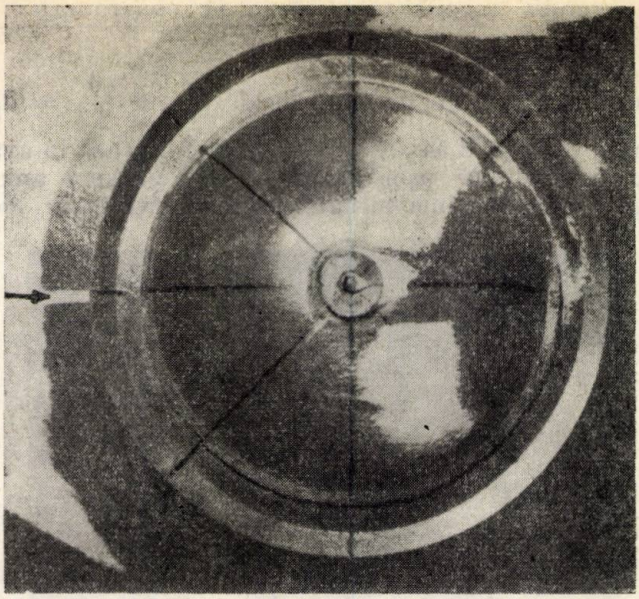


Fig. 49.— Hala cu cupolă şi terasă — ampora $D \leqslant 0{,}3$ mm. După ninsoare urmată de vînt, rămîn două aglomeraţii ca nişte benzi groase într-un unghi de 120^0.

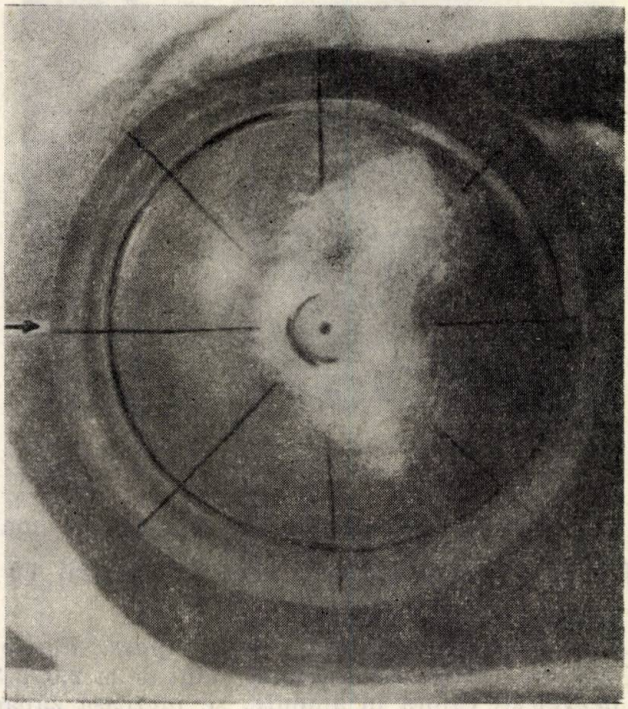


Fig. 50. — Pe modelul din figura 49, o nouă ninsoare, urmată de vînt progresiv. *Aglomerarea de forma unui rinichi, asemănătoare cu cea formată în natură* (vezi fig. 5).

Se întoarce macheta cu 180° și se dă ampora 2,5 mm | Vînt de 2,0 m/s din direcția II. Din figurile 53 și 54 releveu rezultă că vîntul din direcția I a fost dominant și cel contrar nu a deplasat creasta grosimilor maxime, ci a accentuat-o.

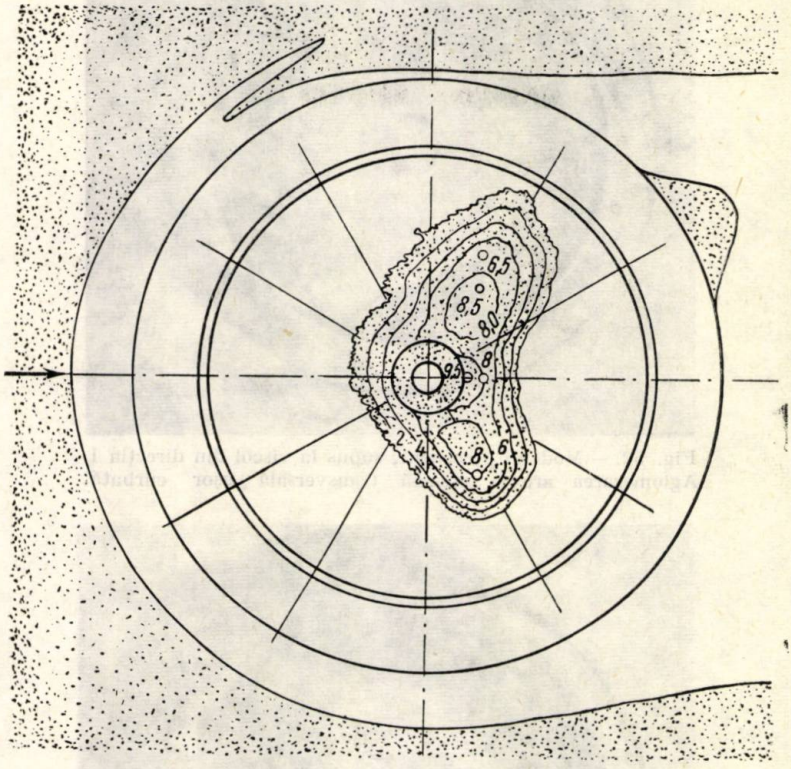


Fig. 51. — Releveu corespunzînd figurii 50.

Ninsoarea a 2-a a sporit aglomerarea aval — terasa și cupoleta au rămas îngropate în zăpadă. Două gropi de eroziune în aval pe terasă, la capetele unui arc la centru de 60°.

Indicii de aglomerare locală maximă $\frac{14,5}{5,5} = 2,5$ în axă, lîngă creastă și pe terasă. Indicele de aglomerare medie $\frac{5,7}{5,5} = \sim 1$ pe suprafața rămasă acoperită, cu excluderea zonelor cu grosimi sub 2 mm de zăpadă.

7.10.4. *Diferite forme de aglomerare.* În figura 55 se vede efectul cupoletei. Se produce un canal semicircular de eroziune (colier) îngust în amonte, continuat în aval cu o suprafață mai mare erodată. La baza calotei, început de eroziune. În figura 56 eroziunea aval la baza calotei

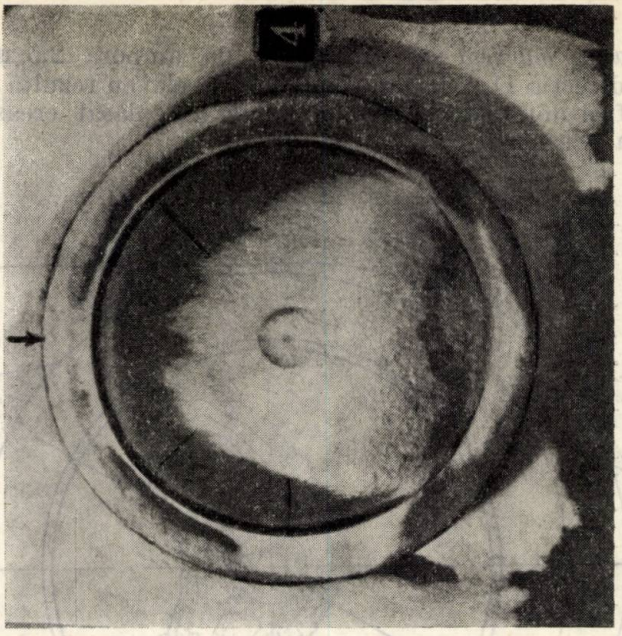


Fig. 52. — Modelul precedent, supus la viscol din direcţia I. Aglomerarea are o creastă transversală uşor curbată.

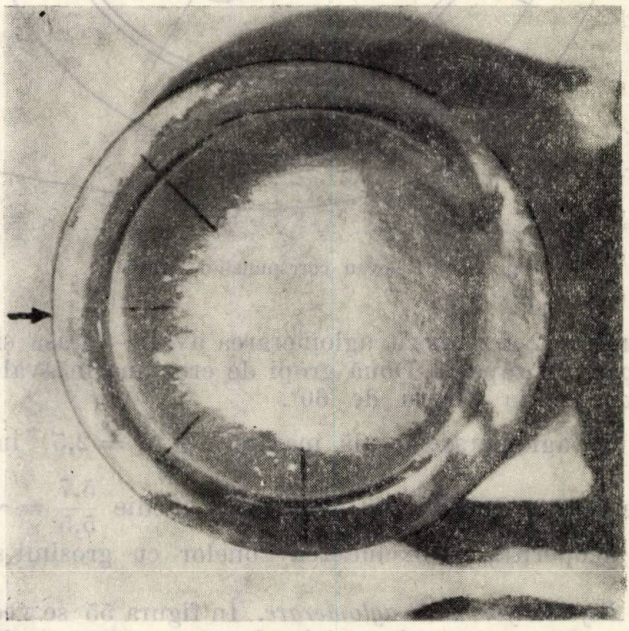


Fig. 53. — Peste zăpada depusă (fig. 52), un viscol după direcţia II (mai slab). A sporit grosimea la creastă, iar proiecţia crestei în plan a devenit aproape dreaptă.

a progresat fără să înceapă eroziunea în jurul cupoletei, deoarece stratul inițial de zăpadă a fost mai gros.

În figura 57 colierul de eroziune este doar amorsat în amonte de cupoletă, însă pata de eroziune în aval de ea este mai dezvoltată.

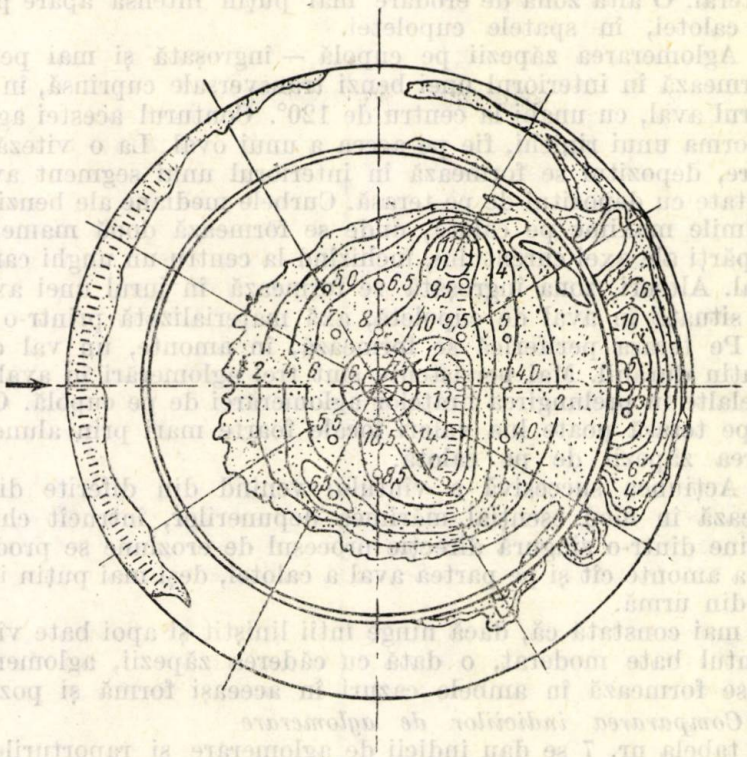


Fig. 54. — Releveu corespunzînd figurii 53.

În figura 58 suprafața calotei este dezvelită în întregime, în afară de o zonă cuprisă într-un segment de cerc în aval, în care s-a format o aglomerare prelungită și pe terasă unde sînt grosimi mari.

Formele care apar mai frecvent sînt îngrămădirile în formă de dună arcuită spre amonte, dezvoltată pe jumătatea aval simultan cu o aglomerare. Această formă corespunde cu cea observată în natură (vezi paragraful 3).

7.10.5. *Mijloace de vizualizare a liniilor de curent și a vîrtejurilor.* În cursul experiențelor au fost folosite mijloace variate de vizualizare a direcției vitezelor, ca : ațe flexibile (fig. 59), trasarea firelor de curent pe un strat subțire de vopsea diluată (fig. 60) și înseși liniile trasate de firele de curent, pe materia pulverulentă depusă pe model (fig. 55 și 56).

7.10.6. *Comparație între aglomerările de zăpadă în natură și pe modelul încercat*

a) Din fotografii și releveuri rezultă că viscolul antrenează zăpada de pe partea amonte a calotei progresiv, lunula de eroziune formată cuprinde aproape jumătate din calotă și-și întinde brațele în jurul calotei, lateral. O altă zonă de erodare mai puțin intensă apare pe partea aval a calotei, în spatele cupoletei.

b) Aglomerarea zăpezii pe cupolă — îngroșată și mai persistentă — se formează în interiorul unei benzi transversale cuprinsă, în general, în sectorul aval, cu unghi la centru de 120°. Conturul acestei aglomerări are fie forma unui rinichi, fie pe aceea a unui oval. La o viteză inițială mai mare, depozitul se formează în interiorul unui segment aval și în continuitate cu depozitul de pe terasă. Curbele mediane ale benzii arcuite au grosimile maxime pe calotă, unde se formează două mameloane de ambele părți ale axei curentului, închizînd la centru un unghi cam de 90° spre aval. Alteori, zona îngroșată se formează în jurul unei axe transversale, situată în aval de cupoletă, axă materializată printr-o creastă.

c) Pe terasa periferică se formează, în amonte, un val cu profil curb, puțin durabil. Mai persistente sînt trei aglomerări în aval, una în axă, celelalte în prelungirea brațelor aglomerării de pe cupolă. Grosimea zăpezii pe terasă poate lua valori locale foarte mari prin alunecarea și prăbușirea zăpezii de pe calotă.

d) Acțiunea succesivă a vîntului venind din diferite direcții nu influențează în mod esențial mărimea depunerilor, întrucît chiar dacă vîntul vine dintr-o singură direcție procesul de eroziune se produce atît pe partea amonte cît și pe partea aval a calotei, deși mai puțin intens pe aceasta din urmă.

Se mai constată că, dacă ninge întîi liniștit și apoi bate vîntul sau dacă vîntul bate moderat, o dată cu căderea zăpezii, aglomerările de zăpadă se formează în ambele cazuri în aceeași formă și poziție.

e) *Compararea indiciilor de aglomerare*

În tabela nr. 7 se dau indicii de aglomerare și raporturile lor cu procentul de acoperire cu zăpadă rămasă în urma viscolului și cu grosimea stratului uniform de zăpadă sau simili-zăpadă căzută pe sol. Indicii sînt raportați la grosimea acestui strat. Trebuie menționat că în natură gro-

Tabela 4

Locul și numărul experiențelor	Indice de acoperire cu zăpadă al suprafeței	Grosimea stratului		Indici de aglomerare		
				a_{max}	a_{mediu}	$\frac{a_{max}}{a_{med}}$
Pe cupolă						
Model — media a cinci exper.	0,33	5,4 mm		2,0	1,0	2,04
Natură	0,16	0,45 m		3,3	1,6	2,06
Pe terasă						
Model — media a două exper.	—	$\frac{H_{max}}{10,2}$	$\frac{H_{med}}{4,5 \text{ m/m}}$	—		2,2
Natură — media a trei valori	—	3,1 m	1,4 m			2,2

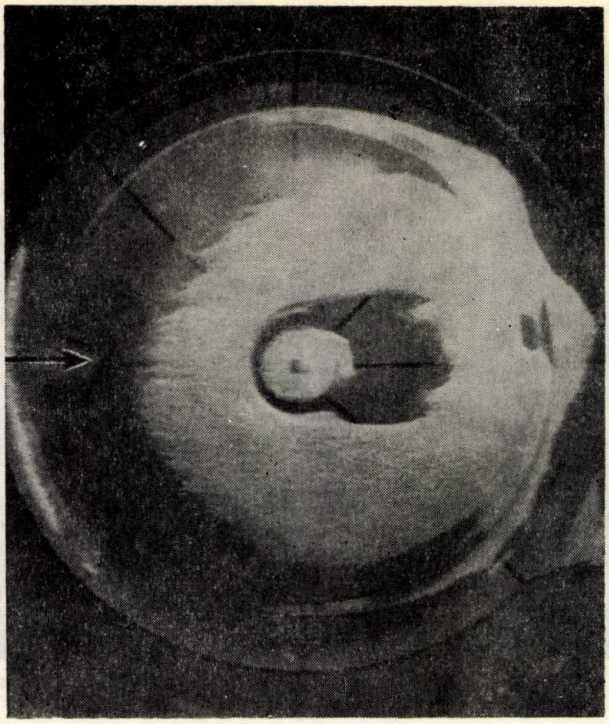


Fig. 55. — Eroziune în jurul şi în aval de cupoletă.

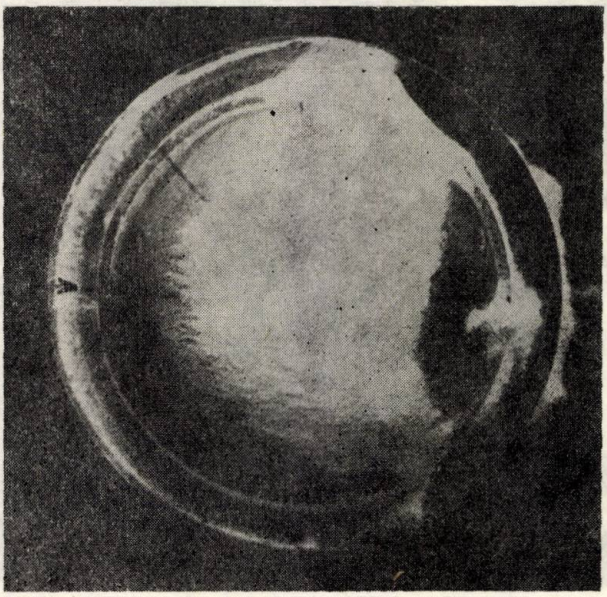


Fig. 56. — Eroziune în aval, avansată la baza calotei, fără să se arate în jurul cupoletei (strat gros de zăpadă).

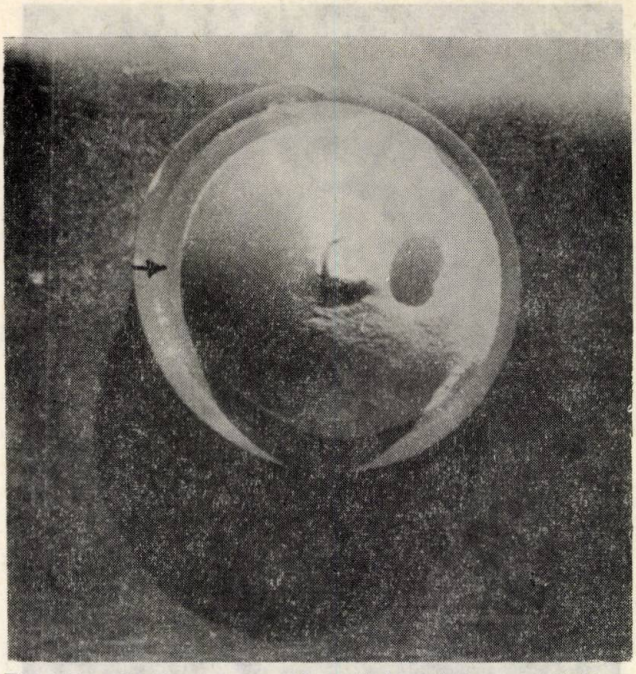


Fig. 57. — Eroziune ca o pată ovală, în aval de cupoletă. Nu a început eroziunea la baza calotei.

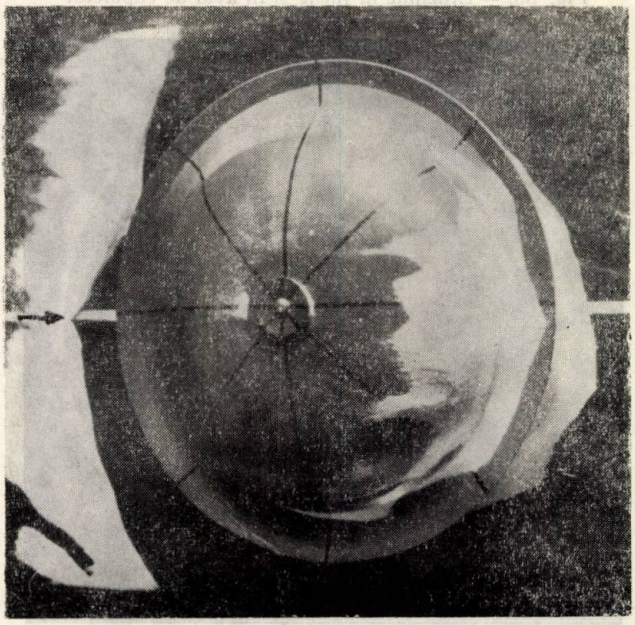


Fig. 58. — Eroziunea s-a manifestat pe toată suprafața afară de un segment în aval unde zăpada se sprijină pe terasă.

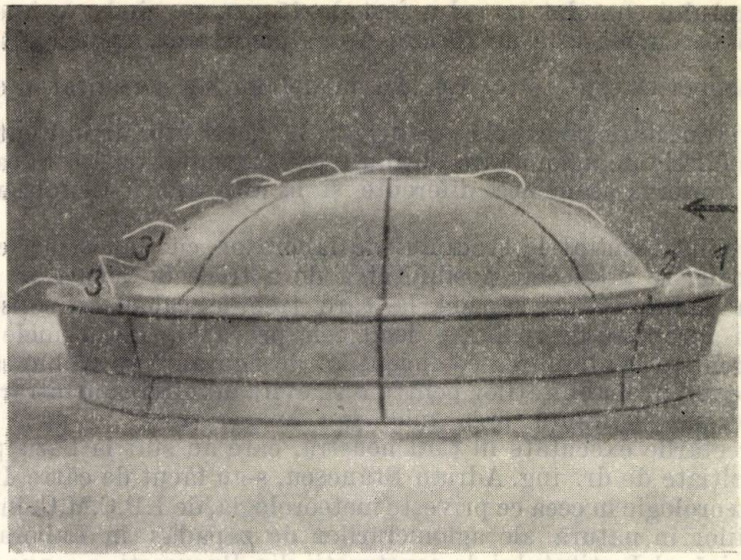


Fig. 59. — Vizualizarea direcţiei vitezei la suprafaţa modelului cu aţe flexibile.

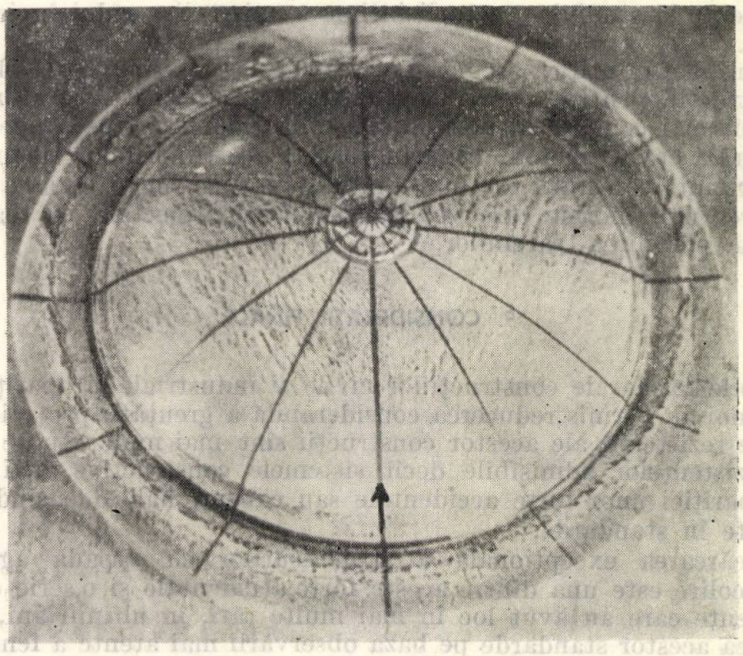


Fig. 60. — Vizualizarea direcţiei vitezelor cu vopsea neconsistentă.

simea stratului cumulat pe sol a fost de 45 cm, pe cînd grosimea medie cumulată pe cupolă este de 73 cm, deci aglomerarea medie pe suprafaţa rămasă acoperită este $\frac{73}{45} = 1{,}6$. La model nu s-a constatat o cumulare medie supraunitară pe cupolă, ci $a_{med} \cong 1$. Acest fapt ar îndreptăţi să se majoreze cifrele de aglomerare obţinute experimental cu 1,6 în cazul cînd s-ar mai observa asemenea diferenţe şi la alte cazuri de observaţii în natură.

Corelînd rezultatele studiului de laborator cu cunoştinţele actuale de nivologie, se vede clar posibilitatea de a trece de la aceste studii la stabilirea sarcinilor cu zăpadă la care trebuie calculate construcţiile, mult mai apropiate de realitate decît cele prevăzute de normele actuale. Este evident că la stabilirea coeficienţilor de siguranţă va trebui să se facă uz de calculul probabilităţilor pentru a se evita admiterea arbitrară a unor coeficienţi de siguranţă prea mici sau exageraţi.

Cercetările executate în ţara noastră, care au stat la baza prezentei lucrări iniţiate de dr. ing. Adrian Stănescu, s-au făcut de către Institutul hidrometeorologic în ceea ce priveşte meteorologia, de I.P.C.M.C. în privinţa observaţiilor în natură ale aglomerărilor de zăpadă; în Laboratorul de hidrotehnică al Institutului de construcţii din Bucureşti, s-a pus la punct o metodă teoretică-experimentală de evaluare a aglomerărilor de zăpadă corelată cu observaţiile din natură. Mai menţionăm că cercetările de laborator întreprinse pentru studiul viscolului deschid unele perspective noi pentru cercetările de aerodinamică în general, prin folosirea materiei pulverulente la studiul structurii intime a mişcării aerului în jurul unui obstacol.

Considerăm util ca asemenea cercetări să se extindă şi la alte tipuri de construcţii, pentru a avea deocamdată, cu ajutorul laboratorului, un tablou cît mai complet al posibilităţilor de aglomerări pe acoperişuri, în curţi, străzi etc. O metodă asemănătoare a fost folosită în ultimii 35 de ani în privinţa cercetării presiunii vîntului pe construcţii, ceea ce a permis întocmirea unor norme care să călăuzească pe proiectant cu toată siguranţa la stabilirea sarcinilor.

9. CONSIDERAŢII FINALE

Noile forme ale construcţiilor civile şi industriale şi apariţia materialelor noi au permis reducerea considerabilă a greutăţii proprii şi structurile de rezistenţă ale acestor construcţii sînt mai mult expuse la depăşirea rezistenţelor admisibile decît sistemele constructive mai vechi în cazul apariţiei unor forţe accidentale sau excepţionale depăşind valorile prevăzute în standarde.

Încărcarea excepţională a acoperişurilor cu zăpadă aglomerată prin viscolire este una dintre aceste forţe accidentale şi o serie de avarii şi accidente care au avut loc în mai multe ţări, în ultimii ani, reclamă revizuirea acestor standarde pe baza observării mai atente a fenomenelor din natură.

În lucrarea expusă mai sus s-a arătat, pe de o parte, stadiul actual al cunoștințelor noastre în ceea ce privește formările de depozite de zăpadă în natură, s-au relatat cîteva serii de măsurători exacte ale unor aglomerări excepționale de zăpadă pe clădiri de diferite tipuri și s-a propus o metodă prin care să se studieze pe cale experimentală formarea de aglomerări pe acoperișurile unor construcții cu suprafețe plane, curbe, precum și asupra unui complex de hale industriale.

S-a pus la punct o metodă pentru simularea ninsorii și a vîntului, folosindu-se materii pulverulente pentru simularea zăpezii uscate, și au fost încercate în tunele aerodinamice modele reduse ale construcțiilor sus-menționate. S-au obținut forme de aglomerări și indici numerici de aglomerare în numeroase variante ale modelelor construcțiilor considerate și s-au comparat în cîteva cazuri mai importante cu formele produse în natură și cu indicii de aglomerare respectivi.

Primită la redacție la 8 ianuarie 1965.

BIBLIOGRAFIE

Mecanica fluidelor

1. E. Carafoli, I. Stroescu și N. Cămărășescu, *Acțiunea vîntului asupra obstacolelor permeabile cu aplicație în problema perdelelor forestiere de protecție agricolă*, St. cerc. mec. și metalurg., (1953).
2. O. Flachsbarth, *Modellversuche über den Winddruck auf geschlossene und offene Gebäude*, AVA, Göttingen, 1932.
3. Fuat Odar, *Scale factors for simulation of drifting snow*, J. Engineering mechanics division, Proceedings ASCE, EM 3, 3 093, aprilie (1962).
4. Chr. Noekkentved, *Winddruck an Gebäuden*, Werh. des fünften Kongress f. techn. Mechanik, Stockholm, 1930.
5. Chr. Noekkentved, *Winddruck an Gebäuden, eine Untersuchung der Einflüssen der Modellgrösse*, Ass. intern. des Ponts et Charp., Zürich, 1833—1834.
6. R. Pris, *Études aérodynamiques*, Ann. l'inst. techn. du bâtiment et des trav. publ., 1963.

Mecanica construcțiilor

7. H. Popescu, *Sarcini meteorice în construcții*, Rev. constr. și a mater. de constr., București, **11**, (1962).
8. V. A. Otstavnov, *Construcții industriale* (în l. rusă) *1* (1960). Sarcini provenite din zăpada care acționează asupra acoperișurilor clădirilor.

Nivologie

9. V. Bălescu, I. O. Bălescu, *Cîteva viscole din țara noastră*, Meteorologie și hidrologie și gosp. apelor, *4* (1958).
10. A. Bauer, *Nouvelle estimation du volume et de la glace de l'inlandsis antarctique*, Assemblée générale de Helsinki, 1960.
11. Gh. Diaconescu, *Caracterul anormal al viscolelor din februarie 1954*, Rev. transporturilor, **3**, (1954).
12. W. R. J. Dingle, U. Raduk, *Antarctic snowdrift and mass transport*, Assemblée générale de Helsinki, 1960.

13. L. D. DOLGUSHIN, *Zones of snow accumulation in Eastern Antarctica*, Assemblée générale de Helsinki, 1960.

14. V. M. KOTLYAKOV (U.R.S.S.), *Résults of a study of the processes of formation and structure of the upper layer of ice sheet in Eastern Antarctica*, Assemblée générale de Helsinki, 1960.

15. J. WESTMANN, *Forme et grandeur des cristaux de neige à la baie de Treenburg*, B. Spitzberg Stockholm, 1906.

16. J. WESTMANN, *Sur les glaces de mer et la couverture de neige à la baie de Spitzberg*, Stockholm, 1905.

INTERACȚIUNEA VIBRAȚIILOR FORȚATE ȘI PARAMETRICE LA PLĂCI CURBE SUBȚIRI PLEOȘTITE[1])

de GÜNTER SCHMIDT

Institutul de matematici aplicate și
mecanică al Academiei de Științe din Berlin

539.3

Pentru învelitori acoperind în plan un dreptunghi asupra cărora acționează forțe pulsatorii se cercetează vibrațiile transversale generate parametric, ținînd seama de vibrațiile forțate din suprafața mediană. Contribuțiile spațiale ale soluțiilor se determină prin condițiile la limită, iar pentru contribuțiile temporale rezultă sisteme de ecuații diferențiale neliniare obișnuite.

Transformînd în vibrații principale și trecînd la ecuații integro-diferențiale echivalente, pot fi găsite soluții aproximative care permit discutarea proprietăților vibratorii și o apreciere a diferitelor mărimi neglijate.

1. INTRODUCERE

În cazul problemelor de stabilitate dinamică a plăcilor plane și curbe subțiri, se introduc, în general, *a priori*, trei simplificări.

În primul rînd, pentru deplasări se dau formule cu un singur termen, ca funcții de punct, care să îndeplinească mai mult sau mai puțin bine condițiile la limită, și ca funcții de timp încă nedeterminate, reducîndu-se în felul acesta cele trei ecuații cu derivate parțiale ale problemei la tot atîtea ecuații diferențiale ordinare.

---

[1]) Publicată și în „Rev. roum. sci. techn. Mécanique appliquée", **10**, *3* (1965) (în limba germană).

În al doilea rînd, se neglijează forţele de inerţie care acţionează asupra suprafeţei mediane („inerţia longitudinală"); în locul deplasărilor din suprafaţa mediană, poate fi introdusă o funcţie de tensiuni, astfel încît să fie necesară numai rezolvarea a două ecuaţii diferenţiale ordinare.

În al treilea rînd, la rezolvarea ecuaţiei diferenţiale a deplasărilor transversale se păstrează numai primii termeni ai unei serii Fourier, adesea numai unul singur.

În lucrarea de faţă vom analiza vibraţiile parametrice ale unei plăci subţiri pleoştite, fără simplificările mai sus amintite, dîndu-se astfel posibilitatea determinării influenţei acestora.

2. ECUAŢIILE INIŢIALE CU DERIVATE PARŢIALE

Ca linii de coordonate x, y se iau două linii de curbură principale ale suprafeţei mediane a plăcii curbe subţiri. Fie curburile principale corespunzătoare k_x şi k_y constante, iar u, v, w deplasările punctelor suprafeţei mediane în direcţia liniilor de coordonate, respectiv după normala la suprafaţa mediană.

Fie deformaţiile neliniare [12]

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y},$$

forţele tăietoare

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}),$$

$$N_y = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}), \tag{2}$$

$$N_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\varepsilon_{xy}$$

şi momentele

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

unde E este modulul de elasticitate, h este grosimea plăcii, ν este coeficientul lui Poisson, iar

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{3}$$

este rigiditatea la încovoiere a plăcii.

Introducînd în ecuațiile de mișcare (vezi [12], [13])

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + k_x N_x + k_y N_y + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} +$$

$$+ N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \bar{\beta}\mu \frac{\partial w}{\partial t},$$

în care μ este masa plăcii pe elementul de suprafață, iar $\bar{\beta}$ este coeficientul unei amortizări liniare, rezultă ecuațiile diferențiale neliniare

$$u_{xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{yy} + \frac{1+\nu}{2} v_{xy} - (k_x + \nu k_y) w_x + w_x \left(w_{xx} + \frac{1-\nu}{2} w_{yy} \right) +$$

$$+ \frac{1+\nu}{2} w_{xy} w_y - \frac{(1-\nu^2)\mu}{Eh} u_{tt} = 0,$$

$$v_{yy} + \frac{1-\nu}{2} v_{xx} + \frac{1+\nu}{2} u_{xy} - (k_y + \nu k_x) w_y + w_y \left(w_{yy} + \frac{1-\nu}{2} w_{xx} \right) + \tag{4}$$

$$+ \frac{1+\nu}{2} w_{xy} w_x - \frac{(1-\nu^2)\mu}{Eh} v_{tt} = 0$$

și

$$\frac{(1-\nu^2) D}{Eh} \Delta\Delta w - \left(u_x + \nu v_y - k_x w - \nu k_y w + \frac{1}{2} w_x^2 + \frac{1}{2} \nu w_y^2 \right)(k_x + w_{xx}) -$$

$$- \left(v_y + \nu u_x - k_y w - \nu k_x w + \frac{1}{2} w_y^2 + \frac{1}{2} \nu w_x^2 \right)(k_y + w_{yy}) - \tag{5}$$

$$- (1-\nu)(u_y + v_x + w_x w_y) w_{xy} + \frac{(1-\nu^2)\bar{\beta}\mu}{Eh} w_t + \frac{(1-\nu^2)\mu}{Eh} w_{tt} = 0,$$

unde derivatele deplasărilor sînt notate cu indici.

3. CONDIȚIILE LA LIMITĂ

Considerăm o placă curbă subțire, acoperind în plan un dreptunghi cu laturile a și b, marginile plăcii fiind $x = 0$, a și $y = 0$, b (fig. 1)[2]), placa fiind simplu rezemată pe contur, iar punctele de pe contur nedeplasabile după normala la suprafața mediană.

În cazul acesta, cu coordonatele adimensionale

$$\xi = \frac{\pi x}{a}, \qquad \eta = \frac{\pi y}{b}$$

și cu variabila temporală adimensională (explicată în capitolul 4)

$$s = \frac{\omega}{k} t$$

vom avea mai întîi relațiile

$$\frac{\pi}{a} w = \sum_{m,\, n=1}^{\infty} W_{mn}(s) \sin m\xi \sin n\eta, \tag{6}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{a} u = \displaystyle\sum_{m,\, n=1}^{\infty} U^{(1)}_{mn}(s) \sin m\xi \sin n\eta + \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} U^{(2)}_{mn}(s) \sin m\xi \cos n\eta + \\ \quad + \displaystyle\sum_{\substack{m=0 \\ n=1}}^{\infty} U^{(3)}_{mn}(s) \cos m\xi \sin n\eta + \sum_{m,\, n=0}^{\infty} U^{(4)}_{mn}(s) \cos m\xi \cos n\eta, \\ \dfrac{\pi}{b} v = \displaystyle\sum_{m,\, n=1}^{\infty} V^{(1)}_{mn}(s) \sin m\xi \sin n\eta + \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} V^{(2)}_{mn}(s) \sin m\xi \cos n\eta + \\ \quad + \displaystyle\sum_{\substack{m=0 \\ n=1}}^{\infty} V^{(3)}_{mn}(s) \cos m\xi \sin n\eta + \sum_{m,\, n=0}^{\infty} V^{(4)}_{mn}(s) \cos m\xi \cos n\eta, \end{cases} \tag{7}$$

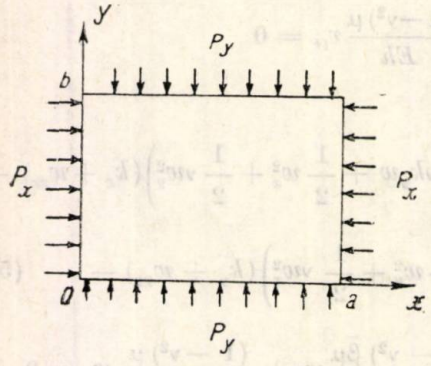


Fig. 1

care vor fi simplificate prin celelalte condiții la limită.

Presupunem mai departe că pe contururile $x = 0$, a ($\xi = 0, \pi$) și $y = 0$, b ($\eta = 0, \pi$) acționează forțele pulsatorii medii uniform distribuite P_x, respectiv P_y (pe unitatea de lungime a conturului) (fig. 1). Punctele de pe contur sînt deplasabile liber în direcția acestor forțe, astfel încît tensiunile normale pe contur să fie în echilibru cu forțele exterioare, adică să avem, ținînd seama

[2]) Cum se obișnuiește la plăcile subțiri pleoștite, se consideră metrica suprafeței mediane a plăcii egală cu metrica euclidiană a proiecției acesteia în plan.

de (2), (1), ecuațiile sub formă vectorială

$$\frac{1-\nu^2}{Eh}N_x \equiv \sum_{m,\,n=1}^{\infty}\binom{1}{(-1)^m} mU_{mn}^{(1)} \sin n\eta + \sum_{\substack{m=1\\n=0}}^{\infty}\binom{1}{(-1)^m} mU_{mn}^{(2)} \cos n\eta +$$

$$+ \nu \sum_{\substack{m=0\\n=1}}^{\infty}\binom{1}{(-1)^m} nV_{mn}^{(3)} \cos n\eta - \nu \sum_{\substack{m=0\\n=1}}^{\infty}\binom{1}{(-1)^m} nV_{mn}^{(4)} \sin n\eta +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\sum_{m,\,n=1}^{\infty}\binom{1}{(-1)^m} mV_{mn} \sin n\eta\right]^2 = -\frac{1-\nu^2}{Eh} P_x \qquad (8)$$

pentru $x = 0$, a și

$$\frac{1-\nu^2}{Eh}N_y \equiv \sum_{m,\,n=1}^{\infty}\binom{1}{(-1)^n} nV_{mn}^{(1)} \sin m\xi + \sum_{\substack{m=0\\n=1}}^{\infty}\binom{1}{(-1)^n} nV_{mn}^{(3)} \cos m\xi +$$

$$+ \nu \sum_{\substack{m=1\\n=0}}^{\infty}\binom{1}{(-1)^n} mU_{mn}^{(2)} \cos m\xi - \nu \sum_{\substack{m=1\\n=0}}^{\infty}\binom{1}{(-1)^n} mU_{mn}^{(4)} \sin m\xi + \qquad (9)$$

$$+ \frac{a^2}{2b^2}\left[\sum_{m,\,n=1}^{\infty}\binom{1}{(-1)^n} nW_{mn} \sin m\xi\right]^2 = -\frac{1-\nu^2}{Eh} P_y$$

pentru $y = 0$, b[3]).

Egalînd coeficienții referitori la $\sin n\eta$, $\cos 0\eta = 1$ și $\cos n\eta$ $(n \geqslant 1)$, rezultă din (8) condițiile

$$\sum_{m=1}^{\infty}\binom{1}{(-1)^m} mU_{mn}^{(1)} - \nu n \sum_{m=0}^{\infty}\binom{1}{(-1)^m} V_{mn}^{(4)} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (10)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\binom{1}{(-1)^m} mU_{m0}^{(2)} + \frac{1}{4}\sum_{l,\,m,\,p=1}^{\infty}\binom{1}{(-1)^{l+p}} lp\, W_{lm} W_{pm} = -\frac{1-\nu^2}{Eh} P_x, \qquad (11)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\binom{1}{(-1)^m} mU_{mn}^{(2)} + \nu n \sum_{m=0}^{\infty}\binom{1}{(-1)^m} V_{mn}^{(3)} +$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{l,\,m,\,p=1}^{\infty} \operatorname{sign}(m-n)\cdot\binom{1}{(-1)^{l+p}} lp\, W_{lm} W_{p,\,|m-n|} = 0 \quad (n = 1,2,3,\ldots), \qquad (12)$$

---

[3]) Asupra convergenței seriilor și a valabilității mai întîi formele a operațiilor vom reveni în capitolul 8.

și, în mod corespunzător, din (9)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1}{(-1)^n} nV_{mn}^{(1)} - \nu m \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1}{(-1)^n} U_{mn}^{(4)} = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots), \tag{13}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1}{(-1)^n} nV_{0n}^{(3)} + \frac{a^2}{4b^2} \sum_{l,\,n,\,q=1}^{\infty}\binom{1}{(-1)^{n+q}} nq\, W_{ln} W_{lq} = -\frac{1-\nu^2}{Eh} P_y, \tag{14}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{1}{(-1)^n} nV_{mn}^{(3)} + \nu m \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1}{(-1)^n} U_{mn}^{(2)} + \frac{a^2}{4b^2} \sum_{l,\,n,\,q=1}^{\infty} \operatorname{sign}(l-m) \cdot$$

$$\cdot \binom{1}{(-1)^{n+q}} nq\, W_{ln} W_{|l-m|,\,q} = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)\ ^{4}) \tag{15}$$

Îndeplinirea condițiilor (10), (13) este asigurată dacă seriile sînt egale termen cu termen :

$$U_{m0}^{(4)} = V_{0n}^{(4)} = 0, \quad \nu m U_{mn}^{(4)} = nV_{mn}^{(1)}, \quad \nu n V_{mn}^{(4)} = mU_{mn}^{(1)} \ (m, n = 1, 2, 3), \tag{16}$$

Printr-o alegere convenabilă a lui $U_{mn}^{(2)}$, $V_{mn}^{(3)}$ pot fi satisfăcute condițiile (11), (12), (14), (15). Pentru simplitate se alege recursiv

$$U_{10}^{(2)} = -\frac{1}{4} \sum_{l,\,m,\,p=1}^{\infty} lp\, W_{lm} W_{pm},$$

$(l + p$ impar$)$

$$U_{20}^{(2)} = -\frac{1-\nu^2}{2Eh} P_x - \frac{1}{8} \sum_{l,\,m,\,p=1}^{\infty} lp\, W_{lm} W_{pm},$$

$(l + p$ par$)$

$$V_{01}^{(3)} = -\frac{a^2}{4b^2} \sum_{l,\,n,\,q=1}^{\infty} nq W_{ln} W_{lq},$$

$(n + q$ impar$)$

$$V_{02}^{(3)} = -\frac{1-\nu^2}{2Eh} P_y - \frac{a^2}{8b^2} \sum_{l,\,n,\,q=1}^{\infty} nq W_{ln} W_{lq},$$

$(n + q$ par$)$

$$U_{n0}^{(2)} = 0 \quad \text{pentru} \quad m \geqslant 3, \qquad V_{0n}^{(3)} = 0 \quad \text{pentru} \quad n \geqslant 3$$

pentru satisfacerea ecuațiilor (11), (14),

$$U_{11}^{(2)} + \nu V_{11}^{(3)} = -\frac{1}{4} \sum_{l,\,m,\,p=1}^{\infty} lp\, W_{lm} W_{p,\,m-1},$$

$(l + p$ impar$)$

[4]) Mărimile W_{p0} și W_{0q} se iau egale cu zero.

$$U_{21}^{(2)} = -\frac{\nu}{2} V_{01}^{(3)} - \frac{1}{8} \sum_{l,\,m,\,p=1}^{\infty} lp W_{lm} W_{p,\,m-1}.$$

$(l + p$ par$)$

$$V_{11}^{(3)} + \nu U_{11}^{(2)} = -\frac{a^2}{4b^2} \sum_{l,\,n,\,q=1}^{\infty} nq W_{ln} W_{l-1,\,q},$$

$(n + q$ impar$)$

$$V_{12}^{(3)} = -\frac{\nu}{2} U_{10}^{(2)} - \frac{a^2}{8b^2} \sum_{l,n,\,q=1}^{\infty} nq W_{ln} W_{l-1,\,q},$$

$(n + q$ par$)$

$U_{m1}^{(2)} = V_{1n}^{(3)} = 0$ pentru $m, n \geqslant 3$, $U_{1n}^{(2)} = V_{m1}^{(3)} = 0$ pentru $m, n \geqslant 2$, pentru satisfacerea relației (12) în cazul $n = 1$ și a relației (15) în cazul $m = 1$,

$$U_{22}^{(2)} + \nu V_{22}^{(3)} = -\nu V_{02}^{(3)} - \frac{1}{8} \sum_{l,\,m,\,p=1}^{\infty} \operatorname{sign}(m-2) \cdot lp\, W_{lm} W_{p,\,|m-2|},$$

$(l + p$ par$)$

$$U_{32}^{(2)} = -\frac{2\nu}{3} V_{12}^{(3)} - \frac{1}{12} \sum_{l,\,m,\,p=1}^{\infty} \operatorname{sign}(m-2) \cdot lp\, W_{lm} W_{p,\,|m-2|},$$

$(l + p$ impar$)$

$$V_{22}^{(3)} + \nu U_{22}^{(2)} = -\nu U_{20}^{(2)} - \frac{a^2}{8b^2} \sum_{l,\,n,\,q=1}^{\infty} \operatorname{sign}(l-2) \cdot nq W_{ln} W_{|l-2|,\,q},$$

$(n + q$ par$)$

$$V_{23}^{(3)} = -\frac{2\nu}{3} U_{21}^{(3)} - \frac{a^2}{12b^2} \sum_{l,\,n,\,q=1}^{\infty} \operatorname{sign}(l-2) \cdot nq W_{ln} W_{|l-2|,\,q},$$

$(n + q$ impar$)$

$U_{m2}^{(2)} = V_{2n}^{(3)} = 0$ pentru $m, n \geqslant 4$, $U_{2n}^{(2)} = V_{m2}^{(3)} = 0$ pentru $m, n, \geqslant 3$, pentru satisfacerea relației (12) în cazul $n = 2$ și a relației (15) în cazul $m = 2$, și așa mai departe. În felul acesta sînt determinate valorile lui $U_{mn}^{(2)}$ pentru $m \geqslant 1$, $n \geqslant 0$ și valorile lui $V_{mn}^{(3)}$ pentru $m \geqslant 0$, $n \geqslant 1$.

Ținînd seama de (2), (1), forțele tăietoare N_{xy} vor fi

$$N_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} (u_y + v_x + w_x w_y).$$

Folosind formulele (7), (6), rezultă

$$\frac{2(1+\nu)}{Eh} N_{xy} = \frac{a}{b} \sum_{\substack{m=0 \\ n=1}}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^m \end{pmatrix} n U_{mn}^{(3)} \cos n\eta -$$

$$- \frac{a}{b} \sum_{\substack{m=0 \\ n=1}}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^m \end{pmatrix} n U_{mn}^{(4)} \sin n\eta + \frac{b}{a} \sum_{m,\,n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^m \end{pmatrix} m V_{mn}^{(1)} \sin n\eta +$$

$$+ \frac{b}{a} \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^m \end{pmatrix} m V_{mn}^{(2)} \cos n\eta \qquad (17)$$

pentru $\xi = 0,\ \pi$ și

$$\frac{2(1+\nu)}{Eh} N_{xy} = \frac{a}{b} \sum_{m,\, n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^n \end{pmatrix} n U_{mn}^{(1)} \sin m\xi +$$

$$+ \frac{a}{b} \sum_{\substack{m=0 \\ n=1}}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^n \end{pmatrix} n U_{mn}^{(3)} \cos m\xi +$$

$$+ \frac{b}{a} \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^n \end{pmatrix} m V_{mn}^{(2)} \cos m\xi - \frac{b}{a} \sum_{\substack{m=1 \\ n=0}}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^n \end{pmatrix} m V_{mn}^{(4)} \sin m\xi \quad (18)$$

pentru $\eta = 0,\ \pi$.

Punînd condiția ca forțele tăietoare să se anuleze în medie pe fiecare contur, va fi necesar ca coeficienții termenilor din (17), (18), care au o contribuție la integrarea de la 0 la π, să se anuleze fiecare în parte. În acest scop punem, termen cu termen,

$$\frac{a}{b} n U_{mn}^{(4)} = \frac{b}{a} m V_{mn}^{(1)} \quad (m \geqslant 1), \quad U_{0n}^{(4)} = 0 \quad (19)$$

pentru $n = 1,\ 3,\ 5\ \ldots,$

$$\frac{a}{b} n U_{mn}^{(1)} = \frac{b}{a} m V_{mn}^{(4)} \quad (n \geqslant 1), \quad V_{m0}^{(4)} = 0, \quad (20)$$

pentru $m = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$ și

$$V_{m0}^{(2)} = U_{0n}^{(3)} = 0,$$

pentru $m,\ n \geqslant 1$.

Din (19), (20), (16) rezultă (în afara cazurilor $\nu = \frac{a^2 n^2}{b^2 m^2}$ sau $\nu = \frac{b^2 m^2}{a^2 n^2}$)

$$U_{mn}^{(4)} = V_{mn}^{(1)} = 0 \quad (m \geqslant 1), \quad U_{0n}^{(4)} = 0, \quad (21)$$

pentru $n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots$ și

$$U_{mn}^{(1)} = V_{mn}^{(4)} = 0 \quad (n \geqslant 1), \quad V_{m0}^{(4)} = 0, \quad (22)$$

pentru $m = 1,\ 3,\ 5\ \ldots$

Punem mai departe condiția ca ecuațiile (21), (22), și deci și ecuațiile (19), (20), să fie valabile și pentru n și m întregi ; atunci

$$U_{mn}^{(1)} = U_{mn}^{(4)} = V_{mn}^{(1)} = V_{mn}^{(4)} = 0 \quad (23)$$

pentru orice $m,\ n \geqslant 0$[5]).

În felul acesta, forțele tăietoare de pe contur (17), (18) nu vor mai conține decît termeni în cosinus. Relațiile (23) rezultă și atunci cînd, pe

[5]) Din motive de simetrie, putem scrie $U_{00}^{(4)} = V_{00}^{(4)} = 0$.

lîngă condițiile forțelor normale (16), se mai cere ca colțurile plăcii să rămînă fixe în timpul fenomenului de vibrații ($U^{(4)}_{mn} = V^{(4)}_{mn} = 0$).

Prin (23) și condițiile de recurență pentru $U^{(2)}_{mn}$, $V^{(3)}_{mn}$ sînt determinați toți coeficienții din (7), cu excepția coeficienților $U^{(3)}_{mn}$, $V^{(2)}_{mn}$, pe care îi vom considera, în cele ce urmează, fără indicele superior :

$$U^{(3)}_{mn}(s) = U_{mn}(s), \qquad V^{(2)}_{mn}(s) = V_{mn}(s).$$

Vom arăta că acești coeficienți se determină prin ecuațiile diferențiale (4).

Într-o analiză suplimentară vom putea presupune că forțele tăietoare (17), (18) nu se anulează numai în medie, ci în fiecare punct de pe contur. În consecință, și termenii în cosinus din (17), (18) trebuie să se anuleze reciproc, ceea ce se obține prin condițiile

$$\frac{a}{b} n U_{mn} + \frac{b}{a} m V_{mn} = 0, \qquad U_{0n} = V_{m0} = 0 \tag{24}$$

pentru $m,\ n \geqslant 1$.

Vom arăta că, în acest caz, ecuațiile diferențiale (4) vor putea fi satisfăcute numai în medie.

4. TRECEREA LA SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE ORDINARE

Avînd în vedere că în ecuațiile diferențiale (4) au fost cuprinși numai termenii de deplasare pînă la ordinul doi, este suficient ca la introducerea în astfel de termeni de ordinul doi să se ia în considerație numai prima aproximație a lui w. În alineatul următor vom arăta că, într-o primă aproximație, numai prima funcție a lui w este diferită de zero. Neglijînd indicii, pentru simplitate, avem :

$$\frac{\pi}{a} \overset{1}{w} = \overset{1}{W}_{11}(s) \sin\xi \sin\eta = W(s) \sin\xi \sin\eta. \tag{25}$$

Prin recurență rezultă că toți coeficienții $U^{(2)}_{mn}$, $V^{(3)}_{mn}$ sînt egali cu zero, în afară de

$$\begin{aligned}
U^{(2)}_{20} &= -\frac{1-\nu^2}{2Eh} P_x - \frac{1}{8} W^2, \\
V^{(3)}_{02} &= -\frac{1-\nu^2}{2Eh} P_y - \frac{a^2}{8b^2} W^2, \\
U^{(2)}_{22} &= \frac{\nu}{2Eh} (P_y - \nu P_x) + \frac{1}{8} W^2, \\
V^{(3)}_{22} &= \frac{\nu}{2Eh} (P_x - \nu P_y) + \frac{a^2}{8b^2} W^2,
\end{aligned} \tag{26}$$

astfel încît relaţiile (7) iau forma simplificată

$$\frac{\pi}{a}u = U_{20}^{(2)}(s)\sin 2\xi + U_{22}^{(2)}(s)\sin 2\xi\cos 2\eta + \sum_{\substack{m=0\\n=1}}^{\infty} U_{mn}(s)\cos m\xi\sin n\eta,$$
$$\frac{\pi}{b}v = V_{02}^{(3)}(s)\sin 2\eta + V_{22}^{(3)}(s)\cos 2\xi\sin 2\eta + \sum_{\substack{m=1\\n=0}}^{\infty} V_{mn}(s)\sin m\xi\cos n\eta. \tag{27}$$

Introducînd (6), (25), (27), (26) în ecuaţiile cu derivate parţiale (4) şi egalînd coeficienţii, se deduc următoarele sisteme infinite de ecuaţii diferenţiale neliniare ordinare pentru coeficienţii $U_{mn}(s)$, $V_{mn}(s)$:

$$U''_{mn} + \frac{1}{M}\left(m^2 + \frac{1-\nu}{2}\frac{a^2}{b^2}n^2\right)U_{mn} + \frac{1+\nu}{2M}mnV_{mn} =$$
$$= -\frac{1}{M}(k_\xi + \nu k_\eta)\,mW_{mn} - \delta\frac{8}{(m^2-4)n}\left[\frac{8(1-\nu^2)P_\xi}{M} + 2(1-\nu^2)P''_\xi + \right.$$
$$+ \frac{1}{\pi^2 M}\left(1 + \frac{\nu a^2}{b^2}\right)W^2 + \frac{1}{\pi^2}(W'^2 + WW'')\Big] +$$
$$+ \delta\frac{8n}{(m^2-4)(n^2-4)}\left[\frac{4\nu(1-\nu)P_\xi}{M} - \frac{4a^2\nu^2(1-\nu)P_\xi}{b^2M} + \right. \tag{28}$$
$$+ \frac{4\nu(2+\nu)(1-\nu)P_\eta}{M} + \frac{4a^2\nu(1-\nu)P_\eta}{b^2M} + 2\nu(P''_\eta - \nu P''_\xi) +$$
$$\left. + \frac{1}{\pi^2 M}\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)W^2 + \frac{1}{\pi^2}(W'^2 + WW'')\right] \equiv \Phi_{mn}$$
$$(m \geqslant 0,\ n \geqslant 1),$$

$$V''_{mn} + \frac{1}{M}\left(\frac{1-\nu}{2}m^2 + \frac{a^2}{b^2}n^2\right)V_{mn} + \frac{(1+\nu)a^2}{2b^2M}mnU_{mn} =$$
$$= -\frac{a^2}{b^2M}(k_\eta + \nu k_\xi)\,nW_{mn} - \delta\frac{8}{m(n^2-4)}\left[\frac{8(1-\nu^2)a^2P_\eta}{b^2M} + 2(1-\nu^2)P''_\eta + \right.$$
$$+ \frac{a^2}{\pi^2 b^2 M}\left(\frac{a^2}{b^2} + \nu\right)W^2 + \frac{a^2}{\pi^2 b^2}(W'^2 + WW'')\Big] +$$
$$+ \delta\frac{8m}{(m^2-4)(n^2-4)}\left[\frac{4\nu(1-\nu)P_\xi}{M} + \frac{4\nu(2+\nu)(1-\nu)a^2P_\xi}{b^2M} - \right.$$
$$- \frac{4\nu^2(1-\nu)P_\eta}{M} + \frac{4\nu(1-\nu)a^2P_\eta}{b^2M} + 2\nu(P''_\xi - \nu P''_\eta) +$$
$$\left. + \frac{a^2}{\pi^2 b^2 M}\left(\frac{a^2}{b^2} + 1\right)W^2 + \frac{a^2}{\pi^2 b^2}(W'^2 + WW'')\right] \equiv \Psi_{mn}$$
$$(m \geqslant 1,\ n \geqslant 0),$$

unde au mai fost introduse mărimile adimensionale

$$\frac{P_x}{\pi^2 Eh} = P_\xi, \qquad \frac{P_y}{\pi^2 Eh} = P_\eta, \qquad \frac{a}{\pi} k_x = k_\xi, \qquad \frac{a}{\pi} k_y = k_\eta,$$

$$\frac{(1-\nu^2)\, a^2 \omega^2}{\pi^2 k^2 Eh}\, \mu = M$$

iar

$$\delta = \begin{cases} 1 \text{ pentru } m = 1, 3, 5\ldots \text{ și } n = 1, 3, 5\ldots, \\ 0 \text{ pentru toate celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Ecuațiile (28) sînt cuplate pentru $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$.

Prin transformarea în coordonate normale, obținem pentru

$$X_{mn} = mU_{mn} + nV_{mn}, \qquad Y_{mn} = nU_{mn} - \frac{b^2}{a^2} mV_{mn} \qquad (m, n \geqslant 1)$$

ecuațiile diferențiale decuplate

$$X''_{mn} + \varkappa_{mn} X_{mn} = m\Phi_{mn} + n\Psi_{mn}, \qquad Y''_{mn} + \lambda_{mn} Y_{mn} = n\Phi_{mn} - \frac{b^2}{a^2} m\Psi_{mn}$$

$$(m, n \geqslant 1), \qquad (29)$$

cu

$$\varkappa_{mn} = \frac{1}{M}\left(m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2\right), \qquad \lambda_{mn} = \frac{1-\nu}{2M}\left(m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2\right) = \frac{1-\nu}{2} \varkappa_{mn}. \qquad (30)$$

Invers, pot fi calculați U_{mn}, V_{mn} din X_{mn}, Y_{mn} cu ajutorul relațiilor

$$U_{mn} = \frac{1}{m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2}\left(mX_{mn} + \frac{a^2}{b^2} nY_{mn}\right),$$

$$V_{mn} = \frac{1}{\frac{b^2}{a^2} m^2 + n^2}\,(nX_{mn} - mY_{mn}).$$

Pentru plăci care acoperă în plan un pătrat $a = b$ cu forțe exterioare egale ($P_\xi = P_\eta$), ecuațiile diferențiale (29) se simplifică în mod considerabil astfel încît se poate scrie sub formă explicită

$$X''_{mn} + \varkappa_{mn} X_{mn} = -\frac{k_\xi + \nu k_\eta}{M} m^2 W_{mn} - \frac{k_\eta + \nu k_\xi}{M} n^2 W_{mn} -$$

$$- \delta \cdot 8\left[\frac{m}{(m^2-4)\, n} + \frac{n}{m\,(n^2-4)}\right]\left[\frac{8\,(1-\nu^2)}{M} P_\xi + 2\,(1-\nu^2)\, P''_\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{1+\nu}{\pi^2 M} W^2 + \frac{1}{\pi^2}(W'^2 + WW')\right] + \delta \frac{16mn}{(m^2-4)\,(n^2-4)}\left[\frac{16\nu\,(1-\nu)}{M} P_\xi + \right.$$

$$\left. + 2\nu\,(1-\nu)\, P''_\xi + \frac{2}{\pi^2 M} W^2 + \frac{1}{\pi^2}(W'^2 + WW'')\right], \qquad (31)$$

$$Y''_{mn} + \lambda_{mn} Y_{mn} = \frac{(1-\nu)(k_\eta - k_\xi)}{M} mn W_{mn} +$$

$$+ \delta \frac{8(1-\nu)(m^2-n^2)}{(m^2-4)(n^2-4)} \left[\frac{8(1-\nu)}{M} P_\xi + 2P''_\xi - \frac{1}{\pi^2 M} W^2 \right] \quad (m, n \geqslant 1).$$

Din ecuația cu derivate parțiale (5), prin introducerea lui (6), (25), (27), (26) și egalarea coeficienților și după o serie de calcul intermediare rezultă pentru coeficienții $W_{mn}(s)$

$$W''_{mn} + \xi_{mn} W_{mn} = \Pi_{mn} \qquad (m, n \geqslant 1), \tag{32}$$

$$\zeta_{mn} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 M} \left[\frac{\pi^2 (1-\nu^2) D}{a^2 E h} \left(m^2 + \frac{a^2}{b^2} n^2 \right)^2 + k_\xi^2 + 2\nu k_\xi k_\eta + k_\eta^2 \right], \tag{33}$$

$$\Pi_{mn} = 2\zeta_{mn} \alpha W_{mn} - \beta W'_{mn} - \delta \frac{16(1-\nu^2) m}{(m^2-4) n M} (k_\xi + \nu k_\eta) P_\xi -$$

$$- \delta \frac{16(1-\nu^2) n}{m(n^2-4) M} (k_\eta + \nu k_\xi) P_\eta + \delta \frac{16\nu mn}{(m^2-4)(n^2-4) M} [(k_\xi + \nu k_\eta)(P_\eta - \nu P_\xi) +$$

$$+ (k_\eta + \nu k_\xi)(P_\xi - \nu P_\eta)] + \delta \frac{96}{\pi^2 mn (m^2-4)(n^2-4) M} \left[k_\xi + \nu k_\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{b^2} (k_\eta + \nu k_\xi) \right] W^2 - \frac{1}{M} [m(k_\xi + \nu k_\eta) U_{mn} + n(k_\eta + \nu k_\xi) V_{mn}] +$$

$$+ \frac{\pi^2 (1-\nu^2)}{2M} \left\{ \left[(m-2)^2 + \frac{a^2}{b^2} \nu n^2 \right] W_{m-2,n} + \left[(m+2)^2 + \frac{a^2}{b^2} \nu n^2 \right] W_{m+2,n} \right\} P_\xi +$$

$$+ \frac{\pi^2 (1-\nu^2)}{2M} \left\{ \left[\nu m^2 + \frac{a^2}{b^2} (n-2)^2 \right] W_{m,n-2} + \left[\nu m^2 + \frac{a^2}{b^2} (n+2)^2 \right] W_{m,n+2} \right\} P_\eta -$$

$$- \frac{\pi^2 \nu}{4M} \left\{ \left[(m-2)^2 + \frac{a^2}{b^2} \nu (n-2)^2 \right] W_{m-2,n-2} + \left[(m-2)^2 + \frac{a^2}{b^2} \nu (n+2)^2 \right] W_{m-2,n+2} + \right.$$

$$\left. + \left[(m+2)^2 + \frac{a^2}{b^2} \nu (n-2)^2 \right] W_{m+2,n-2} + \left[(m+2)^2 + \frac{a^2}{b^2} \nu (n+2)^2 \right] W_{m+2,n+2} \right\} \times$$

$$\times (P_\eta - \nu P_\xi) -$$

$$- \frac{\pi^2 \nu}{4M} \left\{ \left[\nu (m-2)^2 + \frac{a^2}{b^2} (n-2)^2 \right] W_{m-2,n-2} + \left[\nu (m-2)^2 + \frac{a^2}{b^2} (n+2)^2 \right] W_{m-2,n+2} - \right.$$

$$\left. + \left[\nu (m+2)^2 + \frac{a^2}{b^2} (n-2)^2 \right] W_{m+2,n-2} + \left[\nu (m+2)^2 + \frac{a^2}{b^2} (n+2)^2 \right] W_{m+2,n+2} \right\} \times$$

$$\times (P_\xi - \nu P_\eta) -$$

$$-\frac{\pi^2\nu(1-\nu)}{4M}\left[(m-2)(n-2)W_{m-2,n-2}-(m-2)(n+2)W_{m-2,n+2}-\right.$$

$$\left.-(m+2)(n-2)W_{m+2,n-2}+(m+2)(n+2)W_{m+2,n+2}\right]\left[P_\xi-\nu P_\eta+\frac{a^2}{b^2}(P_\eta\nu P_{-\xi})\right]+$$

$$+\frac{4mn}{\pi^2 M}\sum_{p,q,r,t=1}^{\infty}\vartheta\left[\frac{1}{(r-q)^2-m^2}-\frac{1}{(r+p)^2-m^2}\right]\left[\frac{1}{(t-q)^2-n^2}-\frac{1}{(t+q)^2-n^2}\right]\times$$

$$\times W_{p\rho}\left[\left(p^2+\frac{a^2}{b^2}\nu q^2\right)rU_{rt}+\left(\nu p^2+\frac{a^2}{b^2}q^2\right)tV_{rt}\right]+$$

$$+\frac{4(1-\nu)mn}{\pi^2 M}\sum_{\substack{p,q=1\\ r,t=0}}^{\infty}\vartheta\left[\frac{1}{(r-p)^2-m^2}+\frac{1}{(r+p)^2-m^2}\right]\left[\frac{1}{(t-q)^2-n^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(t+q)^2-n^2}\right]\times pqW_{pq}\left(rV_{rt}+\frac{a^2}{b^2}tU_{rt}\right]-$$

$$-(9\delta_m^1\delta_n^1-3\delta_m^1\delta_n^3-3\delta_m^3\delta_n^1+\delta_m^3\delta_n^3)\frac{1+\frac{a^2}{b^2}\nu+\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{b^2}+\nu\right)}{32M}W^3-$$

$$-(\delta_m^1\delta_n^1+\delta_m^1\delta_n^3+\delta_m^3\delta_n^1+\delta_m^3\delta_n^3)\frac{a^2(1-\nu)}{16b^2M}W^3=0,$$

unde a fost introdus un coeficient de amortizare

$$\frac{k}{\omega}\bar{\beta}=\beta$$

şi vom lua

$$W_{-1,n}=-W_{1n},\qquad W_{m,-1}=-W_{m1},\qquad W_{0n}=W_{m0}=0,$$

$$\vartheta=\begin{cases}1 \text{ pentru } r+p+m \text{ şi } t+q+n \text{ impar},\\ 0 \text{ pentru toate celelalte cazuri},\end{cases}$$

$$\delta_i^j=\begin{cases}1 \text{ pentru } i=j,\\ 0 \text{ pentru } i\neq j,\end{cases}\quad \text{şi apoi } \vartheta_i^j=\begin{cases}0 \text{ pentru } i=j,\\ 1 \text{ pentru } i\neq j.\end{cases}$$

De asemenea, variaţia adimensională a frecvenţei (relativă)

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)=\frac{\omega+\omega_0}{2\omega}\,\frac{\omega-\omega_0}{\omega}\approx\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}\quad\text{pentru } \omega\approx\omega_0$$

caracterizează o frecvenţă circulară ω_0 în apropierea frecvenţei circulare ω a forţelor pulsatorii de pe contur, a căror parte variabilă o vom considera armonică:

$$P_\xi=P_{0\xi}+P_{1\xi}\cos\omega t=P_{0\xi}+P_{1\xi}\cos ks,$$
$$P_\eta=P_{0\eta}+P_{1\eta}\cos\omega t=P_{0\eta}+P_{1\eta}\cos ks.\ ^{6)}$$

[6]) Numărul natural k a fost introdus pentru ca, în afara soluţiilor cu perioada forţelor pulsatorii de pe contur ($k=1$), să poată fi cuprinse în aceeaşi formulă şi soluţii cu perioada dublă de excitaţie ($k=2$).

5. ECUAȚII INTEGRODIFERENȚIALE ECHIVALENTE ȘI SOLUȚII APROXIMATIVE

Ne propunem să facem studiul vibrațiilor transversale ale plăcii, presupunînd că prima (și numai prima) frecvență circulară a ecuațiilor diferențiale ale vibrațiilor transversale (32) este egală cu pătratul unui număr natural, pe care îl presupunem egal cu 1 (armonica fundamentală):

$$\xi_{11} = 1. \tag{34}$$

Soluțiile periodice (perioada 2π) ale sistemului de ecuații diferențiale (32), care să aibă două derivate continue, sînt, totodată, soluții ale sistemului de ecuații integrodiferențiale:

$$W_{mn}(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\zeta_{mn}} + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos l(s-\delta)}{\vartheta_{\zeta_{mn}}^{l^2}\zeta_{mn}-l^2}\right]\Pi_{mn}(\sigma)\,d\sigma + \\ + \delta_m^1\delta_n'(P\cos s + Q\sin s) \tag{35}$$

și, invers (vezi [10]), unde cei doi parametri de ramificare P, Q se determină ulterior, prin introducerea soluțiilor aproximative în ecuațiile de ramificare:

$$P = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} W_{11}(s)\cos s\,ds, \qquad Q = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} W_{11}(s)\sin s\,ds. \tag{36}$$

Pentru calcularea soluțiilor aproximative, se consideră mai întîi toate mărimile α, β, P_ξ, P_η, k_ξ, k_η, P, Q ca suficient de mici față de unitate[7]).

Prima aproximație va fi

$$\overset{1}{W}_{11}(s) = W(s) = P\cos s + Q\sin s,$$
$$\overset{1}{W}_{mn}(s) = 0,$$

pentru toate celelalte valori m, n, ceea ce verifică relația (25).

Înainte de a calcula a doua aproximație, trebuie rezolvate ecuațiile diferențiale (29). Frecvențele corespunzătoare ale vibrațiilor transversale, armonice de bază ale vibrațiilor longitudinale, precum și primele armonici superioare, nu vor apărea. Presupunem că nici una dintre mărimile $\varkappa_{mn}$, λ_{mn} nu este egală cu pătratul unui număr natural; în acest caz, soluțiile de perioadă 2π ale ecuațiilor diferențiale (29) vor fi echivalente cu soluțiile integrodiferențiale

$$X_{mn}(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\varkappa_{mn}} + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos l(s-\sigma)}{\varkappa_{mn}-l^2}\right][m\Phi_{mn}(\sigma) + n\Psi_{mn}(\sigma)]\,d\sigma, \tag{37}$$

$$Y_{mn}(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\lambda_{mn}} + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{\cos l(s-\sigma)}{\lambda_{mn}-l^2}\right][n\Phi_{mn}(\sigma) - \frac{b^2}{a^2}m\Psi_{mn}(\sigma)]\,d\sigma.$$

[7]) Ulterior se poate arăta, ca în [10], că mărimile P, Q pot rezulta oricît de mici vrem, dacă celelalte mărimi se aleg suficient de mici.

Din cauza lungimii formulelor, sîntem obligați să ne limităm, în continuarea acestui studiu, la cazul plăcilor subțiri de formă pătrată ($a=b$) și al unor forțe egale pe contur ($P_\xi - P_\eta = P_0 + P_1 \cos ks$). Din (37), (31) rezultă, neglijînd termenii de un ordin mai mare decît doi :

$$\overset{2}{X}_{mn}(s) = -\delta_m^1 \delta_n^1 \frac{(1+\nu)(k_\xi + k_\eta)}{M(\varkappa_{11}-1)} (P\cos s + Q \sin s) -$$

$$- \delta . 8 \left[\frac{m}{(m^2-4)n} + \frac{n}{m(n^2-4)}\right] \left\{ \frac{8(1-\nu^2)}{M} \left(\frac{P_0}{\varkappa_{mn}} + \frac{P_1 \cos ks}{\varkappa_{mn} - k^2} \right) - \right.$$

$$- 2k^2 (1-\nu^2) \frac{P_1 \cos ks}{\varkappa_{mn} - k^2} + \frac{1+\nu}{2\pi^2 M} \left[\frac{P^2+Q^2}{\varkappa_{mn}} + \frac{(P^2-Q^2)\cos 2s + 2PQ \sin 2s}{\varkappa_{mn}-4} \right] -$$

$$\left. - \frac{1}{\pi^2} \frac{(P^2-Q^2)\cos 2s + 2PQ \sin 2s}{\varkappa_{mn}-4} \right\} + \delta \frac{16mn}{(m^2-4)(n^2-4)} \times$$

$$\left\{ \frac{16\nu(1-\nu)}{M} \left(\frac{P_0}{\varkappa_{mn}} + \frac{P_1 \cos ks}{\varkappa_{mn}-k^2} \right) - 2k^2 \nu (1-\nu) \frac{P_1 \cos ks}{\varkappa_{mn}-k^2} + \right.$$

$$+ \frac{1}{\pi^2 M} \left[\frac{P^2+Q^2}{\varkappa_{mn}} + \frac{(P^2-Q^2)\cos 2s + 2PQ \sin 2s}{\varkappa_{mn}-4} \right] -$$

$$\left. - \frac{1}{\pi^2} \frac{(P^2-Q^2)\cos 2s + 2PQ \sin 2s}{\varkappa_{mn}-4} \right\},$$

$$\overset{2}{Y}_{mn}(s) = \delta_m^1 \delta_n^1 \frac{(1-\nu)(k_\eta - k_\xi)}{M(\lambda_{11}-1)} (P \cos s + Q \sin s) +$$

$$+ \delta \frac{4(1-\nu)(m^2-n^2)}{(m^2-4)(n^2-4)} \left\{ \frac{16(1-\nu)}{M} \left(\frac{P_0}{\lambda_{mn}} + \frac{P_1 \cos ks}{\lambda_{mn}-k^2} \right) - 4k^2 \frac{P_1 \cos ks}{\lambda_{mn}-k^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi^2 M} \left[\frac{P^2+Q^2}{\lambda_{mn}} + \frac{(P^2-Q^2)\cos 2s + 2PQ \sin 2s}{\lambda_{mn}-4} \right] \right\}.$$

Aceste aproximații sînt diferite de zero numai pentru valorile impare ale lui m și n și vom avea

$$X_{nm} = X_{mn}, \quad Y_{nm} = -Y_{mn} (m \neq n), \quad \varkappa_{nm} = \varkappa_{mn}, \quad \lambda_{nm} = \lambda_{mn}.$$

După introducerea acestor valori în Π_{mn} pot fi calculate din (35) aproximația a doua și a treia a lui W_{mn}. Seriile obținute, neputînd fi însumate în formă finită, se poate considera numai un număr finit de funcții X_{mn} și Y_{mn}. Se va vedea că, din cauza convergenței rapide, ne putem limita la funcțiile X_{mn}, Y_{mn} pentru $m \leqslant 5$, $n \leqslant 5$, care pot fi scrise sub forma

$$\overset{2}{X}_{11} = -\frac{(1+\nu)(k_\xi + k_\eta)}{M(\varkappa_{11}-1)} (P \cos s + Q \sin s) + \frac{16}{9} \left\{ \frac{8(1-\nu)(3+5\nu)}{M} \left(\frac{P_0}{\varkappa_{11}} + \right. \right.$$

$$+\frac{P_1\cos k\,s}{\varkappa_{11}-k^2}\Big)-2k^2(1-\nu)(3+4\nu)\frac{P_1\cos k\,s}{\varkappa_{11}-k^2}+\frac{5+3\nu}{2\pi^2 M}\Big[\frac{P^2+Q^2}{\varkappa_{11}}+$$

$$+\frac{(P^2-Q^2)\cos 2s+2PQ\sin 2s}{\varkappa_{11}-4}\Big]-\frac{4}{\pi^2}\frac{(P^2-Q^2)\cos 2s+2PQ\sin 2s}{\varkappa_{11}-4}\Big\},$$

$$\overset{2}{X}_{31}=-\frac{16}{45}\Big\{\frac{8(1-\nu)(11+29\nu)}{M}\Big(\frac{P_0}{\varkappa_{31}}+\frac{P_1\cos k\,s}{\varkappa_{31}-k^2}\Big)-2k^2(1-\nu)(11+$$

$$+20\nu)\frac{P_1\cos k\,s}{\varkappa_{31}-k^2}+\frac{29+11\nu}{2\pi^2 M}\Big[\frac{P^2+Q^2}{\varkappa_{31}}+\frac{(P^2-Q^2)\cos 2s+2PQ\sin 2s}{\varkappa_{31}-4}\Big]-$$

$$-\frac{20}{\pi^2}\frac{(P^2-Q^2)\cos 2s+2PQ\sin 2s}{\varkappa_{31}-4}\Big\},$$

$$\overset{2}{X}_{33}=-\frac{16}{25}\Big\{\frac{8(1-\nu)(5-13\nu)}{M}\Big(\frac{P_0}{\varkappa_{33}}+\frac{P_1\cos k\,s}{\varkappa_{33}-k^2}\Big)-2k^2(1-\nu)(5-$$

$$-4\nu)\frac{P_1\cos k\,s}{\varkappa_{33}-k^2}-\frac{13-5\nu}{2\pi^2 M}\Big[\frac{P^2+Q^2}{\varkappa_{33}}+\frac{(P^2-Q^2)\cos 2s+2PQ\sin 2s}{\varkappa_{33}-4}\Big]+$$

$$+\frac{4}{\pi^2}\frac{(P^2-Q^2)\cos 2s+2PQ\sin 2s}{\varkappa_{33}-4}\Big\},$$

$$\overset{2}{X}_{51}=-\frac{16}{315}\Big\{\frac{8(1-\nu)(27+77\nu)}{M}\Big(\frac{P_0}{\varkappa_{51}}+\frac{P_1\cos k\,s}{\varkappa_{51}-k^2}\Big)-$$

$$-2k^2(1-\nu)(27+52\nu)\frac{P_1\cos k\,s}{\varkappa_{51}-k^2}+\frac{77+27\nu}{2\pi^2 M}\Big[\frac{P^2+Q^2}{\varkappa_{51}}+$$

$$+\frac{(P^2-Q^2)\cos 2s+2PQ\sin 2s}{\varkappa_{51}-4}\Big]-\frac{52}{\pi^2}\frac{(P^2-Q^2)\cos 2s+2PQ\sin 2s}{\varkappa_{51}-4}\Big\},$$

$$\overset{2}{X}_{53}=-\frac{16}{1575}\Big\{\frac{8(1-\nu)(157-293\nu)}{M}\Big(\frac{P_0}{\varkappa_{53}}+\frac{P_1\cos k\,s}{\varkappa_{53}-k^2}\Big)-$$

$$-2k^2(1-\nu)(157-68\nu)\frac{P_1\cos k\,s}{\varkappa_{53}-k^2}-\frac{293-157\nu}{2\pi^2 M}\Big[\frac{P^2+Q^2}{\varkappa_{53}}+$$

$$+\frac{(P^2-Q^2)\cos 2s+2PQ\sin 2s}{\varkappa_{53}-4}\Big]+\frac{68}{\pi^2}\frac{(P^2-Q^2)\cos 2s+2PQ\sin 2s}{\varkappa_{53}-4}\Big\},$$

$$\overset{2}{X}_{55}=-\frac{16}{441}\Big\{\frac{8(1-\nu)(21-29\nu)}{M}\Big(\frac{P_0}{\varkappa_{55}}+\frac{P_1\cos k\,s}{\varkappa_{55}-k^2}\Big)-$$

$$-2k^2(1-\nu)(21-4\nu)\frac{P_1\cos ks}{\varkappa_{55}-k^2}-\frac{29-21\nu}{2\pi^2 M}\Big[\frac{P^2+Q^2}{\varkappa_{55}}+$$

$$+\frac{(P^2-Q^2)\cos 2s+2PQ\sin 2s}{\varkappa_{55}-4}\Big]+\frac{4}{\pi^2}\frac{(P^2-Q^2)\cos 2s+2PQ\sin 2s}{\varkappa_{55}-4}\Big\},$$

$$\overset{2}{Y}_{11}=\frac{(1-\nu)(k_\eta-k_\xi)}{M(\lambda_{11}-1)}(P\cos s+Q\sin s),\qquad \overset{2}{Y}_{mm}=0\qquad (m>1),$$

$$\overset{2}{Y}_{31}=-\frac{32(1-\nu)}{15}\Big\{\frac{16(1-\nu)}{M}\Big(\frac{P_0}{\lambda_{31}}+\frac{P_1\cos ks}{\lambda_{31}-k^2}\Big)-4k^2\frac{P_1\cos ks}{\lambda_{31}-k^2}-$$

$$-\frac{1}{\pi^2 M}\Big[\frac{P^2+Q^2}{\lambda_{31}}+\frac{(P^2-Q^2)\cos 2s+2PQ\sin 2s}{\lambda_{31}-4}\Big]\Big\},$$

$$\overset{2}{Y}_{51}=-\frac{32(1-\nu)}{21}\Big\{\frac{16(1-\nu)}{M}\Big(\frac{P_0}{\lambda_{51}}+\frac{P_1\cos ks}{\lambda_{51}-k^2}\Big)-4k^2\frac{P_1\cos ks}{\lambda_{51}-k^2}-$$

$$-\frac{1}{\pi^2 M}\Big[\frac{P^2+Q^2}{\lambda_{51}}+\frac{(P^2-Q^2)\cos 2s+2PQ\sin 2s}{\lambda_{51}-4}\Big]\Big\},$$

$$\overset{2}{Y}_{53}=\frac{64(1-\nu)}{105}\Big\{\frac{16(1-\nu)}{M}\Big(\frac{P_0}{\lambda_{53}}+\frac{P_1\cos ks}{\lambda_{53}-k^2}\Big)-4k^2\frac{P_1\cos ks}{\lambda_{53}-k^2}-$$

$$-\frac{1}{\pi^2 M}\Big[\frac{P^2+Q^2}{\lambda_{53}}+\frac{(P^2-Q^2)\cos 2s+2PQ\sin 2s}{\lambda_{53}-4}\Big]\Big\}.$$

Cu aceste mărimi rezultă

$$\overset{2}{W}_{mn}=\overset{3}{W}_{mn}=0$$

pentru valori pare ale lui m sau n și

$$\overset{2}{W}_{mn}=(C_1k_\xi+C_2k_\eta)P_0+(C_3k_\xi+C_4k_\eta)P_1\cos ks-\delta_m^1\delta_n^1\,2\alpha(P\cos s+$$
$$+Q\sin s)+\delta_m^1\delta_n^1\beta(Q\cos s-P\sin s)+C_5P_0(P\cos s+Q\sin s)+$$
$$+C_6P_1[P\cos(k+1)s+Q\sin(k+1)s]+C_7P_1[P\cos(k-1)s-$$
$$-Q\sin(k-1)s],$$

$$\overset{3}{W}_{mn}=(D_1k_\xi+D_2k_\eta)\alpha P_0+(D_3k_\xi+D_4k_\eta)\alpha P_1\cos ks+(D_5k_\xi+$$
$$+D_6k_\eta)\beta P_1\sin ks+(D_7k_\xi+D_8k_\eta)P_0^2+(D_9k_\xi+D_{10}k_\eta)P_0P_1\cos ks+$$
$$+(D_{11}k_\xi+D_{12}k_\eta)P_1^2\cos 2ks+(D_{13}k_\xi+D_{14}k_\eta)P_1^2+$$
$$+\delta_m^1\delta_n^1D_{15}\alpha^2(P\cos s+Q\sin s)+\delta_m^1\delta_n^1D_{16}\alpha\beta(Q\cos s-P\sin s)+$$
$$+D_{17}\alpha P_0(P\cos s+Q\sin s)+D_{18}\alpha P_1[P\cos(k+1)s+$$
$$+Q\sin(k+1)s]+D_{19}\alpha P_1[P\cos(k-1)s-Q\sin(k-1\,s]+$$
$$+\delta_m^1\delta_n^1D_{20}\beta^2(P\cos s+Q\sin s)+D_{21}\beta P_0(Q\cos s-P\sin s)+$$
$$+D_{22}\beta P_1[Q\cos(k+1)s-P\sin(k+1)s]+$$

$$+ D_{23}\beta P_1[Q\cos(k-1)s + P\sin(k-1)s] + D_{24}P_0^2(P\cos s + Q\sin s) +$$
$$+ D_{25}P_0P_1[P\cos(k+1)s + Q\sin(k+1)s] +$$
$$+ D_{26}P_0P_1[P\cos(k-1)s - Q\sin(k-1)s] + D_{27}P_1^2[P\cos(2k+1)s +$$
$$+ Q\sin(2k+1)s] + D_{28}P_1^2[P\cos(2k-1)s - Q\sin(2k-1)s] +$$
$$+ D_{29}P_1^2(P\cos s + Q\sin s) + \delta_m^1\delta_n^1(D_{30}k_\xi^2 + D_{31}k_\xi k_\eta +$$
$$+ D_{32}k_\eta^2)(P\cos s + Q\sin s) + (D_{33}k_\xi + D_{34}k_\eta)(P^2+Q^2) +$$
$$+ (D_{35}k_\xi + D_{36}k_\eta)[(P^2-Q^2)\cos 2s + 2PQ\sin 2s] + D_{37}(P^2 +$$
$$+ Q^2)(P\cos s + Q\sin s) + D_{38}[P(P^2-3Q^2)\cos 3s - Q(Q^2-3P^2)\sin 3s],$$

pentru m, $n=1,3,5,\ldots$, coeficienţii C_ν, D_ν fiind dependenţi de m şi n. În particular, vom avea

$$C_1k_\xi + C_2k_\eta = \frac{16(1-\nu)}{M\zeta_{mn}}\left\{\frac{\nu(1+\nu)mn}{(m^2-4)(n^2-4)}(k_\xi+k_\eta) - \frac{(1+\nu)m}{(m^2-4)n}(k_\xi+\nu k_\eta) - \right.$$
$$- \frac{(1+\nu)n}{m(n^2-4)}(k_\eta+\nu k_\xi) + \frac{8(1-\nu)mn(m^2-n^2)}{(m^2-4)(n^2-4)(m^2+n^2)^2}(k_\eta-k_\xi) +$$
$$\left. + \frac{8(1+\nu)(m^2n^2-2m^2-2n^2) - 16\nu m^2n^2}{mn(m^2-4)(n^2-4)(m^2+n^2)^2}[m^2(k_\xi+\nu k_\eta)+n^2(k_\eta+\nu k_\xi)]\right\},$$

$$C_3k_\xi + C_4k_\eta = \frac{16(1-\nu)}{M(\vartheta_{\zeta_{mn}}^{k^2}\zeta_{mn}-k^2)}\left\{\frac{\nu(1+\nu)mn}{(m^2-4)(n^2-4)}(k_\xi+k_\eta) - \right.$$
$$- \frac{(1+\nu)m}{(m^2-4)n}(k_\xi+\nu k_\eta) - \frac{(1+\nu)n}{m(n^2-4)}(k_\eta+\nu k_\xi) +$$
$$+ \frac{8(1-\nu)mn(m^2-n^2)}{(m^2-4)(n^2-4)(m^2+n^2)\left(m^2+n^2-\frac{2Mk^2}{1-\nu}\right)}(k_\eta-k_\xi) +$$
$$+ \frac{8(1+\nu)(m^2n^2-2m^2-2n^2) - 16\nu m^2n^2}{mn(m^2-4)(n^2-4)(m^2+n^2)(m^2+n^2-Mk^2)}[m^2(k_\xi+\nu k_\eta) +$$
$$\left. + n^2(k_\eta+\nu k_\xi)]\right\} -$$
$$- \frac{32k^2(1-\nu)}{(m^2-4)(n^2-4)(m^2+n^2)(\vartheta_{\zeta_{mn}}^{k^2}\zeta_{mn}-k^2)}\left\{\left[\frac{(1+\nu)(m^2n^2-2m^2-2n^2)}{mn(m^2+n^2-Mk^2)} - \right.\right.$$
$$\left.- \frac{\nu mn}{m^2+n^2-Mk^2}\right][m^2(k_\xi+\nu k_\eta)+n^2(k_\eta+\nu k_\xi)] +$$
$$\left. + \frac{mn(m^2-n^2)}{m^2+n^2-\frac{2Mk^2}{1-\nu}}(k_\eta-k_\xi)\right\}.$$

În ceea ce privește coeficienții C_5, C_6, C_7, din cauza expresiilor foarte lungi, putem da valorile necesare sub formă explicită numai pentru $m = n = 1$, sub forma

$$C_5 = \frac{\pi^2(1-\nu)(1+3\nu+\nu^2)}{M} - \frac{1024(1-\nu)}{9\pi^2 M}\left[\frac{(5+3\nu)(3+5\nu)}{9} + \right.$$
$$+ \frac{2(29+11\nu)(11+29\nu)}{5625} - \frac{(13-5\nu)(5-13\nu)}{5625} +$$
$$+ \frac{2(77+27\nu)(27+77\nu)}{65^2\cdot 21^2} - \frac{2(293-157\nu)(157-293\nu)}{85^2\cdot 105^2} -$$
$$\left. - \frac{(29-21\nu)(21-29\nu)}{175^2\cdot 21^2} - \frac{64(1-\nu)}{625} - \frac{64(1-\nu)}{8281} - \frac{256(1-\nu)}{354025}\right],$$

$$C_6 = -\frac{\pi^2(1-\nu)(1+3\nu+\nu^2)}{2M[1-(k+1)^2]} + \frac{512(1-\nu)}{9\pi^2 M[1-(k+1)^2]}\left[\frac{(5+3\nu)(3+5\nu)}{9\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{11}}\right)} + \right.$$
$$+ \frac{2(29+11\nu)(11+29\nu)}{5625\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{31}}\right)} - \frac{(13-5\nu)(5-13\nu)}{5625\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{33}}\right)} +$$
$$+ \frac{2(77+27\nu)(27+77\nu)}{65^2\cdot 21^2\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{51}}\right)} - \frac{2(293-157\nu)(157-293\nu)}{85^2\cdot 105^2\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{53}}\right)} -$$
$$- \frac{(29-21\nu)(21-29\nu)}{175^2\cdot 21^2\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{55}}\right)} - \frac{64(1-\nu)}{625\left(1-\frac{k^2}{\lambda_{31}}\right)} - \frac{64(1-\nu)}{8281\left(1-\frac{k^2}{\lambda_{51}}\right)} -$$
$$\left. - \frac{256(1-\nu)}{354025\left(1-\frac{k^2}{\lambda_{53}}\right)}\right] + \frac{256k^2(1-\nu)}{9\pi^2 M\varkappa_{11}[1-(k+1)^2]}\left[-\frac{(5+3\nu)(3+4\nu)}{9\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{11}}\right)} - \right.$$
$$- \frac{2(29+11\nu)(11+20\nu)}{5625\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{31}}\right)} + \frac{(13-5\nu)(5-4\nu)}{5625\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{33}}\right)} - \frac{2(77+27\nu)(27+52\nu)}{1365^2\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{51}}\right)} +$$
$$+ \frac{2(293-157\nu)(157-68\nu)}{525^2\cdot 17^2\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{53}}\right)} + \frac{(29-21\nu)(21-4\nu)}{735^2\cdot 5^2\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{55}}\right)} +$$
$$\left. + \frac{64}{625\left(1-\frac{k^2}{\lambda_{31}}\right)} + \frac{64}{8281\left(1-\frac{k^2}{\lambda_{51}}\right)} + \frac{256}{354025\left(1-\frac{k^2}{\lambda_{53}}\right)}\right],$$

$$C_7 = -\frac{\pi^2(1-\nu)(1+3\nu+\nu^2)}{2M[\vartheta_k^2-(k-1)^2]} + \frac{512(1-\nu)}{9\pi^2 M[\vartheta_k^2-(k-1)^2]}\left[\frac{(5+3\nu)(3+5\nu)}{9\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{11}}\right)}+\right.$$

$$+\frac{2(29+11\nu)(11+29\nu)}{5625\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{31}}\right)} - \frac{(13-5\nu)(5-13\nu)}{5625\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{33}}\right)} + \frac{2(77+27\nu)(27+77\nu)}{65^2\cdot 21^2\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{51}}\right)} -$$

$$-\frac{2(293-157\nu)(157-293\nu)}{85^2\cdot 105^2\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{53}}\right)} - \frac{(29-21\nu)(21-29\nu)}{175^2\cdot 21^2\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{55}}\right)} -$$

$$\left.-\frac{64(1-\nu)}{625\left(1-\frac{k^2}{\lambda_{31}}\right)} - \frac{64(1-\nu)}{8281\left(1-\frac{k^2}{\lambda_{51}}\right)} - \frac{256(1-\nu)}{354025\left(1-\frac{k^2}{\lambda_{53}}\right)}\right] +$$

$$+\frac{256k^2(1-\nu)}{9\pi^2 M\varkappa_{11}[\vartheta_k^2-(k-1)^2]}\left[-\frac{(5+3\nu)(3+4\nu)}{9\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{11}}\right)} -\right.$$

$$-\frac{2(29+11\nu)(11+20\nu)}{5625\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{31}}\right)} + \frac{(13-5\nu)(5-4\nu)}{5625\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{33}}\right)} - \frac{2(77+27\nu)(27+52\nu)}{1365^2\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{51}}\right)} +$$

$$+\frac{2(293-157\nu)(157-68\nu)}{525^2\cdot 17^2\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{53}}\right)} + \frac{(29-21\nu)(21-4\nu)}{735^2\cdot 5^2\left(1-\frac{k^2}{\varkappa_{55}}\right)} +$$

$$\left.+\frac{64}{625\left(1-\frac{k^2}{\lambda_{31}}\right)} + \frac{64}{8281\left(1-\frac{k^2}{\lambda_{51}}\right)} + \frac{256}{354025\left(1-\frac{k^2}{\lambda_{53}}\right)}\right].$$

Dintre coeficienții celei de-a treia aproximații, vom folosi sub formă explicită în cele ce urmează pe următorii

$$D_{30}k_\xi^2 + D_{31}k_\xi k_\eta + D_{32}k_\eta^2 = -\frac{(1+\nu)^2(k_\xi+k_\eta)^2}{4M\left(1-\frac{1}{\varkappa_{11}}\right)} - \frac{(1-\nu)(k_\xi-k_\eta)^2}{2M\left(1-\frac{1}{\lambda_{11}}\right)},$$

$$D_{37} = \frac{3(5+4\nu)}{32M} - \frac{64}{9\pi^4 M}\left[\frac{(5+3\nu)^2}{9} + \frac{2(29+11\nu)^2}{5625} + \frac{(13-5\nu)^2}{5625} +\right.$$

$$\left.+\frac{2(77+27\nu)^2}{105^2\cdot 13^2} + \frac{2(293-157\nu)^2}{85^2\cdot 105^2} + \frac{(29-21\nu)^2}{75^2\cdot 49^2} + \frac{64(1-\nu)}{625} + \frac{64(1-\nu)}{8281} +\right.$$

$$+\frac{256(1-\nu)}{354025}\Bigg]-\frac{32}{9\pi^4 M}\Bigg[\frac{(5+3\nu)^2}{9\left(1-\frac{4}{\varkappa_{11}}\right)}+\frac{2(29+11\nu)^2}{5625\left(1-\frac{4}{\varkappa_{31}}\right)}+$$

$$+\frac{(13-5\nu)^2}{5625\left(1-\frac{4}{\varkappa_{33}}\right)}+\frac{2(77+27\nu)^2}{105^2\cdot 13^2\left(1-\frac{4}{\varkappa_{51}}\right)}+\frac{2(293-157\nu)^2}{85^2\cdot 105^2\left(1-\frac{4}{\varkappa_{53}}\right)}+$$

$$+\frac{(29-21\nu)^2}{75^2\cdot 49^2\left(1-\frac{4}{\varkappa_{55}}\right)}+\frac{64(1-\nu)}{625\left(1-\frac{4}{\lambda_{31}}\right)}+\frac{64(1-\nu)}{8281\left(1-\frac{4}{\lambda_{51}}\right)}+$$

$$+\frac{256(1-\nu)}{354025\left(1-\frac{4}{\lambda_{53}}\right)}\Bigg]+\frac{512}{81\pi^4 M\varkappa_{11}}\Bigg[\frac{5+3\nu}{1-\frac{4}{\varkappa_{11}}}+\frac{2(29+11\nu)}{125\left(1-\frac{4}{\varkappa_{31}}\right)}+$$

$$+\frac{13-5\nu}{625\left(1-\frac{4}{\varkappa_{33}}\right)}+\frac{2(77+27\nu)}{15925\left(1-\frac{4}{\varkappa_{51}}\right)}+\frac{2(293-157\nu)}{520625\left(1-\frac{4}{\varkappa_{53}}\right)}+$$

$$+\frac{29-21\nu}{1500625\left(1-\frac{4}{\varkappa_{55}}\right)}\Bigg]$$

pentru $m=n=1$.

6. RELAȚIILE DINTRE FRECVENȚĂ ȘI AMPLITUDINE

Parametrii P și Q se determină din cele două relații de ramificare (36). Introducînd soluțiile aproximative calculate, vor rezulta două ecuații cu următoarea formă vectorială :

$$\delta_k^1 d\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\delta_k^1 e\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}+g\begin{pmatrix}P\\-Q\end{pmatrix}+h\begin{pmatrix}Q\\-P\end{pmatrix}+\delta_k^2 i\begin{pmatrix}Q\\P\end{pmatrix}=0, \quad (38)$$

unde

$$d=(C_3 k_\xi+C_4 k_\eta)P_1+(D_3 k_\xi+D_4 k_\eta)\alpha P_1+(D_9 k_\xi+D_{10} k_\eta)P_0 P_1,$$

$$e=(D_5 k_\xi+D_6 k_\eta)\beta P_1,$$

$$f=-2\alpha+C_5 P_0+D_{15}\alpha^2+D_{17}\alpha P_0+D_{20}\beta^2+D_{24}P_0^2+D_{29}P_1^2+$$
$$+D_{30}k_\xi^2+D_{31}k_\xi k_\eta+D_{32}k_\eta^2+D_{37}(P^2+Q^2),$$

$$g=\delta_k^2 C_7 P_1+\delta_k^2 D_{19}\alpha P_1+\delta_k^2 D_{26}P_0 P_1+\delta_k^1 D_{28}P_1^2,$$

$$h=\beta+D_{16}\alpha\beta+D_{21}\beta P_0,$$

$$i=D_{23}\beta P_1.$$

Dacă vibrațiile transversale nu au nici perioada forțelor de pe contur, nici perioada dublă ($k \neq 1,2$), relația (38) va fi satisfăcută numai în cazul anulării amortizării ($\beta = 0$) și anume de valori reale ale lui P și Q, diferite de zero; în acest caz nu va rezulta nici un interval de rezonanță, deoarece cele două curbe de rezonanță se suprapun [8]).

Vibrațiilor transversale cu perioada forțelor de pe contur ($k = 1$) le corespund ecuații neomogene (38) a căror soluție generală nu poate fi găsită. În cazul dispariției amortizării ($\beta = 0$), ele permit o soluție numai în cosinus ($Q = 0$), parametrul P satisfăcînd ecuația cubică frecvență — amplitudine [9].

$$D_{37} P^3 + [-2\alpha + C_5 P_0 + D_{15} \alpha^2 + D_{17} \alpha P_0 + D_{24} P_0^2 +$$

$$+ (D_{28} + D_{29}) P_1^2 + D_{30} k_\xi^2 + D_{31} k_\xi k_\eta + D_{32} k_\eta^2] P =$$

$$= -(C_3 k_\xi + C_4 k_\eta) P_1 - (D_3 k_\xi + D_4 k_\eta) \alpha P_1 - (D_9 k_\xi + D_{10} k_\eta) P_0 P_1 .$$

Coeficienții C_3, C_4, C_5, D_{30}, D_{31}, D_{32}, D_{37} au fost calculați în alineatul precedent. Ne mai trebuie numai coeficientul $D_{28} + D_{29}$ al termenului P_1^2, ceilalți termeni fiind de ordin superior; calculul acestui coeficient fiind însă mult prea complicat, trebuie să renunțăm la o exprimare explicită a ecuației frecvență-amplitudine. Construirea curbelor de rezonanță din iperbola

$$\alpha = \alpha_1 = \frac{(C_3 k_\xi + C_4 k_\eta) P_1}{2P}$$

și parabola

$$\alpha = \alpha_2 = \frac{D_{37}}{2} P^2 + \frac{C_5}{2} P_0 + \frac{1}{2} (D_{28} + D_{29}) P_1^2 + \frac{D_{30}}{2} k_\xi^2 +$$

$$+ \frac{D_{31}}{2} k_\xi k_\eta + \frac{D_{32}}{2} k_\eta^2$$

este arătată în figurile 2 și 3.

Cea mai mare însemnătate o prezintă *vibrațiile transversale subarmonice*, cu o perioadă de două ori mai mare decît perioada forțelor de pe contur (cazul principal de rezonanță $k = 2$), pe care le vom analiza mai îndeaproape. Din (38) rezultă ecuația frecvență-amplitudine

$$D_{37}(P^2 + Q^2) = 2\alpha - C_5 P_0 - D_{15} \alpha^2 - D_{17} \alpha P_0 - D_{20} \beta^2 -$$

$$- D_{24} P_0^2 - D_{29} P_1^2 - D_{30} k_\xi^2 - D_{31} k_\xi k_\eta - D_{32} k_\eta^2 \pm$$

$$\pm \sqrt{(C_7 P_1 + D_{19} \alpha P_1 + D_{26} P_0 P_1)^2 - (\beta + D_{16} \alpha\beta + D_{21} \beta P_0)^2 + D_{23}^2 \beta^2 P_1^2} .$$

[8]) Dacă se iau în considerație aproximații mai mari, pot rezulta și pentru $k = 3,4,5,\ldots$ și $\beta \neq 0$ curbe reale de rezonanță care se suprapun.

[9]) Expresia $\sqrt{P^2 + Q^2}$ corespunde, într-o primă aproximație, amplitudinii vibrației, fiind numită deci amplitudine.

Neglijîndu-se termenii de ordinul superior și scriindu-se pentru amplitudine

$$\sqrt{P^2+Q^2}=A,$$

rezultă forma simplificată

$$D_{37}A_{\pm}^2=2\alpha-C_5P_0-D_{30}k_{\xi}^2-D_{31}k_{\xi}k_{\eta}-D_{32}k_{\eta}^2\pm\sqrt{C_7^2P_1^2-\beta^2}. \quad (39)$$

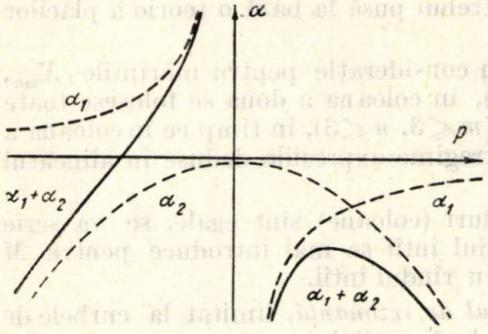


Fig. 2

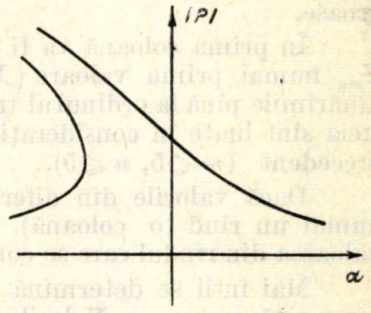


Fig. 3

Coeficienții lui (39) au fost calculați pentru cîteva exemple numerice. Discuția rezultatelor se simplifică dacă scriem din nou ecuația (39) (înmulțită cu M), cu valorile coeficienților aranjate sub formă matricială

$$\begin{Bmatrix}0{,}15771 & 0{,}10667 & 0{,}10500\\ 0{,}15753 & 0{,}10650 & 0{,}10484\\ 0{,}15157 & 0{,}10100 & 0{,}09934\\ 0{,}12740 & 0{,}07814 & 0{,}07651\end{Bmatrix} \quad A_{\pm}^2=2\begin{Bmatrix}M\\ 0{,}002\\ 0{,}06\\ 0{,}2\end{Bmatrix}\alpha+$$

$$+\{10{,}057 \quad 11{,}286 \quad 11{,}272\}P_0+\begin{Bmatrix}0{,}42250\\ 0{,}42292\\ 0{,}43557\\ 0{,}46944\end{Bmatrix}(k_{\xi}+k_{\eta})^2+$$

$$+\begin{Bmatrix}0{,}35000\\ 0{,}35100\\ 0{,}38281\\ 0{,}49000\end{Bmatrix}(k_{\xi}-k_{\eta})^2\pm \quad (40)$$

$$\pm\sqrt{\begin{Bmatrix}5{,}0286 & 5{,}6432 & 5{,}6359\\ 5{,}0541 & 5{,}6694 & 5{,}6623\\ 5{,}8942 & 6{,}5358 & 6{,}5281\\ 9{,}2607 & 9{,}7508 & 9{,}7498\end{Bmatrix}^2P_1^2-\begin{Bmatrix}M\\ 0{,}002\\ 0{,}06\\ 0{,}2\end{Bmatrix}^2\beta^2},$$

unde am luat peste tot $\nu=0{,}3$. În rîndul întîi am ales $\varkappa_{mn}=\lambda_{mn}=\infty$, ceea ce corespunde neglijării obișnuite a derivatelor în raport cu timpul în (4), deci a inerției longitudinale.

În al doilea rînd avem $\varkappa_{11} = 1000$, de unde rezultă după (30), $M = 2/\varkappa_{11} = 0{,}002$ și celelalte valori ale lui $\varkappa_{mn}$, λ_{mn}; acest caz, conform cu (34), (33), (3), corespunde unei plăci curbe subțiri cu $h \approx 0{,}0247\ a$.

În rîndul al treilea avem $\varkappa_{11} = 33{,}3$, și deci $M = 0{,}06$ și $h \approx 0{,}135\ a$, în rîndul al patrulea $\varkappa_{11} = 10$ și deci $M = 0{,}2$, iar $h \approx 0{,}247\ a$.

Ultimele două cazuri se referă la plăci curbe relativ groase, astfel încît cel puțin în cazul din urmă ar trebui pusă la bază o teorie a plăcilor groase.

În prima coloană va fi luată în considerație pentru mărimile X_{mn}, Y_{mn} numai prima valoare (X_{11}, Y_{11}), în coloana a doua se folosesc toate „mărimile pînă la ordinul al treilea" ($m \leqslant 3$, $n \leqslant 3$), în timp ce în coloana a treia sînt luate în considerație în întregime expresiile deduse în alineatul precedent ($m \leqslant 5$, $n \leqslant 5$).

Dacă valorile din diferite rînduri (coloane) sînt egale, se va scrie numai un rînd (o coloană). În rîndul întîi se mai introduce pentru M valoarea din rîndul care se compară cu rîndul întîi.

Mai întîi se determină *domeniul de rezonanță*, limitat la curbele de rezonanță pe axa α. Valorile-limită ale domeniului $\alpha = \alpha_{1,2}$ ($\alpha_2 > \alpha_1$) sînt stabilite de $A = 0$. Lățimea domeniului de rezonanță este

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \sqrt{\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{5{,}0286}{M} & \frac{5{,}6432}{M} & \frac{5{,}6359}{M} \\ \frac{5{,}0541}{0{,}002} & \frac{5{,}6694}{0{,}002} & \frac{5{,}6623}{0{,}002} \\ \frac{5{,}8942}{0{,}06} & \frac{6{,}5358}{0{,}06} & \frac{6{,}5281}{0{,}06} \\ \frac{9{,}2607}{0{,}2} & \frac{9{,}7508}{0{,}2} & \frac{9{,}7498}{0{,}2} \end{array} \right\}^2 P_1^2 - \beta^2}.$$

Din numitori se vede că lățimea intervalului de rezonanță descrește mult cu creșterea lui M, avînd ordinul de mărime $1/M$. Plăcile curbe subțiri au un domeniu de rezonanță mai mare, iar cele groase un domeniu de rezonanță mai mic.

Fie $\beta = 0$. Vom compara lățimile domeniilor de rezonanță din cadrul fiecărui rînd între ele (influența de ordin superior X_{mn}, Y_{mn}) și cu cele din rîndul întîi (influența inerției longitudinale).

Față de primul interval de rezonanță rezultă din raportul numărătorilor următoarea creștere procentuală a intervalelor înmulțite cu M:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} - & 12{,}22\,\% & 12{,}08\,\% \\ 0{,}51\,\% & 12{,}74\,\% & 12{,}60\,\% \\ 17{,}21\,\% & 29{,}97\,\% & 29{,}82\,\% \\ 84{,}16\,\% & 93{,}91\,\% & 93{,}89\,\% \end{array} \right\}.$$

Pentru $\beta \neq 0$, creșterea procentuală a intervalului este și mai mare. Alegînd, de exemplu :

$$M^2\beta^2 = 20\,P_1^2, \text{ adică } \beta = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{M} \\ \frac{1}{0{,}002} \\ \frac{1}{0{,}06} \\ \frac{1}{0{,}2} \end{matrix}\right\} \cdot 4{,}472\ P_1,$$

obținem intervalul de rezonanță

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \left\{\begin{matrix} \frac{2{,}299}{M} & \frac{3{,}442}{M} & \frac{3{,}430}{M} \\ \frac{2{,}355}{0{,}002} & \frac{3{,}485}{0{,}002} & \frac{3{,}473}{0{,}002} \\ \frac{3{,}840}{0{,}06} & \frac{4{,}766}{0{,}06} & \frac{4{,}756}{0{,}06} \\ \frac{8{,}110}{0{,}2} & \frac{8{,}665}{0{,}2} & \frac{8{,}664}{0{,}2} \end{matrix}\right\} P_1$$

și astfel creșterea procentuală a intervalului

$$\left\{\begin{matrix} - & 49{,}72\,\% & 49{,}20\,\% \\ 2{,}44\,\% & 51{,}59\,\% & 51{,}07\,\% \\ 67{,}03\,\% & 107{,}31\,\% & 106{,}87\,\% \\ 252{,}76\,\% & 276{,}90\,\% & 276{,}86\,\% \end{matrix}\right\}.$$

În centrul intervalului vom avea

$$2\left\{\begin{matrix} M \\ 0{,}002 \\ 0{,}06 \\ 0{,}2 \end{matrix}\right\}\alpha = -\{10{,}057\ 11{,}286\ 11{,}272\}\,P_0 -$$

$$-\left\{\begin{matrix} 0{,}42250 \\ 0{,}42292 \\ 0{,}43557 \\ 0{,}46944 \end{matrix}\right\}(k_\xi + k_\eta)^2 - \left\{\begin{matrix} 0{,}35000 \\ 0{,}35100 \\ 0{,}38281 \\ 0{,}49000 \end{matrix}\right\}(k_\xi - k_\eta)^2, \qquad (41)$$

deoarece acolo expresia de sub radical se anulează. În timp ce lățimea de rezonanță și, după cum se va vedea imediat, mărimea amplitudinilor

depind de parametrii P_1, β, parametrii P_0, k_ξ, k_η determină centrul domeniului, ducînd deci numai la o deplasare a domeniului de rezonanță.

Vom trece acum la cercetarea *amplitudinilor*. Pătratul amplitudinii crește liniar o dată cu α. Pentru limita inferioară a domeniului $\alpha=\alpha_1$ avem $A_+=0$, $A_-<0$, pentru limita superioară $\alpha=\alpha_2$ însă $A_+>0$, $A_-=0$. Amplitudinea A_+ pentru $\alpha=\alpha_2$ o vom nota cu A_G, fiind amplitudinea maximă, cu toate că, din cauza unei „antrenări" a curbelor de rezonanță, pot apărea și valori ceva mai mari ale amplitudinii; mărimea „antrenării" nu poate fi însă determinată cu ajutorul studiului de mai sus.

Pentru $\alpha=\alpha_2$ se simplifică (40), deoarece $A=0$, deci

$$\begin{Bmatrix} 0{,}15771 & 0{,}10667 & 0{,}10500 \\ 0{,}15753 & 0{,}10650 & 0{,}10484 \\ 0{,}15157 & 0{,}10100 & 0{,}09934 \\ 0{,}12740 & 0{,}07814 & 0{,}07651 \end{Bmatrix} A_G^2 =$$

$$= 2\sqrt{\begin{Bmatrix} 5{,}0286 & 5{,}6432 & 5{,}6359 \\ 5{,}0541 & 5{,}6694 & 5{,}6623 \\ 5{,}8942 & 6{,}5358 & 6{,}5281 \\ 9{,}2607 & 9{,}7508 & 9{,}7498 \end{Bmatrix}^2 P_1^2 - \begin{Bmatrix} M \\ 0{,}002 \\ 0{,}06 \\ 0{,}2 \end{Bmatrix}^2 \beta^2}.$$

În cazul $\beta=0$ rezultă de aici

$$A_G = \begin{Bmatrix} 7{,}986 & 10{,}286 & 10{,}361 \\ 8{,}010 & 10{,}318 & 10{,}385 \\ 8{,}819 & 11{,}376 & 11{,}464 \\ 12{,}057 & 15{,}798 & 15{,}964 \end{Bmatrix} \sqrt{P_1}.$$

Față de prima amplitudine, creșterea procentuală va fi

$$\begin{Bmatrix} — & 28{,}80\,\% & 29{,}74\,\% \\ 0{,}30\,\% & 29{,}20\,\% & 30{,}04\,\% \\ 10{,}43\,\% & 42{,}45\,\% & 43{,}55\,\% \\ 50{,}98\,\% & 97{,}82\,\% & 99{,}90\,\% \end{Bmatrix}.$$

În cazul $\beta = \frac{\sqrt{20}}{M} P_1$, pentru care a fost calculată lățimea demeniului de rezonanță, amplitudinea maximă va fi

$$A_G = \begin{Bmatrix} 5{,}399 & 8{,}033 & 8{,}083 \\ 5{,}468 & 8{,}090 & 8{,}133 \\ 7{,}128 & 9{,}715 & 9{,}785 \\ 11{,}283 & 14{,}893 & 15{,}048 \end{Bmatrix} \sqrt{P_1}.$$

Creșterea procentuală a amplitudinii este

$$\left\{\begin{array}{rrr} - & 48{,}79\,\% & 49{,}71\,\% \\ 1{,}28\,\% & 49{,}84\,\% & 50{,}64\,\% \\ 32{,}02\,\% & 79{,}94\,\% & 81{,}24\,\% \\ 108{,}98\,\% & 175{,}85\,\% & 178{,}72\,\% \end{array}\right\}.$$

Spre deosebire de lățimile de rezonanță, amplitudinile sînt de același ordin de mărime pentru diferite valori ale lui M. În cazul neglijării inerției longitudinale (rîndul întîi), termenii X_{mn}, Y_{mn} de ordinul trei duc, în cazul fără amortizare, la o creștere a amplitudinii cu 28,80 %, iar în cazul cu amortizare la o creștere a acestora cu 48,79 %, în timp ce mărimile X și Y de ordinul al cincilea nu provoacă decît o creștere de numai 1 %.

Celelalte rînduri dau valori asemănătoare. Avînd în vedere că și termenii în X și Y de ordinul 5 au o influență foarte mică asupra lățimii rezonanței și asupra centrului de rezonanță, și aceștia ar fi putut fi neglijați de la început.

Astfel, este motivată și neglijarea termenilor în X și Y de ordinul șapte și mai mare. În schimb considerarea termenilor în X și Y de ordinul trei este la fel de esențială la plăcile curbe subțiri ca și la cele groase[10]).

Neglijarea tuturor termenilor în X și Y duce la cu totul alte rezultate, după cum se vede din subsolul de la p. 718.

O comparație a rîndului întîi cu celelalte rînduri arată că luarea în considerație a inerției longitudinale duce la o altă creștere a amplitudinilor maxime, și anume la primul exemplu al unei plăci curbe subțiri cu cel mult 1,28 %, la al doilea exemplu în cazul fără amortizare pînă la 13,81 %, iar în cazul cu amortizare cu circa 32 %, la al treilea exemplu, al unei plăci curbe foarte groase, în cazul fără amortizare pînă la 70,16 %, iar în cazul cu amortizare pînă la 129 %.

În figura 4 *a*, *b* au fost reprezentate curbele de rezonanță pentru exemplul al doilea și al treilea ; în cazul celui de-al doilea exemplu au fost adăugate curbele de rezonanță corespunzătoare unor condiții la limită modificate (alineatul următor).

Curburile k_ξ, k_η fiind presupuse suficient de mici (plăci, curbe pleoștite), acestea, la coeficientul D_{37} al lui P^2+Q^2 și la mărimea de sub radical, duc numai la adaosuri de ordin superior, care au putut fi neglijate.

Fenomenul de „deviere" a curbelor de rezonanță, discutat în [11], pentru a cărui cercetare cantitativă ar fi necesară considerarea unor aproximații superioare în ecuațiile inițiale, va apărea deci abia la amplitudini care nu mai sînt suficient de mici în raport cu unitatea și, în consecință, nu mai pot fi sesizate printr-un calcul aproximativ.

Nici apariția vibrațiilor „generate din exterior" pînă la o valoare de „prag inferior" găsită în [11] nu este posibilă din cauza valorilor mici ale

[10]) Calculele intermediare neindicate în această lucrare arată că termenii în X_{33}, Y_{33} sînt de același ordin de mărime ca și termenii de ordinul cinci.

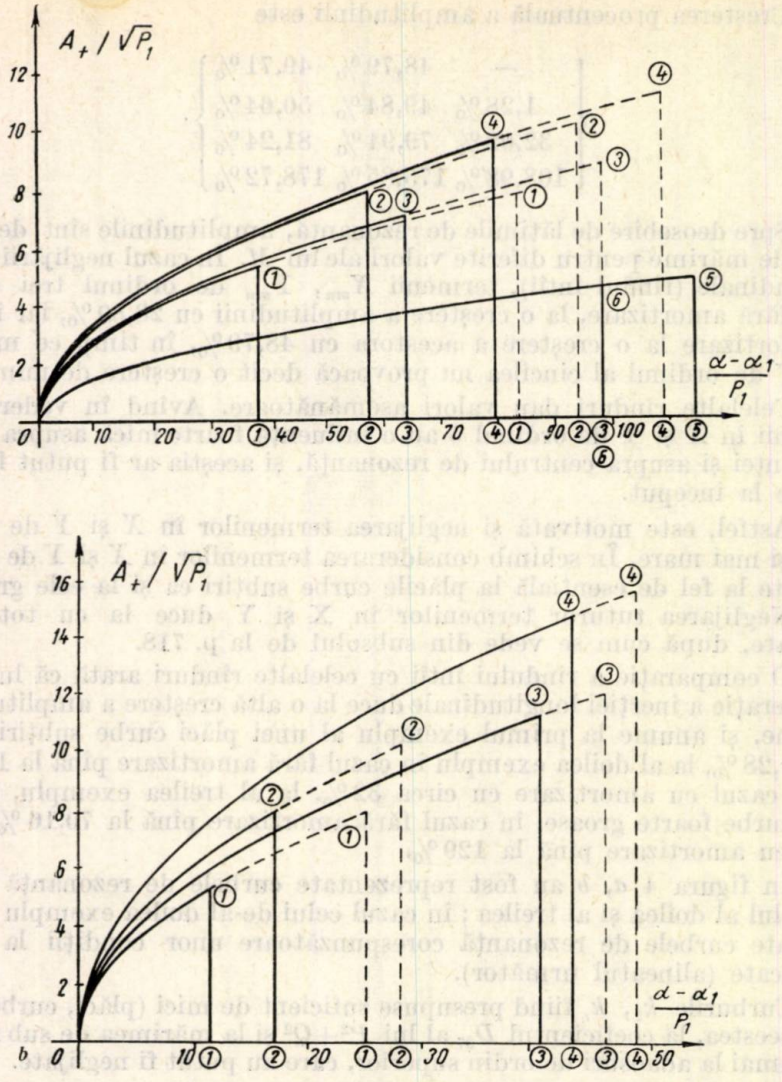


Fig. 4 *a*. — Curbă de rezonanţă pentru $M = 0{,}06$, trasate pînă la $\alpha = \alpha_2$; haşurat fără amortizare; linie plină cu amortizare.

1. — Fără inerţie longitudinală, numai cu X_{11}, Y_{11}.
2. — Fără inerţie longitudinală, cu mărimile X, Y pînă la ordinul al treilea.
3. — Cu inerţie longitudinală, numai cu X_{11}, Y_{11}.
4. — Cu inerţie longitudinală, cu mărimile X şi Y pînă la ordinul trei.
5. — Fără mărimile X şi Y (condiţii la limită modificate).
6. — Condiţii la limită modificate cu mărimile X şi Y pînă la ordinul trei.

Fig. 4 *b*. — Curba de rezonanţă pentru $M = 0{,}2$ corespunzătoare cazurilor 1 pînă la 4.

lui k_ξ, k_η. Aceste mărimi vor avea ca urmare numai o deplasare a curbelor de rezonanță conform formulelor (41) și (33), avînd în vedere că $\zeta_{11}=1$, va influența și asupra lui ω_0.

7. CONDIȚII LA LIMITĂ MODIFICATE

În cele ce precedă am presupus că forțele tăietoare de pe contur se vor anula în medie. În acest capitol vom introduce condiția suplimentară ca forțele tăietoare să se anuleze în fiecare punct de pe contur.

Deducerea condițiilor la limită a arătat că această cerință este echivalentă cu condiția suplimentară (24).

Pentru obținerea unor formule explicite, este necesar să ne limităm din nou la plăci curbe pătratice ($a=b$) și la forțe exterioare egale pe toate laturile.

În ecuațiile diferențiale (32), pentru vibrațiile transversale se introduc, în locul mărimilor U_{mn}, V_{mn}, niște mărimi modificate $\overline{U}_{mn}$, $\overline{V}_{mn}$, respectiv $\overline{X}_{mn}$, $\overline{Y}_{mn}$, care să satisfacă condiția (24)

$$n\,\overline{U}_{mn}+m\,\overline{V}_{mn}=0. \tag{42}$$

Din (42) rezultă, indiferent de felul modificării, pentru $\overline{X}_{mn}=$ $=m\,\overline{U}_{mn}+n\,\overline{V}_{mn}$

$$\overline{X}_{mn}=0. \tag{43}$$

Pentru stabilirea celorlalți coeficienți vom presupune că variația mărimilor U_{mn} este egală cu variația mărimilor V_{mn}

$$\overline{U}_{mn}=U_{mn}+f_{mn},\quad \overline{V}_{mn}=V_{mn}+f_{mn}.$$

Din (42) rezultă

$$(m+n)f_{mn}=-n\,U_{mn}-m\,V_{mn}=$$

$$=-\frac{2\,mn}{m^2+n^2}X_{mn}+\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}Y_{mn}$$

și de aici

$$\overline{X}_{mn}=\frac{(m-n)^2}{m^2+n^2}X_{mn}+\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}Y_{mn};$$

în particular

$$\overline{X}_{31}=\overline{X}_{13}=\frac{2}{5}X_{31}+\frac{4}{5}Y_{31},$$

$$\overline{X}_{51}=\overline{X}_{15}=\frac{8}{13}X_{51}+\frac{12}{13}Y_{51},\quad \overline{X}_{53}=\overline{X}_{35}=\frac{2}{17}X_{53}+\frac{8}{17}Y_{53}, \tag{44}$$

în timp ce pentru $\overline{Y}_{mn}=n\overline{U}_{mn}-m\,\overline{V}_{mn}$ avem

$$\overline{Y}_{mm}=Y_{mm}. \tag{45}$$

Cu ajutorul relațiilor (43), (44), (45) pot fi determinați analog, ca în capitolul 5, coeficienții C_5, C_6, C_7, D_{30}, D_{31}, D_{32}, D_{37} pentru $m=n=1$. Pentru coeficienții C_1, C_2, C_3, C_4 rămîn valabile expresiile date în capitolul 5.

Valorificarea numerică arată că înlocuirea lui X_{11} prin $\overline{X}_{11}=0$, care urmează în mod obligatoriu din condițiile (24), independent de rezultatele de mai sus, aduce cu sine modificarea cea mai importantă. Introducînd coeficienții calculați numeric, ecuația (39) (înmulțită cu M, ca și (40)) ia forma

$$\begin{Bmatrix} 0{,}58125 & 0{,}58761 & 0{,}58809 \\ 0{,}58125 & 0{,}58831 & 0{,}58881 \end{Bmatrix} A_{\pm}^2 = 2.0{,}06\,\alpha -$$

$$- \{13{,}748 \quad 11{,}728 \quad 11{,}645\}\, P_0 + \begin{Bmatrix} 0{,}35000 \\ 0{,}38281 \end{Bmatrix} (k_\xi - k_\eta)^2 \pm$$

$$\pm \sqrt{\begin{Bmatrix} 6{,}8742 & 5{,}8641 & 5{,}8224 \\ 6{,}8742 & 5{,}8856 & 5{,}8463 \end{Bmatrix}^2 P_1^2 - 0{,}0036\,\beta^2},$$

unde am ales peste tot $\nu = 0{,}3$ și $M = 0{,}06$ ($h \approx 0{,}135\ a$). Mărimea corespunzătoare $\varkappa_{11} = \dfrac{2}{M} = \dfrac{100}{3}$ duce la valorile din rîndul al doilea, în timp ce în rîndul întîi s-a pus $\varkappa_{mn} = \lambda_{mn} = \infty$ (neglijarea inerției longitudinale).

În prima coloană, din mărimile $\overline{X}_{mn}$, $\overline{Y}_{mn}$ vom considera numai pe $\overline{X}_{11}$ și $\overline{Y}_{11}$, avînd în vedere că, în conformitate cu (43), $\overline{X}_{11}=0$ și $\overline{Y}_{11}$ nu apare; rezultă că nu se consideră nici unul dintre termenii $\overline{X}_{mn}$ și $\overline{Y}_{mn}$ [11]).

În coloana a doua se consideră termenii pînă la ordinul al treilea ($m \leqslant 3$, $n \leqslant 3$), iar în coloana a treia expresiile complete.

Din ecuația amplitudine-frecvență rezultă, ca în capitolul precedent, lățimea și centrul domeniului de rezonanță; lățimile benzilor de rezonanță se modifică numai puțin. În schimb rezultă amplitudini cu circa jumătate din valorile celor din capitolul precedent

$$A_G = \begin{Bmatrix} 4{,}863 & 4{,}468 & 4{,}450 \\ 4{,}863 & 4{,}473 & 4{,}456 \end{Bmatrix} \sqrt{P_1} \quad (\text{pentru } \beta = 0),$$

(vezi fig. 4 *a*). Considerarea termenilor în $\overline{X}$ și $\overline{Y}$ de ordin superior duce aici la o micșorare a lățimii benzii de rezonanță și a amplitudinii maxime. Micșorarea procentuală față de prima amplitudine este

$$\begin{Bmatrix} - & 8{,}13\,\% & 8{,}50\,\% \\ 0{,}00\,\% & 8{,}02\,\% & 8{,}37\,\% \end{Bmatrix}.$$

[11]) În acest caz, modificarea condițiilor la limită duce numai la eliminarea termenului $(k_\xi + k_\eta)^2$ față de (40), astfel încît în afara unei deplasări a domeniului de rezonanță, se ia în considerare și cazul necuprins în (40), în care nu se ține seama de nici una dintre mărimile X_{mn}, Y_{mn}.

Neglijîndu-se inerția longitudinală (rîndul întîi), termenii în X, Y de ordinul trei vor genera o micșorare a amplitudinii cu 8,13%, termenii de ordinul cinci o micșorare suplimentară de 0,37%; ținînd seama de inerția longitudinală (rîndul al doilea) rezultă creșteri de cel mult 0,13%.

Introducîndu-se coeficienții $\bar{U}_{mn}$, $\bar{V}_{mn}$ în loc de U_{mn}, V_{mn}, au putut fi satisfăcute condițiile la limită suplimentare (24); în schimb însă, pentru $\bar{U}_{mn}$, V_{mn}, prima ecuație diferențială (28) nu mai este valabilă decît în medie, în raport cu ξ, iar a doua numai în medie, în raport cu η.

În consecință, ecuația amplitudine-frecvență obținută aici pentru condițiile la limită schimbate nu poate fi considerată ca o perfecționare, ci numai ca o variantă echivalentă cu o soluție precedentă [12]).

8. FORMA VIBRAȚIILOR. INFLUENȚA DIFERITELOR SIMPLIFICĂRI

Pentru vibrațiile în direcția lui ξ se obține din (27) și (26), limitîndu-se la cazul $a = b$, $P_\xi = P_\eta$, $\nu = 0{,}3$, ținînd seama de termenii X_{11}, Y_{11}, X_{31}, X_{13}, Y_{31}, Y_{13} și neglijîndu-se inerția longitudinală, expresia

$$\frac{\pi}{a}\overset{2}{u} = [-0{,}325\,(k_\xi + k_\eta) + 0{,}5\,(k_\eta - k_\xi)]\cos\xi\sin\eta\,(P\cos s + Q\sin s) -$$

$$- 4{,}491\,(\sin 2\xi - 0{,}231\sin 2\xi\cos 2\eta - 2{,}492\cos\xi\sin\eta +$$

$$+ 0{,}368\cos 3\xi\sin\eta - 0{,}232\cos\xi\sin 3\eta + \ldots)\,(P_0 + P_1\cos k s) -$$

$$- 0{,}0625\,(\sin 2\xi - \sin 2\xi\cos 2\eta - 2{,}127\cos\xi\sin\eta + 0{,}210\cos 3\xi\sin\eta +$$

$$+ 0{,}301\cos\xi\sin 3\eta + \ldots)\,[P^2 + Q^2 + (P^2 - Q^2)\cos 2s + 2PQ\sin 2s],$$

în care punctele indică armonicile de ordin superior, provenind din termenii în X și Y de ordin superior.

În particular, pe contururile $\eta = 0$, π are loc, independent de parametrii vibrațiilor transversale P și Q, o vibrație tangențială în ritmul excitației din exterior.

$$\frac{\pi}{a}\overset{2}{u} = -3{,}452\,\sin 2\xi\,(P_0 + P_1\cos ks) \text{ pentru } \eta = 0,\ \pi.$$

Pe linia mediană $\xi = \dfrac{\pi}{2}$ nu apare nici o vibrație în direcția lui $\xi\,(\overset{2}{u} = 0)$, în timp ce vibrația (normală) pe contururile $\xi = 0, \pi$ depinde de parametrii P, Q ai vibrațiilor transversale, compunîndu-se dintr-o componentă în ritmul excitației exterioare și o componentă subarmonică,

[12]) Vezi și discuția unor dificultăți similare întîlnite în [12], p. 273.

care în cazul rezonanței principale $k = 2$ dispare o dată cu curburile k_ξ, k_η :

$$\frac{\pi}{a}^2 u = \pm[-0{,}325\,(k_\xi + k_\eta) + 0{,}5\,(k_\eta - k_\xi)] \sin \eta\,(P \cos s + Q \sin s) \pm$$
$$\pm 9{,}546\,(\sin \eta + 0{,}109 \sin 3\,\eta + \ldots)\,(P_0 + P_1 \cos ks) \pm$$
$$\pm 0{,}1197\,(\sin \eta - 0{,}157 \sin 3\,\eta + \ldots)\,[P^2 + Q^2 + (P^2 - Q^2) \cos 2\,s + 2\,PQ \sin 2\,s]$$

pentru $\xi = 0, \pi$.

În figura 5 sînt arătate variația vibrațiilor u pe contur și liniile și punctele nodale ale vibrațiilor.

Expresiile pentru v^2 rezultă din cele corespunzătoare pentru u^2, înlocuindu-se ξ prin η și k_ξ prin k_η, de unde se obține o simetrie suficient de mare (pentru $k_\xi = k_\eta$ completă) pentru vibrațiile în direcția lui η.

Forma vibrațiilor transversale se obține prin introducerea în (6) a coeficienților W_{mn}, calculați în capitolul 5. În cazul principal de rezonanță $k = 2$, expresiile

$$C_6\,P_1\,[P \cos (k+1)\,s + Q \sin (k+1)\,s],$$
$$D_{38}\,[P\,(P^2 - 3\,Q^2) \cos 3\,s - Q\,(Q^2 - 3\,P^2) \sin 3\,s] \tag{46}$$

din W_{mn} duc la termeni nearmonici de ordinul 3/2, iar expresiile

$$(C_1 k_\xi + C_2 k_\eta)\,P_0 + (C_3 k_\xi + C_4 k_\eta)\,P_1 \cos ks,$$
$$(D_{33} k_\xi + D_{34} k_\eta)\,(P^2 + Q^2) + (D_{35} k_\xi + D_{36} k_\eta)\,[(P^2 - Q^2) \cos 2s + 2\,PQ \sin 2s] \tag{47}$$

la termenii nearmonici de ordinul doi, deoarece, conform ecuației amplitudine-frecvență, pătratul amplitudinilor $(P^2 + Q^2)$ este de ordinul întîi în mărimile P_1, β, α, P_0.

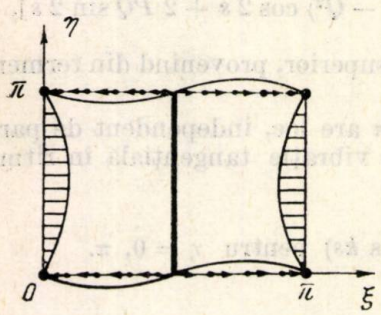


Fig. 5

Aceste expresii nu ar fi putut fi cuprinse, dacă s-ar fi folosit pentru W_{mn} trei sau numai un singur termen din seria Fourier.

În cazul cînd se urmărește numai determinarea celei mai importante caracteristici a vibrațiilor, adică curba de rezonanță în cazul principal de rezonanță, ne putem limita de la început asupra unui singur (primul) coeficient W_{mn}, în timp ce în celelalte cazuri toți coeficienții sînt importanți.

Variația în spațiu a vibrațiilor de pe placa subțire va fi influențată și în cazul principal, în mod esențial, de totalitatea coeficienților W_{mn}. Tocmai părțile nearmonice în timp (46), (47) apar la toți coeficienții W_{mn}, astfel încît vibrațiile transversale în ordinea indicată sînt și în spațiu nearmonice.

Convergența metodei aproximațiilor succesive nu se poate demonstra, la fel ca și în problema mai simplă a vibrațiilor parametrice ale barei (vezi [10]). Același lucru este valabil și pentru justificarea operațiilor termen cu termen, în seriile infinite. În cele mai multe cazuri, a fost necesar să renunțăm chiar și la explicitarea coeficienților care constituie seriile infinite în funcție de m și n, din cauza lungimii lor exagerate.

Deoarece s-a văzut însă că cele mai importante caracteristici ale vibrațiilor — poziția și mărimea domeniului de rezonanță — sînt determinate suficient de exact de primul coeficient W_{11} și de primii coeficienți X_{mn}, $Y_{mn}(m, n \leqslant 5)$, o limitare la un număr finit de coeficienți este justificată.

Cu această restricție, operațiile termen cu termen sînt justificate, iar convergența metodei de rezolvare poate fi demonstrată ca în [10], cu considerațiile generale din [6].

Primită la redacție la 31 martie 1965.

BIBLIOGRAFIE

1. В. В. Болотин, Сборник *Расчеты на прочность*, 2, 284—289, Москва, 1958.
2. W. W. Bolotin, *Kinetische Stabilität elastischer Systeme* (trad. din rusă), Berlin, 1961.
3. В. З. Гнуни, Известия АН Арм. ССР, **13**, *1*, 47—58 (1960).
4. — Известия АН Арм. ССР, **15**, *3*, 29—36 (1962).
5. — Известия АН Арм. ССР, Seria mecanică și construcție de mașini, *4*, 181—182 (1962).
6. L. Lichtenstein, *Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen*, Berlin, 1931.
7. Г. В. Мищенков, *Труды конф. теор. пластин и оболочек*, Казань, 1960, p. 239—245.
8. — Инженерный журнал, **I**, *2*, 112—118 (1961).
9. E. Reissner, Quart. appl. Math., *13*, 169—176 (1955).
10. G. Schmidt, Math. Nachr., *23*, 75—132 (1961).
11. A. S. Wolmir, *Biegsame Platten und Schalen*, Berlin, 1962 (trad. din l. rusă).

CONTRIBUȚII LA CALCULUL NUMERIC AL HIPARILOR ÎN TEORIA ÎNCOVOIERII[1]

de MIRCEA SOARE[2]

539.3

Plecînd de la ecuațiile de bază ale teoriei încovoierii, stabilite în ipoteza de placă pleoștită, se caută soluții numerice pentru paraboloidul hiperbolic delimitat de generatoare drepte (hipar), încărcat cu sarcină uniform distribuită parțial.

Rezolvarea se face în două etape, care corespund unei stări de încovoiere a plăcii sub acțiunea încărcării exterioare, respectiv o solicitare aplicată pe contur.

Controlul rezultatelor se face exprimînd că forțele tăietoare și proiecțiile eforturilor de lunecare echilibrează încărcarea exterioară.

În cazul particular al încărcării uniform distribuită pe toată placa, soluția generală concordă cu soluția de membrană.

§ 1. INTRODUCERE

Aplicarea plăcilor curbe subțiri în construcții s-a extins în mod spectaculos în ultimele două decenii, realizîndu-se structuri avantajoase din punct de vedere tehnic-economic și remarcabile din punct de vedere arhitectonic.

Dacă la început suprafețele de rotație și apoi cele cilindrice au fost cele mai răspîndite, imaginația arhitecților și nevoile industriei au lărgit necontenit varietatea formelor de suprafețe folosite la construcția plăcilor curbe subțiri.

Această evoluție a formelor a fost strîns legată de metodele matematice susceptibile de a fi folosite de ingineri în proiectare; dacă pentru suprafețele de rotație și cele cilindrice aceste metode erau mai accesibile, în schimb, pentru forme mai complicate de suprafețe cu dublă curbură, calculele matematice evidențiau mari dificultăți, funcție de caracteristicile geometrice, de condițiile de rezemare și încărcare ale plăcii.

---

[1] Publicată în „Rev. roum. sci. techn. — Mécanique Appliquée", **10**, *1* (1965) (în lb. germană).

[2] Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București.

Dacă se poate vorbi de o modă a formelor în construcţii, atunci cu siguranţă se poate afirma că paraboloidul hiperbolic este suprafaţa actualmente cea mai la modă. De la construcţiile spectaculoase ale lui Felix Candela [23] şi pînă la elemente de mare suprafaţă tipizate, paraboloidul hiperbolic este folosit pretutindeni.

Este paradoxal totuşi că proiectarea unor construcţii atît de remarcabile şi de multe ori de proporţii deosebite este făcută pe simpla bază a teoriei de membrană, ale cărei rezultate, cu rare excepţii, nu oglindesc nici pe departe adevărata stare de eforturi şi de deformaţii în placă.

Unul dintre promotorii paraboloidului hiperbolic, constructorul francez B. Laffaille, scria încă în 1934 [31] : „La un hangar cu copertină dublă am efectuat mai multe sute de măsurători corespunzînd unor cazuri de încărcare diverse şi care ne-au dat precizări asupra valorilor eforturilor unitare care se exercitau asupra marginilor. Aceste precizări au scos în evidenţă divergenţe foarte sensibile în raport cu anumite valori calculate, valori delicat de obţinut din simplele ecuaţii diferenţiale rezultînd din considerarea numai a echilibrului, fără a ţine seama de deformaţiile elastice în joc" (p. 410).

Este cazul să amintim de la început că ecuaţia paraboloidului hiperbolic poate fi adusă la două forme canonice diferite, în strînsă legătură cu utilizarea plăcii ca acoperiş în construcţii :

— paraboloidul hiperbolic în şa (fig. 1 *a*) :

$$z = f_x \frac{x^2}{a^2} - f_y \frac{y^2}{b^2}, \tag{1.1}$$

— paraboloidul hiperbolic delimitat de generatoare rectilinii (fig.1*b*) :

$$z = \frac{f}{ab} xy. \tag{1.2}$$

Elementele geometrice se pot lua din figura 1 *a*, *b*. În primul caz, axele *Ox*, *Oy* sînt rectangulare, iar în cazul al doilea oblice.

Paraboloidul hiperbolic în şa este relativ suficient studiat în literatura de specialitate, de aceea ne propunem ca în cadrul lucrării de faţă să ne ocupăm de al doilea tip, paraboloidul hiperbolic delimitat de generatoare rectilinii ; pentru simplificarea exprimării îl vom denumi în cele ce urmează *hipar*.

Anticipînd asupra discuţiei propriu-zise a stării de eforturi, vom reaminti că pentru hiparul supus unei încărcări verticale constante în placă apar doar eforturi de lunecare constante, în timp ce eforturile normale dirijate în sensul axelor de coordonate sînt identic nule.

Referindu-se la teoriile lui F. Aimond [1], un alt promotor francez al hiparilor, marele constructor francez E. Freyssinet, observa cu mult umor : „ ... Sînt paraboloizi. N-am priceput niciodată parabolismul d-lui Aimond şi am să vă explic de ce : ...să faci construcţii la care eforturile unitare de compresiune sînt nule în toate punctele, fie..., dar trebuie să treci prin lunecări ; aceste construcţii el le rezema pe structuri care

lucrau la 150 kg/cm² la compresiune ; nu mai înţelegem nimic. Avea fisuri şi spunea că se datorau tasării solului" [3]).

Diferiţi alţi experimentatori, printre care T. Y. Lin şi R. Itaya [32], Ching-Hung Meng şi L. M. Laushey [35] au semnalat neconcordanţa

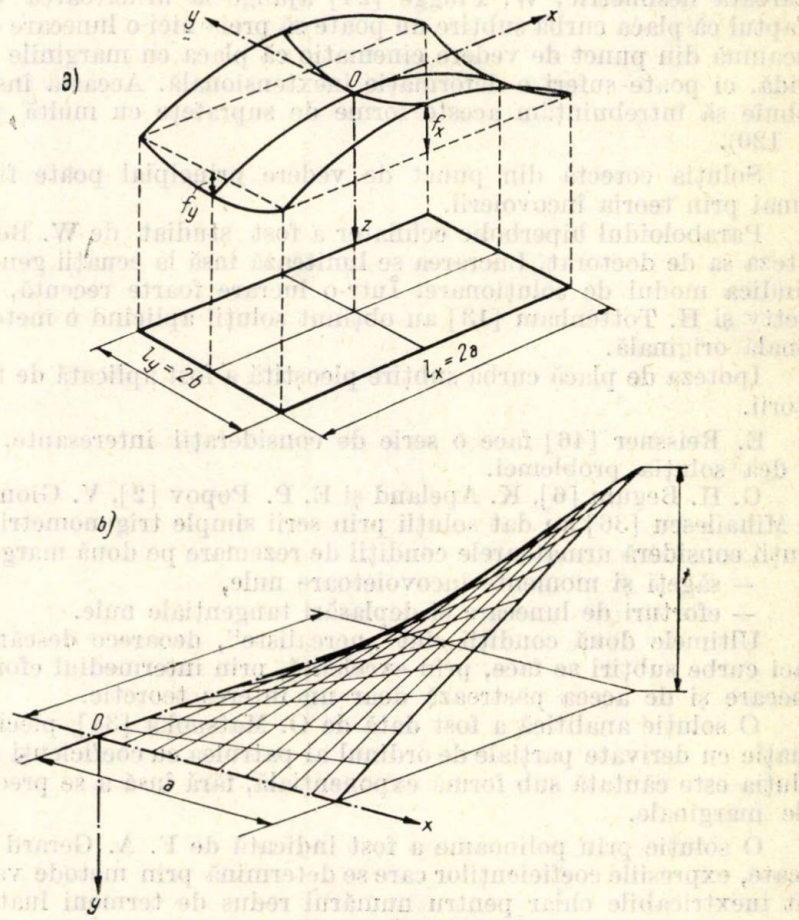


Fig. 1 *a*, *b*. — Paraboloidul hiperbolic : *a* — delimitat de parabole principale (în şa) ; *b* — delimitat de generatoare rectilinii.

dintre datele teoriei de membrană şi rezultatele experimentale. Dintre cele mai importante memorii asupra acestei probleme şi limitate la starea de eforturi de membrană, menţionăm articolele lui F. Candela [9], [10], [11], [12], A. L. Parme [38], [39], K. G. Tester [52] şi cartea lui W. Flügge [24]. Mai pot fi menţionate şi alte lucrări, ca, de exemplu, [20], [37], [42], [43], [44] şi [45].

[3]) T. Jean-Bloch, *La salle des sports de Mulhouse*. Annales de l'I.T.B.T.P., 11, 129, sept. 1958. Discussion de M. Freyssinet, p. 1 020.

Studiul deformaţiilor de membrană a fost tratat de Shizuo Ban [3] şi W. Flügge şi F. T. Geyling [25], fără însă a examina aplicabilitatea ipotezei de membrană.

Într-o discuţie asupra scurgerii eforturilor de lunecare într-o umbrelă încărcată nesimetric, W. Flügge [24] ajunge la următoarea concluzie: „Faptul că placa curbă subţire nu poate să preia nici o lunecare exterioară înseamnă din punct de vedere cinematic că placa cu marginile ei nu este rigidă, ci poate suferi o deformaţie inextensională. Aceasta înseamnă că trebuie să întrebuinţăm aceste forme de suprafeţe cu multă prudenţă" (p. 120).

Soluţia corectă din punct de vedere principial poate fi obţinută numai prin teoria încovoierii.

Paraboloidul hiperbolic echilater a fost studiat de W. Bongard [8] în teza sa de doctorat. Lucrarea se limitează însă la ecuaţii generale, fără a indica modul de soluţionare. Într-o lucrare foarte recentă, S. M. K. Chetty şi H. Tottenham [13] au obţinut soluţii aplicînd o metodă variaţională originală.

Ipoteza de placă curbă subţire pleoştită a fost aplicată de toţi cercetătorii.

E. Reissner [46] face o serie de consideraţii interesante, fără însă să dea soluţia problemei.

G. H. Beguin [6], K. Apeland şi E. P. Popov [2], V. Gioncu [28] şi M. Mihailescu [36] au dat soluţii prin serii simple trigonometrice. Aceste soluţii consideră următoarele condiţii de rezemare pe două margini opuse:

— săgeţi şi momente încovoietoare nule,

— eforturi de lunecare şi deplasări tangenţiale nule.

Ultimele două condiţii sînt „nerealiste", deoarece descărcarea unei plăci curbe subţiri se face, prin excelenţă, prin intermediul eforturilor de lunecare şi de aceea păstrează doar un interes teoretic.

O soluţie analitică a fost dată de O. Matsuoka [34], plecînd de la o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al patrulea cu coeficienţi complecşi. Soluţia este căutată sub formă exponenţială, fără însă a se preciza condiţiile marginale.

O soluţie prin polinoame a fost indicată de F. A. Gerard [26]. Din păcate, expresiile coeficienţilor care se determină prin metode variaţionale sînt inextricabile chiar pentru numărul redus de termeni luat în considerare (vezi şi A. A. Beleş şi M. Soare [7]).

Metoda colocaţiei a fost folosită de H. W. Loof [33] şi D. Dimitrijević [21], iar metoda ecuaţiilor integrodiferenţiale de O. Jenssen [30].

Metode variaţionale folosind serii duble trigonometrice au fost examinate de K. Szmodits [51].

Metode numerice au fost aplicate de N. C. Das Gupta [18], [19] şi K. Szmodits [49], [50]. Studiile lui Das Gupta sînt singurele care dau aplicaţii numerice însoţite de diagrame. În prima lucrare [18], autorul nu a ţinut seama de simetriile, respectiv antisimetriile necunoscutelor de bază, ajungînd la un sistem de 44 de ecuaţii, în loc de 16 cîte ar fi fost necesare în cazul considerat. A doua lucrare [19], tratînd despre conlu-

crarea dintre placă şi elementul marginal, scoate în evidenţă buna concordanţă dintre calcul şi rezultatele experimentale pe modele.

K. Szmodits [49] sugerează rezolvarea prin iteraţie a sistemului de ecuaţii cu diferenţe finite, care însă prezintă inconvenientul că este extrem de slab convergentă.

Alte remarci critice asupra literaturii de specialitate vor fi făcute în text.

Scopul lucrării de faţă este de a examina într-un mod sistematic aplicarea ecuaţiilor cu diferenţe finite la calculul în teoria liniară a încovoierii. Unele rezultate parţiale au fost stabilite anterior (vezi [7] p. 579).

§ 2. ECUAŢIILE GENERALE

După cum se ştie (vezi, de exemplu, [7], [48]), problema generală a plăcilor curbe subţiri pleoştite poate fi redusă în metoda mixtă la integrarea a două ecuaţii diferenţiale de bază :

$$-K\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\left(t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-2s\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+r\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)= \\ =pX+qY-Z+r\int_{x_0}^{x}X\,\mathrm{d}x+t\int_{y_0}^{y}Y\,\mathrm{d}y, \tag{2.1 a}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)+E\delta\left(t\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2s\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+r\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)= \\ =\int_{x_0}^{x}\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\,\mathrm{d}y-\mu\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right), \tag{2.1 b}$$

în care F este o funcţie de eforturi de tip Airy,

w — săgeata plăcii,

$$\left.\begin{aligned} p&=\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{tg}\varphi,\\ q&=\frac{\partial z}{\partial y}=\operatorname{tg}\psi,\end{aligned}\right\}\text{— derivatele de ordinul întîi ale ecuaţiei suprafeţei,}$$

$$\left.\begin{aligned} r&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\\ s&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2 y},\\ t&=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\end{aligned}\right\}\text{— derivatele de ordinul al doilea, cu notaţiile lui Monge,}$$

X, Y, Z — componentele încărcării exterioare, paralele cu axele de coordonate,

δ — grosimea plăcii presupus constantă,

μ — coeficientul de contracție transversală,

E — modulul de elasticitate al materialului,

$K = \dfrac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$ — rigiditatea plăcii la încovoiere.

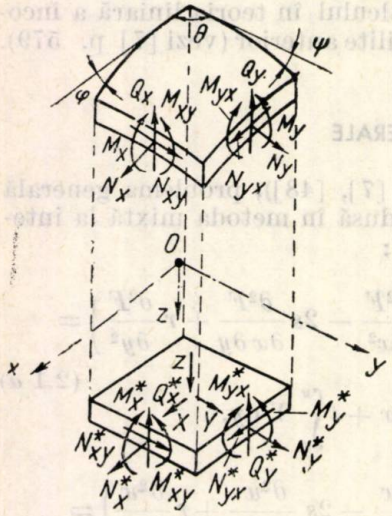


Fig. 2. — Echilibrul unui element de placă.

În ipoteza de placă pleoștită, eforturile din suprafața reală se consideră egale cu cele din proiecția în planul xOy (fig. 2); presupunînd că se cunosc soluțiile pentru F și w dați de ecuațiile (2.1), celelalte mărimi se deduc cu ajutorul următoarelor relații:

eforturile normale:

$$N_x \approx N_x^* = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int_{x_0}^{x} X\,dx, \qquad N_y \approx N_y^* = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int_{y_0}^{y} Y\,dy; \tag{2.2 a}$$

eforturile de lunecare:

$$_{xy} = N_{xy} \approx N_{xy}^* = N_{yx}^* = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}; \tag{2.2 b}$$

momente încovoietoare

$$M_x = M_x^* = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad M_y = M_y^* = -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \tag{2.2 c}$$

momente de răsucire:

$$M_{xy} = M_{yx} \approx M_{xy}^* = M_{yx}^* = -K(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}; \tag{2.2 d}$$

forțe tăietoare:

$$Q_x^* = -K\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \qquad Q_y^* = -K\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \tag{2.2 e}$$

$$Q_x \approx N_x \operatorname{tg}\varphi + N_{xy}\operatorname{tg}\psi + Q_x^*, \qquad Q_y \approx N_y \operatorname{tg}\psi + N_{yx}\operatorname{tg}\varphi + Q_y^*; \tag{2.2 f}$$

deplasările tangențiale :

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\mu}{E\delta}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{1}{E\delta}\int\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,dx+\int rw\,dx+c_1(y),\\ v &= -\frac{\mu}{E\delta}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{1}{E\delta}\int\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,dy+\int tw\,dy+c_2(x).\end{aligned}\right\} \qquad (2.2\ g)$$

De obicei, componentele tangențiale ale încărcării pot fi neglijate, de aceea în cele ce urmează ne vom limita la componenta Z.

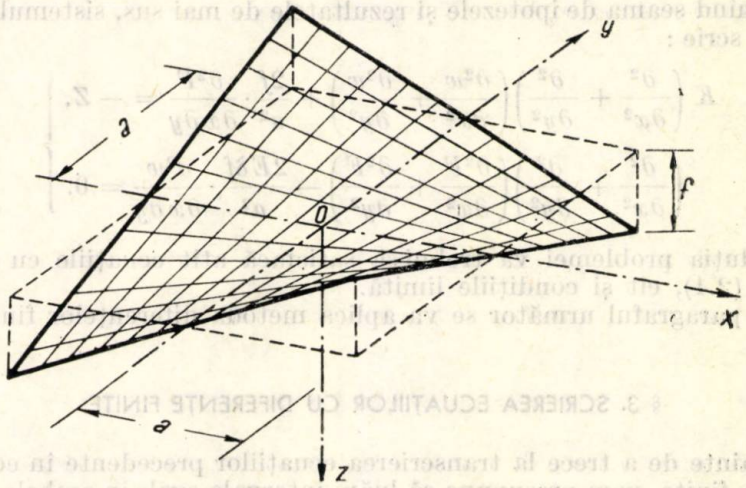


Fig. 3. — Elementele geometrice ale hiparului.

Să particularizăm mai departe forma ecuației suprafeței la paraboloidul hiperbolic echilater, la care generatoarele rectilinii se taie în planul xOy sub un unghi drept și având laturile egale.

În sistemul de axe carteziene ortogonale, ecuația suprafeței mediane se scrie (fig. 3) :

$$z=\frac{fxy}{a^2}. \qquad (2.3\ a)$$

Derivatele de ordinul întîi și al doilea se scriu :

$$\left.\begin{aligned} p &= \frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{tg}\varphi=\frac{fy}{a^2},\\ q &= \frac{\partial z}{\partial y}=\operatorname{tg}\psi=\frac{fx}{a^2},\end{aligned}\right\} \qquad (2.3\ b)$$

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv 0, \\ s &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{f}{a^2}, \\ t &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.3 c}$$

Particularitatea acestei suprafețe este că derivatele de ordinul al doilea normele sînt *nule*, iar *strîmbarea s* este *constantă*.

Ținînd seama de ipotezele și rezultatele de mai sus, sistemul de bază (2.1) se scrie :

$$K\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{2f}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=-Z, \tag{2.4 a}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)-\frac{2E\delta f}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}=0. \tag{2.4 b}$$

Soluția problemei va trebui să satisfacă atît ecuațiile cu derivate parțiale (2.4), cît și condițiile limită.

În paragraful următor se va aplica metoda diferențelor finite.

§ 3. SCRIEREA ECUAȚIILOR CU DIFERENȚE FINITE

Înainte de a trece la transcrierea ecuațiilor precedente în ecuații cu diferențe finite, vom presupune că luăm intervale egale în ambele direcții, împărțind laturile a în k intervale

$$\Delta x = \Delta y = \Delta = \frac{a}{k}. \tag{3.1}$$

Pentru a lucra cu necunoscute adimensionale, este indicat să facem următoarea schimbare de funcții :

$$w = \frac{Z_0 a^4}{K}\cdot\frac{1}{k^4}\,W, \tag{3.2 a}$$

$$F = \frac{Z_0 a^4}{f}\cdot\frac{2}{k^2}\,\Phi, \tag{3.2 b}$$

$$Z = Z_0 \cdot \eta(x, y) \tag{3.2 c}$$

și să notăm coeficientul de amortizare al plăcii curbe subțiri

$$\gamma = \frac{3(1-\mu^2)}{k^4}\left(\frac{f}{\delta}\right)^2. \tag{3.3}$$

Cu relaţiile (3.2 *a*), (3.2 *b*) şi (3.3), ecuaţiile de bază (2.4) devin

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)+\frac{4}{\Delta^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}=\frac{\eta}{\Delta^4}, \qquad (3.4\ a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)-\frac{4\gamma}{\Delta^2}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}=0. \qquad (3.4\ b)$$

Să introducem acum diferenţele finite, utilizînd metoda parabolei. Pentru derivata mixtă de ordinul al doilea şi operatorul bilaplacean, care intervin în (3.4), avem relativ la nodul m, n

$$\frac{\partial^2 W_{m,n}}{\partial x\,\partial y}\approx\frac{W_{m+1,n+1}-W_{m+1,n-1}-W_{m-1,n+1}+W_{m-1,n-1}}{4\Delta^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(2)}W_{m,n}\approx\frac{1}{\Delta^4}[20W_{m,n}-8(W_{m+1,n}+W_{m-1,n}+W_{m,n+1}+W_{m,n-1})+$$

$$+2(W_{m+1,n+1}+W_{m-1,n+1}+W_{m+1,n-1}+W_{m-1,n-1})+$$

$$+(W_{m+2,n}+W_{m-2,n}+W_{m,n+2}+W_{m,n-2})]$$

şi alte două relaţii identice dacă se înlocuieşte W prin Φ.

Introducînd aceste relaţii în (3.4), rezultă după efectuarea tuturor simplificărilor :

$$[20W_{m,n}-8(W_{m+1,n}+W_{m-1,n}+W_{m,n+1}+W_{m,n-1})+2(W_{m+1,n+1}+$$

$$+W_{m-1,n+1}+W_{m+1,n-1}+W_{m-1,n-1})+(W_{m+2,n}+W_{m-2,n}+W_{m,n+2}+$$

$$+W_{m,n-2})]+(\Phi_{m+1,n+1}-\Phi_{m-1,n+1}-\Phi_{m+1,n-1}+\Phi_{m-1,n-1})=\eta_{m,n}, \qquad (3.5\ a)$$

$$[20\Phi_{m,n}-(8\Phi_{m+1,n}+\Phi_{m-1,n}+\Phi_{m,n+1}+\Phi_{m,n-1})+2(\Phi_{m+1,n+1}+$$

$$+\Phi_{m-1,n+1}+\Phi_{m+1,n-1}+\Phi_{m-1,n-1})+(\Phi_{m+2,n}+\Phi_{m-2,n}+\Phi_{m,n+2}+\Phi_{m,n-2})]-$$

$$-\gamma(W_{m+1,n+1}-W_{m-1,n+1}-W_{m+1,n-1}+W_{m-1,n-1})=0. \qquad (3.5\ b)$$

Parantezele drepte din expresiile de mai sus reprezintă doi *operatori cu diferenţe*, pe care îi vom nota cu $[\![\ ]\!]$, respectiv $((\ ))$.

Imaginea punctelor care intervin în cele două ecuaţii (3.5) relative la acelaşi nod m,n este redată în figura 4 *a*,*b*.

Ecuaţii de tipul (3.5) pot fi scrise pentru toate punctele interioare ale reţelei. În aceste ecuaţii intervin însă şi valori ale necunoscutelor în puncte de pe contur şi în afara conturului. Pentru a avea un număr egal de ecuaţii şi de necunoscute, este necesar să adăugăm condiţiile de contur, transcrise şi ele în diferenţe finite.

Să presupunem deocamdată că aceste operații au fost făcute și că toate valorile $F_{m,n}$ și $w_{m,n}$ sînt cunoscute. Celelalte mărimi rezultă atunci din (2.2 *a*)...(2.2 *g*), transformînd derivatele în diferențe finite.

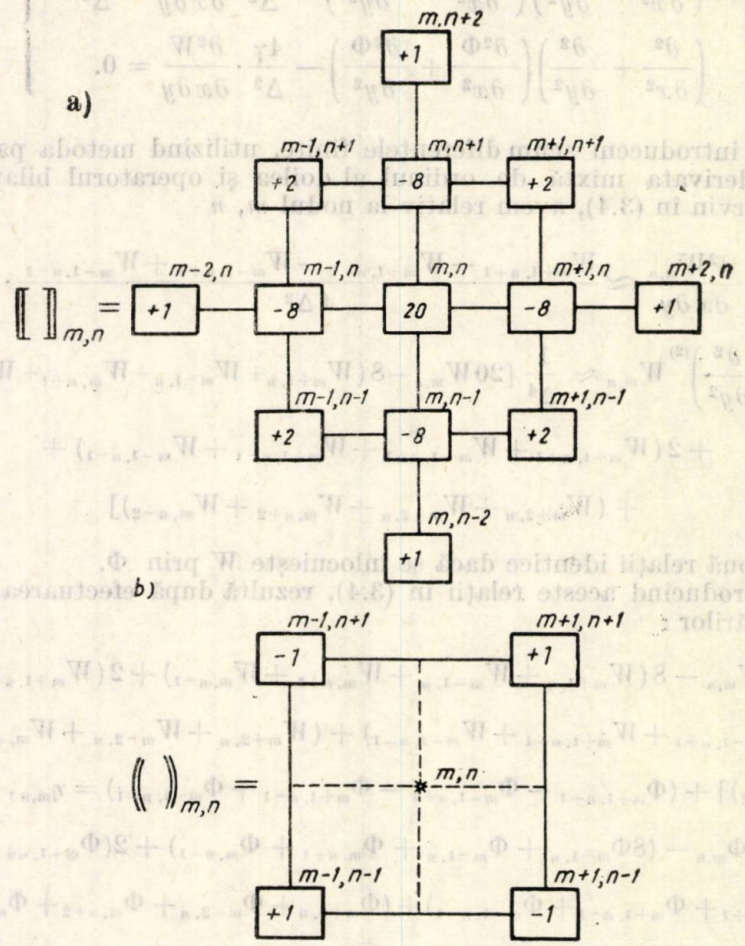


Fig. 4 *a*, *b*. — Imaginea punctelor care intervin în ecuațiile (3.5): *a* — operatorul cu diferențe de ordinul al 4-lea; *b* — operatorul cu diferențe de ordinul al 2-lea.

Ținînd seama că

$$\frac{\partial (\ldots)_{m,n}}{\partial x} \approx \frac{(\ldots)_{m+1,n} - (\ldots)_{m-1,n}}{2\Delta x},$$

$$\frac{\partial^2 (\ldots)_{m,n}}{\partial x^2} \approx \frac{(\ldots)_{m+1,n} - 2(\ldots)_{m,n} + (\ldots)_{m-1,n}}{(\Delta x)^2},$$

și relațiile analoge pentru derivatele în raport cu y, din (2.2) și (3.2) se deduce :

$$N_{x,m,n} = \frac{2Z_0 a^2}{f}(\Phi_{m,n+1} - 2\Phi_{m,n} + \Phi_{m,n-1}),$$
$$N_{y,m,n} = \frac{2Z_0 a^2}{f}(\Phi_{m+1,n} - 2\Phi_{m,n} + \Phi_{m-1,n}), \tag{3.6 a}$$

$$N_{xy,m,n} = N_{yx,m,n} = -\frac{Z_0 a^2}{2f}(\Phi_{m+1,n+1} - \Phi_{m-1,n+1} - \Phi_{m+1,n-1} + \Phi_{m-1,n-1}) \tag{3.6 b}$$

$$M_{x,m,n} = m_{x,m,n} + \mu m_{y,m,n}\,; \quad M_{y,m,n} = m_{y,m,n} + \mu m_{x,m,n}, \tag{3.6 c}$$

în care

$$m_{x,m,n} = -\frac{Z_0 a^2}{k^2}(W_{m+1,n} - 2W_{m,n} + W_{m-1,n}),$$
$$m_{y,m,n} = -\frac{Z_0 a^2}{k^2}(W_{m,n+1} - 2W_{m,n} + W_{m,n-1}), \tag{3.6 d}$$

$$M_{xy,m,n} = M_{yx,m,n} = -(1-\mu)\frac{Z_0 a^2}{4k^2}(W_{m+1,n+1} - W_{m-1,n+1} - W_{m+1,n-1} + W_{m-1,n-1}). \tag{3.6 e}$$

Pentru scrierea condițiilor marginale vom presupune că hiparul are aceleași condiții de rezemare pe toate cele patru laturi, și anume :

— pentru efectul de placă corespunde o încastrare perfectă,

— pentru efectul de șaibă, efortul normal pe contur este nul și alungirea specifică în lungul marginii este de asemenea nulă.

La scrierea ecuațiilor cu diferențe și a condițiilor marginale este totdeauna util să ținem seama de simetriile și antisimetriile stării de eforturi și de deformații.

Să presupunem că încărcarea este simetrică în raport cu Ox și Oy. Este ușor de arătat că, în condițiile de rezemare de mai sus, planele de coordonate și planele bisectoare sînt plane de simetrie pentru săgețile w. Funcția F va fi antisimetrică în raport cu planele de coordonate și simetrică în raport cu planele bisectoare ; așadar, pentru $x = 0$ și $y = 0$ vom avea $F = 0$.

Concluzii similare decurg pentru mărimile deduse din F și w, ținînd seama de ordinul derivatelor respective.

Bazați pe aceste considerente, pentru hiparul pătrat în plan va fi suficient să ne ocupăm de un singur octant.

Putem trece acum efectiv la explicitarea condițiilor limită pentru latura $x = a$ ($m = k$, $n =$ variabil).

1) Condiția de săgeată nulă : $w_{k,n} = 0$, adică

$$W_{k,n} = 0, \tag{3.7}$$

2) condiția de rotire nulă : $\partial w_{k,n}/\partial x = 0$, adică

$$W_{k+1,n} = W_{k-1,n}, \tag{3.8}$$

3) condiția de efort normal nul

$$N_{x,k,n} = \frac{\partial^2 F_{k,n}}{\partial y^2} = 0$$

arată că în lungul marginii funcția de eforturi are o variație liniară

$$F(a, y) = Ay + B,$$

în care A și B sînt constante.

Ținînd seama de condițiile de antisimetrie, vom lua $B = 0$; fie $\overline{F}$ valoarea funcției de eforturi la colț ($F_{k,k} = \overline{F}$).

Rezultă că în lungul laturii $x = a$ avem :

$$F(a, y) = \overline{F}\,\frac{y}{a}$$

sau

$$\Phi_{k,n} = \frac{n}{k}\,\overline{\Phi}\,. \tag{3.9}$$

4) Condiția de alungire specifică nulă

$$\varepsilon_{y,k,n} = \frac{N_{y,k,n} - \mu N_{x,k,n}}{E\delta} = \frac{1}{E\delta}\left(\frac{\partial^2 F_{k,n}}{\partial x^2} - \mu\,\frac{\partial^2 F_{k,n}}{\partial y^2}\right) = 0$$

este echivalentă cu condiția statică de efort normal nul

$$N_{y,k,n} = \frac{\partial^2 F_{k,n}}{\partial x^2} = 0.$$

Ținînd seama și de (3.9), condiția precedentă se scrie

$$\Phi_{k+1,n} = \frac{2n}{k}\,\overline{\Phi} - \Phi_{k-1,n}. \tag{3.10}$$

Condițiile limită fiind precizate, putem trece mai departe la stabilirea sistemului de ecuații cu diferențe finite.

În cazul împărțirii laturii a în k intervale egale și a considerării unui singur octant, se vor scrie $k\,(k+1)/2$ ecuații de tipul (3.5 a) pentru toate nodurile interioare și $k\,(k-1)/a$ ecuații de tipul (3.5 b) pentru toate nodurile interioare, cu excepția nodurilor situate pe axa Ox, pentru care aceste ecuații sînt verificate identic, datorită condițiilor de simetrie.

Rezultă, așadar, k^2 ecuații cu $k(k+1)/2$ necunoscute W, $k\,(k-1)/2$ necunoscute Φ, la care se adaugă $\overline{\Phi}$ deci, în total, (k^2+1) necunoscute.

Să presupunem pentru moment că $\bar{\Phi}$ este cunoscut. Ea poate fi considerată ca o solicitare omogenă a plăcii prin aplicarea unor eforturi tangenţiale pe contur.

Vom putea rezolva sistemul de ecuaţii în două trepte.

În prima treaptă vom considera $\bar{\Phi} = 0$; termenii liberi sînt daţi de încărcarea exterioară. Fie $W^0_{m,n}$ şi $\Phi^0_{m,n}$ rădăcinile corespunzătoare.

În treapta a doua vom îndepărta încărcarea exterioară şi vom lua $\bar{\Phi} = 1$; fie $\overline{W}_{m,n}$ şi $\bar{\Phi}_{m,n}$ rădăcinile obţinute în acest caz.

Valorile finale ale necunoscutelor se vor scrie:

$$\left.\begin{aligned} W_{m,n} &= W^0_{m,n} + \bar{\Phi} \cdot \overline{W}_{m,n}, \\ \Phi_{m,n} &= \Phi^0_{m,n} + \bar{\Phi}\,\bar{\Phi}_{m,n}. \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

Pentru determinarea lui $\bar{\Phi}$ vom urma procedeul următor.

Scriem ecuaţiile de tipul (3.5 *a*) pentru punctele de pe contur ($m = k, n$). Toate ecuaţiile de acest tip, cu excepţia celei scrise pentru colţ ($m = n = k$), determină necunoscutele $W_{k+2,n}$, care interesează exclusiv pentru evaluarea forţelor tăietoare pe contur ($Q_{k,n}$).

Scrierea ecuaţiei pentru colţ nu introduce însă nici o necunoscută nouă, deoarece $W_{k+2,k} = 0$ (punctul $k+2, k$ fiind situat pe prelungirea liniei de contur); ea reprezintă tocmai ecuaţia suplimentară căutată

$$8W_{k-1,k-1} + 4\Phi_{k-1,k-1} - \frac{4(k-2)}{k}\bar{\Phi} = \eta_{k,k}. \tag{3.12}$$

Scriind relaţiile (3.11) pentru nodul $(k-1, k-1)$ şi introducînd în (3.12), rezultă

$$\bar{\Phi} = -\frac{8W^0_{k-1,k-1} + 4\Phi^0_{k-1,k-1} - \eta_{k,k}}{8\overline{W}_{k-1,k-1} + 4\bar{\Phi}_{k-1,k-1} - \dfrac{4(k-2)}{k}}. \tag{3.13}$$

Cu aceasta, rădăcinile sistemului de ecuaţii sînt complet precizate.

Evident că este posibil să alăturăm ecuaţia (3.12) celorlalte k^2 ecuaţii şi să rezolvăm dintr-o dată sistemul de (k^2+1) ecuaţii.

Prima treaptă de calcul ($\bar{\Phi} \equiv 0$) corespunde unei stări de eforturi de încovoiere a plăcii curbe subţiri [50]. Eforturile de lunecare au rezultanta nulă pe fiecare latură şi descărcarea încărcării exterioare se face numai prin intermediul forţelor tăietoare. Lucrul plăcii curbe subţiri este analog cu acela al unei plăci plane, şi de aceea, aşa cum a fost considerat de unii autori [18], [21], nu este real.

Pentru controlul rezultatelor este recomandabil să se verifice echilibrul unui octant de placă în sensul axei Oz:

$$\frac{1}{2}\int_0^a\int_0^a Z\,dx\,dy + \int_0^a (N_{xy}\,\mathrm{tg}\,\psi)_{x=a}\cdot dy + \int_0^a (Q^*_x)_{x=a}\cdot dy = 0.$$

Observînd că $(\mathrm{tg}\psi)_{x=a} = f/a$, exprimînd pe N_{xy} şi Q_x^* prin intermediul lui Φ şi W şi ţinînd seama şi de condiţiile limită, relaţia precedentă devine :

$$2\overline{\Phi} + \frac{a^2}{k^2}\int_0^a \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}\right)_{x=a} \cdot \mathrm{d}y = \frac{k^2}{2a^2}\int_0^a\int_0^a \eta(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \qquad (3.14)$$

Integralele din (3.14) vor fi evaluate numeric.

Vrem, în cele ce urmează, să ilustrăm teoria dezvoltată precedent printr-o aplicaţie numerică. Este evident însă că şi alte condiţii de rezemare pot fi luate în considerare.

§ 4. EXEMPLU DE CALCUL

Fie un hipar acoperind în plan o suprafaţă pătrată de latură $2a$. Săgeţile colţurilor sînt $\pm f$ în raport cu centrul. Marginile se vor considera încastrate perfect, iar încărcarea uniformă în proiecţie orizontală şi distribuită parţial pe suprafaţa plăcii.

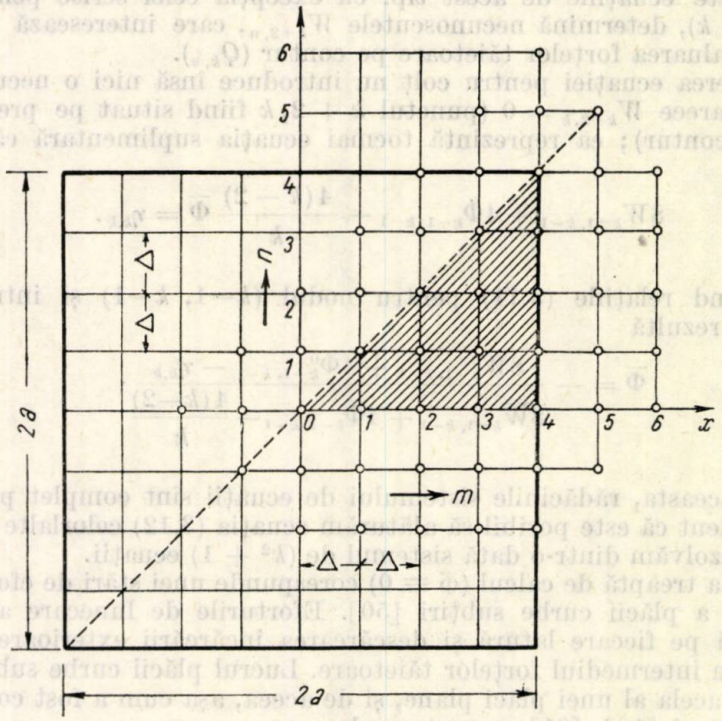


Fig. 5. — Alegerea reţelei de puncte.

Pentru aplicarea diferenţelor finite, vom împărţi fiecare latură în opt părţi egale, deci

$$\Delta x = \Delta y = \Delta = \frac{2a}{8} = \frac{a}{4} \qquad (k = 4).$$

Rețeaua de puncte este reprezentată în figura 5.

La scrierea ecuațiilor se ține seama de următoarele condiții limită :

$$W_{1,2}=W_{2,-1}=W_{2,1};\quad W_{0,1}=W_{1,0};\quad W_{2,3}=W_{3,2};$$

$$W_{4,0}=W_{4,1}=W_{4,2}=W_{4,3}=W_{4,4}=W_{3,4}=W_{2,4}=W_{6,4}=0,$$

$$W_{5,0}=W_{3,0};\quad W_{5,1}=W_{3,1};\quad W_{5,2}=W_{3,2};\quad W_{5,3}=W_{3,3};$$

$$\Phi_{0,0}=\Phi_{1,0}=\Phi_{2,0}=\Phi_{3,0}=\Phi_{4,0}=\Phi_{5,0}=\Phi_{0,1}=\Phi_{0,2}=\Phi_{0,-1}=\Phi_{0,-2}=0;$$

$$\Phi_{1,2}=-\Phi_{2,-1}=\Phi_{2,1};\quad \Phi_{2,3}=\Phi_{3,2};$$

$$\Phi_{5,1}=-\Phi_{3,1}+\frac{1}{2}\bar{\Phi};\quad \Phi_{5,2}=-\Phi_{3,2}+\bar{\Phi};\quad \Phi_{5,3}=-\Phi_{3,3}+\frac{3}{2}\bar{\Phi};$$

$$\Phi_{4,1}=\frac{1}{4}\bar{\Phi},\quad \Phi_{4,2}=\frac{1}{2}\bar{\Phi},\quad \Phi_{4,3}=\frac{3}{4}\bar{\Phi},\quad \Phi_{4,4}=\bar{\Phi},\quad \Phi_{5,4}=\frac{5}{4}\bar{\Phi}.$$

Se pot scrie astfel 16 ecuații, a căror matrice a fost redată în tabela 1.

Ecuația relativă la nodul 0,0 a fost multiplicată cu 1/4, iar ecuațiile relative la punctele 2,1 ; 3,1 ; 3,2 cu 2, rezultînd astfel simetrie față de diagonala principală în toate cadranele sistemului.

Este interesant de semnalat faptul că ecuațiile de tipul (3.5 *a*) sînt independente de orice parametru caracterizînd dimensiunile plăcii.

Acesta intervine doar în ecuațiile de tipul (3.5 *b*) și depinde numai de raportul f/δ prin intermediul coeficientului de amortizare γ.

De aici rezultă următoarea concluzie, importantă pentru rezolvarea practică a problemei. În sistemul de ecuații redat în tabela 1 se rezolvă primele 10 ecuații, considerînd ca necunoscute numai săgețile reduse W.

Valorile astfel obținute pentru $W_{m,n}$ $(m \geqslant n = 0,1,2,3)$ sînt duse în celelalte șase ecuații. Se obține astfel un sistem de șase ecuații cu șase necunoscute $\Phi_{m,n}$ $(m \geqslant n = 1,2,3)$, ai cărui coeficienți depind și de parametrul γ al hiparului. Problema este simplificată, în acest fel, considerabil.

Observația de mai sus este valabilă oricare ar fi pasul rețelei adoptate.

Evident, sistemul de ecuații poate fi rezolvat și direct, în special în cazul în care rezolvarea se face cu ajutorul unei mașini de calcul electronice.

★

Să considerăm, mai departe, că încărcarea este distribuită uniform pe un pătrat central avînd laturile $2c$, astfel încît raportul c/a ia succesiv valorile 1/4, 1/2, 3/4 și 1 (fig. 6 *a*,*b*). Evident, ultimul caz corespunde încărcării totale a hiparului.

Valorile coeficienților de încărcare $\eta_{m,n}$, corespunzătoare diferitelor rapoarte c/a, au fost trecute în tabela 2.

Pentru rezolvarea pînă la capăt a problemei vom preciza parametrul γ. În acest scop vom considera $f/\delta = 29$; din relația (3.3) se deduce (luînd $\mu = 1/6$)

$$\gamma=\frac{3}{4^4}\left(1-\frac{1}{6^2}\right)29^2=9{,}58171.$$

Tabela 1

Punct	$W_{0,0}$	$W_{1,0}$	$W_{2,0}$	$W_{3,0}$	$W_{1,1}$	$W_{2,1}$	$W_{3,1}$	$W_{2,2}$	$W_{3,2}$	$W_{3,3}$	$\Phi_{1,1}$	$\Phi_{2,1}$	$\Phi_{3,1}$	$\Phi_{2,2}$	$\Phi_{3,2}$	$\Phi_{3,3}$		Termen liber	
																		I	II*)
0,0	+5	−8	+1	.	+2	.	.	.	.	.	+1	.	.	.	.	.	=	$0{,}25\eta_{0.0}$	0
1,0	−8	+25	−8	+1	−16	+6	.	.	.	.	.	+2	.	.	.	.	=	$\eta_{1.0}$	0
2,0	+1	−8	+20	−8	+4	−16	+4	+2	.	.	−2	.	+2	.	.	.	=	$\eta_{2.0}$	0
3,0	.	+1	−8	+21	.	+4	−16	.	+2	.	.	−2	.	.	.	.	=	$\eta_{3.0}$	−0,50
1,1	+2	−16	+4	.	+22	−16	+2	+2	.	.	.	.	.	+1	.	.	=	$\eta_{1.1}$	0
2,1	.	+6	−16	+4	−16	+46	−16	−16	+6	.	.	−2	.	.	+2	.	=	$2\eta_{2.1}$	0
3,1	.	.	+4	−16	+2	−16	+44	+4	−16	+2	.	.	.	−2	.	.	=	$2\eta_{3.1}$	−1
2,2	.	.	+2	.	+2	−16	+4	+20	−16	+2	+1	.	−2	.	.	+1	=	$\eta_{2.2}$	0
3,2	.	.	.	+2	.	+6	−16	−16	+46	−16	.	+2	.	.	−2	.	=	$2\eta_{3.2}$	−1
3,3	.	.	.	.	.	.	+2	+2	−16	+22	.	.	.	+1	.	.	=	$\eta_{3.3}$	0
1,1	−γ	.	+2γ	.	.	.	.	−γ	.	.	+18	−16	+2	+2	.	.	=	0	0
2,1	.	−2γ	.	+2γ	.	+2γ	.	.	−2γ	.	−16	+42	−16	−16	+6	.	=	0	−0,50
3,1	.	.	−2γ	.	.	.	.	+2γ	.	.	+2	−16	+36	+4	−16	+2	=	0	+1
2,2	.	.	.	.	−γ	.	+2γ	.	.	−γ	+2	−16	+4	+20	−16	+2	=	0	−1
3,2	.	.	.	.	.	−2γ	.	.	+2γ	.	.	+6	−16	−16	+42	−16	=	0	+0,50
3,3	.	.	.	.	.	.	.	−γ	.	.	.	.	+2	+2	−16	+18	=	0	+5

*) Multiplicator $\overline{\Phi}$

Cu această valoare, sistemele de ecuaţii trecute în tabela 1 pot fi rezolvate în întregime. Rădăcinile corespunzătoare lui $\bar{\Phi} = 1$ şi diferitelor rapoarte c/a au fost trecute în tabela 3.

Tabela 2

m, n	c/a			
	0,25	0,50	0,75	1
0,0	1	1	1	1
1,0	0,50	1	1	1
2,0	0	0,50	1	1
3,0	0	0	0,50	1
1,1	0,25	1	1	1
2,1	0	0,50	1	1
3,1	0	0	0,50	1
2,2	0	0,25	1	1
3,2	0	0	0,50	1
3,3	0	0	0,25	1
4,4	0	0	0	1

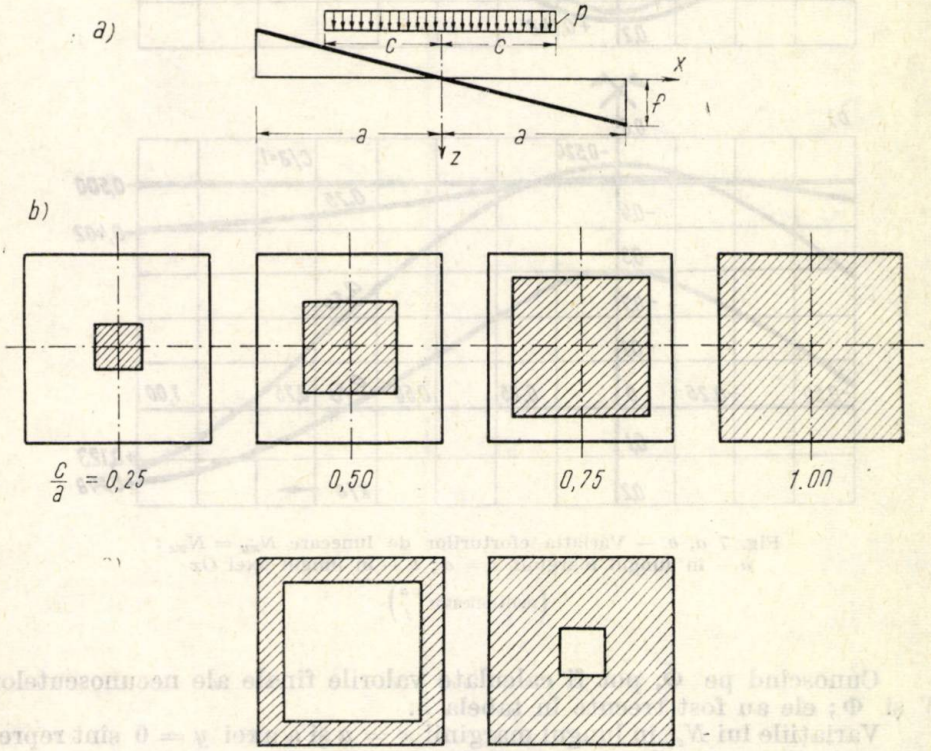


Fig. 6 *a*, *b*, *c*. — Încărcarea parţială a hiparului cu sarcină uniformă : *a* — elemente geometrice ; *b* — cazuri elementare de încărcare ; *c* — suprapunerea efectelor.

Valoarea lui $\overline{\Phi}$ se determină cu ajutorul relației (3.13); de exemplu, pentru $c/a = 3/4$ avem :

$$\overline{\Phi} = -\frac{8W^0_{3,3} + 4\Phi^0_{3,3} - \eta_{4,4}}{8\overline{W}_{3,3} + 4\overline{\Phi}_{3,3} - 2} = -\frac{8 \times 0{,}156117 + 4 \times 1{,}570864 - 0}{-8 \times 0{,}0670277 + 4 \times 0{,}1195362 - 2} =$$
$$= +3{,}659918.$$

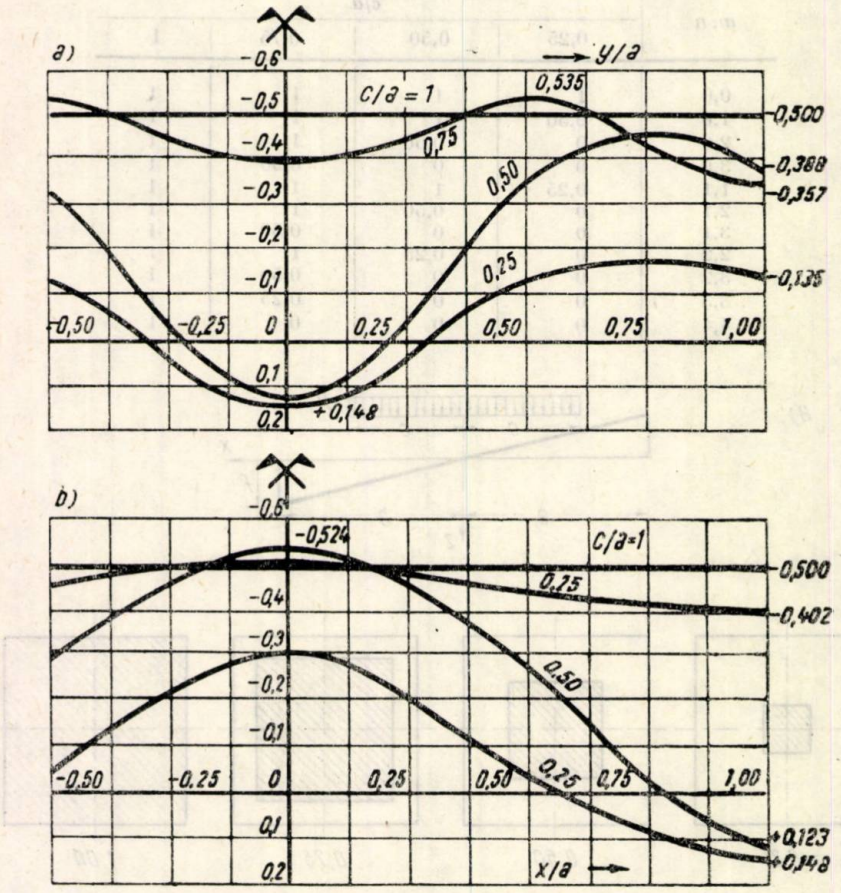


Fig. 7 *a*, *b*. — Variația eforturilor de lunecare $N_{xy} = N_{yx}$: *a* — în lungul marginii $x = a$; *b* — în lungul axei Ox $\left(\text{multiplicator } \frac{pa}{l}\right)$.

Cunoscînd pe $\overline{\Phi}$, pot fi calculate valorile finale ale necunoscutelor W și Φ; ele au fost trecute în tabela 3.

Variațiile lui N_{xy} în lungul marginii $x = a$ și a axei $y = 0$ sînt reprezentate în figura 7 *a*, *b*, iar variația lui M_x în secțiunea $y = 0$ în figura 8 pentru diferite rapoarte c/a.

Tabela 3

Necunoscuta	$\overline{(\ldots)}_{m,n}$	Valorile $(\ldots)^0_{m,n}$ pentru $c/a =$				Valorile finale ale necunoscutelor pentru $c/a =$			
		0,25	0,50	0,75	1,00	0,25	0,50	0,75	1,00
$W_{0,0}$	−0,289349	0,220847	0,601665	0,992576	1,157392	+0,081898	+0,044952	−0,0664176	0
$W_{1,0}$	−0,290442	0,180914	0,587005	0,993453	1,161764	+0,041440	+0,028189	−0,0695408	0
$W_{2,0}$	−0,282685	0,132890	0,512108	0,953057	1,130735	−0,002859	−0,031783	−0,0815469	0
$W_{3,0}$	−0,202180	0,0998164	0,343401	0,650881	0,808714	+0,002727	−0,045597	−0,0890812	0
$W_{1,1}$	−0,290765	0,151379	0,569616	0,991286	1,163054	+0,011750	+0,010179	−0,0728900	0
$W_{2,1}$	−0,279050	0,113109	0,485574	0,935664	1,116193	−0,020894	−0,051324	−0,0856361	0
$W_{3,1}$	−0,194374	0,0808175	0,308554	0,617893	0,777490	−0,012523	−0,065425	−0,0934999	0
$W_{2,2}$	−0,251857	0,0770527	0,379752	0,823002	1,007421	−0,043892	−0,104825	−0,0987739	0
$W_{3,2}$	−0,155014	0,0386683	0,192542	0,465298	0,620051	−0,035771	−0,105708	−0,1020405	0
$W_{3,3}$	−0,0670277	−0,001458	0,031942	0,156117	0,268110	−0,033646	−0,097020	−0,0891989	0
$\Phi_{1,1}$	−0,0125774	0,157434	0,286374	0,299120	0,300318	+0,151394	+0,262175	+0,253088	0,25
$\Phi_{2,1}$	−0,0454899	0,225317	0,546040	0,662224	0,681966	+0,203472	+0,458517	0,495735	0,50
$\Phi_{3,1}$	−0,0218049	0,204464	0,584587	0,793555	0,837223	+0,193993	+0,542634	0,713751	0,75
$\Phi_{2,2}$	−0,1131490	0,335036	1,001337	1,378414	1,452602	+0,280700	+0,783637	0,964298	1,00
$\Phi_{3,2}$	−0,0440645	0,302538	1,012645	1,545854	1,676259	+0,281378	+0,927865	1,384582	1,50
$\Phi_{3,3}$	+0,1195362	0,249995	0,926062	1,570864	1,771823	+0,307398	+1,156052	2,008357	2,25
$\overline{\Phi}$	+1	—	—	—	—	0,480212	1,924019	3,659918	4,00

Pentru discuţia stării de eforturi, este util să facem în prealabil şi controlul rezultatelor. Relaţia (3.14) se poate scrie

$$\sum I = I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

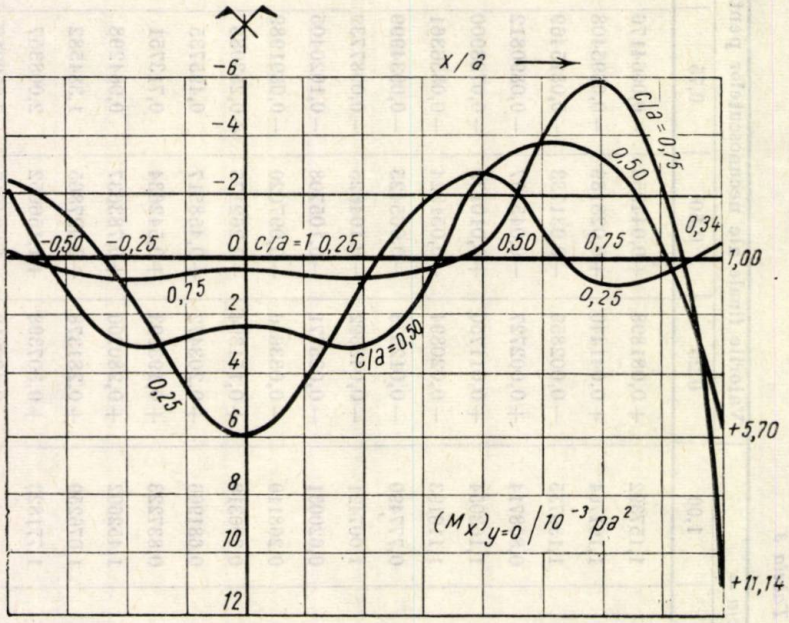


Fig. 8. — Variaţia momentului încovoietor M_x în secţiunea $y = 0$.

în care

$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^a Z\,dx\,dy$ reprezintă rezultanta încărcării exterioare ce acţionează asupra octantului de placă,

$I_2 = \int_0^a (N_{xy}\,\mathrm{tg}\,\psi)_{x=a}\cdot dy = -\frac{\overline{\Phi}}{8}\,pa^2$ — componenta verticală a rezultantei eforturilor de lunecare pe latura $x = a$,

$I_3 = \int_0^a (Q_x^*)_{x=a}\cdot dy = -\frac{pa^4}{256}\int_0^a \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}\right)_{x=a}\cdot dy$ — rezultanta forţelor tăietoare pe aceeaşi latură de contur.

În cazul de încărcare considerat,

$$I_1 = \frac{1}{8}\,p\,(2c)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}\right)^2 pa^2, \tag{4.1}$$

I_2 rezultă direct cu ajutorul valorilor Φ din tabela 3.

Rezultanta I_3 poate fi evaluată numeric cu ajutorul metodei lui Simpson :

$$I_3 = -\frac{pa^2}{256}\cdot\frac{\Delta}{3}\left(\frac{\partial^3 W_{4,0}}{\partial x^3} + 4\frac{\partial^3 W_{4,1}}{\partial x^3} + 2\frac{\partial^3 W_{4,2}}{\partial x^3} + 4\frac{\partial^3 W_{4,3}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W_{4,4}}{\partial x^3}\right), \quad (4.2)$$

în care

$$\frac{\partial^3 W_{4,n}}{\partial x^3} \approx \frac{32}{a^3}(W_{6,n} - W_{2,n}) \qquad (n = 0,1,2,3,4).$$

De exemplu, pentru $n = 2$ ($c/a = 3/4$), avem din aplicarea ecuației (3.5 *a*)

$$W_{6,2} = \eta_{4,2} - 4W_{3,1} - W_{2,2} + 16W_{3,2} - 4W_{3,3} - 2\Phi_{3,1} + 2\Phi_{3,3} - \bar{\Phi},$$

$$\frac{\partial^3 W_{4,2}}{\partial x^3} \approx \frac{32}{a^3}(0 + 4 \times 0{,}093500 + 2 \times 0{,}098774 - 16 \times 0{,}102041 +$$

$$+ 4 \times 0{,}089199 - 2 \times 0{,}713751 + 2 \times 2{,}008357 - 3{,}659918) =$$

$$= -\frac{32}{a^3} \times 1{,}775011 ;$$

$$I_3 = -\frac{pa^2}{256}\cdot\frac{a}{4\times 3}\cdot\frac{32}{a^3}(-1{,}319120 - 4 \times 1{,}450994 -$$

$$- 2 \times 1{,}775011 - 4 \times 1{,}754144 \times 0) = +\,0{,}184268pa^2.$$

Tabela 4

$c/a =$	0,25	0,50	0,75	1
I_1	0,031250	0,125000	0,281250	0,5
I_2	−0,060266	−0,240502	−0,457490	−0,5
I_3	0,031481	0,123232	0,184268	0
ΣI	0,002465	0,007730	0,008028	0
Eroare %	7,89	6,18	2,85	0

Multiplicator pa^2

Valorile lui I_1, I_2, I_3 și $\Sigma\, I$ au fost trecute în tabela 4. Erorile au fost raportate la I_1; se constată că ele sînt mici, cu toate că am ales un număr redus de ochiuri ale rețelei și sînt datorate exclusiv calculului numeric.

Calculul numeric condus pentru cazul încărcării complete a hiparului arată că săgețile w sînt nule, iar funcția de eforturi F poate fi scrisă sub forma finită

$$F(x, y) = \frac{pa^2xy}{2f}, \quad (4.3)$$

din care rezultă, ţinînd seama de condiţiile marginale,

$$\left.\begin{aligned} N_x &= N_y = 0, \\ N_{xy} &= N_{yx} = -\frac{pa^2}{2f}. \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Aşadar, soluţia de membrană coincide în acest caz particular cu soluţia mai generală din teoria încovoierii. [46]

Examinarea valorilor înscrise în tabela 4 arată modul de descărcare a hiparului pe contur (fig. 9).

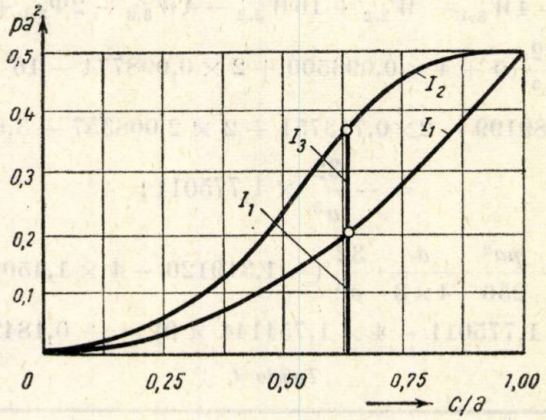


Fig. 9. — Modul de descărcare a hiparului pe contur.

Pentru încărcări parţiale, eforturile de lunecare dau o rezultantă mai mare decît încărcarea plăcii; diferenţa este echilibrată de forţele tăietoare.

Cu cît încărcarea este mai localizată, cu atît forţele tăietoare sînt mai importante în comparaţie cu eforturile de lunecare. La limită (pentru $c/a = 1$), eforturile de lunecare echilibrează singure încărcarea exterioară.

Aplicînd principiul suprapunerii efectelor, cu ajutorul cazurilor elementare studiate pot fi deduse rezultatele şi pentru alte cazuri de încărcare (vezi, de exemplu, ultimul caz din figura 6 *c*).

★

Un ultim aspect pe care dorim să-l relevăm este legat de influenţa raportului f/δ, care poate caracteriza (în afara raportului $f/2a$) pleoştirea plăcii.

Ecuaţiile generale (2.4) se reduc pentru $f/\delta \to 0$ la ecuaţia plăcilor plane şi a şaibelor.

În cazul încărcării uniform distribuite pe toată suprafaţa, soluţia de membrană (4.3) nu permite regăsirea soluţiei de placă şi de şaibă.

Este probabil că problema trebuie abordată în mod diferit ca o problemă de limită, şi aceasta rămîne încă deschisă, neconstituind obiectul lucrării de faţă.

Primită la redacţie la 10 septembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Aimond F., *Étude statique des voiles minces en paraboloïde hyperbolique travaillant sans flexion.* Association Internationale des Ponts et Charpentes. Mémoires. Zürich, **4**, 1—112 (1936).
2. Apeland K., Popov E. P., *Analysis of Bending Stresses in Translational Shells.* International Colloquium on Simplified Calculation Methods, Report 1/2, Brussels, September 4—6, 1961. North-Holland Publishing Company-Amsterdam, 1962, 9—43.
3. Ban, Shizuo, *Formänderung der hyperbolischen Paraboloidschale.* Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Abhandlungen. Zürich, **12**, 1—16 (1953).
4. Banerjee, S. P., *Direct Analysis of Doubly-Curved Shells.* The Indian Concrete Journal, **33**, 12, 417—418 (1959).
5. — *Une méthode numérique pour le calcul des voiles minces à double courbure.* Béton Armé, **4**, 24, *6—13* (1960) (trad. după The Indian Concrete Journal, ian. 1958).
6. Beguin, G. H., *A Type of Solution for Thin Shells in the Form of an Hyperbolic Paraboloid.* Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, **11**, 5, *356—367* (1960).
7. Beleş, A. A., Soare, M., *Paraboloidul eliptic şi hiperbolic în construcţii.* Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1964.
8. Bongard, W., *Zur Theorie und Berechnung von Schalentragwerken in Form gleichseitiger hyperbolischer Paraboloide.* Bautechnik-Archiv, **15**, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1959.
9. Candela, F., *Warped Surfaces: Hyperbolic Paraboloids.* Proceedings of a Conference on Thin Concrete Shells. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge-Massachusetts, June 21 to 23, 1954, 91—98.
10. — *Structural Applications of Hyperbolic Paraboloidal Shells.* Journal of the American Concrete Institute, **26**, *5* (1955).
11. — *Understanding the Hyperbolic Paraboloid.* Architectural Record. 191 (1958); 205 (1958).
12. — *General Formulas for Membrane Stresses in Hyperbolic Paraboloidal Shells.* Journal of the American Concrete Institute, **32**, *4*, 353—371 (1960).
13. Chetty, S. M. K., Tottenham H., *An Investigation into the Bending Analysis of Hyperbolic Paraboloid Shells.* The Indian Concrete Journal, **38**, 7, *248—258* (1964).
14. Chronowicz A., *Reinforced Concrete Roof to Swimming Pool.* Civil Engineering and Public Works Review, 320—324 (1963).
15. Cicala P., *Elastic Theory of Hypar Shells.* Journal of the American Concrete Institute, **59**, 1, 85—101 (1962).
16. — *Pannelli paraboloidici sollecitati a taglio.* Atti della Accademia delle Scienze di Torino, 97, 1962—1963.
17. Cicala P., Ventura G. L., *Sulla risoluzione numerica delle equazioni del „guscio piatto". La teoria elastica del pannello piatto di paraboloide iperbolico nella formazione matriciale.* Atti e rassegne tecnica, **XVII**, *9*, 303—113 (1963); **XVII**, 12 (1963).
18. Das Gupta N. C., *Using Finite Difference Equations to Find the Stresses in Hypar Shells.* Civil Engineering and Public Works Review, **56**, *655*, 199—201 (1961).
19. — *Edge Disturbances in a Hyperbolic Paraboloid.* Civil Engineering and Public Works Review, 220—222 (1963).
20. Dierks K., *Windbeanspruchung einer hyperbolischen Paraboloidschale.* Der Bauingenieur, **37**, *7*, 258—262 (1962).
21. Dimitrijević D., *O soluţie numerică a plăcii curbe subţiri în formă de paraboloid hiperbolic pleoştit* (în l. sîrbă). Nase gradevinarstvo, **XVII**, *10*, 1833—1842 (1963).

22. Duddeck H., *Die Biegetheorie der flachen hyperbolischen Paraboloidschale* $z = cxy$. Ingenieur-Archiv, **XXXI**, *1*, 44—78 (1962).
23. Faber Colin, *Candela | The Shell Builder*. The Architectural Press, London, 1963.
24. Flügge W., *Statik und Dynamik der Schalen* (ed. 3). Verlag von Julius Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1962.
25. Flügge W. Geyling F. T., *A General Theory of Deformations of Membrane Shells*. International Association for Bridge and Structural Engineering. Publications. Zürich, **17**, 23 (1957).
26. Gerard F. A., *The Analysis of Hyperbolic Paraboloidal Shell Roofs*. Transactions of the E.I.C., **3**, *1*, 32—42 (1959).
27. — *Calculation of Flexure and Torsion in Plates and Hyperbolic Paraboloidal Shells, Using a Digital Computer*. Transactions of the E.I.C., *4*, *3*, 101—107 (1960).
28. Gioncu V., *Teoria de încovoiere a paraboloidului hiperbolic delimitat de generatoare drepte*. St. cerc. mec. apl. **15**, *1*, 217—234 (1964); **15**, *2*, 339—359 (1964).
29. Harrenstien, H. P., *Hyperbolic Paraboloidal Umbrella Shells Under Vertical Loads*. Journal of the American Concrete Institute, **32**, *4*, 385—401 (1960).
30. Jenssen, O., *Shallow Hyperbolic Paraboloidal Shells*. Acta Polytechnica Scandinavica, Civil Engineering and Building Construction Series No. *14*, Trondheim, 1961.
31. Laffaille, B., *Les voiles minces en forme de paraboloïde hyperbolique*. Le Génie Civil, **CIV**, *18*, 409—410 (1934).
32. Lin, T. Y., Itaya, R., *Tests of a Prestressed Concrete Hyperbolic Paraboloidal Shell*. Journal of the Prestressed Concrete Institute, **3**, *1*, 70—78 (1958).
33. Loof, H. W., *Eenvoudige formules voor de buigingsstoringen in hypparschalen, die volgens beschrijvenden zijn begrensd*. Stevin Laboratorium, Technische Hogeschool Delft, Rapport 8—61—3—hr. 1, 1961.
34. Matsuoka O., *Bending Theory of Elastic Shallow Thin Hyperbolic Paraboloidical Shell*. Memoirs of the Faculty of Industrial Arts, Kyoto Technical University, Science and Technology, *9*, 47—59 (1960).
35. Meng Ching-Hung, Laushey L. M., *Stresses in Hyperbolic Paraboloid Shells Loaded Laterally*. Bulletin of International Association of Shell Structures, *15*, (1963).
36. Mihailescu M., *Teoria de încovoiere la paraboloizii hiperbolici*. St. cerc. mec. apl. **VII**, *2*, 421 (1956).
37. Natalini M., *Calculo aproximado de una estructura laminar de doble curvatura*. Estrutura, *23*, 134—159 (1960); *24*, (1960).
38. Parme A., *Hyperbolic Paraboloids and Other Shells of Double Curvature*. Proceedings A.S.C.E., Journal of the Structural Division, *82*, Sept., 1956.
39. — *Elementary Analysis of Hyperbolic Paraboloid Shells*. Bulletin of the International Association for Shell Structures, *4*, (1960).
40. Pevsner M., Traum, E., *The Behaviour of an Assymmetrical Hypar Shell Under Irregular Loading*. Bulletin of the International Association for Shell Structures, *15* (1963).
41. Pflüger A., *Elementare Schalenstatik*, ed. 3. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1960.
42. Polonyi S., *Berechnung von hyperbolischen Paraboloidschalen über beliebigen Viereck-Grundrissen*. Beton und Stahlbetonbau, **57**, *9*, 218—220 (1962).
43. Popov E. G., Medwadowski St. J., *Membrane Stress in Hyperbolic Paraboloid Shells Circular in Plan*. International Association for Bridge and Structural Engineering, Zürich, **20**, 283—297 (1960).
44. Rawmaswamy G. S., Rao Keshava M. N., *The Membrane Theory Applied to Hyperbolic Paraboloid Shells*. The Indian Concrete Journal, **35**, *5*, 156—171 (1961).
45. Rao M. N. Keshava, *Analysis of the General Hyperbolic Paraboloidal Shell*. The Indian Concrete Journal **33**, *12*, 450—454 (1959).
46. Reissner E., *Some Aspects of the Theory of Thin Elastic Shells*. Proceedings of a Conference on Thin Concrete Shells. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge-Massachusetts, June 21 to 23, 1954, 81—90. Vezi şi
46 a. — *On Some Aspects of the Theory of Thin Elastic Shells*. Boston Society of Civil Engineers, *100* (1955).
47. Ross C., *The Simplified Design of Concrete Hyperbolic Paraboloid Roofs*. Civil Engineering and Public Works Review, **56**, *654*, 65—66 (1961).

48. SOARE M., *Application des équations aux différences finies au calcul des coques.* Eyrolles, Paris, 1962.
49. SZMODITS K., *Rezolvarea numerică a plăcilor plane şi a plăcilor curbe subţiri* (în l. ungară). Éti, Budapest, 1962.
50. — *Suprafeţe strîmbe fără reacţiuni de membrană* (în l. ungară). A Magyar Tudományos Akadémia, Müszaki Tudományok osztálnyának, **33**, *1—4*, 197—200 (1964).
51. — *Investigation of a Hypar Shell Over Rectangular Base.* Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, **45**, *1—2*, 159—165 (1964).
52. TESTER K. G., *Beitrag zur Berechnung der hyperbolischen Paraboloidschale.* Ingenieur-Archiv, **XVI**, 39—44 (1947).
53. VENTURA G. L., CICALA P., *Stati di tensione nei pannelli paraboloidici sottili poco svergolati.* Atti della Accademia delle Scienze di Torino, *97*, 1962—63.

FLAMBAJUL LATERAL AL GRINZILOR PENDULARE CONTINUE SUB SARCINI TRANSVERSALE CONCENTRATE ŞI UNIFORM DISTRIBUITE

de VICTOR DROBOTĂ
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

539.4

Articolul se ocupă de stabilirea sarcinii critice de flambaj pentru grinzile continue de rigiditate transversală mică, susţinute pe reazeme care permit rotirea grinzii în orice direcţie, încărcate cu o sarcină uniform distribuită la înălţimea fibrei medii deformate a grinzii şi cu o sarcină concentrată aplicată la mijlocul intervalului dintre două reazeme de la capătul grinzii. Sînt tratate cîteva cazuri-limită care prezintă interes din punct de vedere practic.

A. GRINDA SUSPENDATĂ PE DOUĂ REAZEME

1. ECUAŢIILE DE DEFORMAŢIE LA ÎNCOVOIERE ŞI RĂSUCIRE

Se consideră o grindă de rigiditate transversală mică de deschidere l, suspendată la capete pe două reazeme care permit rotirea grinzii în orice direcţie, situate la distanţa $\frac{h}{2}$ de fibra medie deformată a grinzii. Grinda se consideră încărcată cu o sarcină uniform repartizată p aplicată la înălţimea fibrei medii şi cu o sarcină concentrată P aplicată la mijlocul distanţei dintre reazeme, la distanţa $\frac{h}{2}$ de fibra medie deformată a grinzii.

Atît punctele de rezemare, cît şi cele de aplicare a sarcinilor se găsesc pe axa principală de inerţie a secţiunii transversale a grinzii iniţial în plan vertical (fig. 1).

Pentru un anumit raport $\frac{pl}{P} = k$, grinda rămîne în acest plan atîta timp cît sarcinile au valori mici. Făcînd să crească continuu valoarea acestora, menţinînd însă constantă valoarea raportului dintre ele, la un

moment dat grinda părăseşte această poziţie stabilă de echilibru şi ia o nouă poziţie rotită în jurul axei ei $x-x$ şi încovoiată lateral, ca în figura 2.

La valori mai mari ale sarcinilor, deformaţiile şi unghiul de rotire al grinzii faţă de poziţia iniţială cresc mult şi sistemul redevine stabil.

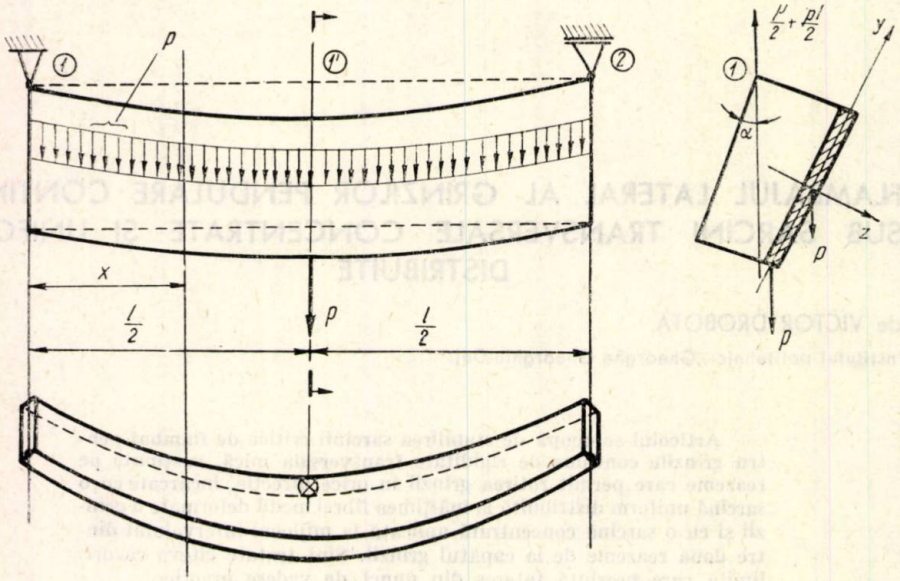


Fig. 1

Pentru stabilirea valorii sarcinii critice sub care se produce pierderea stabilităţii elastice se consideră o secţiune situată la mijlocul distanţei dintre reazeme (fig. 2).

Pe această figură s-a notat cu y, z sistemul de axe rectangulare situat de-a lungul axelor de simetrie ale secţiunii, într-un punct situat de-a lungul fibrei medii deformate a grinzii la distanţa x de reazemul 1. S-a notat de asemenea cu α unghiul pe care îl face cu verticala axa Oy a secţiunii din dreptul reazemului 1, respectiv 2, care reprezintă unghiul cu care această axă s-a rotit faţă de poziţia sa iniţială. S-a notat cu φ unghiul cu care se roteşte axa Oy a unei secţiuni oarecare a grinzii faţă de aceeaşi axă situată în planul secţiunii din dreptul reazemului 1. S-a notat cu w deformaţia grinzii produsă prin flambaj lateral pentru o secţiune oarecare situată pe fibra medie deformată a grinzii, măsurată pe axa z considerînd drept origine axa Oz a secţiunii din dreptul reazemului 1. Valorile φ_{max}, respectiv w_{max}, sînt valorile φ, respectiv w, în secţiunea corespunzătoare mijlocului distanţei dintre reazemele 1 şi 2.

Cu aceste notaţii, momentele de încovoiere faţă de direcţiile principale de inerţie, precum şi momentul de răsucire pentru o secţiune oarecare

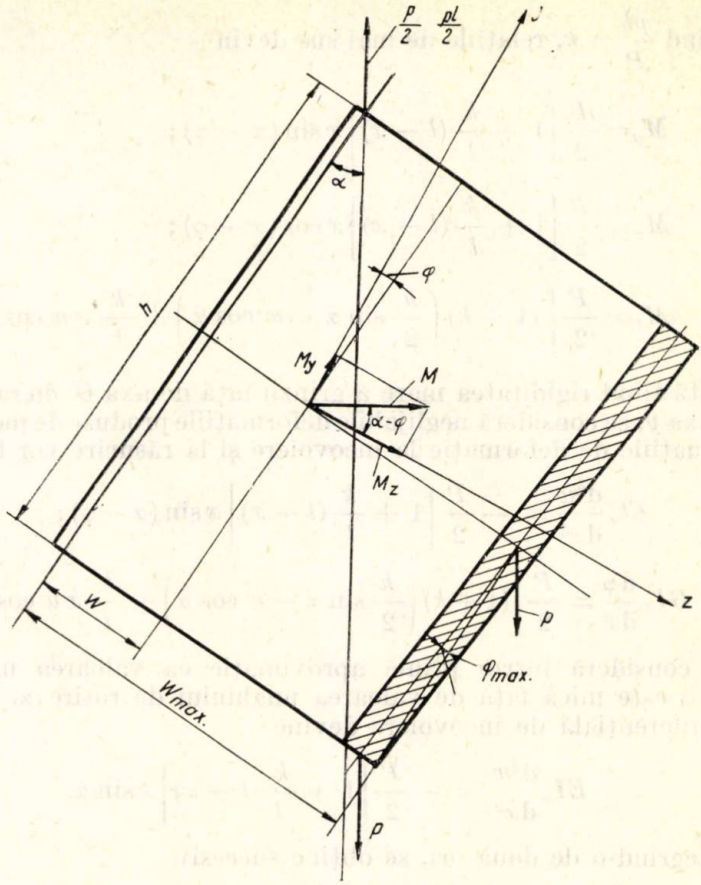


Fig. 2

a grinzii perpendiculară pe fibra medie deformată situată la distanţa x de reazemul 1 ales drept origine, sînt date de relaţiile

$$M_y = \frac{p}{2} x(l-x)\sin(\alpha-\varphi) + \frac{P}{2} x \sin(\alpha-\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}[p(l-x)+P]\, x \sin(\alpha-\varphi);$$

$$M_z = \frac{p}{2} x(l-x)\cos(\alpha-\varphi) + \frac{P}{2} x \cos(\alpha-\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}[p(l-x)+P]\, x \cos(\alpha-\varphi); \qquad (1)$$

$$M_t = \frac{1}{2}(P+pl)\left(\frac{h}{2}\sin\alpha - w\cos\alpha\right) + px\frac{w}{2}\cos\alpha$$

sau, notînd $\frac{pl}{P} = k$, relaţiile de mai sus devin

$$M_y = \frac{P}{2}\left[1 + \frac{k}{l}(l - x)\right] x \sin(\alpha - \varphi);$$

$$M_z = \frac{P}{2}\left[1 + \frac{k}{l}(l - x)\right] x \cos(\alpha - \varphi); \tag{2}$$

$$M_t = \frac{P}{2}\left[(1 + k)\left(\frac{h}{2}\sin\alpha - w\cos\alpha\right) + \frac{k}{l} x w \cos\alpha\right].$$

Dată fiind rigiditatea mare a grinzii faţă de axa Oz în raport cu cea faţă de axa y, se consideră neglijabile deformaţiile produse de momentul M_z.

Ecuaţiile de deformaţie la încovoiere şi la răsucire vor fi

$$EI_y \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{P}{2}\left[1 + \frac{k}{l}(l - x)\right] x \sin(\alpha - \varphi);$$

$$GI_d \frac{d\varphi}{dx} = \frac{P}{2}\left[(1 + k)\left(\frac{h}{2}\sin\alpha - w\cos\alpha\right) + \frac{k}{l} x w \cos\alpha\right]. \tag{3}$$

Se consideră într-o primă aproximaţie că valoarea unghiului de răsucire φ este mică faţă de valoarea unghiului de rotire α. Cu aceasta, ecuaţia diferenţială de încovoiere devine

$$EI_y \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{P}{2}\left[1 + \frac{k}{l}(l - x)\right] x \sin\alpha. \tag{4}$$

Integrînd-o de două ori, se obţine succesiv

$$EI_y \frac{dw}{dx} = -\frac{P}{2}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{k}{l}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right] \sin\alpha + C_1;$$

$$EI_y w = -\frac{P}{2}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{k}{l}\left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right)\right] \sin\alpha + C_1 x + C_2. \tag{5}$$

Determinarea constantelor se face punînd următoarele condiţii la limită :

$$x = 0; \qquad w = 0;$$

$$x = \frac{l}{2}; \qquad w' = 0.$$

de unde rezultă

$$C_2 = 0; \quad C_1 = \frac{Pl^2}{48}(3 + 2k) \sin\alpha.$$

Introducînd valorile acestor constante în expresia ce dă pe w se obţine

$$EI_y w = -\frac{Px^3}{24}\left[2+\frac{k}{l}(2l-x)\right]\sin\alpha+\frac{Pl^2x}{48}(3+2k)\sin\alpha\cdot \qquad (6)$$

În cele ce urmează se studiază în ce măsură este valabilă ipoteza făcută, că unghiul de răsucire φ este neglijabil faţă de unghiul de rotire α. Pentru aceasta se foloseşte ecuaţia a 2-a a sistemului (3), în care se înlocuieşte valoarea lui w cu cea din relaţia (6).

Se obţine astfel:

$$GI_d\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{P}{2}\left\{(1+k)\frac{h}{2}\sin\alpha+w\cos\alpha\left[\frac{kx}{l}-(1+k)\right]\right\},$$

sau

$$GI_d\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{P}{2}\left\{(1+k)\frac{h}{2}\sin\alpha-\left[\frac{Px^3}{48\,EI_y}\left(2+\frac{k}{l}(2l-x)\sin 2\alpha-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{Pl^2x}{96\,EI_y}(3+2k)\sin 2\alpha\right]\left[\frac{kx}{l}-(1+k)\right]\right\}.$$

Desfăcînd parantezele ordonînd după puterile descrescătoare ale lui x şi reducînd termenii asemenea, se obţine

$$GI_d\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}=\frac{P^2\sin 2\alpha}{96\,EI_y}\left[\frac{k^2}{l^2}x^5-\frac{3k(1+k)}{l}x^4+2(1+k)^2x^3+\right.$$

$$\left.+k\left(\frac{3}{2}+k\right)lx^2-(1+k)\left(\frac{3}{2}+k\right)l^2x\right]+\frac{P}{4}(1+k)\,h\sin\alpha.$$

Integrînd această relaţie, se obţine

$$GI_d\varphi=\frac{P^2\sin 2\alpha}{96\,EI_y}\left[\frac{k^2}{l^2}\frac{x^6}{6}-\frac{3k(1+k)}{l}\frac{x^5}{5}+2(1+k)^2\frac{x^4}{4}+\right.$$

$$\left.+kl\left(\frac{3}{2}+k\right)-l^2(1+k)\left(\frac{3}{2}+k\right)\frac{x^2}{2}\right]+\frac{P}{4}(1+k)\,x\,h\sin\alpha+C_1'. \qquad (7)$$

Determinarea constantei C_1' se face punînd condiţia limită că pentru

$$x=0;\quad \varphi=0 \text{ şi rezultă } C_1'=0$$

Valoarea maximă a unghiului φ se obţine pentru cazul studiat făcînd în relaţia (7) $x=\dfrac{l}{2}$

$$GI_d\,\varphi_{\max}=-\frac{P^2l^4\sin 2\alpha}{2^{12}\times 3^2\times 5\,EI_y}(131k^2+396k+300)+\frac{Pl}{2^3}(1+k)\,h\sin\alpha.$$

Pentru obținerea acestui unghi, φ_{max} funcție numai de valoarea unghiului α, se elimină, între această expresie și expresia (10), dedusă mai departe, valoarea forței

$$P = \frac{(2+k)\,2^5 \times 3 \times 5}{8k^2 + 25\,k + 20} \cdot \frac{EI_v\,h}{l^3}$$

Rezultă

$$GI_d\,\varphi_{max} = \frac{(2+k)^2}{(8k^2+25k+20)^2}\left(\frac{EI_v\,h}{l^3}\right)^2 \frac{2^{10} \times 3^2 \times 5^2}{2^{12} \times 3^2 \times 5\,EI_v}(131\,k^2 + 396\,k +$$

$$+ 300)\,l^4 \sin 2\alpha + \frac{(1+k)(2+k)\,2^5 \times 3 \times 5}{8k^2+25\,k+20} \cdot \frac{EI_v h^2 l}{2^3 l^3} \sin \alpha.$$

Făcînd simplificările necesare și admițînd că unghiul α este foarte mic, $\sin 2\alpha = 2\alpha$ și $\sin \alpha = \alpha$ și se obține

$$\varphi_{max} = \frac{5\,(k+2)}{2\,(8k^2+25k+20)^2}(61\,k^3 + 134\,k^2 - 12k - 120)\frac{EI_v\,h^2}{GI_d\,l^2} \qquad (8)$$

sau

$$\varphi_{max} = \Phi \frac{EI_v}{GI_d} \cdot \frac{h^2}{l^2} \text{ unde } \Phi = \frac{5\,(k+2)\,(61\,k^3 + 134\,k^2 - 12\,k - 120)}{2\,(8\,k^2 + 25\,k + 20)^2}$$

pentru valori ale lui $k>0$ funcția Φ este o funcție continuă și nu are maxim sau minim. Această funcție crește continuu de la $k=0$ la $k=\infty$ pentru care valoarea lui Φ este $\Phi = -\frac{3}{2}$, respectiv $\Phi = \frac{305}{128}$, iar valorile corespunzătoare lui φ_{max} sînt

$$\varphi_{max} = -\frac{3}{2}\frac{GI_d}{EI_v}\frac{h^2}{l^2}\alpha \text{ respectiv } \varphi_{max} = \frac{305}{128}\frac{EI_v}{GI_d}\frac{h^2}{l^2}\alpha.$$

Se observă că unghiul φ este mic față de unghiul de rotire α, ipoteza fiind verificată. De exemplu pentru o bară de oțel de secțiune dreptunghiulară îngustă de lățime b și înălțime h rapoartele

$$\frac{E}{G} = 2\,(1+\mu) = 2{,}6 \text{ și } \frac{I_v}{I_d} = \frac{1}{4}.$$

Înlocuind aceste valori în relația de mai sus, în care se presupune de asemenea că $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$, se obține

$$\text{pentru } k = 0 \quad \varphi_{max} = \quad 0{,}0153\,\alpha \qquad (9)$$

$$k = \infty \quad \varphi_{max} = -\,0{,}00975\,\alpha$$

Funcţia Φ se anulează pentru valoarea lui $k=0{,}84$. Pentru această valoare a lui k, $\varphi_{max} = 0$.

Neglijînd deci valoarea unghiului φ într-o secţiune oarecare a grinzii în raport cu unghiul de rotire al secţiunii, eroarea ce se face este sub 2%, acceptabilă din punct de vedere tehnic.

2. CALCULUL SARCINII CRITICE

Pentru stabilirea relaţiei care dă sarcina critică se va aplica metoda energetică. În acest caz lucrul mecanic de deformaţie va fi cel dat de momentul de încovoiere M_y, cel dat de M_z şi M_t putînd fi neglijate în virtutea ipotezelor de calcul făcute.

Expresia lucrului mecanic de deformaţie al forţelor interioare va fi dat de relaţia

$$L_i = \frac{2}{2EI_y}\int_0^{\frac{l}{2}}\left[\left(\frac{P}{2}+\frac{pl}{2}\right)x-\frac{px^2}{2}\right]^2\alpha^2\,dx=\frac{P^2\alpha^2}{4EI_y}\int_0^{\frac{l}{2}}\left[(1+k)\,x-\frac{kx^2}{l}\right]^2 dx\cdot$$

Efectuînd integrala, se obţine

$$L_i=\frac{8k^2+25k+20}{2^7\times 3\times 5}\,\frac{P^2\alpha^2 l^3}{EI_y}$$

Lucrul mecanic exterior va fi dat de relaţia

$$L_e=\int_0^l p\,\alpha\,w\,dx+P\,w_1'\,\alpha-\frac{phl\,\alpha^2}{4}-\frac{Ph\,\alpha^2}{2}$$

w se calculează după una dintre metodele cunoscute de calcul al deformaţiilor la încovoiere într-o secţiune oarecare a grinzii şi este

$$W_{11'}=\left[\frac{px^4}{24}-\left(\frac{pl}{2}+\frac{P}{2}\right)\frac{x^3}{6}+\left(\frac{pl^3}{24}+\frac{Pl^2}{16}\right)x\right]\alpha=$$

$$=\left[\frac{k\,Px^4}{24\,l}-\frac{P(1+k)}{12}x^3+\frac{P(2k+3)}{48}l^2x\right]\alpha$$

w_1' se obţine din aceeaşi relaţie în care se pune $x=\frac{l}{2}$; se obţine

$$w_1'=\frac{8+5k}{2^7\times 3}\,\frac{Pl^3\alpha}{EI_y}$$

cu aceasta expresia lucrului mecanic exterior devine

$$L_e=\frac{2k\,P^2\alpha^2}{l\,E\,I_y}\left[\frac{k}{24\,l}\int_0^{\frac{l}{2}}x^4\,dx-\frac{1+k}{12}\int_0^{\frac{l}{2}}x^3\,dx+\frac{l^2}{48}(2k+3)\int_0^{\frac{l}{2}}x\,dx\right]+$$

$$+\frac{8+5k}{2^7\times 3}\,\frac{P^2l^3\alpha^2}{EI_y}-\frac{Ph\,\alpha^2}{4}(2+k).$$

Efectuînd integrala, se obţine

$$L_e = \frac{k(16k+25)}{2^7 \times 3 \times 5} P^2 \alpha^2 l^3 + \frac{8+5k}{2^7 \times 3} \frac{P^2 \alpha^2 l^3}{EI_y} - \frac{Ph\alpha^2}{4}(2+k).$$

Egalînd $L_e = L_i$, se obţine

$$\frac{8k^2+25k+20}{2^7 \times 3 \times 5} \frac{P^2 \alpha^2 l^3}{EI_y} = \frac{k(16k+25)}{2^7 \times 3 \times 5} P^2 \alpha^2 l^3 + \frac{8+5k}{2^7 \times 3} \frac{P^2 \alpha^2 l^3}{EI_y} - \frac{Ph\alpha^2}{4}(2+k).$$

Simplificînd cu P, trecînd toţi termenii în membrul I cu excepţia ultimului, aducînd la acelaşi numitor şi reducînd termenii asemenea, se obţine valoarea sarcinii critice

$$P = \frac{2^5 \times 3 \times 5(2+k)}{8k^2+25k+20} \frac{EI_y h}{l^3}. \tag{10}$$

Această expresie se mai poate scrie sub forma $P = K\frac{EI_y h}{l^3}$, unde

$$K = 2^5 \times 3 \times 5 \frac{2+k}{8k^2+25k+20}.$$

Funcţia K este o funcţie continuă descrescătoare pentru $k > 0$. Valorile limită ale acestei funcţii sînt următoarele:

$k = 0$; $K = 48$ corespunde grinzii încărcate numai cu sarcină concentrată aplicată pe mijlocul deschiderii dintre reazeme;

$k = \infty$; $K = 0$.

Interes prezintă cazul în care multiplicăm şi membrul I şi membrul II al relaţiei (10) cu k cînd membrul I devine $(pl) = kP$, sarcina critică pentru cazul în care grinda este încărcată cu o sarcină uniform distribuită. În acest caz pentru $k = \infty$; $K' = kK = 60$.

B. GRINDA SUSPENDATĂ PE MAI MULTE REAZEME

În acelaşi mod ca şi pentru grinda suspendată pe două reazeme se poate stabili valoarea sarcinii critice şi pentru o grindă pe mai multe reazeme. În acest caz se va studia grinda continuă avînd sarcina concentrată la mijlocul deschiderii primului interval dintre reazeme (intervalul de la capăt), caz în care se obţine valoarea cea mai mică a sarcinii critice şi o sarcină uniform distribuită pe toată lungimea grinzii. Locul de aplicare a sarcinilor este acelaşi ca în cazul studiat. Se va considera distanţa dintre reazeme aceeaşi pentru toate intervalele grinzii.

De asemenea se va neglija răsucirea datorită unghiului mic de răsucire al acesteia în comparaţie cu rotirea ei faţă de poziţia iniţială.

Valoarea sarcinii critice se stabileşte din egalitatea lucrului mecanic de deformaţie al forţelor interioare cu cel al forţelor exterioare pentru întreaga lungime a grinzii, relaţie care pentru un caz general se poate scrie în modul următor

$$\frac{1}{2EI_y}\int M_y^2\,dx = \int p\alpha w\,dx + P w_1' - \frac{n p h l \alpha^2}{4} - \frac{P h \alpha^2}{2}$$

unde w este deformaţia într-o secţiune oarecare a grinzii pe direcţia axei z,

w_1' — deformaţia în secţiunea din dreptul sarcinii P pe direcţia axei z,

n — numărul intervalelor dintre reazeme, celelalte notaţii avînd semnificaţia de mai înainte.

Grinda pe trei reazeme echidistante (fig. 3). Pentru scrierea relaţiei de mai sus se calculează mai întîi momentul pe reazemul intermediar cu ajutorul relaţiei lui CLAPEYRON

$$4M_2 l + 6\left(\frac{Pl}{4}\frac{l}{2}\frac{l}{2}\frac{1}{l} + \frac{2}{3}\frac{pl^2}{8}l\frac{l}{2}\frac{1}{l}2\right) = 0$$

de unde

$$M_2 = -\frac{3}{32}Pl - \frac{pl^2}{8}$$

Pe direcţia axei y

$$M_{2y} = \left(-\frac{3}{32}Pl - \frac{pl^2}{8}\right)\alpha.$$

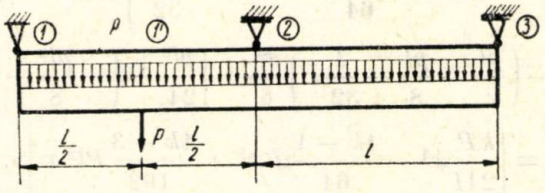


Fig. 3

Reacţiunile în reazeme vor fi

$$V_1 = \left(\frac{3}{8}pl + \frac{13}{32}P\right)\alpha; \quad V_3 = \left(\frac{3}{8}pl - \frac{3}{32}P\right)\alpha.$$

Momentele încovoietoare pe direcția axei y pentru diversele porțiuni ale grinzii sînt date de relațiile

$$M_{11'} = \left(\frac{3}{8} p l x - \frac{p x^2}{2} + \frac{13}{32} P x\right) \alpha = \left[-\frac{kP}{2l} x^2 + \frac{Px}{32}(12k + 13)\right] \alpha ;$$

$$M'_{12} = \left(\frac{pl}{2} x - \frac{p x^2}{2} - \frac{p l^2}{8} + \frac{19}{32} P x\right) \alpha = -\left[\frac{kP}{2l} x^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{Px}{32}(16k + 19) - \frac{Pl}{32}(4k + 3)\right] \alpha ;$$

$$M_{23} = \left(\frac{3}{8} p l x - \frac{p x^2}{2} - \frac{3}{32} P x\right) \alpha = \left[-\frac{kP}{2l} x^2 + \frac{kPx}{32}(12k - 3)\right] \alpha .$$

În aceste relații am notat prin $k = \frac{pl}{P}$.

Se calculează apoi săgeata într-o secțiune oarecare a grinzii pe diverse porțiuni de grindă și se obține

$$EI_y w_{11'} = \left\{\frac{p x^4}{24} - \left(\frac{pl}{2} - \frac{pl}{8} - \frac{3}{32} P + \frac{P}{2}\right)\frac{x^3}{6} + \left[\frac{pl^3}{24} + \left(-\frac{pl^2}{8} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{3}{32} Pl\right)\frac{l}{6} + \frac{Pl^2}{16}\right] x\right\} \alpha = \left[\frac{kP}{24l} x^4 - \frac{12k+13}{192} P x^3 + \frac{4k+9}{192} P l^2 x\right] \alpha ;$$

$$EI_y w_{1'2} = \left\{\frac{p x^4}{24} - \left(\frac{pl}{2} + \frac{pl}{8} + \frac{3}{32} P + \frac{P}{2}\right)\frac{x^3}{6} + \left(\frac{pl^2}{8} + \frac{3Pl}{32}\right)\frac{x^2}{2} + \left[\frac{pl^3}{24} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{l}{3}\left(-\frac{pl^2}{8} - \frac{3Pl}{32}\right) + \frac{Pl^2}{16}\right] x\right\} \alpha = \left[\frac{kP}{24l} x^4 - \frac{20k + 19}{192} P x^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{4k + 3}{64} P l x^2 + \frac{P l^2 x}{32}\right] \alpha ;$$

$$EI_y w_{23} = \left\{\frac{p x^4}{24} - \left(\frac{pl}{2} - \frac{pl}{8} - \frac{3}{32} P\right)\frac{x^3}{6} + \left[\frac{pl^3}{24} + \left(-\frac{pl^2}{8} - \frac{3Pl}{32}\right)\frac{l}{6}\right] x\right\} \alpha =$$

$$= \left[\frac{kP}{24l} x^4 - \frac{4k - 1}{64} P x^3 + \frac{4k - 3}{192} P l^2 x\right] \alpha .$$

Săgeata în dreptul secțiunii $1'$ pe direcția axei y se obține din relația care dă săgeata pe porțiunea $11'$ făcînd $x = \frac{l}{2}$ și are valoarea

$$EI_y w'_1 = P l^3 \alpha \left(\frac{k}{2^7 \times 3} - \frac{12k + 13}{2^9 \times 3} + \frac{4k + 9}{2^7 \times 3}\right) = \frac{P l^3 \alpha}{2^9 \times 3}(8k + 23).$$

Lucrul mecanic de deformație al forțelor interioare este

$$2EI_y L_i = \int M_y^2 \, dx = P^2 \alpha^2 \left[\frac{2k^2}{4l^2} \int_0^{\frac{l}{2}} x^4 \, dx + \left(\frac{12k+13}{32} \right)^2 \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \, dx - \right.$$

$$- \frac{k(12k+13)}{32} \int_0^{\frac{l}{2}} x^3 \, dx + \left(\frac{16k+19}{32} \right)^2 \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \, dx + \left(\frac{4k+3}{32} \right)^2 l^2 \int_0^{\frac{l}{2}} dx -$$

$$- \frac{k(16k+19)}{32\,l} \int_0^{\frac{l}{2}} x^3 \, dx + \frac{k(4k+3)}{32} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \, dx - \frac{2l}{32^2} (16k+19)(4k+$$

$$\left. + 3) \int_0^{\frac{l}{2}} x \, dx + \frac{k^2}{4l^2} \int_0^{l} x^4 \, dx + \left(\frac{12k-3}{32} \right)^2 \int_0^{l} x^2 \, dx - \frac{k(12k-3)}{32} \int_0^{l} x^3 \, dx. \right.$$

Efectuînd integralele aducînd la același numitor și reducînd termenii asemenea, se obține pentru L_i următoarea expresie

$$L_i = \frac{P^2 l^3 \alpha^2}{2^{11} \times 3 \times 5 EI_y} (96k^2 + 110k + 230).$$

Calculul lucrului mecanic exterior se face după cum urmează

$$L_{e_1} = \int p \alpha w \, dx = \frac{kP^2 \alpha}{l EI_y} \left[\frac{k}{24} \int_0^{\frac{l}{2}} x^4 \, dx - \frac{12k+13}{192} \int_0^{\frac{l}{2}} x^3 \, dx + \right.$$

$$+ \frac{4k+9}{192} \int_0^{\frac{l}{2}} x \, dx + \frac{k}{24l} \int_0^{\frac{l}{2}} x^4 \, dx - \frac{20k+19}{192} \int_0^{\frac{l}{2}} x^3 \, dx + \frac{4k+3}{64} l \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \, dx +$$

$$\left. + \frac{l^2}{32} \int_0^{\frac{l}{2}} x \, dx + \frac{k}{24l} \int_0^{l} x^4 \, dx - \frac{4k-1}{64} \int_0^{l} x^3 \, dx + \frac{4k-3}{192} l^2 \int_0^{l} x \, dx. \right.$$

Efectuînd integralele, aducînd la același numitor și reducînd termenii asemenea, se obține

$$L_{e_1} = \frac{k P^2 l^3 \alpha^2}{2^{11} \times 3 \times 5} (192\,k + 160).$$

Altă parte a lucrului mecanic exterior va fi dată de relația

$$L_{e_2} = - \frac{Ph\alpha^2}{2} - \frac{2\,p\,h\,l\,\alpha^2}{4} = - \frac{Ph\alpha^2}{2} (1 + k).$$

Tot în valoarea lucrului mecanic exterior intră şi

$$L_{e_3} = Pw_{1'}\,\alpha = \frac{P^2 l^3 \alpha^2}{2^9 \times 3EI_y}(8k + 23).$$

Lucrul mecanic exterior va fi $L_e = L_{e_1} + L_{e_2} + L_{e_3}$.

Egalînd expresiile celor două lucruri mecanice interior şi exterior, se obţine

$$\frac{P^2 l^3 \alpha^2}{2^{11} \times 3 \times 5EI_y}(96\,k^2 + 110\,k + 230) = \frac{P^2 l^3 \alpha^2}{EI_y}\,\frac{k(192k + 160)}{2^{11} \times 3 \times 5} -$$

$$- \frac{Ph\,\alpha^2}{2}(1 + k) + \frac{P^2 l^3 \alpha^2}{EI_y}\,\frac{8k + 23}{2^9 \times 3}.$$

Aducînd la acelaşi numitor, reducînd termenii asemenea, simplificînd cu P, se obţine valoarea sarcinii critice

$$P = 2^9 \times 3 \times 5\,\frac{1 + k}{48\,k^2 + 105\,k + 115} \cdot \frac{EI_y h}{l^3},$$

expresie care se mai poate scrie

$$P = K\frac{EI_y h}{l^3} \text{ unde } K = 2^9 \times 3 \times 5\,\frac{1 + k}{48\,k^2 + 105\,k + 115}.$$

Funcţia K este o funcţie continuă descrescătoare pentru $k > 0$. Valorile limită ale acestei funcţii sînt următoarele:

$k = 0$; $K = 66{,}75$ corespunde grinzii continue pe trei reazeme echidistante avînd sarcina concentrată aplicată la mijlocul distanţei dintre două reazeme consecutive situate la capătul grinzii.

$k = \infty$; $K' = kK = 160$ şi corespunde grinzii continue pe trei reazeme echidistante, avînd sarcina uniform distribuită de-a lungul fibrei medii deformate a grinzii, care după deformare rămîne de aceeaşi parte a liniei care uneşte reazemele (flambajul simetric).

Procedînd în acelaşi mod, se obţine valoarea sarcinii critice pentru grinda pe patru reazeme echidistante încărcate cu o sarcină uniform distribuită pe toată lungimea grinzii şi cu o sarcină concentrată aplicată la mijlocul primului interval (fig. 4). Se obţine

$$P = 2^5 \times 3 \times 5\,\frac{3k + 2}{8k^2 + 13k + 14} \cdot \frac{EI_y h}{l^3}.$$

sau

$$P = K\frac{EI_y h}{l^3} \text{ unde } K = 2^5 \times 3 \times 5\,\frac{3k + 2}{8k^2 + 3k + 14}.$$

Valorile limită ale acestei funcții sînt în intervalul $k > 0$ următoarele

$$k = 0\,;\ K = 68{,}57\,;\ k = +\infty\,;\ K' = kK = 180.$$

Funcția K are un maxim pentru $k = 0{,}387$, pentru care valoarea lui $K = 480 \times 0{,}156 = 74{,}8$.

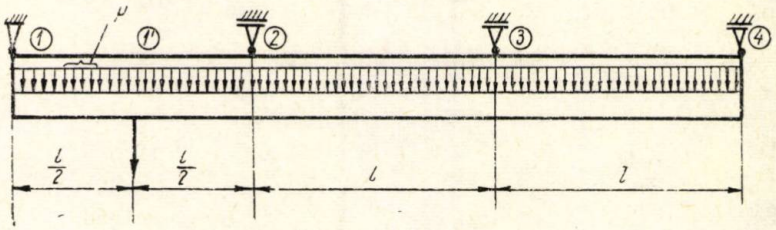


Fig. 4

Se regăsesc astfel valorile sarcinilor critice pentru grinda pe patru reazeme cu sarcină concentrată pe mijlocul unui interval de capăt și cea pentru flambajul simetric al grinzii pe patru reazeme echidistante cu sarcină uniform distribuită de-a lungul fibrei medii deformate.

CONCLUZII

Din punct de vedere practic interesează grinzile suspendate pe două și pe patru reazeme. În general valoarea sarcinii concentrate P este cu mult mai mare decît aceea a sarcinii uniform distribuite. De aceea se ia în considerație influența acesteia din urmă numai cînd raportul k are o anumită valoare.

Astfel pentru grinda suspendată pe două reazeme se va lua în considerație influența sarcinii uniform distribuite numai atunci cînd $k > 0{,}0575$, iar pentru grinda suspendată pe patru reazeme cînd $k > 0{,}075$.

Pentru valori ale lui k mai mici decît cele indicate, eroarea ce se face neglijînd sarcina uniform repartizată este sub 4%.

Primită la redacție la 11 ianuarie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. A. Petre, V. Drobotă, *Flambajul lateral al grinzilor continue pendulare*, St. cerc. mec. apl., **16**, *4* (1964).
2. V. Drobotă, *Flambajul lateral al grinzilor pendulare continue sub sarcini transversale uniform repartizate*, Bul. Inst. politehnic București, *6* (1964).

DETERMINAREA APROXIMATIVĂ A FORȚELOR SEISMICE ȘI A ALTOR ACȚIUNI DINAMICE LA CADRE MULTIETAJATE

de EINAR KEINTZEL

Direcția de sistematizare, arhitectură și proiectare a construcțiilor (DSAPC), Brașov

539.4

Se dau relații pentru determinarea aproximativă a forțelor de inerție ce acționează cadrele multietajate în cazul cutremurelor. Vibrațiile cadrelor provocate de cutremure se aproximează prin vibrațiile de lunecare ale unor bare, având secțiunea constantă pe porțiuni. Rigiditățile acestor structuri înlocuitoare se determină în funcție de rigiditățile stîlpilor și riglelor de cadru și ale unei eventuale zidării de umplutură. Se dau exemple de calcul pentru determinarea forțelor de inerție corespunzînd primelor trei forme de vibrații proprii ale unui cadru cu 16 niveluri.

Conform normativului condiționat pentru proiectarea construcțiilor civile și industriale din regiuni seismice P 13-63 [1], forțele seismice care acționează asupra unei construcții se determină pe baza unui calcul dinamic, adică se calculează ca forțe de inerție corespunzătoare vibrațiilor construcției provocate de cutremur. În cazul construcțiilor cu puține niveluri, acest calcul este destul de simplu, fiind de obicei suficientă considerarea primului mod de vibrații. În cazul construcțiilor multietajate devine însă necesară considerarea și a modurilor de vibrații superioare, calculul complicîndu-se astfel extraordinar de mult.

Pentru a simplifica calculul construcțiilor multietajate la forțe orizontale, s-a propus într-o serie de lucrări (de exemplu în [3], [4], [5], [6], [7], [11], [16], [17], [18]) considerarea în calcul în locul structurilor discontinue reale, avînd un număr mare de grade de libertate, a unor structuri înlocuitoare continue, avînd un număr infinit de grade de libertate. În felul acesta sistemul de ecuații statice corespunzînd structurii discontinue

este înlocuit printr-o singură ecuaţie diferenţială. Calculul seismic al construcţiilor multietajate este una dintre aplicaţiile cele mai potrivite ale acestei metode de calcul aproximative, exactitatea mai mare obţinută prin folosirea unor metode de calcul riguroase fiind din capul locului iluzorie, caracteristicile cutremurelor putîndu-se prevedea numai cu aproximaţie.

Cercetînd experimental vibraţiile unor construcţii multietajate, I. L. Korcinski a arătat [14], [15] că ele se pot aproxima în bune condiţii prin vibraţiile de lunecare ale unei bare, vibraţii ce sînt descrise prin ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial x^2} - \frac{m}{\beta A G} \frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial t^2} = 0. \tag{1}$$

Aici s-a notat:

x — distanţa unei secţiuni a barei de la origine, măsurată în lungul axei barei

$\overline{y}\,(x, t)$ — deplasarea secţiunii x în momentul t, măsurată perpendicular pe axa barei

m — masa distribuită a barei pe unitatea de lungime

A — secţiunea barei

G — modulul de elasticitate transversal

β — un coeficient ce depinde de forma secţiunii.

Rezolvînd ecuaţia (1) pentru consola de secţiune constantă avînd lungimea H, se obţine deplasarea corespunzătoare modului de vibraţie i

$$\overline{y}_i = C \sin \frac{(2i-1)\,\pi x}{2H} \sin\,(\omega_i t + \lambda) \tag{2}$$

şi perioada

$$T_i = \frac{4H}{2i-1} \sqrt{\frac{m}{\beta A G}} \tag{3}$$

I. L. Korcinski a dat în [14] şi soluţia exactă a ecuaţiei (1) pentru consola cu secţiune constantă pe porţiuni şi pentru consola avînd forma de piramidă.

În [14] nu se dau însă relaţii pentru stabilirea caracteristicilor elastice ale structurii continue înlocuitoare în funcţie de caracteristicile elastice ale structurii discontinue reale. În prima aproximaţie, această problemă a fost rezolvată de M. G. Salvadori [10], [19], care a exprimat perioada de vibraţie de ordinul i a unui cadru etajat, aproximat printr-o structură continuă, prin relaţia

$$T_i = \frac{4}{2i-1} \sqrt{\frac{n \sum_{k=1}^{n} M_k}{\overline{K}}} \tag{4}$$

în funcție de caracteristicile structurii discontinue, adică de valorile

$\overline{K} = \frac{12E}{H} \sum_{k=1}^{n} \frac{I_k}{h_k^2}$ — rigiditatea medie a stîlpilor pe înălțimea unui nivel

I_k — suma momentelor de inerție ale stîlpilor nivelului k

h_k — înălțimea nivelului k

M_k — masa aferentă nivelului k

n — numărul de niveluri

H — înălțimea cadrului.

Calculul propus de Salvadori are însă la bază două ipoteze care fac problematică aplicarea lui la cadre multietajate:

1. În expresia perioadei intervin numai rigiditățile stîlpilor, riglele considerîndu-se infinit rigide față de stîlpi. Această ipoteză este acceptabilă în cazul cadrelor cu puține niveluri. La cadrele multietajate însă, sarcinile verticale mari ce revin stîlpilor etajelor inferioare duc la secțiuni de stîlpi mari, astfel încît riglele nu se mai pot considera în nici un caz infinit rigide față de stîlpi.

2. Se consideră o rigiditate medie a stîlpilor constantă pe toată înălțimea cadrului.

La cadrele etajate, variația accentuată a forțelor axiale în stîlpi pe înălțimea cadrului duce însă la o variație accentuată a secțiunii și, ca atare, a rigidității stîlpilor. Se arată însă în [15] că variația rigidității stîlpilor are o influență mare asupra mărimii forțelor seismice corespunzătoare modurilor de vibrație superioare. Astfel, după cum rezultă din cele arătate mai jos, în cazul unui cadru etajat cu rigiditate uniformă solicitarea seismică maximă corespunzătoare modului de vibrație 3 nu reprezintă decît 20% din solicitarea seismică maximă corespunzătoare modului de vibrație 1, iar după cum rezultă din exemplul de calcul nr. 8 din [15], în cazul unei variații foarte puternice a rigidității stîlpilor solicitarea seismică maximă corespunzătoare modului de vibrație 3 poate să devină chiar și mai mare decît cea corespunzătoare modului de vibrație 1.

Lucrarea de față își propune stabilirea unei metode aproximative pentru determinarea forțelor seismice care acționează cadrele multietajate, bazată pe considerarea unei structuri înlocuitoare continue, ținînd cont însă și de deformațiile riglelor și de variația rigidității și a masei pe înălțimea cadrului.

Relațiile deduse pentru determinarea caracteristicilor dinamice ale cadrelor multietajate se pot folosi și la calculul acestor structuri la acțiunea rafalelor de vînt, a undelor de șoc [21] etc.

1. RELAȚII DE BAZĂ

Variația solicitărilor pe înălțimea unui cadru etajat determină o variație corespunzătoare a secțiunilor elementelor. De obicei, pentru a simplifica execuția, secțiunile elementelor nu se schimbă în dreptul fiecărui nivel, ci rămîn constante pe o porțiune din cadru cuprinzînd mai

multe niveluri. Ca atare, în cele ce urmează se vor considera cadre etajate avînd rigidităţile elementelor constante pe porţiuni.

S-a arătat în [13] că determinarea forţelor seismice la cadre etajate se poate face cu exactitate mare chiar în cazul cînd rotirile nodurilor situate la acelaşi nivel diferă mult între ele, considerîndu-se în calcul un cadru înlocuitor echivalent, redus la un stîlp echivalent şi o riglă echivalentă la fiecare nivel, rigidităţile acestor elemente fiind egale cu sumele rigidităţilor elementelor reale corespunzătoare.

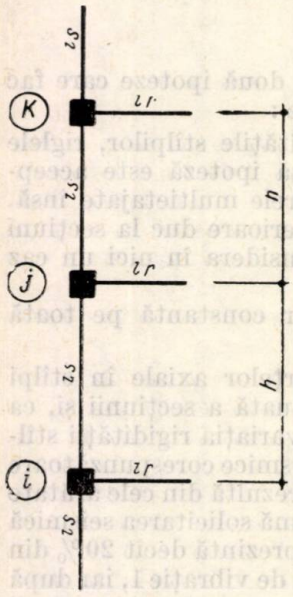


Fig. 1

În figura 1 s-a reprezentat un grup de trei noduri ale unui cadru înlocuitor echivalent, făcînd parte dintr-o porţiune de cadru cu rigidităţi constante.

Notînd

θ_i, θ_j, θ_k — rotirile nodurilor i, j, k,

$i = \dfrac{I}{l}$ — rigiditatea practică a unei bare,

Q_{jk} — forţa tăietoare acţionînd bara jk

E — modulul de elasticitate

şi aplicînd relaţiile din [2], ecuaţia nodului j devine

$$-\theta_i i_s + \theta_j (i_s + 6i_r + i_s) - \theta_k i_s = \frac{Q_{ij} + Q_{jk}}{2E} h. \quad (5)$$

Dacă se mai notează

$$\begin{aligned} \theta_j &= \theta \\ Q_{ij} &= Q \\ \theta_i &= \theta + \Delta_1\theta \\ \theta_k &= \theta - \Delta_2\theta \\ Q_{jk} &= Q - \Delta Q, \end{aligned} \quad (6)$$

ecuaţia (5) se poate aduce la forma

$$(\Delta_2\theta - \Delta_1\theta)\frac{i_s}{h} + \frac{6i_r}{h}\theta = \frac{1}{E}\left(Q - \frac{\Delta Q}{2}\right). \quad (7)$$

Pentru a trece la o structură înlocuitoare continuă, avînd rotiri de noduri aproximativ egale cu cele ale structurii discontinue reale, facem ca valorile i_s, i_r şi h să tindă către zero în aşa fel, încît rapoartele $\dfrac{i_s}{h}$ şi $\dfrac{i_r}{h}$ să rămînă constante. Atunci şi valorile $\Delta_1\theta$, $\Delta_2\theta$ şi ΔQ vor tinde către zero, iar relaţia (7) capătă forma

$$6\frac{i_r}{h}\theta = \frac{Q}{E}. \quad (8)$$

Pentru rotirea stîlpului jk se dă în [13] expresia

$$\psi_{jk} = \frac{\overline{M}_{jk}}{GEi_s} + \frac{\theta_j + \theta_k}{2} = \frac{Q_{jk}h}{12Ei_s} + \frac{\theta_j + \theta_k}{2}. \quad (9)$$

Introducînd și în (9) notațiile (6) și făcînd ca valorile i_s, i_r și h să tindă către zero în condițiile de mai sus, relația (9) devine

$$\lim_{h\to 0} \psi_{jk} = \frac{dy}{dx} = \frac{Q}{12E}\frac{h}{i_s} + \theta. \tag{10}$$

Eliminînd unghiul θ din relațiile (8) și (10), se obține

$$Q = 12E\frac{i_s}{h}\frac{i_r}{i_r + 2i_s}\frac{dy}{dx}. \tag{11}$$

Relația (11) este relația de bază pentru calculul deplasărilor structurilor înlocuitoare continue.

Valoarea

$$R = \frac{is}{h}\frac{i_r}{i_r + 2i_s}, \tag{12}$$

prin care se introduce influența deformațiilor atît a stîlpilor cît și a riglelor asupra deplasărilor unui cadru etajat, o vom denumi în cele ce urmează caracteristica de rigiditate a structurii. Cu notația (12) relația (11) devine

$$Q = 12ER\frac{dy}{dx}. \tag{13}$$

Forma relației (13), care aproximează deformațiile unui cadru etajat prin deformațiile unui sistem ce lucrează la lunecare, permite să se țină cont în mod simplu și de influența asupra deformațiilor cadrului a unei zidării de umplutură, lucrînd tot la lunecare.

După E. Țițaru și A. Cișmigiu rigiditatea la lunecare a zidăriei de umplutură din planul unui cadru la nivelul k se poate considera în mod aproximativ [8]

$$R_{zk} = 0{,}2\ A_{zk}E_z,$$

unde s-a notat

A_{zk} — suma ariilor nete în plan ale panourilor de zidărie de umplutură la nivelul k, din care s-au scăzut golurile de uși și ferestre și plinurile dintre goluri cu $h/b > 3$.

E_z — modulul de elasticitate al zidăriei.

În cazul existenței unei zidării de umplutură în planul cadrului, în relația (13) se va întroduce deci în locul caracteristicii de rigiditate a cadrului R caracteristica de rigiditate a ansamblului cadru-zidărie

$$R_1 = R + \frac{R_{zk}}{12E} = R + \frac{A_{zk}E_z}{60E}. \tag{14}$$

Forma relației (13), care permite adunarea directă a caracteristicilor de rigiditate, este deosebit de avantajoasă și pentru calculul deplasărilor unei construcții în ansamblu, avînd planșee rigide în planul lor și cadre cu

rigidități diferite cu și fără zidărie de umplutură. În acest caz se obțin prin adunare caracteristicile de rigiditate ale construcției în ansamblu, se determină deplasările, perioadele de vibrație și forțele seismice pentru construcția în ansamblu, iar forțele tăietoare ale construcției în ansamblu se repartizează cadrelor proporțional cu caracteristicile de rigiditate ale acestora la nivelul respectiv. Repartizarea forțelor orizontale ce revin cadrelor cu zidărie de umplutură între cadru și zidăria de umplutură se poate face conform relațiilor din [15].

2. ECUAȚIA VIBRAȚIILOR STRUCTURII ÎNLOCUITOARE CONTINUE

Ecuația generală a vibrațiilor unei bare drepte are forma [20]

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - m \frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial t^2} = 0. \tag{15}$$

Introducînd relația (13) în ecuația (15) și notînd

$$\alpha^2 = \frac{m}{12ER}, \tag{16}$$

ecuația (15) devine

$$\frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial x^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \overline{y}}{\partial t^2} = 0. \tag{17}$$

Ecuația (17) descrie vibrațiile structurii înlocuitoare continue. Se observă că această ecuație are aceeași formă ca și ecuația vibrațiilor de lunecare (1), doar rigiditatea la lunecare βAG fiind înlocuită prin rigiditatea $12\,ER$.

Ecuația (17) se rezolvă prin metoda separării variabilelor. Căutînd funcția $\overline{y}\ (x,\ t)$ sub forma

$$\overline{y}\ (x,\ t) = y\ (x)\ T\ (t),$$

din ecuația cu derivate parțiale (17) se obțin ecuațiile diferențiale

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \alpha^2\, \omega^2 y = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\, T = 0. \tag{19}$$

Soluțiile acestor ecuații diferențiale se obțin sub forma

$$y = A \sin (\alpha\, \omega\, x + \lambda) \tag{20}$$

$$T = B \sin (\omega\, t + \mu). \tag{21}$$

Expresia (20) este stabilită în ipoteza că valoarea α este constantă. În cazul unei structuri cu valorile R, respectiv α, constante pe porțiuni

(fig. 2), fiecărei porțiuni caracterizate printr-o anumită valoare R_k, respectiv α_k, îi corespunde o anumită expresie pentru deplasarea y

$$y_k = A_k \sin(\alpha_k \omega x + \lambda_k),$$

respectiv pentru forța tăietoare Q

$$Q_k = 12E R_k A_k \alpha_k \omega \cos(\alpha_k \omega x + \lambda_k).$$

Constantele A_k, λ_k și ω se determină din condițiile la limită

$$-y_1(0) = 0.$$

Rezultă $\lambda_1 = 0$

$$-y_k(x_k) = y_{k+1}(x_k).$$

Rezultă

$$A_k \sin(\alpha_k \omega x_k + \lambda_k) = A_{k+1} \sin(\alpha_{k+1} \omega x_k + \lambda_{k+1}) \quad (22)$$

$$-Q_k(x_k) = Q_{k+1}(x_k).$$

Rezultă

$$R_k A_k \alpha_k \cos(\alpha_k \omega x_k + \lambda_k) = R_{k+1} A_{k+1} \alpha_{k+1} \cos(\alpha_{k+1} \omega x_k + \lambda_{k+1}) \quad (23)$$

$$-Q_n(H) = 0 \text{ sau } y'(H) = 0.$$

Rezultă

$$\alpha_n \omega H + \lambda_n = (2i-1)\frac{\pi}{2}. \quad (24)$$

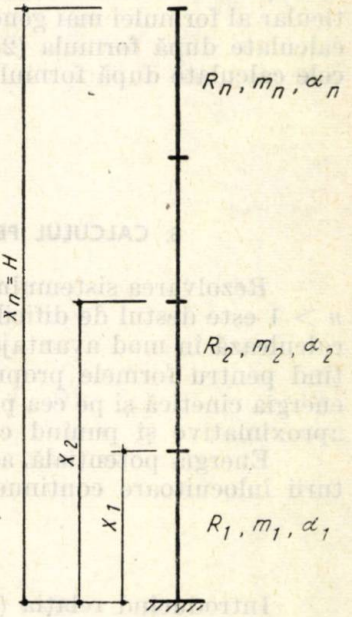


Fig. 2

Cele $2n-2$ ecuații (22) (23) și ecuația (24) formează un sistem de ecuații transcendente în ω și λ_k prin rezolvarea căruia se pot determina cele $2n-1$ constante $\frac{A_k}{A_1}$, $\lambda_k (k > 1)$, ω.

Pentru cazul particular al unui cadru cu rigiditate uniformă ($n = 1$), rezultă

$$\omega_i = \frac{(2i-1)\pi}{2\alpha H}.$$

Perioada vibrațiilor proprii de ordinul i este atunci

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} = \frac{4\alpha H}{2i-1} = \frac{2H}{2i-1}\sqrt{\frac{m}{3ER}}. \quad (25)$$

Introducînd în formula (25)

$$H = nh \text{ și } m = \frac{\sum_{k=1}^{n} M_k}{nh}$$

și admițînd că riglele sînt infinit rigide, adică introducînd

$$\lim_{i_r \to \infty} R = \frac{i_s}{h},$$

se obține formula Salvadori (4). Formula Salvadori este deci un caz particular al formulei mai generale (25). Raportul dintre perioadele de vibrații calculate după formula (25), ținînd cont și de deformațiile riglelor și de cele calculate după formula (4), considerînd riglele infinit rigide, este

$$\sqrt{\frac{i_r + 2i_s}{i_r}}.$$

3. CALCULUL PERIOADELOR DUPĂ METODA RAYLEIGH

Rezolvarea sistemului de ecuații transcendente (22) (23) (24) în cazul $n > 1$ este destul de dificilă. În acest caz, perioadele vibrațiilor proprii se calculează în mod avantajos după metoda Rayleigh [9], [10], adică admițînd pentru formele proprii de vibrație expresii aproximative, calculînd energia cinetică și pe cea potențială maximă ce corespunde acestor expresii aproximative și punînd condiția egalității acestor două energii.

Energia potențială, acumulată într-un element infinitezimal al structurii înlocuitoare continue, este

$$\mathrm{d}W = \frac{1}{2} Q \, \mathrm{d}\bar{y}.$$

Introducînd relația (13) și punînd

$$\mathrm{d}\bar{y} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \mathrm{d}x,$$

se obține

$$\mathrm{d}W = 6ER \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right)^2 \mathrm{d}x.$$

Energia potențială, acumulată în structură, este deci

$$W = 6E \int_0^H R \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} \right)^2 \mathrm{d}x.$$

Energia cinetică a unui element infinitezimal al structurii înlocuitoare continue este

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{2} m \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} \right)^2 \mathrm{d}x.$$

Energia cinetică, acumulată în structură, este deci

$$E = \frac{1}{2} \int_0^H m \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} \right)^2 \mathrm{d}x.$$

Se admit în mod aproximativ expresiile formelor proprii de vibrație corespunzătoare structurii cu rigiditatea și distribuția maselor uniforme, adică

$$\overline{y}_i(x,t) = A \sin \frac{(2i-1)\pi x}{2H} \sin \omega_i t. \tag{26}$$

Rezultă

$$W_{max} = A^2 \frac{6E(2i-1)^2\pi^2}{4H^2} \int_0^H R \cos^2 \frac{(2i-1)\pi x}{2H} \, dx$$

$$E_{max} = \frac{1}{2} A^2 \omega_i^2 \int_0^H m \sin^2 \frac{(2i-1)\pi x}{2H} \, dx.$$

Punînd $W_{max} = E_{max}$, se obține

$$\omega_i = \frac{(2i-1)\pi}{H} \sqrt{3E \frac{\int_0^H R \cos^2 \frac{(2i-1)\pi x}{2H} \, dx}{\int_0^H m \sin^2 \frac{(2i-1)\pi x}{2H} \, dx}}.$$

Notînd

$$\xi = \frac{x}{H},$$

$$\int_0^H \sin^2 \frac{(2i-1)\pi x}{2H} \, dx = \frac{H}{2} \left[\xi - \frac{\sin (2i-1)\pi\xi}{(2i-1)\pi} \right] = \frac{H}{2} S_i(\xi),$$

$$\int_0^H \cos^2 \frac{(2i-1)\pi x}{2H} \, dx = \frac{H}{2} \left[\xi + \frac{\sin (2i-1)\pi\xi}{(2i-1)\pi} \right] = \frac{H}{2} C_i(\xi),$$

$q = gm$ — sarcina verticală distribuită pe unitatea de lungime a structurii înlocuitoare continue;

$$q_{med} = q_1 S_i(\xi_1) + q_2 [S_i(\xi_2) - S_i(\xi_1)] + q_3 [S_i(\xi_3) - S_i(\xi_2)] + \ldots + q_n [1 - S_i(\xi_{n-1})];$$

media ponderată a sarcinilor q, constante pe porțiuni,

$$R_{med} = R_1 C_i(\xi_1) + R_2 [C_i(\xi_2) - C_i(\xi_1)] + R_3 [C_i(\xi_3) - C_i(\xi_2)] + \ldots + R_n [1 - C_i(\xi_{n-1})];$$

media ponderată a rigidităților R, constante pe porțiuni, perioada de vibrație de ordinul i este

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} = \frac{2H}{2i-1} \sqrt{\frac{1}{3Eg} \frac{q_{med}}{R_{med}}} = \frac{0{,}369H}{2i-1} \sqrt{\frac{1}{E} \frac{q_{med}}{R_{med}}}. \tag{27}$$

În relația (27) toate lungimile se introduc în m.

Se observă că, cu creșterea lui i, funcțiile $S_i(\xi)$ și $C_i(\xi)$ se apropie asimptotic de ξ, adică mediile ponderate q_{med} și R_{med} se apropie asimptotic de mediile aritmetice ale funcțiilor $q(\xi)$ și $R(\xi)$.

Funcțiile $S_i(\xi)$ și $C_i(\xi)$ sînt date în tabela 1 pentru $i = 1, 2, 3$.

Tabela 1

ξ	S_i			C_i		
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,05	0,000	0,002	0,005	0,100	0,098	0,095
0,10	0,002	0,014	0,036	0,198	0,186	0,164
0,15	0,006	0,045	0,105	0,294	0,255	0,195
0,20	0,013	0,099	0,200	0,387	0,301	0,200
0,25	0,025	0,175	0,295	0,475	0,325	0,205
0,30	0,043	0,267	0,364	0,557	0,333	0,236
0,35	0,067	0,367	0,395	0,633	0,333	0,305
0,40	0,098	0,462	0,400	0,702	0,338	0,400
0,45	0,136	0,544	0,405	0,764	0,356	0,495
0,50	0,182	0,606	0,436	0,818	0,394	0,564
0,55	0,236	0,644	0,505	0,864	0,456	0,595
0,60	0,298	0,662	0,600	0,902	0,538	0,600
0,65	0,367	0,667	0,695	0,933	0,633	0,605
0,70	0,443	0,667	0,764	0,957	0,733	0,636
0,75	0,525	0,675	0,795	0,975	0,825	0,705
0,80	0,613	0,699	0,800	0,987	0,901	0,800
0,85	0,706	0,745	0,805	0,994	0,955	0,895
0,90	0,802	0,814	0,836	0,998	0,986	0,964
0,95	0,900	0,902	0,905	1,000	0,998	0,995
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

4. GRADUL DE EXACTITATE A RELAȚIILOR PROPUSE

Relațiile propuse mai sus pentru calculul perioadelor de vibrații proprii introduc o serie de aproximații. În continuare se va analiza influența acestor aproximații asupra exactității calculului.

4.1. Relațiile (5) și (9) folosite în lucrarea de față pentru determinarea deplasărilor unui cadru nu țin cont de influența forțelor axiale din stîlpi asupra deplasărilor. Conform celor arătate în [12], p. 304, deplasările cadrelor calculate în această ipoteză simplificatoare reprezintă numai 85—95% din deplasările reale, adică perioadele fundamentale de vibrație calculate pe baza acestor deplasări sînt cu 2—7% mai mici decît cele reale. Influența modificării formei liniei elastice a structurii în ansamblu, prin efectul încovoierii generale (adică a forțelor axiale în stîlpi), asupra perioadelor vibrațiilor proprii este în general mică în cazul cadrelor etajate. Astfel, la exemplul de calcul 1 introducerea în calcul și a efectului încovoierii generale a structurii asupra săgeții la vîrf duce la o creștere a

perioadei fundamentale cu 2,5%, influența modificării formei liniei elastice asupra perioadei fundamentale fiind 0,7%.

Remarcăm că, în cazul existenței unei zidării de umplutură, rigiditatea la lunecare a ansamblului cadru-zidărie poate să crească mult, importanța relativă a încovoierii generale crescînd în mod corespunzător, iar comportarea structurii apropiindu-se de comportarea unei diafragme.

4.2. Pentru a obține din relația exactă (7) relația mai simplă (8) s-a admis

$$\Delta_2\theta - \Delta_1\theta = -\theta_i + 2\theta_j - \theta_k \approx 0. \quad (28)$$

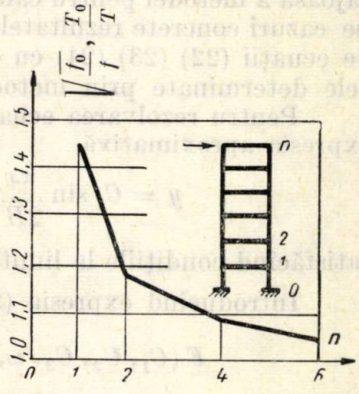


Fig. 3

S-a arătat că, din punct de vedere fizic, relația (28) exprimă înlocuirea structurii discontinue reale printr-o structură continuă. Relația (28) este valabilă cu aproximație pentru nivelurile intermediare ale cadrelor etajate, rotirile de nod θ_i, θ_j, θ_k avînd pentru acest caz valori apropiate. Pentru primul, respectiv ultimul nivel, unde $\theta_i = 0$, respectiv $\theta_k = 0$, relația (28) nu mai este valabilă. Rezultă că deplasările orizontale ale unui cadru etajat se pot calcula cu aproximație bună pe o structură înlocuitoare continuă numai în cazul cînd numărul de niveluri este mare, deplasarea datorită deformării primului și a ultimului nivel fiind mică față de deplasarea datorită deformării nivelurilor intermediare. Deoarece pentru primul și pentru ultimul nivel $\Delta_2\theta - \Delta_1\theta > 0$, valorile θ reale calculate pentru aceste niveluri după relația (7) vor fi mai mici decît cele calculate după relația (8), adică deplasarea reală a unui cadru etajat va fi mai mică decît cea a structurii înlocuitoare continue. Folosirea structurii înlocuitoare continue duce, ca atare, la determinarea unor perioade de vibrații proprii mai mari decît cele reale.

În figura 3 s-a reprezentat influența numărului de niveluri asupra exactității cu care se determină deplasările unui cadru etajat, avînd $i_s = i_r = 1$, acționat de o forță unitară aplicată în dreptul ultimului nivel, respectiv asupra exactității cu care se determină prima perioadă de vibrație proprie a cadrului proporțională cu $\sqrt{f}$. S-a notat cu f_0, respectiv T_0, deplasarea, respectiv perioada de vibrație, calculată pe structura înlocuitoare continuă și cu f, respectiv T, deplasarea, respectiv perioada de vibrație, calculată pe structura reală. Se observă că, în cazul unui cadru cu 6 niveluri, diferența dintre calculul aproximativ al perioadei și cel exact a scăzut la 5%. În cazul cadrelor avînd sarcini la toate nivelurile, diferențele sînt ceva mai mari. Astfel s-a calculat prima perioadă de vibrație pentru trei cadre asemănătoare cu cel din figura 3, avînd 4, 6 și 10 niveluri și fiind încărcate cu sarcina verticală $P = 1$ în dreptul fiecărui nivel, calculul făcîndu-se atît prin relația (25) cît și prin metoda exactă Cișmigiu-Țițaru, sistematizată în [13]. Pentru toate trei cazuri, diferența dintre calculul aproximativ și cel exact rezultă de 12%.

Erorile introduse prin înlocuirea structurii discontinue reale printr-o structură continuă pot deveni mai mari la calculul vibrațiilor de ordin superior.

4.3. Rezolvarea exactă a sistemului de ecuații (22) (23) (24) a fost înlocuită printr-o rezolvare aproximativă. Pentru o alegere cît mai avantajoasă a metodei pentru calculul perioadelor de vibrație T_i s-au comparat pe cazuri concrete rezultatele obținute prin rezolvarea exactă a sistemului de ecuații (22) (23) (24) cu cele determinate prin metoda Rayleigh și cu cele determinate prin metoda Galerkin.

Pentru rezolvarea ecuației (18) prin metoda Galerkin s-a considerat expresia aproximativă

$$y = C_1 \sin \frac{\pi x}{2H} + C_2 \sin \frac{3\pi x}{2H} + C_3 \sin \frac{5\pi x}{2H}, \tag{29}$$

satisfăcînd condițiile la limită $y(0) = 0$, $y'(H) = 0$.

Introducînd expresia (29) în ecuația (18), această ecuație ia forma

$$F(C_1, C_2, C_3, \omega, x) = C_1\left(\frac{\pi^2}{4H^2} - \alpha^2\omega^2\right)\sin\frac{\pi x}{2H} +$$

$$+ C_2\left(\frac{9\pi^2}{4H^2} - \alpha^2\omega^2\right)\sin\frac{3\pi x}{2H} + C_3\left(\frac{25\pi^2}{4H^2} - \alpha^2\omega^2\right)\sin\frac{5\pi x}{2H} = 0.$$

Constantele $\frac{C_2}{C_1}$, $\frac{C_3}{C_1}$ se determină din condițiile de ortogonalitate

$$\begin{aligned}
&\int_0^H F(C_1, C_2, C_3, \omega, x)\sin\frac{\pi x}{2H}\,dx = 0\\
&\int_0^H F(C_1, C_2, C_3, \omega\ x)\sin\frac{3\pi x}{2H}\,dx = 0\\
&\int_0^H F(C_1, C_2, C_3, \omega, x)\sin\frac{5\pi x}{2H}\,dx = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Anulînd determinantul sistemului omogen (30), se obține o ecuație secular de gradul 3 în ω^2.

În tabela 2 se dau rezultatele unui calcul comparativ al primelor trei perioade proprii ale unei structuri înlocuitoare continue.

Tabela 2

Forma de vibrație	T (s) după (22) (23) (24)	Metoda Rayleigh		Metoda Galerkin	
		T_R (s)	$\frac{T_R - T}{T}$	T_G (s)	$\frac{T_G - T}{T}$
1	8,75	8,41	−3,9 %	10,95	+25,2 %
2	3,30	3,20	−3,0 %	3,16	− 4,2 %
3	1,93	1,81	−6,2 %	2,00	+ 3,6 %

Structura se caracterizează prin $H = 2$, $m = 1$, $\alpha^2 = 1$ pentru $x < 1$ și $\alpha^2 = 2$ pentru $x > 1$. În figura 4 *a*, *b*, *c* s-au reprezentat deplasările structurii corespunzătoare primelor trei forme proprii de vibrație, calculate din sistemul de ecuații (22) (23) (24) — reprezentate cu linie

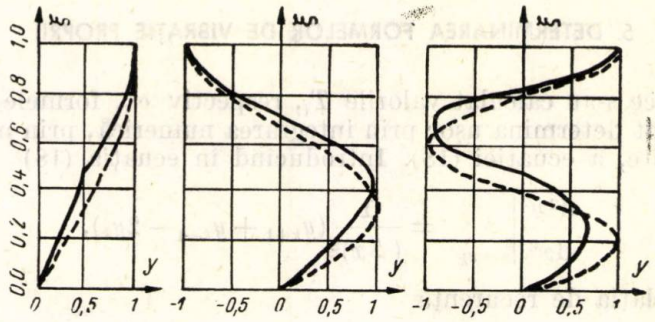


Fig. 4 *a*, *b*, *c*

plină — , respectiv aproximate prin expresia (26), reprezentate cu linie întreruptă.

După cum se observă din tabela 2 și după cum s-a mai constatat și din alte exemple calculate, determinarea perioadelor de vibrații prin metoda Rayleigh, folosită în lucrarea de față, duce la o aproximație bună, mai bună decît cea obținută prin metoda Galerkin, folosind expresia (29)

Se arată că perioadele determinate prin metoda Rayleigh sînt întotdeauna ceva mai mici decît cele calculate exact [9], [10].

4.4. La calculul perioadelor după relația (27) se suprapun toate erorile analizate la punctele 4.1, 4.2 și 4.3. Este important de observat că erorile de la punctele 4.1 și 4.3 duc la o micșorare a perioadelor calculate față de cele reale, pe cînd eroarea de la punctul 4.2 duce la o creștere a perioadelor calculate. Ca atare, erorile se anulează în parte reciproc, exactitatea calculului îmbunătățindu-se în acest fel. Astfel, în cazul exemplului de calculul de la punctul 7.1 s-a obținut la calculul primei perioade a unui cadru cu 16 niveluri după relația (27) o diferență de numai 6,9% față de valoarea calculată exact după [13], ținînd cont și de influența forțelor axiale în stîlpi. Caracteristicile cutremurelor putîndu-se prevedea tot numai în mod aproximativ, rezultă că exactitatea metodei propuse este suficientă pentru proiectarea practică.

În acest sens mai citățm o apreciere făcută în [15], capitolul „Problema preciziei calculului". Analizînd două posibilități de a suprapune forțele seismice corespunzînd unor forme de oscilații diferite, se arată că „eroarea limită probabilă în cazul calculului prin cele două metode se pare că nu va fi mai mare de 20—25%. Față de posibilitățile actuale de prevedere a cutremurelor, trebuie să admitem că această precizie de calcul este, practic, satisfăcătoare".

La clădiri în cadre avînd ziduri de umplutură dese şi de rigiditate relativ mare neglijarea influenţei încovoierii generale a structurii poate duce la erori importante. Ca atare, în acest caz este util să se facă şi un calcul mai exact (vezi exemplul de calcul 2).

5. DETERMINAREA FORMELOR DE VIBRAŢIE PROPRII

După ce s-au calculat valorile T_i, respectiv ω_i, formele de vibraţie proprii se pot determina uşor prin integrarea numerică, prin metoda diferenţelor finite, a ecuaţiei (18). Introducînd în ecuaţia (18)

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_k} = \frac{1}{(\Delta x)^2}(y_{k+1} + y_{k-1} - 2y_k),$$

se obţine relaţia de recurenţă

$$y_{k+1} = ay_k - y_{k-1} \tag{31}$$

cu

$$a = 2 - \alpha^2\,\omega_i^2(\Delta x)^2. \tag{32}$$

Punînd $y_0 = 0$ şi alegînd o valoare arbitrară pentru y_1, de exemplu $y_1 = 1$, rezultă din relaţia (31) toate valorile y_{k+1} pentru $k = 1 \ldots n-1$.

Deoarece valorile ω_i, introduse în relaţia (32), nu sînt valori exacte, condiţia $y'(H) = 0$ nu va fi îndeplinită exact (fig. 6).

6. DETERMINAREA FORŢELOR SEISMICE

Forţa seismică corespunzătoare modului de vibraţie i, aplicată nivelului k, se determină după [1] prin relaţia

$$S_{ik} = P_k K_s \beta_i \psi \eta_{ik}, \tag{33}$$

unde se notează

P_k — greutatea maselor din dreptul nivelului k

K_s — coeficientul seismic de calcul

$0{,}6 \leqslant \beta_i = \dfrac{0{,}9}{T_i} \leqslant 3$ coeficientul dinamic (se sporeşte în cazul terenurilor slabe cu 25—50 %).

$$\eta_{ik} = \frac{y_i(x_k)\sum_{j=1}^{n} P_j y_i(x_j)}{\sum_{j=1}^{n} P_j y_i^2(x_j)} \quad \text{coeficientul de formă a oscilaţiilor} \tag{34}$$

ψ — coeficientul de amortizare (pentru cadre de beton armat se ia $\psi = 1{,}2$).

Forța tăietoare care acționează construcția în ansamblu la nivelul m este

$$Q_i(x_m) = \sum_{k=m}^{n} S_{ik}. \tag{35}$$

În cele ce urmează se mai dă o expresie directă pentru forța tăietoare $Q_i(x_m)$, introducîndu-se în relația (34), în locul valorilor y_i, calculate prin relația (31), cele corespunzînd unei mase și unei rigidități uniforme a structurii înlocuitoare continue

$$y_i = \sin \frac{(2i-1)\,\pi x}{2H}.$$

Dacă se mai notează

$$\mathrm{d}Q_i = q_{\mathrm{med}}\, K_s\, \beta_i\, \psi\, \eta_i\, \mathrm{d}x \text{ și } P = \sum_{k=1}^{n} P_k$$

rezultă

$$\eta_i = \frac{y_i \int_0^H y_i\, \mathrm{d}x}{\int_0^H y_i^2\, \mathrm{d}x} = \frac{4}{(2i-1)\pi} \sin \frac{(2i-1)\,\pi x}{2H} \tag{36}$$

$$Q_i(\xi) = \int_0^H \mathrm{d}Q_i = PK_s\, \beta_i\, \psi\, \frac{8}{(2i-1)^2\pi^2} \cos (2i-1)\frac{\pi}{2}\,\xi. \tag{37}$$

Se observă de altfel că expresia (36) reprezintă termenul general din dezvoltarea în serie Fourier a funcției $y(x) = 1$ pentru $0 < x < 2H$, deci că există relația ([15], p. 107)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(x) = 1$$

Exprimînd coeficientul dinamic β_i prin relația (27), se obține

$$Q_i(\xi) = \frac{1{,}98}{2i-1} K_s\, \psi\, \frac{P}{H} \sqrt{\frac{E R_{\mathrm{med}}}{q_{\mathrm{med}}}} \cos (2i-1)\frac{\pi}{2}\,\xi, \tag{38}$$

cu

$$\frac{2{,}46\,H}{2i-1} \leqslant \sqrt{\frac{F R_{\mathrm{med}}}{q_{\mathrm{med}}}} \leqslant \frac{12{,}30\,H}{2i-1}. \tag{39}$$

În expresiile (38), (39) toate lungimile se introduc în m.

Dacă rigiditatea cadrului sau distribuția maselor este neuniformă, expresia (37) sau (38) poate servi pentru determinarea orientativă a forțelor tăietoare din cutremur. După cum se arată în exemplul de calcul 1,

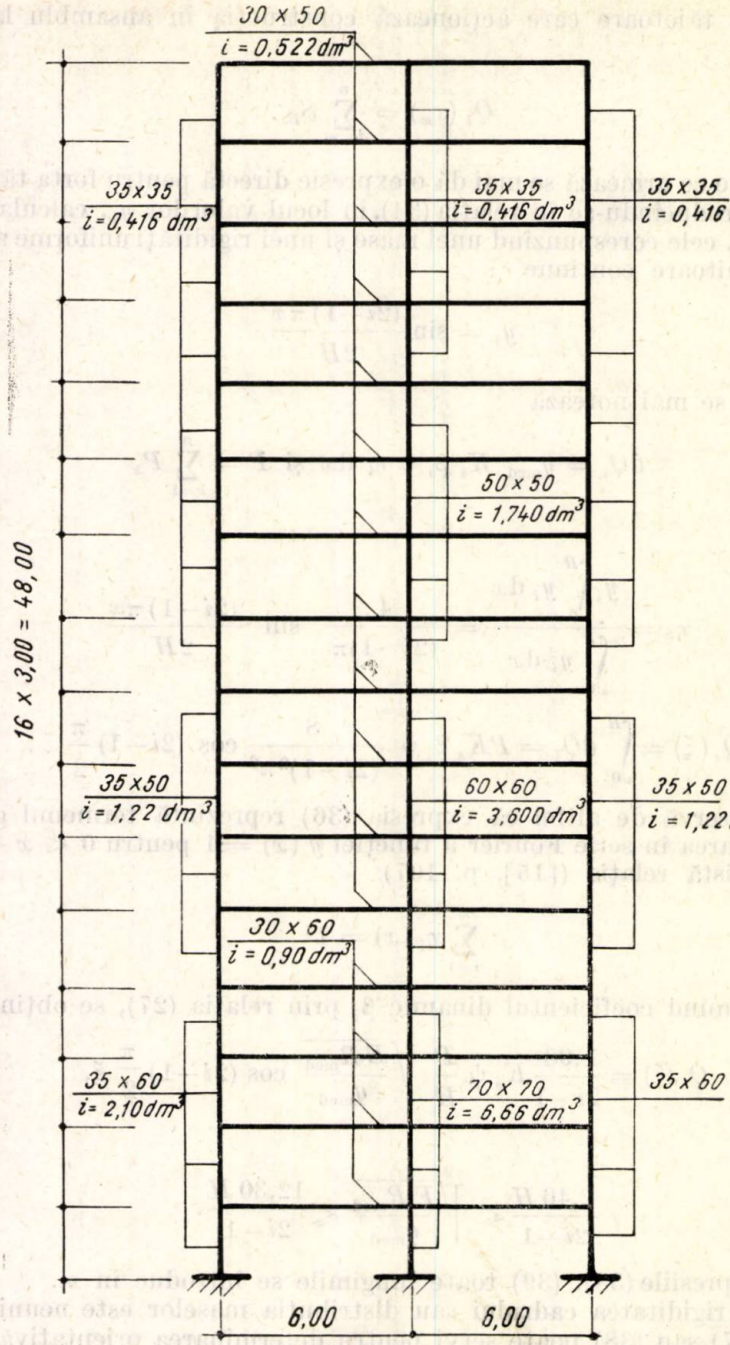

30 x 50
i = 0,522 dm³
35 x 35
i = 0,416 dm³
35 x 35
i = 0,416 dm³
35 x 35
i = 0,416 dm³
50 x 50
i = 1,740 dm³
16 x 3,00 = 48,00
35 x 50
i = 1,22 dm³
60 x 60
i = 3,600 dm³
35 x 50
i = 1,22 dm³
30 x 60
i = 0,90 dm³
35 x 60
i = 2,10 dm³
70 x 70
i = 6,66 dm³
35 x 60
6,00
6,00

Fig. 5

în cazul unei neuniformități pronunțate, mai ales valorilor forțelor tăietoare corespunzînd modurilor de vibrații superioare, calculate prin relațiile (37) sau (38), pot diferi mult de cele calculate prin relațiile exacte (33) (34) (35).

7. EXEMPLE DE CALCUL

7.1. *Exemplu de calcul 1*

Se calculează forțele seismice ce acționează cadrul cu 16 niveluri din figura 5 situat într-o regiune avînd gradul de seismicitate 7 ($K_s = 0{,}025$), greutatea masei aflate în dreptul fiecărui nivel fiind 40 t.

Se stabilesc caracteristicele de rigiditate R (relația 12):

Pentru nivelurile 1—4 se obține

rigiditatea practică a stîlpului median $i = 6{,}66$ dm^3

rigiditatea practică a stîlpului marginal $i = 2{,}10$ dm^3

rigiditatea practică a riglei $i = 0{,}90$ dm^3

rigiditatea practică a stîlpului cadrului înlocuitor echivalent

$$i_s = 6{,}66 + 2 \times 2{,}10 = 10{,}86 \text{ dm}^3$$

rigiditatea practică a riglei cadrului, înlocuitor echivalent

$$i_r = 4 \times 0{,}90 = 3{,}60 \text{ dm}^3$$

caracteristica de rigiditate

$$R = \frac{10{,}86 \times 3{,}60}{30 \times (3{,}60 + 2 \times 10{,}86)} = 5{,}16 \times 10^{-2} \text{ dm}^2 = 5{,}16 \times 10^{-4} \text{ m}^2.$$

În mod analog, se obține

pentru nivelurile 5—8: $R = 2{,}96 \times 10^{-4}$ m^2

pentru nivelurile 9—12: $R = 2{,}47 \times 10^{-4}$ m^2

pentru nivelurile 13—16: $R = 1{,}89 \times 10^{-4}$ m^2.

Sarcina distribuită $q = \frac{40}{3} = 13{,}33$ t/m.

Pentru beton, B 200

$$E = 2{,}65 \times 10^6 \text{ t/m}^2.$$

Folosind valorile funcției $C_i(\xi)$ din tabela 1, se obține

$$R_{\text{med 1}} = 5{,}16 \times 10^{-4} \times (0{,}475 - 0{,}000) + 2{,}96 \times 10^{-4} \times$$
$$\times (0{,}818 - 0{,}475) + 2{,}47 \times 10^{-4} \times (0{,}975 - 0{,}818) + 1{,}89 \times$$
$$\times 10^{-4} \times (1{,}000 - 0{,}975) = 3{,}90 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$R_{\text{med 2}} = 3{,}26 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$R_{\text{med 3}} = 3{,}03 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Aplicînd relaţia (27), se obţine

$$T_1 = \frac{0{,}369 \times 48}{1} \sqrt{\frac{13{,}33}{2{,}65 \times 10^6 \times 3{,}90 \times 10^{-4}}} = 2{,}01 \text{ s},$$

$$\beta_1 = 0{,}6$$

$$T_2 = \frac{0{,}369 \times 48}{3} \sqrt{\frac{13{,}33}{2{,}65 \times 10^6 \times 3{,}26 \times 10^{-4}}} = 0{,}73 \text{ s},$$

$$\beta_2 = \frac{0{,}9}{0{,}73} = 1{,}23$$

$$T_3 = \frac{0{,}369 \times 48}{5} \sqrt{\frac{13{,}33}{2{,}65 \times 10^6 \times 3{,}03 \times 10^{-4}}} = 0{,}45 \text{ s},$$

$$\beta_3 = \frac{0{,}9}{0{,}45} = 1{,}98.$$

Aplicînd metoda exactă din [13] şi ţinînd cont şi de deformaţiile datorite forţelor axiale din stîlpi, s-a obţinut $T_1 = 1{,}88$ s. Aproximaţia obţinută prin aplicarea relaţiei (27) este deci foarte bună.

S-au mai calculat perioadele vibraţiilor proprii şi după relaţia (4), obţinîndu-se

$$T_1 = 0{,}96 \text{ s}$$
$$T_2 = 0{,}32 \text{ s}$$
$$T_3 = 0{,}19 \text{ s}$$

Comparînd aceste perioade cu cele calculate mai sus, se constată că, în cazul cadrelor multietajate, considerarea riglelor ca infinit rigide este inadmisibilă, forţele seismice determinate pe baza acestei ipoteze fiind mult exagerate.

Forţele tăietoare $Q_i(\xi)$ se vor calcula atît prin relaţia aproximativă (37) cît şi prin relaţiile exacte (33) (34) (35).

Aplicînd relaţia (37), se obţine

$$Q_1 = 13{,}33 \times 48 \times 0{,}025 \times 0{,}6 \times 1{,}2 \times \frac{8}{\pi^2} \cos\frac{\pi}{2}\xi \doteq 9{,}30 \cos\frac{\pi}{2}\xi$$

$$Q_2 = 13{,}33 \times 48 \times 0{,}025 \times 1{,}23 \times 1{,}2 \times \frac{8}{9\pi^2} \cos\frac{3\pi}{2}\xi = 2{,}13 \cos\frac{3\pi}{2}\xi$$

$$Q_3 = 13{,}33 \times 48 \times 0{,}025 \times 1{,}98 \times 1{,}2 \times \frac{8}{25\pi^2} \cos\frac{5\pi}{2}\xi = 1{,}23 \cos\frac{5\pi}{2}\xi.$$

Pentru calculul forţelor tăietoare cu ajutorul relaţiilor exacte (33) (34) (35), se determină formele proprii de vibraţii cu ajutorul relaţiilor (31) (32), alegîndu-se $\Delta x = 3{,}0$ m.

Exprimînd α^2 cu ajutorul relației (16), se obține pentru $i = 1$ pentru nivelurile 1—4

$$\alpha^2 \omega_1^2 (\Delta x)^2 = \frac{13{,}33}{9{,}81 \times 12 \times 2{,}65 \times 10^6 \times 5{,}16 \times 10^{-4}} \times \left(\frac{2\pi}{2{,}01}\right)^2 \times$$

$$\times 3{,}0^2 = 0{,}00730.$$

Pentru celelalte forme de vibrație și porțiuni de cadru se obțin în mod analog valorile din tabela 3.

Tabela 3

Nivel	$\alpha^2 \omega_1^2 (\Delta x)^2$	$\alpha^2 \omega_2^2 (\Delta x)^2$	$\alpha^2 \omega_3^2 (\Delta x)^2$
1—4	0,00730	0,0547	0,141
5—8	0,01274	0,0956	0,246
9—12	0,01527	0,1150	0,296
13—16	0,02055	0,1560	0,403

Ca exemplu pentru determinarea formelor de vibrație se dă mai jos calculul celei de-a treia forme de vibrație. Pentru porțiunea $\xi < 0{,}25$ (nivelurile 1—4) se obține $a = 2{,}000 - 0{,}141 = 1{,}859$, pentru porțiunea $0{,}25 < \xi < 0{,}50$ (nivelurile 5—8) se obține $a = 2{,}000 - 0{,}246 = 1{,}754$. În punctul $\xi = 0{,}25$ se consideră valoarea medie $a = 1{,}806$. Aplicînd relația (31), se găsește

$$y_0 = 0{,}000$$
$$y_1 = 1{,}000$$
$$y_2 = 1{,}859 \times 1{,}000 - 0{,}000 = 1{,}860$$
$$y_3 = 1{,}859 \times 1{,}860 - 1{,}000 = 2{,}460$$
$$y_4 = 1{,}859 \times 2{,}460 - 1{,}860 = 2{,}720$$
$$y_5 = 1{,}806 \times 2{,}720 - 2{,}460 = 2{,}450$$
$$y_6 = 1{,}754 \times 2{,}450 - 2{,}720 = 1{,}580$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

În figura 6 *a*, *b*, *c* s-au reprezentat pentru primele trei forme de vibrații proprii valorile η_i, calculate din valorile y_k prin relația (34), în figura 7 *a*, *b*, *c* s-au reprezentat forțele tăietoare Q_i calculate prin relațiile (33) (35) și în figura 7 *d* forța tăietoare totală, corespunzînd suprapunerii forțelor tăietoare Q_i, calculate după relația din [1]:

$$Q = \sqrt{Q_a^2 + 0{,}5\ (Q_b^2 + Q_c^2)},$$

unde s-au notat Q_a, Q_b, Q_c forțele tăietoare într-un punct, corespunzînd primelor trei moduri de vibrație, iar prin Q_a cea mai mare dintre ele în valoare absolută. Valorile exacte calculate după relațiile (33) (34) (35) s-au reprezentat cu linie plină, iar valorile calculate după relațiile aproximative (36) (37) cu linie întreruptă.

Se observă că neuniformitatea rigidității structurii duce la o creștere sensibilă a eforturilor corespunzînd modului de vibrație 3 în comparație cu valorile calculate aproximativ, neglijînd variația rigidității.

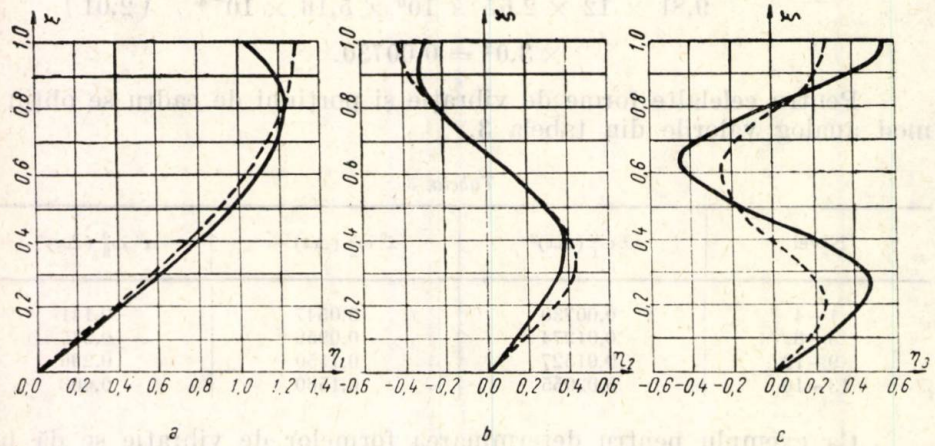


Fig. 6 *a, b, c*

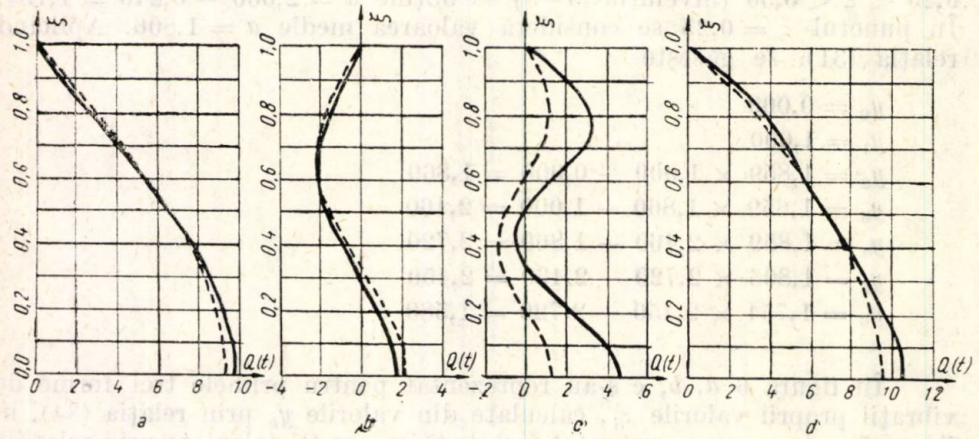


Fig. 7 *a, b, c, d*

7.2. *Exemplu de calcul 2*

Se calculează forțele seismice care acționează cadrul etajat din exemplul de calcul 1, considerînd că în planul cadrului se introduce la toate nivelurile un perete despărțitor din zidărie de cărămidă (marca cărămizilor 50, marca mortarului 25, $E_z = 18 \times 750 = 13\,500$ kg/cm^2), avînd grosimea de 11,5 cm. La fiecare nivel se prevede în acest zid un gol de ușă avînd lățimea de 1,20 m.

Caracteristicile de rigiditate R_1 se determină după relația (14)

$$R_1 = R + \frac{0{,}115\,(5{,}50 + 4{,}30) \times 13.500}{50 \times 265.000} = R + 9{,}60 \times 10^{-4}\ \text{m}^2.$$

Introducînd aceste valori în relațiile (27) (37) se obține

$$T_1 = 1{,}08\ \text{s} \quad \beta_1 = 0{,}83 \quad Q_1 = 12{,}9 \cos \frac{\pi}{2} \xi$$

$$T_2 = 0{,}368\ \text{s} \quad \beta_2 = 2{,}44 \quad Q_2 = 4{,}22 \cos \frac{3\pi}{2} \xi$$

$$T_3 = 0{,}218\ \text{s} \quad \beta_3 = 3{,}00 \quad Q_3 = 1{,}86 \cos \frac{5\pi}{2} \xi$$

$$Q_{\max} = \sqrt{12{,}9^2 + 0{,}5\,(4{,}22^2 + 1{,}86^2)} = 13{,}3\ \text{t}.$$

Menționăm că relația (14), care introduce și rigiditatea la lunecare a zidăriei de umplutură, nu reprezintă decît o primă aproximație a fenomenelor reale. În realitate, modulul de elasticitate transversal al zidăriei variază în funcție de mărimea deformației între 0,75 E_z și 0,25 E_z [15], (fig. 87), zidăria nefisurată de la nivelurile superioare fiind mult mai rigidă decît zidăria mai puternic solicitată și, ca atare, fisurată de la nivelurile inferioare [8].

Deoarece relația (14) este stabilită pe baza valorii minime a modulului de elasticitate transversal al zidăriei $G = 0{,}25\ E$, corespunzînd unor deformații mari, rigiditatea reală a zidăriilor de umplutură va fi, în general, mai mare decît cea calculată prin relația (14), perioadele reale ale vibrațiilor proprii fiind în consecință mai mici decît cele calculate. Pe de altă parte, încovoierea generală a structurii poate să ducă la cadre cu zidărie de umplutură la o creștere sensibilă a perioadelor vibrațiilor proprii.

O a doua aproximație care ține cont de aceste două efecte duce la următoarele rezultate :

Forța tăietoare medie, corespunzătoare modului de vibrație 1, este

$$Q_{\text{med}} = 12{,}9 \int_0^1 \cos \frac{\pi}{2} \xi\, d\xi = 12{,}9 \times \frac{2}{\pi} = 8{,}2\ \text{t}.$$

Plecînd de la valoarea inițială a caracteristicii de rigiditate

$$R_1^{(0)} = (3{,}90 + 9{,}60) \times 10^{-4} = 13{,}5 \times 10^{-4}\ \text{m}^2,$$

rezultă, pentru deformația unghiulară γ_{med}, conform relației (13)

$$\gamma_{\text{med}} = \frac{dy}{dx}\text{med} = \frac{Q_{\text{med}}}{12\,ER} = \frac{8{,}2}{12 \times 2{,}65 \times 10^6 \times 13{,}5 \times 10^{-4}} =$$

$$= 0{,}19 \times 10^{-3}.$$

Folosind diagrama din [15], p. 168, rezultă $G = 0{,}6\ E$ și, ca atare,

$$R_1^{(1)} = \left(3{,}90 + \frac{0{,}60}{0{,}25} \times 9{,}60\right) \times 10^{-4} = 26{,}9 \times 10^{-4}\ \text{m}^2.$$

Momentul de inerție mediu al structurii de beton armat în ansamblu se poate considera aproximativ egal cu

$$I = 2 \times 0{,}35 \times 0{,}50 \times 6{,}0^2 = 12{,}6\ \text{m}^4.$$

Perioadele de vibrație se determină după relația aproximativă din [15] p. 172, ținînd cont și de efectul încovoierii generale a structurii :

$$T_i = \frac{2\pi H^2}{\alpha_i^2} \sqrt{\frac{m}{EI}\left(1 + \frac{\lambda}{H^2}\alpha_i^2\right)} =$$

$$= \frac{2\pi \times 48{,}0^2}{\alpha_i^2} \sqrt{\frac{13{,}35}{9{,}81 \times 2{,}65 \times 10^6 \times 12{,}6}\left(1 + \frac{\lambda}{H^2}\alpha_i^2\right)}$$

unde :

$$\frac{\lambda}{H^2} = \frac{EI}{AGH^2} = \frac{EI}{12\,ERH^2} = \frac{12{,}6}{12 \times 26{,}9 \times 10^{-4} \times 48{,}0^2} = 0{,}17$$

$$\alpha_1 = 1{,}8\,;\ \alpha_2 = 4{,}6\,;\ \alpha_3 = 7{,}85.$$

Rezultă :

$$T_1 = 1{,}13\ \text{s} \quad \beta_1 = 0{,}80 \quad Q_{1\,\max} = 11{,}2$$

$$T_2 = 0{,}295\ \text{s} \quad \beta_2 = 3{,}00 \quad Q_2 = 5{,}17 \cos\frac{3\pi}{2}\xi$$

$$T_3 = 0{,}161\ \text{s} \quad \beta_3 = 3{,}00 \quad Q_3 = 1{,}86 \cos\frac{5\pi}{2}\xi$$

$$Q_{\max} = \sqrt{11{,}2^2 + 0{,}5\ (5{,}17^2 + 1{,}86^2)} = 11{,}9\ \text{t}.$$

Se observă că perioada de vibrație fundamentală a crescut față de cea calculată în prima aproximație, datorită efectului de încovoiere generală a structurii, cu toate că caracteristica de rigiditate s-a dublat față de cea introdusă în prima aproximație. Efectul încovoierii generale asupra perioadelor superioare fiind mai mic, acestea s-au micșoart în urma creșterii rigidității.

Forța tăietoare $Q_{1\,\max}$ s-a calculat pe baza expresiei deformatei din [15], p. 172. Forțele tăietoare corespunzînd modurilor de vibrație superioare s-au calculat prin expresia aproximativă (37), folosirea unor relații mai exacte fiind inutilă atîta timp cît nu se face un calcul mult mai complex, care ține cont de variația modulului de elasticitate transversal al zidăriei de umplutură pe înălțimea construcției sub acțiunea forțelor seismice.

Se mai menționează că forțele tăietoare la baza construcției, corespunzătoare modului de vibrație fundamental, au rezultat în ambele exemple de calcul mai mici decît $0{,}02 \times 16 \times 40 = 12{,}8$ t. Conform normativului [1], pct. 3.2.1., ele se vor majora pentru dimensionare la această valoare.

ANEXĂ

Funcțiile $\sin \frac{(2i-1)\pi}{2} \xi$, $\cos \frac{(2i-1)\pi}{2} \xi$

ξ	$\sin \frac{\pi}{2} \xi$	$\sin \frac{3\pi}{2} \xi$	$\sin \frac{5\pi}{2} \xi$	$\cos \frac{\pi}{2} \xi$	$\cos \frac{3\pi}{2} \xi$	$\cos \frac{5\pi}{2} \xi$
0,00	0,000	0,000	0,000	1,000	1,000	1,000
0,05	0,078	0,233	0,382	0,997	0,971	0,923
0,10	0,156	0,454	0,707	0,988	0,891	0,707
0,15	0,233	0,648	0,923	0,971	0,757	0,382
0,20	0,309	0,809	1,000	0,951	0,588	0,000
0,25	0,382	0,923	0,923	0,923	0,379	−0,382
0,30	0,454	0,988	0,707	0,891	0,156	−0,707
0,35	0,523	0,997	0,382	0,852	−0,081	−0,923
0,40	0,588	0,951	0,000	0,809	−0,309	−1,000
0,45	0,649	0,853	−0,382	0,759	−0,524	−0,923
0,50	0,707	0,707	−0,707	0,707	−0,707	−0,707
0,55	0,759	0,524	−0,923	0,649	−0,853	−0,382
0,60	0,809	0,309	−1,000	0,588	−0,951	0,000
0,65	0,852	0,081	−0,923	0,523	−0,997	0,382
0,70	0,891	−0,156	−0,707	0,454	−0,988	0,707
0,75	0,923	−0,379	−0,382	0,382	−0,923	0,923
0,80	0,951	−0,588	0,000	0,309	−0,809	1,000
0,85	0,971	−0,757	0,382	0,233	−0,648	0,923
0,90	0,988	−0,891	0,707	0,156	−0,454	0,707
0,95	0,997	−0,971	0,923	0,078	−0,233	0,382
1,00	1,000	−1,000	1,000	0,000	0,000	0,000

Primită la redacție la 19 noiembrie 1964,
unele completări la 9 februarie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Normativ condițional pentru proiectarea construcțiilor civile și industriale din regiuni seismice*, P 13−63.
2. AGENT R., *Bazele teoretice și aplicațiile distorsiunilor în calculul cadrelor etajate*, Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, *10* (1963).
3. ALBIGES M., GOULET J., *Contreventement des bâtiments*, Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, *5*, (1960).
4. ARCAN M., *O metodă de calcul al diafragmelor de rigidizare cu un șir de goluri*, St. cerc. mec. apl., *2* (1962).
5. — *Probleme de calcul al diafragmelor verticale de rigidizare*, Bul. șt. Inst. constr. București, *10* (1963).
6. BECK H., *Ein neues Berechungsverfahren für gegliederte Scheiben, dargestellt am Beispiel des Vierendeelträgers*, Der Bauingenieur, **12** (1956).
7. — *Ein Beitrag zur Berücksichtigung der Dehnungsverformungen bei Rahmen mit schlanken und gedrungenen Konstruktionsgliedern*, Die Bautechnik, *5* (1959).

8. Badea D., Georgescu V., *Structuri antiseismice din beton armat monolit.* Bul. şt. Inst. constr., Bucureşti, *10* (1963).
9. Beleş A., Voinea R., *Rezistenţa metalelor*, II, Bucureşti, 1958.
10. Beleş A., Ifrim M., *Elemente de seismologie inginerească*, Bucureşti, 1962.
11. C onka P., *Beitrag zur Berechnung waagerecht belaster Stockwerkrahmen*, Die Bautechnik, *7* (1962).
12. Hangan M., *Construcţii de beton armat*, Bucureşti, 1963.
13. Keintzel E., *Contribuţii la sistematizarea calculului seismic al cadrelor etajate*, Rev. construcţiilor şi a materialelor de construcţii, *4* (1964).
14. И. Л. Корчинский, *Коледания высотных зданий*, Москва. 1953.
15. Korcinski I. L., Poliakov S. V., Bîhovski V. A., Duzinkevici S. I., Pavlîk V. S., *Bazele proiectării clădirilor în regiuni seismice*, Bucureşti, 1964.
16. Mateescu D., Anastasescu D., Gădeanu L., *Calculul timpanelor rigide cu un şir de goluri*, Rev. construcţiilor şi a materialelor de construcţii, *2* (1962).
17. Mîrşu O., Vuc. L., *Metoda de calcul al diafragmelor la acţiuni seismice*, Rev. construcţiilor şi a materialelor de construcţii, *6* (1963).
18. А. Р, Ржаницын, *Теория составних стержней строутельних конструкций*, Москва, 1948.
19. Salvadori M. G., *Earthquake Stresses in Shear Building*, Proc. A.S.C.E., *79* (1953).
20. Snitko N. K., *Dinamica construcţiilor*, Bucureşti, 1962.
21. Whitney C. S., Anderson B. G., Cohen E., *Design of Blast Resistant Construction for Atomic Explosions*, J. Amer. Concrete Institute, *3* (1955).

METODA ACCELERAȚIILOR SUPERIOARE COMPUSE ÎN LANȚURILE CINEMATICE PLANE[1)]

de CHR. PELECUDI

Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R., București

531.1

Prin introducerea vectorului accelerație superioară compusă, distribuția de accelerații pentru solidele rigide în mișcare plană are aceleași proprietăți ca și distribuția de viteze, ceea ce ușurează analiza cinematică. Se utilizează pentru aceasta puncte caracteristice cu ajutorul cărora se repartizează termenii suplimentari, în general cunoscuți, din ecuațiile vectoriale de compunere ale accelerațiilor de ordinul n, fie din mișcarea unui singur solid, fie din mișcarea relativă a două solide, astfel ca acestea să se prezinte sub formele asemănătoare celor de viteze.

Lucrarea cuprinde determinarea punctelor caracteristice pentru lanțurile cinematice simple deschise și închise, precum și aspectele distribuțiilor accelerațiilor superioare compuse.

În determinarea accelerațiilor de ordine superioare, din cauza apariției în ecuațiile vectoriale a mai multor termeni suplimentari cunoscuți din studiul accelerațiilor de ordine inferioare construcțiile grafice sînt mai complicate. Acest lucru se evidențiază atît la legătura vectorială între accelerațiile a două puncte A și B din mișcarea aceluiași corp, cît și, mai ales, la legătura vectorială dintre accelerațiile a două puncte C_1 și C_2, din mișcarea relativă a două corpuri în care punctele sînt situate pe cîte un corp și cufundate în același punct geometric C. Din acest punct de vedere, în calculul vitezelor (accelerații de ordinul zero) schemele grafice sînt mult simplificate și se bucură de proprietăți speciale. Astfel proiecțiile vitezelor

[1)] Publicată și în „Rev. roum. sci. techn., Mécanique appliquée", **10**, *3* (1965) (în limba germană).

a două puncte dintr-un corp pe dreapta care le unește sînt egale. Poligonul vitezelor din planul vitezelor este asemenea și rotit cu $\pi/2$ față de poligonul elementului. Centrul instantaneu de viteze se găsește la intersecția perpendicularelor pe direcțiile vitezelor a două puncte din corp. Centrul instantaneu al vitezelor relative este același pentru mișcarea directă și inversă. Este foarte utilă în aplicații teorema colinearității centrelor relative din mișcarea a trei corpuri.

Enumerarea scurtă a proprietăților de care se bucură distribuția de viteze într-unul sau mai multe corpuri indică diferențele față de distribuțiile accelerațiilor de ordine superioare în care aceste proprietăți trebuie readaptate prin considerații suplimentare. Utilizarea metodei accelerațiilor reduse dezvoltată de numeroase lucrări ale prof. D. Mangeron [1], [2], [3], [4] simplifică schemele de calcul pentru că aceasta prezintă proprietatea remarcabilă că poligonul accelerațiilor reduse din planul elementului are laturile perpendiculare pe laturile corespunzătoare ale poligonului elementului. Astfel este posibilă utilizarea metodei proiecțiilor aproape în aceleași condiții ca și pentru viteze, proiecțiile accelerațiilor reduse a două puncte diferind între ele tocmai cu distanța dintre puncte [1].

Prin metoda accelerațiilor superioare compuse se urmărește introducerea unor vectori, astfel definiți în raport cu mărimile cinematice, încît distribuția acestora pentru solidele rigide în mișcare plană să se obțină pe schemele de calcul ale distribuției de viteze. În acest sens se aleg puncte caracteristice K [7] cu ajutorul cărora se grupează termenii suplimentari, în general cunoscuți, din ecuațiile vectoriale de compunere respective ale accelerațiilor de ordinul n, fie din mișcarea unui singur solid rigid, fie din mișcarea relativă a două solide. Se obțin vectorii accelerației superioare compuse care se bucură de proprietățile vectorilor viteze.

1. MIȘCAREA PLANĂ A UNUI SOLID RIGID

1.1. Între accelerațiile de ordinul n a două puncte A și B dintr-un solid rigid în mișcare plană există următoarea relație [1]—[4], scrisă prin intermediul numerelor complexe :

$$\bar{a}_B^{(n)} = \bar{a}_A^{(n)} + \bar{a}_{BA}^{(n)n} + \bar{a}_{BA}^{(n)t} \tag{1}$$

sau

$$\bar{a}_B^{(n)} = \bar{a}_A^{(n)} - A_n \overline{AB} + B_n \overline{AB}\, i, \tag{2}$$

în care

$$\bar{a}_{BA}^{(n)n} = -A_n \overline{AB}; \quad \bar{a}_{BA}^{(n)t} = B_n \overline{AB} i. \tag{3}$$

Mărimile

$$\begin{aligned} \bar{a}_A^{(n)} &= a_{Ax}^{(n)} + a_{Ay}^{(n)}\, i \\ \bar{a}_B^{(n)} &= a_{Bx}^{(n)} + a_{By}^{(n)}\, i \\ \overline{AB} &= x + yi \end{aligned} \tag{4}$$

sînt complexe imaginare, iar A_n și B_n sînt mărimile reale determinate prin relațiile de recurență [1]—[4]:

$$A_{n+1} = \dot{A}_n + \omega B_n \tag{5}$$

$$B_{n+1} = \dot{B}_n - \omega A_n \tag{6}$$

cu

$$\begin{aligned} A_0 &= 0 & B^0 &= \omega \\ A_1 &= \omega^2 & B_1 &= \dot{\omega} \\ A_2 &= 3\omega\dot{\omega} & B_2 &= \ddot{\omega} - \omega^3 \\ A_3 &= 4\omega\ddot{\omega} + 3\dot{\omega}^2 - \omega^4 & B_3 &= \dddot{\omega} - 6\dot{\omega}\omega^2 \\ A_4 &= 5\omega\dddot{\omega} + 4\ddot{\omega}^2 + 6\ddot{\omega}\dot{\omega} - 10\dot{\omega}\omega^3 \\ &\ldots\ldots\ldots & B_4 &= \ddddot{\omega} - 10\ddot{\omega}\omega^2 - 15\dot{\omega}^2\omega + \omega^5 \\ & & &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{7}$$

Dacă se introduce mărimea reală

$$C_n = \omega^{(n)} - B_n \tag{8}$$

pentru care avem relațiile de recurență:

$$C_{n+1} = \dot{C}_n + \omega A_n \tag{9}$$

cu

$$\begin{aligned} &C_1 = 0;\ C_2 = \omega^3;\ C_3 = 6\dot{\omega}\omega^2 \\ &C_4 = 10\ddot{\omega}\omega^2 + 15\dot{\omega}^2\omega - \omega^5 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{10}$$

atunci mărimile de ordinul n: $A_n(\omega, \dot{\omega}, \ddot{\omega}, \ldots, \omega^{(n-1)})$ și $C_n(\omega, \dot{\omega}, \ddot{\omega} \ldots \ldots \omega^{(n-2)})$ sînt funcții numai de viteză unghiulară ω și de primele sale $(n-1)$ și $(n-2)$ derivate în raport cu timpul. Într-un studiu de accelerații de ordinul n acești coeficienți sînt cunoscuți, presupunîndu-se efectuate studiile pentru accelerațiile de ordine inferioare mai mici decît n.

1.2. Se pot defini astfel două feluri de accelerații compuse de ordinul n pentru același punct caracteristic K [7] în planul elementului, după cum se repartizează accelerațiilor din ordinul n ale punctelor A și B numai termenul $A_n\ \overline{AB}$ sau împreună cu termenul $C_n\ \overline{AB}\,i$, termeni ce sînt deja cunoscuți. Deci vom avea (fig. 1):

a) accelerația compusă de ordinul n de prima speță

$$\begin{aligned} \tilde{a}_A^{(n)} &= \bar{a}_A^{(n)} + A_n\,\overline{KA} = \bar{a}_K^{(n)} + B_n\,\overline{KA}\,i \\ \tilde{a}_B^{(n)} &= \bar{a}_B^{(n)} + A_n\,\overline{KB} = \bar{a}_K^{(n)} + B_n\,\overline{KB}\,i \\ \tilde{a}_K^{(n)} &= \bar{a}_K^{(n)} \end{aligned} \tag{11}$$

astfel că ecuația vectorială de compunere a accelerațiilor devine

$$\tilde{a}_B^{(n)} = \tilde{a}_A^{(n)} + \tilde{a}_{BA}^{(n)} \tag{12}$$

în care

$$\tilde{a}_{BA}^{(n)} = B_n \, \overline{AB}\, i \tag{13}$$

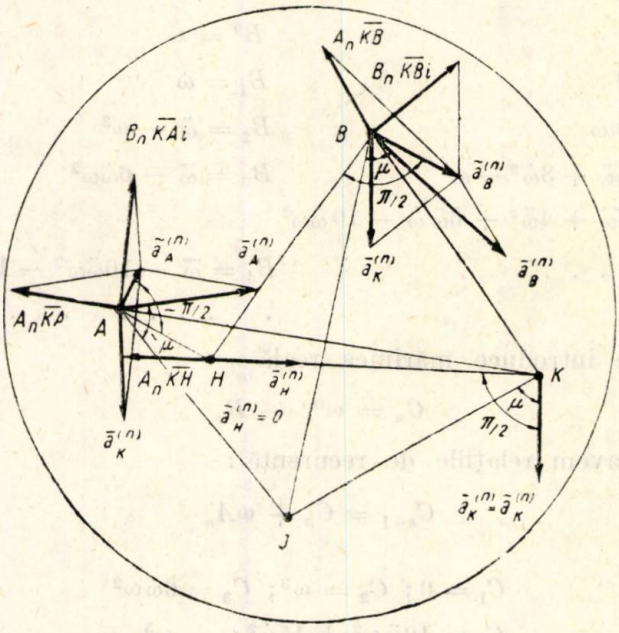


Fig. 1

b) accelerația compusă de ordinul n de speța a doua :

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{a}}_A^{(n)} &= \bar{a}_A^{(n)} + (A_n + C_n\, i)\, \overline{KA} = \bar{a}_K^{(n)} + \omega^{(n)}\, \overline{KA}\, i \\
\tilde{\tilde{a}}_B^{(n)} &= \bar{a}_B^{(n)} + (A_n + C_n i)\, \overline{KB} = \bar{a}_K^{(n)} + \omega^{(n)}\, \overline{KB}\, i \\
\tilde{\tilde{a}}_K^{(n)} &= \bar{a}_K^{(n)}
\end{aligned} \tag{14}$$

sau

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{a}}_A^{(n)} &= \tilde{a}_A^{(n)} + C_n\, \overline{KA}\, i \\
\tilde{\tilde{a}}_B^{(n)} &= \tilde{a}_B^{(n)} + C_n\, \overline{KB}\, i \\
\tilde{\tilde{a}}_K^{(n)} &= \tilde{a}_K^{(n)} = \bar{a}_K^{(n)}
\end{aligned} \tag{15}$$

ceea ce conduce la :

$$\tilde{\tilde{a}}_B^{(n)} = \tilde{\tilde{a}}_A^{(n)} + \tilde{\tilde{a}}_{BA}^{(n)} \tag{16}$$

în care

$$\widetilde{\bar{a}}_{BA}^{(n)} = \omega^{(n)}\ \overline{AB}\, i. \tag{17}$$

Astfel definite, sistemele de accelerații compuse superioare depind de alegerea punctului caracteristic K, pentru care accelerația compusă corespunde cu accelerația sa.

Accelerațiile superioare compuse ale tuturor punctelor corpului sînt egale între ele dacă :

— pentru prima speță, coeficientul B_n se anulează :

$$\omega^{(n)} = C_n$$

— pentru speța a doua, coeficientul $\omega^{(n)}$ se anulează :

$$\omega^{(n)} = 0.$$

Ambele condiții reprezintă ecuații diferențiale de ordinul n ale căror soluții ne indică valorile vitezei unghiulare ω. Pentru $n = 1$, cele două spețe de accelerații compuse se confundă și soluția este :

$$\varepsilon = 0 \qquad \omega = \text{Ctă},$$

corespunzînd unei mișcări de rototranslație plană cu rotație uniformă. De la $n > 1$ ecuațiile diferențiale $\omega^{(n)} = C_n$ sînt neliniare, iar pentru speța a doua avem soluțiile

$$\omega = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_{n-1} t^{n-1} \tag{18}$$

În aceste cazuri avem :

$$\tilde{a}_A^{(n)} = \tilde{a}_B^{(n)} = \ldots \tilde{a}_K^{(n)} = \bar{a}_K^{(n)} \tag{19}$$

sau

$$\widetilde{\bar{a}}_A^{(n)} = \widetilde{\bar{a}}_B^{(n)} = \ldots \widetilde{\bar{a}}_K^{(n)} = \bar{a}_K^{(n)} \tag{20}$$

Dacă punctul caracteristic K se confundă la un moment dat cu centrul instantaneu al accelerațiilor de ordinul n, atunci $\bar{a}_K^{(n)} = \bar{a}_J^{(n)} = 0$ și distribuția vectorilor accelerației compusă în mișcare de rototranslație apare numai ca distribuția accelerațiilor tangențiale din mișcarea de rotație față de centrul J

$$\tilde{a}_A^{(n)} = B_n\ \overline{JA}\, i$$

sau

$$\widetilde{\bar{a}}_A^{(n)} = \omega^{(n)}\ \overline{JA}\, i$$

O distribuție asemănătoare, datorită numai accelerațiilor de rotație tangențiale, într-un caz mai general, se obține în considerarea mișcării față de centrul instantaneu H al accelerațiilor compuse.

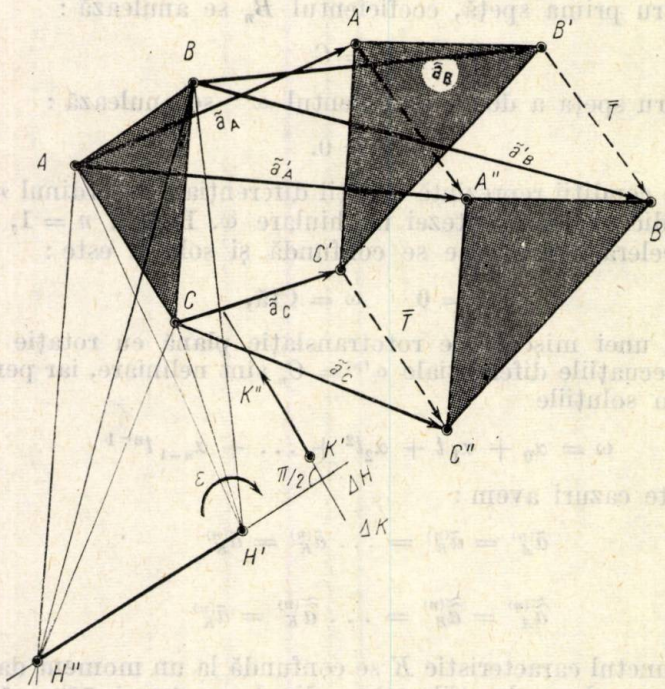
Pentru accelerații compuse din ordinul n astfel definite se regăsesc toate proprietățile vitezelor.

1.3. Poligonul accelerațiilor complexe de ordinul n [7] din planul accelerațiilor, precum și cel din planul elementului (figura accelerațiilor

în mişcare), sînt direct asemenea cu poligonul elementului (figura în mişcare), rapoartele complexe de asemănare fiind :

$$\tilde{\zeta} = i\frac{B_n}{k_\omega^{(n)}}\tilde{\eta} = 1 + \tilde{\zeta} \tag{21}$$

$$\tilde{\tilde{\zeta}} = i\frac{\omega^{(n)}}{k_\omega^{(n)}}\tilde{\tilde{\eta}} = 1 + \tilde{\tilde{\zeta}} \tag{22}$$



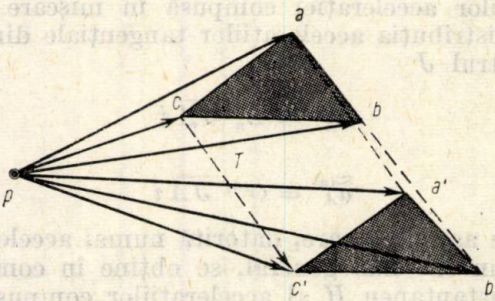


Fig. 2

Primul este rotit de $\pi/2$ în sensul mărimii B_n sau $\omega^{(n)}$ faţă de poligonul elementului şi are raportul de asemănare real $B_n/k_\omega^{(n)}$ sau $\omega^{(n)}/k_\omega^{(n)}$.

Al doilea este rotit cu unghiul $\psi = \text{arc tg}\frac{B_n}{k_\omega^{(n)}}$ sau $\psi = \text{arc tg}\frac{\omega^{(n)}}{k_\omega^{(n)}}$ și are raportul de asemănare real $\sqrt{1+(B_n/k_\omega^{(n)})^2}$ sau $\sqrt{1+(\omega^{(n)}/k_\omega^{(n)})^2}$. În aceste relații $k_\omega^{(n)} = k_a^{(n)}/k_l$ în s^{-n}, în care $k_a^{(n)}\frac{ms^{-n}}{mm}$ este scara acceleratiilor de ordinul n, iar $k_l\frac{m}{mm}$ este scara lungimilor (fig. 2).

Pentru două puncte caracteristice K' și K'' se obțin două sisteme de accelerații compuse de ordinul n, ale căror poligoane sînt translatate cu vectorul :

$$\widetilde{T} = \tilde{a}_A''^{(n)} - \tilde{a}_A'^{(n)} = -A_n\,\overline{K'K''} \tag{23}$$

$$\widetilde{\widetilde{T}} = \tilde{\tilde{a}}_A''^{(n)} - \tilde{\tilde{a}}_A'^{(n)} = -(A_n + C_n i)\,\overline{K'K''} \tag{24}$$

1.4. Se mențin proprietățile proiecțiilor, adică :

$$pr_{AB}\,\tilde{a}_B^{(n)} = pr_{AB}\,\tilde{a}_A^{(n)} \tag{25}$$

$$B_n ABi = \tilde{a}_{BA}^{(n)} = pr_{\perp AB}\,\tilde{a}_B^{(n)} - pr_{\perp AB}\,\tilde{a}_A^{(n)} \tag{26}$$

și

$$pr_{AB}\,\tilde{\tilde{a}}_B^{(n)} = pr_{AB}\,\tilde{\tilde{a}}_A^{(n)} \tag{27}$$

$$\omega^{(n)} AB\,i = \tilde{\tilde{a}}_{BA}^{(n)} = pr_{\perp AB}\,\tilde{\tilde{a}}_B^{(n)} - pr_{\perp AB}\,\tilde{\tilde{a}}_A^{(n)} \tag{28}$$

iar între accelerațiile compuse de cele două spețe avem :

$$pr_{KA}\,\tilde{\tilde{a}}_A^{(n)} = pr_{KA}\,\tilde{a}_A^{(n)} = pr_{KA}\,\bar{a}_A^{(n)} + A_n \cdot KA. \tag{29}$$

$$pr_{\perp KA}\,\tilde{\tilde{a}}_A^{(n)} = pr_{\perp KA}\,\tilde{a}_A^{(n)} + C_n\,KAi = pr_{\perp KA}\,\bar{a}_A^{(n)} + C_n\,KAi \tag{30}$$

deoarece

$$pr_{\perp KA}\,\tilde{a}_A^{(n)} = pr_{\perp KA}\,\bar{a}_A^{(n)} \tag{31}$$

Deci distribuția de accelerații superioare compuse apare după schema din figura 3, o dată cu accelerația punctului P de pe dreapta AB în direcția AB și cu o componentă normală pe AB de mărimea $B_n\,PCi$ sau $\omega^{(n)}\,PCi$. Adică pentru aflarea accelerației superioare compuse a unui punct oarecare C_* se procedează astfel :

— se descompun accelerațiile superioare compuse ale punctelor de pe dreapta AB în componentele în direcția AB și perpendiculara la AB

$$(Aa_n) = (Bb_n) = (Cc_n) = \ldots (Pp_n) \tag{32}$$

Extremitățile a_t, b_t, c_t, ..., p_t ale segmentelor (Aa_t) (Bb_t) ... perpendiculare pe AB se găsesc pe drepta Δ_t paralelă cu dreapta Δ a extremităților accelerațiilor superioare compuse. Ambele drepte fac unghiul ψ cu dreapta AB. Rezultă :

$$(Pp_l) = 0 \quad B_n = k_\omega^{(n)}\ \text{tg}\ \psi \text{ sau } \omega^{(n)} = k_\omega^{(n)}\ \text{tg}\ \psi$$

cu

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{(Aa_t)}{(PA)} = \frac{(Bb_t)}{(PB)} = \dots \tag{33}$$

— pentru toate punctele de pe cercul PC acceleraţia tangenţială are mărimea reprezentată prin segmentul (Cc_t), astfel că acesta se con-

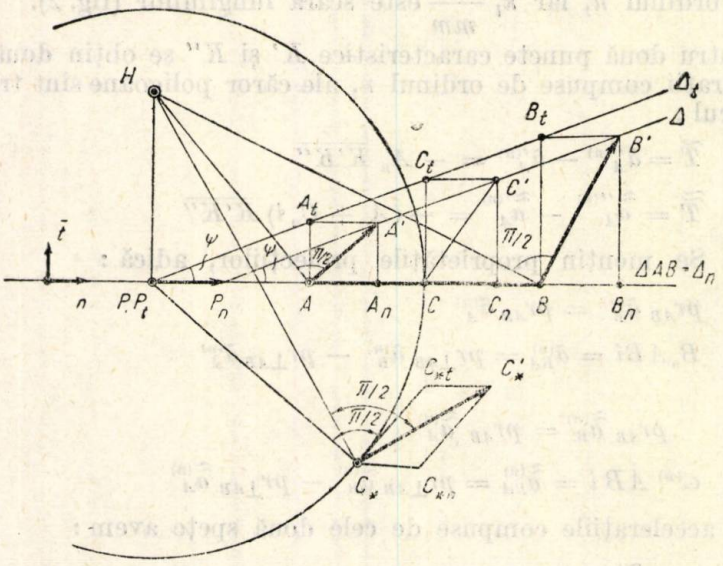


Fig. 3

struieşte tangent la cerc în punctul C_*. Pentru acelaşi punct, componenta în direcţia AB este $(Pp_n) = (Cc_n)$

— prin compunere se obţine :

$$a^{(n)}_{c_*} = k^{(n)}_a (C_* C'_*) \tag{34}$$

1.5. Utilizînd centrul instantaneu H al acceleraţiilor compuse de ordinul n, pentru care $\tilde{a}^{(n)}_H = 0$ sau $\tilde{\tilde{a}}^{(n)}_H = 0$, distribuţia de acceleraţii compuse de ordinul n se obţine numai dintr-o rotaţie în jurul acestui punct. Formulele (12) şi (16) devin :

$$\tilde{a}^{(n)}_B = \tilde{a}^{(n)}_{BH} = B_n \overline{HB}\, i \tag{35}$$

sau

$$\tilde{\tilde{a}}^{(n)}_B = \tilde{\tilde{a}}^{(n)}_{BH} = \omega^{(n)} \overline{HB}\, i \tag{36}$$

De asemenea orice punct A al unui corp poate deveni centrul instantaneu $H \equiv A$ al acceleraţiilor compuse de ordinul n dacă se alege în mod corespunzător punctul caracteristic K. Astfel :

$$\tilde{a}^{(n)}_H = \bar{a}^{(n)}_H + A_n \overline{KH} = 0$$

și deci

$$\overline{HK} = \frac{\bar{a}_H^{(n)}}{A_n} \tag{37}$$

adică vectorul $\overline{HK}$ reprezintă accelerația redusă de ordinul n a punctului H. Pentru ca punctul H al elementului să fie centrul instantaneu al accelerațiilor compuse de ordinul n, trebuie să alegem punctul caracteristic K în extremitatea vectorului accelerației reduse de ordinul n a punctului H. La accelerațiile compuse de speța a doua avem:

$$\tilde{\bar{a}}_H^{(n)} = \bar{a}_H^{(n)} + (A_n + C_n i)\,\overline{KH} = 0$$

sau

$$\overline{HK} = \frac{\bar{a}_H^{(n)}}{A_n + C_n i} \tag{38}$$

care definește speța a doua de accelerație redusă de ordinul n a punctului H.

Determinarea centrului instantaneu (fig. 4) atunci cînd se cunosc accelerațiile compuse de ordinul n se face în modul următor:

$$\tilde{a}_H^{(n)} = \tilde{a}_0^{(n)} + \tilde{a}_{H0}^{(n)} = 0$$

și deci

$$\tilde{r}_H = \widetilde{OH} = \frac{\tilde{a}_0^{(n)}}{B_n}\, i \tag{39}$$

și asemănător:

$$\tilde{\tilde{r}}_H = \widetilde{\widetilde{OH}} = \frac{\tilde{\tilde{a}}_0^{(n)}\, i}{\omega^{(n)}}. \tag{40}$$

Înlocuind accelerațiile compuse de ordinul n în funcție de accelerațiile simple de ordinul n, avem:

$$\tilde{r}_{OH} = \frac{\bar{a}_0^{(n)} + A_n\,\overline{KO}}{B_n}\, i \tag{41}$$

$$\tilde{\tilde{r}}_{OH} = \frac{\bar{a}_0^{(n)} + (A_n + C_n i)\,\overline{KO}}{\omega^{(n)}}\, i \tag{42}$$

$$B_n\,\tilde{r}_{OH} - \omega^{(n)}\,\tilde{\tilde{r}}_{OH} = C_n\,\bar{r}_{OK}. \tag{43}$$

Pentru originea O a axelor de coordonate mobile aleasă chiar în punctul K, atunci $\bar{r}_K = 0$ și expresiile (41, 42, 43) se simplifică:

$$\tilde{r}_H = \widetilde{KH} = \frac{\bar{a}_K^{(n)}}{B_n}\, i \tag{44}$$

$$\tilde{\tilde{r}}_H = \widetilde{\widetilde{KH}} = \frac{\bar{a}_K^{(n)}}{\omega^{(n)}}\, i \tag{45}$$

$$B_n\,\tilde{r}_{KH} - \omega^{(n)}\,\tilde{\tilde{r}}_{KH} = 0 \tag{46}$$

ceea ce se obține și din ecuația (43) prin explicitarea coeficientului $C_n = \omega^{(n)} - B_n$.

Proiecțiile vectorilor de poziție, ale centrelor $\widetilde{H}$ sau $\widetilde{\widetilde{H}}$, pe axele mobile ale corpului dau ecuațiile parametrice ale rostogolitoarei :

$$x_{\widetilde{KH}} = -\frac{a_{Ky}^{(n)}}{B_n}; \quad y_{\widetilde{KH}} = \frac{a_{Kx}^{(n)}}{B_n} \tag{47}$$

$$x_{\widetilde{\widetilde{KH}}} = -\frac{a_{Ky}^{(n)}}{\omega^{(n)}}; \quad y_{\widetilde{\widetilde{KH}}} = \frac{a_{Kx}^{(n)}}{\omega^{(n)}}. \tag{48}$$

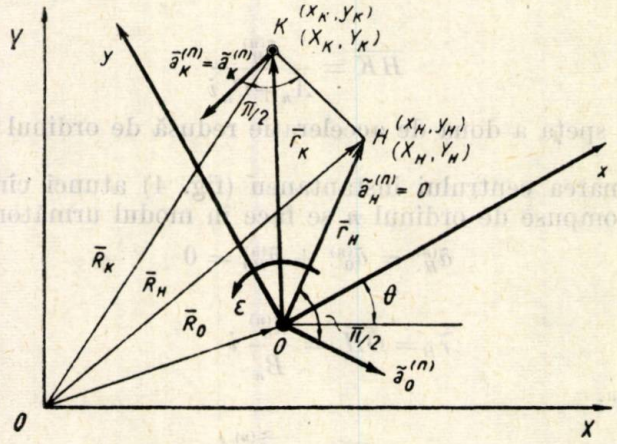


Fig. 4

Pentru coordonatele centrului accelerațiilor superioare compuse în planul fix, respectiv ecuațiile bazei sub formă parametrică, avem :

$$\bar{R}_H = \bar{R}_O + \bar{r}_{OH} \text{ sau } \bar{R}_H = \bar{R}_K + \bar{r}_{KH} \tag{49}$$

adică

$$X_{\widetilde{H}} = X_K - \frac{a_{KY}^{(n)}}{B_n}; \quad Y_{\widetilde{H}} = Y_K + \frac{a_{KX}^{(n)}}{B_n} \tag{50}$$

sau

$$X_{\widetilde{\widetilde{H}}} = X_K - \frac{a_{KY}^{(n)}}{\omega^{(n)}}; \quad Y_{\widetilde{\widetilde{H}}} = Y_K + \frac{a_{KY}^{(n)}}{\omega^{(n)}}. \tag{51}$$

Coordonatele punctului H pot fi calculate direct geometric, folosindu-se în construcție proprietatea că razele care pornesc din H sînt perpendiculare pe direcțiile accelerațiilor compuse superioare. Astfel centrul accelerațiilor superioare compuse se găsește pe perpendiculara la accelerația superioară a punctului K la distanța $\widetilde{KH} = \frac{a_K^{(n)}}{B_n}$ sau $\widetilde{\widetilde{KH}} = \frac{a_K^{(n)}}{\omega^{(n)}}$, în poziția în care sensul lui $a_K^{(n)}$ corespunde cu sensul dat de B_n sau $\omega^{(n)}$.

Deoarece vectorul $\overline{HK}$ reprezintă accelerația redusă de ordinul n a punctului H redată prin formulele (37, 38), iar pe de altă parte vectorul $\overline{KH}$ redat prin formulele (44, 45) indică poziția centrului instantaneu H al accelerațiilor superioare compuse față de punctul caracteristic K, avem :

$$A_n \bar{a}_K = B_n \bar{a}_{\widetilde{H}} i \tag{52}$$

sau

$$(A_n + C_n i)\, \bar{a}_K = \omega^{(n)} \bar{a}_{\widetilde{\widetilde{H}}}\, i. \tag{53}$$

Se conchide că accelerațiile punctelor K și $\widetilde{H}$ sînt perpendiculare, iar a punctelor K și $\widetilde{\widetilde{H}}$ formează între ele unghiul $\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{A_n}{C_n}$.

Schimbarea punctului caracteristic din K' în K'' conduce la schimbarea centrului instantaneu din H' în H'', între vectorii $\overline{K'K''}$ și $\overline{H'H''}$ avînd legătura :

$$-\widetilde{T} = A_n \overline{K'K''} = i\, B_n \overline{H'H''} \tag{54}$$

sau

$$-\widetilde{\widetilde{T}} = (A_n + C_n i)\, \overline{K'K''} = i\omega^{(n)} \overline{H'H''}. \tag{55}$$

Vectorii $\overline{K'K''}$ și $\overline{H'H''}$ sînt perpendiculari între ei sau fac unghiul φ definit mai sus.

1.6. *Distribuția accelerațiilor superioare compuse.* Pentru cunoașterea accelerațiilor superioare compuse la un corp în mișcare de rototranslație plană sînt necesari trei parametri scalari, deoarece se consideră cunoscuți : vectorul de poziție $\overline{AB}$, mărimile A_n în care sînt cuprinse viteza unghiulară ω și primele sale $(n-1)$ derivate și poziția punctului caracteristic K (respectiv $\overline{KA}$ și $\overline{KB}$). Se consideră următoarele cazuri de parametri cunoscuți.

a) Proiecția accelerației superioare compuse a unui punct A pe o direcție ΔA. Aceasta se poate obține din proiecția accelerației superioare simple a punctului respectiv A :

$$pr_{\Delta A}\, \bar{a}_A^{(n)} = pr_{\Delta A}\, \bar{a}_A^{(n)} + A_n\, pr_{\Delta A}\, \overline{KA}$$

sau

$$pr_{\Delta A}\, \bar{\bar{a}}_A^{(n)} = pr_{\Delta A}\, \bar{a}_A^{(n)} + A_n\, pr_{\Delta A}\, \overline{KA} + B_n\, pr_{\Delta A}\, \overline{KA} i.$$

Dacă direcția $\overline{KA}$ este perpendiculară pe dreapta ΔA, accelerațiile au proiecții egale.

Cunoscîndu-se dreapta suport $\Delta A'$ a vîrfului vectorului accelerație compusă, se știe proiecția sa pe perpendiculara $\perp \Delta A' = \Delta A$ la dreapta suport.

b) Direcția accelerației superioare compuse, respectiv dreapta suport $\Delta AA'$, ceea ce echivalează cu cunoașterea proiecției nule pe perpendiculara $\perp \Delta AA'$ la dreapta considerată.

Dacă se cunoaşte dreapta suport a centrului instantaneu H, aceasta este identică cu $\perp \Delta AA'$, şi deci se cunoaşte proiecţia nulă pe ΔH.

c) Prin cunoaşterea derivatei de ordinul n a vitezei unghiulare, se ştie B_n şi se obţine prin relaţia (26) sau (28) legătura dintre proiecţiile acceleraţiilor superioare compuse ale punctelor de pe o dreaptă AB pe direcţia perpendiculară la această dreaptă $\perp AB$.

Se constată — relaţia (25, 27) — că *aflarea unei proiecţii echivalează cu cunoaşterea proiecţiilor egale ale acceleraţiilor superioare compuse pentru toate punctele de pe dreapta proiecţiei.*

Cunoaşterea a doi parametri compatibili şi independenţi conduce la aflarea :

a) acceleraţiei superioare compuse a unui punct C aflat la intersecţia suporturilor a două proiecţii ΔA şi ΔB. Se pot cunoaşte astfel *proiecţiile acceleraţiilor superioare compuse ale tuturor punctelor din solid pe dreptele care le unesc cu punctul de acceleraţie superioară compusă cunoscută*;

b) dacă cele două proiecţii au suporturile paralele, se poate afla mărimea $\omega^{(n)}$ sau B_n, considerînd în formula (26, 28) distanţa AB pe perpendiculara comună. Rezultă că se cunosc *proiecţiile acceleraţiilor superioare compuse ale tuturor punctelor din solid pe dreptele paralele la direcţia dată, respectiv pe dreptele care le unesc cu punctul de la infinit al direcţiei date.*

În sfîrşit, cunoaşterea a trei parametri compatibili şi independenţi determină complet distribuţia acceleraţiilor superioare compuse. Se obţin *proiecţiile acceleraţiilor superioare compuse ale tuturor punctelor solidului pe orice direcţie.*

2. MIŞCAREA PLANĂ RELATIVĂ A DOUĂ SOLIDE RIGIDE

2.1. Ecuaţia de compunere a acceleraţiilor de ordinul n a două puncte C_1 şi C_2 confundate în punctul geometric C, dar legate de corpuri diferite, este :

$$\bar{a}_{C_2}^{(n)} = \bar{a}_{C_1}^{(n)} + \bar{a}_{C_{21}}^{r(n)} + \bar{a}_{C_{21}}^{c(n)} \tag{56}$$

în care

$$\bar{a}_{C_1}^{(n)} = \bar{a}_O^{(n)} - A_{n(1)}\overline{OC} + B_{n(1)}\overline{OC}\,i \tag{57}$$

cu $\bar{a}_O^{(n)}$ = acceleraţia de ordinul n a originii sistemului de referinţă mobil legat de primul element care prezintă mişcarea de transport şi OC = vectorul de poziţie al punctului BC faţă de această origine, reprezentînd deci vectorul de poziţie relativ.

Termenul :

$$\bar{a}_{C_{21}}^{c(n)} = D_n^{(0)}\bar{a}_{C_{21}}^{r(0)} + D_n^{(1)}\bar{a}_{C_{21}}^{r(1)} + D_n^{(2)}\bar{a}_{C_{21}}^{r(2)} + \ldots + D_n^{(n-1)}\bar{a}_{C_{21}}^{r(n-1)} \tag{58}$$

este acceleraţia complementară de ordinul n în mişcarea relativă a punctului C_2 de pe elementul (2) faţă de elementul (1), dat ca funcţie de viteză relativă $\bar{v}_{C_{21}}^{r} = \bar{a}_{C_{21}}^{r(0)}$ şi de primele acceleraţii relative pînă la ordinul $(n-1)$. Coeficienţii $D_n^{(k)}$ sînt la rîndul lor compuşi cu $(n-1-k)$ derivate ale

vitezei unghiulare ω de transport, respectiv a elementului prim. Relațiile lor de recurență se stabilesc prin identificări după ce s-a derivat în raport cu timpul $\bar{a}_C^{(n)}$ și s-a înlocuit derivata absolută a unui vector în raport cu derivata sa relativă

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \omega \bar{V} i \tag{59}$$

Astfel :

$$\frac{d}{dt}(\bar{a}_{C_2}^{(n)}) = \bar{a}_{C_2}^{(n+1)} = \bar{a}_{C_1}^{(n+1)} + \bar{a}_{C_{21}}^{r(n+1)} + \bar{a}_{C_{21}}^{c(n+1)}. \tag{60}$$

Se obține :

$$\begin{aligned} D_{n+1}^{(0)} &= \dot{D}_n^{(0)} + \omega D_n^{(0)} i - A_n + B_n i, \\ D_{n+1}^{(1)} &= \dot{D}_n^{(1)} + \omega D_n^{(1)} i + D_n^{(0)}, \\ D_{n+1}^{(2)} &= \dot{D}_n^{(2)} + \omega D_n^{(2)} i + D_n^{(1)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_{n+1}^{(n-1)} &= \dot{D}_n^{(n-1)} + \omega D_n^{(n-1)} i + D_n^{(n-2)}, \\ D_{n+1}^{(n)} &= \omega i + D_n^{(n-1)}, \end{aligned} \tag{61}$$

în care numai primul termen $D_{n+1}^{(0)}$ și ultimul termen $D_{n+1}^{(n)}$ au formule diferite de compunere.

Pentru $\bar{a}_{C_{21}}^{c(1)} = 2\,\omega\, v^r\, i$ avem (62)

$$D_1^{(0)} = 2\,\omega\, i$$

Pentru $\bar{a}_{C_{21}}^{c(2)} = (3\,\dot{\omega}\, i - 3\,\omega^2)\, v^r + 3\,\omega\, i a^r,$ (63)

cu

$$\begin{aligned} D_2^{(0)} &= 3\,\dot{\omega}\, i - 3\,\omega^2, \\ D_2^{(1)} &= 3\,\omega\, i \end{aligned}$$

Pentru $\bar{a}_{C_{21}}^{c(3)} = D_3^{(0)}\, \bar{v}^r + D_3^{(1)}\, \bar{a}^r + D_3^{(2)}\, \bar{a}^{r(2)},$ (64)

$$\begin{aligned} D_3^{(0)} &= 4\,\ddot{\omega}\, i - 12\,\omega\dot{\omega} - 4\,\omega^3 i, \\ D_3^{(1)} &= 6\,\dot{\omega}\, i - 6\,\omega^2, \\ D_3^{(2)} &= 4\,\omega\, i. \end{aligned}$$

Pentru $\bar{a}_{C_{21}}^{c(4)} = D_4^{(0)}\, \bar{v}^r + D_4^{(1)}\, \bar{a}^r + D_4^{(2)}\, \bar{a}^{r(2)} + D_4^{(3)}\, \bar{a}^{r(3)},$ (65)

$$\begin{aligned} D_4^{(0)} &= 5\,\dddot{\omega}\, i - 15\,\dot{\omega}^2 - 20\,\ddot{\omega}\omega - 30\,\omega^2\dot{\omega}\, i + 5\,\omega^4, \\ D_4^{(1)} &= 10\,\ddot{\omega}\, i - 30\,\omega\dot{\omega} - 10\,\omega^3 i, \\ D_4^{(2)} &= 10\,\dot{\omega}\, i - 10\,\omega^2, \\ D_4^{(3)} &= 5\,\omega\, i. \end{aligned}$$

Acceleraţia complementară $\bar{a}_{C_{21}}^{c(n)}$ este cunoscută deoarece cuprinde numai derivate inferioare ordinului n, presupuse calculate anterior.

Prin $\bar{a}_{C_{21}}^{r(n)}$ se înţelege acceleraţia relativă a punctului C_2 faţă de elementul (1) care se află în mişcare. Ea poate fi exprimată în raport cu acceraţia relativă de ordinul n a unui alt punct A_2, prin formulele de la mişcarea unui singur element — elementul al doilea —, primul fiind considerat fix :

$$\bar{a}_{C_{21}}^{r(n)} = \bar{a}_{A_{21}}^{r(n)} + \bar{a}_{C_{21}A_{21}}^{rn(n)} + \bar{a}_{C_{21}A_{21}}^{rt(n)} = \bar{a}_{A_{21}}^{r(n)} - A_{n21}\,\overline{AC} + B_{n21}\,\overline{AC}\,i, \qquad (66)$$

formulă ce se mai poate reduce dacă A_{21} devine centrul instantaneu J_{21} relativ al acceleraţiilor de ordinul n cînd $\bar{a}_{J_{21}}^{r(n)} = 0$. Coeficienţii A_{n21} şi B_{n21} urmează relaţiile de recurenţă (5, 6), în care ω se înlocuieşte cu $\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$, ω_2 şi ω_1 fiind vitezele unghiulare ale celor două corpuri. Astfel :

$$\bar{a}_{C_{21}}^{r(n)} = -A_{n21}\,\overline{J_{21}C} + B_{n21}\,\overline{J_{21}C}\,i \qquad (67)$$

şi, invers,

$$\bar{a}_{C_{12}}^{r(n)} = -A_{n12}\,\overline{J_{12}C} + B_{n12}\,\overline{J_{12}C}\,i.$$

Centrele instantanee J_{21} şi J_{12} ale mişcării directe relative — 2 faţă de 1 — şi inverse relativ — 1 faţă de 2 — sînt diferite, deoarece din ecuaţiile

$$\bar{a}_{C_2}^{(n)} = \bar{a}_{C_1}^{(n)} + \bar{a}_{C_{21}}^{r(n)} + \bar{a}_{C_{21}}^{c(n)}$$

şi

$$\bar{a}_{C_1}^{(n)} = \bar{a}_{C_2}^{(n)} + \bar{a}_{C_{12}}^{r(n)} + \bar{a}_{C_{12}}^{c(n)}$$

rezultă că

$$\bar{a}_{C_{21}}^{r(n)} + \bar{a}_{C_{21}}^{r(n)} + \bar{a}_{C_{12}}^{c(n)} + \bar{a}_{C_{12}}^{c(n)} = 0 \qquad (68)$$

ori

$$\bar{a}_{C_{21}}^{c(n)} = D_{n1}^{(0)}\,\bar{a}_{C_{21}}^{r(0)} + D_{n1}^{(1)}\,\bar{a}_{C_{21}}^{r(1)} + D_{n1}^{(2)}\,\bar{a}_{C_{21}}^{r(2)} + \ldots + D_{n1}^{(n-1)}\,\bar{a}_{C_{21}}^{r(n-1)} \qquad (69)$$

$$\bar{a}_{C_{12}}^{c(n)} = D_{n2}^{(0)}\,\bar{a}_{C_{12}}^{r(0)} + D_{n2}^{(1)}\,\bar{a}_{C_{21}}^{r(1)} + D_{n2}^{(2)}\,\bar{a}_{C_{12}}^{r(2)} + \ldots + D_{n2}^{(n-1)}\,\bar{a}_{C_{12}}^{r(n-1)},$$

în care $D(\omega_1)$ sau $D(\omega_2)$ arată că în calculul acestor coeficienţi după formulele (62, 63, 64, 65) se va lua pentru $\bar{a}_{C_{21}}^{c(n)}$ viteza unghiulară ω_1 a primului corp care corespunde mişcării de transport şi, invers, pentru $\bar{a}_{C_{12}}^{c(n)}$ cînd corpul al doilea corespunde mişcării de transport şi deci se utilizează ω_2.

Din aproape în aproape se constată că, dacă J_{21} este centrul instantaneu pentru mişcarea relativă directă, şi deci $\bar{a}_{J_{21}}^{r(n)} = 0$, nu este şi centru instantaneu pentru mişcarea relativă inversă, $\bar{a}_{J_{12}}^{r(n)} \neq 0$ din cauza acceleraţiilor complementare de ordinul n.

În cazul polurilor permanente de rotaţie $P_{21} = P_{12}$, deoarece $\bar{a}_{P_2}^{(n)} = \bar{a}_{P_1}^{(n)}$ acceleraţiile relative şi complementare de ordinul n sînt egale cu

zero, $\bar{a}^{r(n)}_{P_{21}} = \bar{a}^{r(n)}_{P_{12}} = 0$; $\bar{a}^{c(n)}_{P_{21}} = \bar{a}^{c(n)}_{P_{12}} = 0$. Deci accelerația relativă a punctului C_2 față de primul element devine :

$$\bar{a}^{r(n)}_{C_{21}} = \bar{a}^{rn(n)}_{C_{21}P_{21}} + \bar{a}^{rt(n)}_{C_{21}P_{21}} \tag{70}$$

și, invers,

$$\bar{a}^{r(n)}_{C_{12}} = \bar{a}^{rn(n)}_{C_{12}P_{12}} + \bar{a}^{rt(n)}_{C_{12}P_{12}}$$

rezultînd :

$$\bar{a}^{r(n)}_{C_{21}} + \bar{a}^{r(n)}_{C_{12}} = -2\,A_n(\omega_{21})\,\overline{PC}, \tag{71}$$

$$\bar{a}^{r(n)}_{C_{21}} - \bar{a}^{r(n)}_{C_{12}} = 2\,B_n(\omega_{21})\,\overline{PC}\,i. \tag{72}$$

Pentru legătura dintre corpuri prin cuplă de translație rectilinie, cu $\omega_1 = \omega_2$, rezultă din aproape în aproape :

$$\bar{a}^{r(n)}_{C_{21}} + \bar{a}^{r(n)}_{C_{12}} = 0 \tag{73}$$

și deci

$$\bar{a}^{c(n)}_{C_{21}} + \bar{a}^{c(n)}_{C_{12}} = 0, \tag{74}$$

deoarece

$$D^{(k)}_n(\omega_1) = D^{(k)}_n(\omega_2) \text{ pentru } \omega_1 = \omega_2. \tag{75}$$

Rezultă de asemenea

$$\lim_{\substack{\omega_2 \to \omega_1,\ P \to \infty}} A_n(\omega_{21})\,\overline{PC} = 0 \text{ cu } \lim_{\omega_2 \to \omega_1} A_n(\omega_{21}) = 0 \tag{76}$$

și, considerînd,

$$\bar{a}^{r(n)}_{C_{21}} - \bar{a}^{r(n)}_{C_{12}} = 2\,\bar{a}^{r(n)}_{C_{21}}, \tag{77}$$

avem

$$\lim_{\substack{\omega_2 \to \omega_1,\ P \to \infty}} B_n(\omega_{21})\,\overline{PC} = \bar{a}^{r(n)}_{C_{21}} \text{ cu } \lim_{\omega_2 \to \omega_1} B_n(\omega_{21}) = 0, \tag{78}$$

în care punctul C este la distanță finită, iar polul P este aruncat la infinit din cauza cuplei de translație rectilinie $\omega_1 = \omega_2$.

Mișcarea relativă fiind de translație rectilinie, urmează că accelerațiile relative și complementare de orice ordin sînt aceleași pentru toate punctele, astfel că putem scrie fără să mai marcăm un anumit punct

$$\bar{a}^{r(n)}_{21} + \bar{a}^{r(n)}_{12} = 0, \tag{79}$$

$$\bar{a}^{c(n)}_{21} + \bar{a}^{c(n)}_{12} = 0. \tag{80}$$

Revenind la cazul general, din relația :

$$\bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{12} = 0 \tag{81}$$

rezultă, prin derivări succesive :

$$\bar{\varepsilon}_{21} + \bar{\varepsilon}_{12} = 0 \tag{82}$$

sau

$$\bar{\omega}_{21}^{(n)} + \bar{\omega}_{12}^{(n)} = 0. \tag{83}$$

Aceste relaţii conduc şi la :

$$\begin{aligned} A_n(\omega_{21}) - A_n(\omega_{12}) &= 0, \\ B_n(\omega_{21}) + B_n(\omega_{12}) &= 0, \\ C_n(\omega_{21}) + C_n(\omega_{12}) &= 0, \end{aligned} \tag{84}$$

astfel că pentru suma sau diferenţa acceleraţiilor relative de ordinul n, în mişcarea directă şi inversă, cu centrele instantanee J_{21} şi J_{12} mai obţinem relaţiile :

$$\begin{aligned} \bar{a}_{C_{21}}^{r(n)} + \bar{a}_{C_{12}}^{r(n)} &= -\left[\bar{a}_{C_{21}}^{c(n)} + \bar{a}_{C_{12}}^{c(n)}\right] = \\ &= -A_n(\omega_{21})\left[\overline{J_{21}C} + \overline{J_{12}C}\right] + B_n(\omega_{21})\,\overline{J_{21}J_{12}}\,i \end{aligned} \tag{85}$$

$$\bar{a}_{C_{21}}^{r(n)} - \bar{a}_{C_{12}}^{r(n)} = -A_n(\omega_{21})\,\overline{J_{21}J_{12}} + B_n(\omega_{21})\left[\overline{J_{21}C} + \overline{J_{12}C}\right] i \ . \tag{86}$$

Acestea se reduc, pentru polul permanent de rotaţie la distanţă finită $J_{21} = J_{12} = P$, la formulele (71, 72), iar pentru polul permanent aruncat la infinit, la formulele (73,77).

Relaţia (56) de compunere a acceleraţiilor se poate scrie sub forma :

$$\bar{a}_{C_2}^{(n)} = \bar{a}_{C_1}^{(n)} + \bar{\Phi}_{C_{21}}^{(n)} \tag{87}$$

şi

$$\bar{a}_{C_1}^{(n)} = \bar{a}_{C_2}^{(n)} + \bar{\Phi}_{C_{12}}^{(n)},$$

în care

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{C_{21}}^{(n)} &= \bar{a}_{C_{21}}^{r(n)} + \bar{a}_{C_{21}}^{c(n)} = \sum_{k=0}^{n} D_n^{(k)}(\omega_1)\,\bar{a}_{C_{21}}^{r(k)} \\ \bar{\Phi}_{C_{12}}^{(n)} &= \bar{a}_{C_{12}}^{r(n)} + \bar{a}_{C_{12}}^{c(n)} = \sum_{k=0}^{n} D_n^{(k)}(\omega_2)\,\bar{a}_{C_{12}}^{r(k)}, \end{aligned} \tag{88}$$

cu

$$\bar{\Phi}_{C_{21}}^{(n)} + \bar{\Phi}_{C_{12}}^{(n)} = 0\,; \quad D_n^{(n)}(\omega_1) = D_n^{(n)}(\omega_2) = 1, \tag{89}$$

astfel că :

$$\sum_{k=0}^{n}\left[D_n^{(k)}(\omega_1)\,\bar{a}_{C_{21}}^{r(k)} + D_n^{(k)}(\omega_2)\,\bar{a}_{C_{12}}^{r(k)}\right] = 0\,. \tag{90}$$

Dacă se înlocuiesc acceleraţiile relative ale punctului C faţă de acceleraţiile relative ale punctului A

$$\bar{a}_{C_{21}}^{r(k)} = \bar{a}_{A_{21}}^{r(k)} - A_k(\omega_{21})\,\overline{AC} + B_k(\omega_{21})\,\overline{AC}\,i$$

se poate scrie :

$$\bar{\Phi}_{C_{21}}^{(n)} = \bar{\Phi}_{A_{21}}^{(n)} - \mathcal{A}_n(\omega_{21})\,\overline{AC} + \mathcal{B}_n(\omega_{21})\,\overline{AC}\,i, \tag{91}$$

în care

$$\overline{\Phi}_{A_{21}}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} D_n^{(k)}(\omega_1)\, \overline{a}_{A_{21}}^{r(k)},$$

iar

$$\mathcal{A}_n(\omega_{21}) = \sum_{k=0}^{n} D_n^{(k)}(\omega_1)\, A_k(\omega_{21}) \tag{92}$$

$$\mathcal{B}_n(\omega_{21}) = \sum_{k=0}^{n} D_n^{(k)}(\omega_1)\, B_k(\omega_{21}) \tag{93}$$

și deci relația (90) se poate înlocui prin:

$$\mathcal{A}_n(\omega_{21}) + \mathcal{A}_n(\omega_{12}) - i\ [\mathcal{B}_n(\omega_{21}) + \mathcal{B}_n(\omega_{12})] = 0 \tag{94}$$

sau

$$\mathcal{B}_n(\omega_{21}) + \mathcal{B}_n(\omega_{12}) + i\ [\mathcal{A}_n(\omega_{21}) + \mathcal{A}_n(\omega_{12})] = 0.$$

De asemenea, întrucît:

$$\overline{\Phi}_{C_{21}}^{(n)} = \overline{a}_{C_2}^{(n)} - \overline{a}_{C_1}^{(n)}$$

în care se înlocuiesc accelerațiile punctelor C în funcție de accelerațiile punctelor A, aparținînd acelorași corpuri,

$$\overline{a}_{C_2}^{(n)} = \overline{a}_{A_2}^{(n)} - A_n(\omega_2)\,\overline{AC} + B_n(\omega_2)\,\overline{AC}\,i$$

$$\overline{a}_{C_1}^{(n)} = \overline{a}_{A}^{(n)} - A_n(\omega_1)\,\overline{AC} + B_n(\omega_1)\,\overline{AC}\,i$$

se obține:

$$\overline{\Phi}_{C_{21}}^{(n)} = \overline{\Phi}_{A_{21}}^{(n)} - [A_n(\omega_2) - A_n(\omega_1)]\,\overline{AC} + [B_n(\omega_2) - B_n(\omega_1)]\,\overline{AC}\,i \tag{95}$$

astfel că din egalarea relațiilor (76) și (81) avem:

$$A_n(\omega_1) - A_n(\omega_1) - \mathcal{A}_n(\omega_{21}) = [B_n(\omega_2) - B_n(\omega_1) - \mathcal{B}_n(\omega_{21})]\,i. \tag{96}$$

2.2. Relațiile de compunere ale accelerațiilor de ordine superioare (56, 87) se vor modifica prin introducerea accelerațiilor compuse, luînd formele:

$$\tilde{a}_{C_2}^{(n)} = \tilde{a}_{C_1}^{(n)} + \tilde{a}_{C_{21}}^{(n)}, \tag{97}$$

$$\tilde{\tilde{a}}_{C_2}^{(n)} = \tilde{\tilde{a}}_{C_1}^{(n)} + \tilde{\tilde{a}}_{C_{21}}^{(n)}, \tag{98}$$

în care să avem:

$$\tilde{a}_{C_{21}}^{(n)} = \Omega_{21}^{(n)}\,\overline{HC}\,i, \tag{99}$$

$$\tilde{\tilde{a}}_{C_{21}}^{(n)} = \omega_{21}^{(n)}\,\overline{HC}\,i. \tag{100}$$

Mărimile $\Omega_{21}^{(n)}$ sau $\omega_{21}^{(n)}$ sînt reale, iar H este centrul accelerațiilor complexe de ordinul n, pentru care

$$\tilde{a}_{H_1}^{(n)} = \tilde{a}_{H_2}^{(n)};\ \tilde{a}_{H_{21}}^{(n)} = 0 \quad \text{sau} \quad \tilde{\tilde{a}}_{H_1}^{(n)} = \tilde{\tilde{a}}_{H_2}^{(n)};\ \tilde{\tilde{a}}_{H_{21}}^{(n)} = 0,$$

după cum considerăm acceleraţiile de prima sau a doua speţă, adică

$$\begin{aligned} \bar{a}_{C_2}^{(n)} &= \bar{a}_{C_2}^{(n)} + A_n(\omega_2)\,\overline{K_2C} \\ \bar{a}_{C_1}^{(n)} &= \bar{a}_{C_1}^{(n)} + A_n(\omega_1)\,\overline{K_1C} \end{aligned} \tag{101}$$

sau

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{a}}_{C_2}^{(n)} &= \bar{a}_{C_2}^{(n)} + [A_n(\omega_2) + C_n(\omega_2)\,i]\,\overline{K_2C}, \\ \tilde{\bar{a}}_{C_1}^{(n)} &= \bar{a}_{C_1}^{(n)} + [A_n(\omega_1) + C_n(\omega_1)\,i]\,\overline{K_1C}. \end{aligned} \tag{102}$$

Înlocuind în relaţiile de compunere a acceleraţiilor

$$\bar{a}_{C_2}^{(n)} = \bar{a}_{C_1}^{(n)} + \bar{\Phi}_{C_{21}}^{(n)},$$

obţinem :

$$\tilde{a}_{C_{21}}^{(n)} = A_n(\omega_2)\,\overline{K_2C} - A_n(\omega_1)\,\overline{K_1C} + \bar{\Phi}_{C_{21}}^{(n)} \tag{103}$$

sau

$$\tilde{\bar{a}}_{C_{21}}^{(n)} = [A_n(\omega_2) + C_n(\omega_2)\,i]\,\overline{K_2C} - [A_n(\omega_1) + C_n(\omega_1)\,i]\,\overline{K_1C} + \bar{\Phi}_{C_{21}}^{(n)}. \tag{104}$$

Dezvoltînd termenul $\bar{\Phi}_{C_{21}}^{(n)}$ sub forma (95), avem :

$$\bar{\Phi}_{C_{21}}^{(n)} = \Phi_{H_{21}}^{(n)} - [A_n(\omega_2) - A_n(\omega_1)]\,\overline{HC} + [B_n(\omega_2) - B_n(\omega_1)]\,\overline{HC}\,i \tag{105}$$

şi, luîndu-se pentru acceleraţii de prima speţă relaţia,

$$A_n(\omega_2)\,\overline{HK_2} = A_n(\omega_1)\,\overline{HK_1} + \bar{\Phi}_{H_{21}}^{(n)}, \tag{106}$$

iar pentru acceleraţiile de speţa a doua relaţia :

$$[A_n(\omega_2) + C_n(\omega_2)\,i]\,\overline{HK_2} = [A_n(\omega_1) + C_n(\omega_1)\,i]\,\overline{HK_1} + \bar{\Phi}_{H_{21}}^{(n)}, \tag{107}$$

se ajunge la :

$$\Omega_{21}^{(n)} = B_n(\omega_2) - B_n(\omega_1) = -\,\Omega_{12}^{(n)} \tag{108}$$

şi la

$$\omega_{21}^{(n)} = \Omega_{21}^{(n)} + C_n(\omega_2) - C_n(\omega_1) = \omega_2^{(n)} - \omega_1^{(n)} = -\,\omega_{12}^{(n)} \tag{109}$$

care au valori reale.

În relaţiile (106) şi (107) avem pentru H oarecare, în general :

$$\bar{\Phi}_{H_{21}}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} D_n^{(k)}(\omega_1)\,\bar{a}_{H_{21}}^{r(k)} = \bar{a}_{H_{21}}^{c(n)} + \bar{a}_{H_{21}}^{r(n)}, \tag{110}$$

care cuprinde şi acceleraţia de ordinul n. Dacă însă centrul instantaneu H al acceleraţiilor compuse superioare corespunde cu centrul instantaneu al acceleraţiilor superioare $H_{21} \equiv J_{21}$, deoarece $\bar{a}_{J_{21}}^{r(n)} = \bar{a}_{H_{21}}^{r(n)} = 0$, rămîne :

$$\bar{\Phi}_{H_{21}}^{(n)} = \bar{\Phi}_{J_{21}}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} D_n^{(k)}(\omega_1)\,\bar{a}_{J_{21}}^{r(k)} = \bar{a}_{J_{21}}^{c(n)} \tag{111}$$

astfel că relațiile (106) și (107) exprimă legătura dintre pozițiile punctelor caracteristice K_1 și K_2 numai prin utilizarea accelerațiilor inferioare ordinului n.

Dacă în relațiile de determinare a punctelor caracteristice K_1 și K_2 (106) și (107) se înlocuiește $\bar{\Phi}_{H_{21}}^{(n)}$ în funcție de $\bar{\Phi}_{P_{21}}^{(n)}$, P fiind deocamdată un punct oarecare, avem :

$$\bar{\Phi}_{H_{21}}^{(n)} = \bar{\Phi}_{P_{21}}^{(n)} - [A_n(\omega_2) - A_n(\omega_1)]\,\overline{PH} + [B_n(\omega_2) - B_n(\omega_1)]\,\overline{PH}\,i\,;$$

rezultă

$$A_n(\omega_1)\,\overline{PK_2} = A_n(\omega_1)\,\overline{PK_1} + \bar{\Phi}_{P_{21}}^{(n)} + \Omega_{21}^{(n)}\,\overline{PH}\,i \tag{112}$$

și apoi

$$[A_n(\omega_2) + C_n(\omega_2)\,i]\,\overline{PK_2} = [A_n(\omega_1) + C_n(\omega_1)\,i]\,\overline{PK_1} + \\ + \bar{\Phi}_{P_{21}}^{(n)} + \omega_{21}^{(n)}\,\overline{PH}\,i. \tag{113}$$

Dacă punctul P este centrul instantaneu al vitezelor $P \equiv I$, atunci, deoarece $\bar{a}_{I_{21}}^{\tau(0)} = 0$, avem :

$$\bar{\Phi}_{P_{21}}^{(n)} = \bar{\Phi}_{I_{21}}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} D_n^{(k)}(\omega_1)\,\bar{a}_{I_{21}}^{\tau(k)}, \tag{114}$$

iar dacă P este centrul instantaneu al accelerațiilor superioare $P \equiv J_{21}^{(n)}$, deoarece $\bar{a}_{J_{21}}^{\tau(n)} = 0$, avem :

$$\bar{\Phi}_{P_{21}}^{(n)} = \bar{\Phi}_{J_{21}^{(n)}}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} D_n^{(k)}(\omega_1)\,\bar{a}_{J_{21}^{(n)}}^{\tau(k)}. \tag{115}$$

Dacă punctul P este centrul de rotație permanent, pentru mișcarea relativă a celor două corpuri, atunci $\bar{\Phi}_{P_{21}}^{(n)} = 0$ și relațiile se reduc la :

$$A_n(\omega_2)\,\overline{PK_2} = A_n(\omega_1)\,\overline{PK_1} + \Omega_{21}^{(n)}\,\overline{PH}\,i \tag{116}$$

$$[A_n(\omega_2) + C_n(\omega_2)\,i]\,\overline{PK_2} = [A_n(\omega_1) + C_n(\omega_1)\,i]\,\overline{PK_1} + \omega_{21}^{(n)}\,\overline{PH}\,i. \tag{117}$$

În continuare, dacă centrul H al accelerațiilor compuse de ordinul n se confundă cu centrul permanent de rotație P, avem :

$$A_n(\omega_2)\,\overline{PK_2} = A_n(\omega_1)\,\overline{PK_1} \tag{118}$$

$$[A_n(\omega_2) + C_n(\omega_2)\,i]\,\overline{PK_2} = [A_n(\omega_1) + C_n(\omega_1)\,i]\,\overline{PK_1}. \tag{119}$$

Dacă legătura dintre corpuri se face prin cuplă de translație rectilinie $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, centrul permanent P este la infinit împreună cu centrul H. Formulele (112, 113) se modifică după cum rezultă :

$$A_n(\omega)\,\overline{K_1K_2} = \bar{\Phi}_{21}^{(n)} - \bar{a}_{21}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} D_n^{(k)}(\omega)\,\bar{a}_{21}^{\tau(k)} \tag{120}$$

sau

$$[A_n(\omega) + C_n(\omega)\,i]\,\overline{K_1K_2} = \bar{\Phi}_{21}^{(n)} - \tilde{\bar{a}}_{21}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} D_n^{(k)}(\omega)\,\bar{a}_{21}^{\tau(k)}, \tag{121}$$

considerîndu-se $\bar{a}_{21}^{(n)} = \bar{a}_{21}^{\tau(n)}$ sau $\tilde{\bar{a}}_{21}^{(n)} = \bar{a}_{21}^{\tau(n)}$.

2.3. *Distribuția accelerațiilor compuse superioare.* Se presupun cunoscute centrul instantaneu relativ $H_{12}=H_{21}$ și accelerațiile punctelor A_1 și B_2 din cele două corpuri. Utilizîndu-se ecuațiile vectoriale pentru accelerațiile punctelor C_1 și C_2 confundate în C, dar legate de corpuri diferite :

$$\tilde{a}^{(n)}_{C_1} = \tilde{a}^{(n)}_{A_1} + \tilde{a}^{(n)}_{C_1A_1}\ ; \qquad \tilde{a}^{(n)}_{C_2} = \tilde{a}^{(n)}_{B_2} + \tilde{a}^{(n)}_{C_2B_2}\ , \qquad \tilde{a}^{(n)}_{C_2} = \tilde{a}^{(n)}_{C_1} + \tilde{a}^{(n)}_{C_{21}} \tag{122}$$

se constată, după gruparea convenabilă a necunoscutelor, că rezolvarea grafică se poate face pentru punctele C_2, așezate pe dreapta $\Delta_1=A_1H_{12}(C_2)$, sau pentru punctele C_1, așezate pe dreapta $\Delta_2=B_2H_{21}(C_1)$[7]. Se preferă, ca și în cazul vitezelor, determinarea deodată a accelerațiilor compuse superioare egale ale punctelor H_1 și H_2 de la intersecția dreptelor Δ_1 și Δ_2, mai ales dacă centrul H este la distanță finită, sau a punctelor B_1 și A_2 corespunzătoare punctelor B_2 și A_1, în special dacă centrul H este la mare depărtare (eventual la infinit).

În privința proiecțiilor avem aceleași rezultate ca la viteze, și anume :

a) proiecțiile accelerațiilor compuse superioare ale punctelor de pe dreapta ΔH care trece prin $H_{12}=H_{21}$ pe această dreaptă sînt egale, indiferent cărui corp îi aparțin punctele :

$$\mathrm{pr}_{\Delta H}\,\tilde{a}^{(n)}_{C_2} = \mathrm{pr}_{\Delta H}\,\tilde{a}^{(n)}_{C_1}\ ; \tag{123}$$

b) acceleratia compusă superioară relativă se obține din proiecțiile accelerațiilor punctelor de pe dreapta ΔH pe direcția perpendiculară dreptei :

$$\tilde{a}^{(n)}_{C_{21}} = \mathrm{pr}_{\perp\Delta H}\,\tilde{a}^{(n)}_{C_2} - \mathrm{pr}_{\perp\Delta H}\,\tilde{a}^{(n)}_{C_1}\ . \tag{124}$$

În același fel se pot utiliza metodele : rabaterea accelerației compuse superioare (ortogonale) sau rotirea poligoanelor de accelerații.

3. MIȘCAREA PLANĂ RELATIVĂ A TREI SOLIDE RIGIDE

3.1. În corespondență cu alegerea convenabilă a punctelor caracteristice K sau a centrelor instantanee H se poate menține sau nu proprietatea de coliniaritate pentru centrele a trei corpuri în mișcare plană relativă. În adevăr, dacă luăm trei puncte C_1, C_2, C_3 aparținînd fiecăruia dintre corpuri, dar confundate în același punct C, relațiile accelerațiilor compuse sînt :

$$\tilde{a}^{(n)}_{C_2} = \tilde{a}^{(n)}_{C_1} + \tilde{a}^{(n)}_{C_{21}}\ ,\quad \tilde{a}^{(n)}_{C_3} = \tilde{a}^{(n)}_{C_2} + \tilde{a}^{(n)}_{C_{32}}\ ,\quad \tilde{a}^{(n)}_{C_1} = \tilde{a}^{(n)}_{C_3} + \tilde{a}^{(n)}_{C_{13}} \tag{125}$$

și deci, prin însumare, se obține :

$$\widetilde{T} = \tilde{a}^{(n)}_{C_{21}} + \tilde{a}^{(n)}_{C_{32}} + \tilde{a}^{(n)}_{C_{13}} \neq 0, \tag{126}$$

deoarece

$$\begin{aligned}\widetilde{T} &= \tilde{a}'^{(n)}_{C_1} - \tilde{a}^{(n)}_{C_1} = \tilde{a}'^{(n)}_{C_2} - \tilde{a}^{(n)}_{C_2} = \tilde{a}'^{(n)}_{C_3} - \tilde{a}^{(n)}_{C_3} \\ &= -A_n(\omega_1)\overline{K_1K_1'} = -A_n(\omega_2)\overline{K_2K_2'} = -A_n(\omega_3)\overline{K_3K_3'}\end{aligned} \tag{127}$$

sau, pentru accelerațiile compuse de speța a doua,

$$\widetilde{\widetilde{T}} = \widetilde{\tilde{a}}^{(n)}_{C_{21}} + \widetilde{\tilde{a}}^{(n)}_{C_{32}} + \widetilde{\tilde{a}}^{(n)}_{C_{13}} \neq 0 \tag{128}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{T}} &= \widetilde{\tilde{a}}'^{(n)}_{C_1} - \widetilde{\tilde{a}}^{(n)}_{C_1} = \widetilde{\tilde{a}}'^{(n)}_{C_2} - \widetilde{\tilde{a}}^{(n)}_{C_2} = \widetilde{\tilde{a}}'^{(n)}_{C_3} - \widetilde{\tilde{a}}^{(n)}_{C_3} \\ &= -[A_n(\omega_1) + C_n(\omega_1)i]\overline{K_1K_1'} \\ &= -[A_n(\omega_2) + C_n(\omega_2)i]\overline{K_2K_2'} \\ &= -[A_n(\omega_3) + C_n(\omega_3)i]\overline{K_3K_3'}.\end{aligned} \tag{129}$$

Trecîndu-se succesiv de la corpurile (1) la (2) și (3) și reîntorcîndu-se la primul, în general nu se capătă același punct caracteristic $K_1' \neq K_1$ astfel că și sistemele de accelerații compuse sînt diferite $\tilde{a}'^{(n)}_{C_1} \neq \tilde{a}^{(n)}_{C_1}$.

Astfel, dacă relațiile (112) (113) se scriu pentru puncte diferite P_{21}, P_{32}, P_{13}, atunci avem :

$$\begin{aligned}A_n(\omega_2)\overline{P_{21}K_2} &= A_n(\omega_1)\overline{P_{21}K_1} + \overline{\Phi}^{(n)}_{P_{21}} + \Omega^{(n)}_{21}\overline{P_{21}H_{21}}\,i, \\ A_n(\omega_3)\overline{P_{32}K_3} &= A_n(\omega_2)\overline{P_{32}K_2} + \overline{\Phi}^{(n)}_{P_{32}} + \Omega^{(n)}_{32}\overline{P_{32}H_{32}}\,i, \\ A_n(\omega_1)\overline{P_{13}K_1'} &= A_n(\omega_3)\overline{P_{13}K_3} + \overline{\Phi}^{(n)}_{P_{13}} + \Omega^{(n)}_{13}\overline{P_{13}H_{13}}\,i.\end{aligned} \tag{130}$$

Deoarece

$$\begin{aligned}\overline{P_{21}K_2} &= \overline{P_{21}P_{32}} + \overline{P_{32}K_2}, \\ \overline{P_{32}K_3} &= \overline{P_{32}P_{13}} + \overline{P_{13}K_3}, \\ \overline{P_{13}K_1'} &= \overline{P_{13}P_{21}} + \overline{P_{21}K_1} + \overline{K_1K_1'},\end{aligned} \tag{131}$$

rezultă, prin însumare :

$$\begin{aligned}-\widetilde{T} = A_n(\omega_1)\overline{K_1K_1'} &= -A_n(\omega_1)\overline{P_{13}P_{21}} - A_n(\omega_2)\overline{P_{21}P_{32}} - \\ &- A_n(\omega_3)\overline{P_{32}P_{13}} + \overline{\Phi}^{(n)}_{P_{21}} + \overline{\Phi}^{(n)}_{P_{32}} + \overline{\Phi}^{(n)}_{P_{13}} + \Omega^{(n)}_{21}\overline{P_{21}H_{21}}\,i + \\ &+ \Omega^{(n)}_{32}\overline{P_{32}H_{32}}\,i + \Omega^{(n)}_{13}\overline{P_{13}H_{13}}\,i.\end{aligned} \tag{132}$$

Pentru $\widetilde{\widetilde{T}}$ relațiile sînt analoge.

Aceste relații se mai reduc dacă centrele H corespund cu punctele P, dar, în general, rămîne $\widetilde{T} \neq 0$ sau $\widetilde{\widetilde{T}} \neq 0$. De asemenea pentru ca în determinarea lui $\widetilde{T}$ sau $\widetilde{\widetilde{T}}$ să se întrebuințeze numai derivatele inferioare ordi-

nului n, ar trebui ca $H = P = J^{(n)}$ să fie centrul instantaneu relativ pentru acceleraţiile superioare. Dacă $H \equiv P \equiv I$ corespunde cu centrul instantaneu al vitezelor în determinarea lui $\widetilde{T}$ sau $\widetilde{\widetilde{T}}$, nu se întrebuinţează vitezele relative.

Din relaţia (132) în care considerăm punctele P_1, P_2, P_3 confundate în acelaşi punct geometric P, se găseşte :

$$-\widetilde{T} = A_n(\omega_1)\overline{K_1K_1'} = \Omega_{21}^{(n)}\overline{PH_{21}}\,i + \Omega_{32}^{(n)}\overline{PH_{32}}\,i + \Omega_{13}^{(n)}\overline{PH_{13}}\,i =$$

$$= B_n(\omega_1)\overline{H_{13}H_{12}}\,i + B_n(\omega_2)\overline{H_{12}H_{23}}\,i + B_n(\omega_3)\overline{H_{23}H_{31}}\,i \qquad (133)$$

deoarece avem :

$$\overline{\Phi}_{P_{21}}^{(n)} + \overline{\Phi}_{P_{32}}^{(n)} + \overline{\Phi}_{P_{13}}^{(n)} = 0$$

şi

$$\Omega_{21}^{(n)} + \Omega_{32}^{(n)} + \Omega_{13}^{(n)} = 0.$$

Pentru că :

$$\overline{H_{31}H_{12}} + \overline{H_{12}H_{23}} + \overline{H_{23}H_{31}} = 0,$$

se mai găseşte :

$$-\widetilde{T} = \Omega_{21}^{(n)}\overline{H_{12}H_{23}}\,i + \Omega_{31}^{(n)}\overline{H_{23}H_{31}}\,i \qquad (134)$$

sau

$$-\widetilde{\widetilde{T}} = \omega_{21}^{(n)}\overline{H_{12}H_{23}}\,i + \omega_{31}^{(n)}\overline{H_{23}H_{31}}\,i. \qquad (135)$$

Aceste expresii sînt, în general, diferite de zero. Astfel, dacă centrele H corespund centrelor de rotaţie I, care sînt coliniare, ar trebui ca pentru anularea lor să se păstreze proporţionalitatea rapoartelor $\Omega_{21}^{(n)}/\Omega_{31}^{(n)}$ sau $\omega_{21}^{(n)}/\omega_{31}^{(n)}$ cu ω_{21}/ω_{31}, ceea ce nu este posibil în cazul general, iar determinarea unuia dintre centrele H pe baza anulării expresiilor anterioare presupune utilizarea derivatei de ordinul n asupra vitezei unghiulare.

3.2. *Distribuţia acceleraţiilor compuse superioare.* Cunoscînd centrele $H_{12}=H_{21}$ şi $H_{23}=H_{32}$, precum şi acceleraţiile a două puncte A_1 şi B_3 din corpurile extreme, se poate determina direct acceleraţia punctului C_2 din corpul central, situat la intersecţia dreptelor $\Delta_1 = A_1H_{12}\,(C_2)$ şi $\Delta_3 = B_3H_{32}\,(C_2)$ [7].

De asemenea proprietăţile de proiecţii se extind şi la mişcarea relativă a trei corpuri pentru punctele aparţinînd oricăruia dintre corpuri, dar aşezate pe dreapta $\Delta H_{12}H_{23}$, care trece prin centrele instantanee relative.

$$pr_\Delta\,\tilde{a}_{D_1} = pr_\Delta\,\tilde{a}_{D_2} = pr_\Delta\,\tilde{a}_{D_3}, \qquad (136)$$

$$pr_\Delta\,\widetilde{\tilde{a}}_{D_1} = pr_\Delta\,\widetilde{\tilde{a}}_{D_2} = pr_\Delta\,\widetilde{\tilde{a}}_{D_3}. \qquad (137)$$

4. MIȘCAREA PLANĂ A UNUI LANȚ CINEMATIC SIMPLU

4.1. Poziționarea punctelor caracteristice se face din aproape în aproape, pe baza relației :

$$A_n(\omega_2)\,\overline{P_{21}K_2} = A_n(\omega_1)\,\overline{P_{21}K_1} + \bar{\Phi}^{(n)}_{P_{21}} + \Omega^{(n)}_{21}\,\overline{P_{21}H_{21}}\,i\,,$$

astfel că se obține :

$$A_n(\omega_1)\,\overline{K_1P_{12}} + A_n(\omega_2)\,\overline{P_{12}P_{23}} + \cdots + A_n(\omega_s)\,\overline{P_{s-1,s}P_{s,s+1}} +$$

$$+ A_n(\omega_{s+1})\,\overline{P_{s,s+1}K_{s+1}} = \sum_{\sigma=1}^{s} \bar{\Phi}^{(n)}_{P_{\sigma+1,\sigma}} + \sum_{\sigma=1}^{s} \Omega^{(n)}_{\sigma+1,\sigma}\,\overline{P_{\sigma+1,\sigma}H_{\sigma+1,\sigma}}\,i\cdot \quad (138)$$

Această relație poziționează direct punctul caracteristic K_{s+1} față de K_1 și de punctele intermediare alese arbitrar P_{12}, $P_{23}\cdots P_{s,s+1}$. Dacă centrele H coincid punctelor P relația se reduce prin anularea ultimei sume. În plus, pentru centre permanente $\bar{\Phi}^{(n)}_{P_{\sigma+1,\sigma}} = 0$, astfel că rămîne :

$$A_n(\omega_1)\,\overline{K_1P_{12}} + A_n(\omega_2)\,\overline{P_{12}P_{23}} + \cdots + A_n(\omega_{s+1})\,\overline{P_{s,s+1}K_{s+1}} = 0. \quad (139)$$

Pentru situația în care lanțul cinematic cuprinde corpuri legate prin cuple de translație $\omega_k = \omega_{k+1}$ și $P_{k,k+1} \to \infty$, astfel că prin egalarea vitezelor unghiulare respective se elimină centrul aruncat la infinit, rămînînd în partea a doua termenul de accelerație complementară, avem :

$$A_n(\omega_1)\,\overline{K_1P_{12}} + A_n(\omega_2)\,\overline{P_{12}P_{23}} + \cdots + A_n(\omega_k)\,\overline{P_{k-1,k}P_{k+1,k+2}} +$$

$$+ \cdots + A_n(\omega_{s+1})\,\overline{P_{s,s+1}K_{s+1}} = \sum{}' \bar{a}^{c\,(n)}_{k,k+1}. \quad (140)$$

Suma din partea a doua se extinde numai pentru corpurile legate prin cuple de translație.

La un lanț cinematic simplu închis, pentru o parcurgere a sa, se obține punctul caracteristic $K_{s+1} = K_1' \neq K_1$, astfel că cele două sisteme de accelerații compuse superioare corespunzătoare punctelor K și K' diferă prin translația de vector

$$\overline{\widetilde{T}} = -\,A_n(\omega_1)\,\overline{K_1K_1'} = -\,A_n(\omega_2)\,\overline{K_2K_2'} = \cdots =$$

$$= A_n(\omega_1)\,\overline{P_{s,1}P_{12}} + A_n(\omega_2)\,\overline{P_{12}P_{23}} + \cdots + A_n(\omega_s)\,\overline{P_{s-1,s}P_{s,1}} \neq 0 \quad (141)$$

și

$$\overline{\widetilde{\widetilde{T}}} = -\,[A_n(\omega_1) + C_n(\omega_1)\,i]\,\overline{K_1K_1'} = -\,[A_n(\omega_2) + C_n(\omega_2)\,i]\,\overline{K_2K_2'} =$$

$$= [A_n(\omega_1) + C_n(\omega_1)\,i]\,\overline{P_{s,1}P_{12}} + \cdots + [A_n(\omega_s) + C_n(\omega_s)\,i]\,\overline{P_{s-1,s}P_{s,1}} \neq 0. \quad (142)$$

S-a considerat că $H \equiv P$ sînt centre parametre de rotație. Dacă în relația (138) luăm punctele P_{12}, $P_{23}, \cdots$, confundate în același punct geometric P, avem :

$$A_n(\omega_1)\overline{K_1P} + A_n(\omega_{s+1})\overline{PK_{s+1}} = \sum_{\sigma=1}^{s} \overline{\Phi}^{(n)}_{P_{\sigma+1,\sigma}} + \\ + \sum_{\sigma=1}^{s} B_n(\omega_\sigma)\overline{H_{\sigma-1,\sigma}H_{\sigma,\sigma+1}}\, i. \tag{143}$$

Această relație, în cazul lanțului cinematic simplu închis, devine :

$$-\overline{T} = A_n(\omega_1)\overline{K_1K_1'} = \sum_{\sigma=1}^{s} B_n(\omega_\sigma)\overline{H_{\sigma-1,\sigma}H_{\sigma,\sigma+1}}\, i, \tag{144}$$

și

$$-\overline{\overline{T}} = [A_n(\omega_1) + C_n(\omega_1)\, i]\overline{K_1K_1'} = \sum_{\sigma=1}^{s} \omega_\sigma^{(n)}\overline{H_{\sigma-1,\sigma}H_{\sigma,\sigma+1}}\, i. \tag{145}$$

În concluzie, utilizarea accelerațiilor superioare compuse facilitează analiza cinematică a corpurilor legate care au mișcare relativă, făcînd posibilă utilizarea acelorași proprietăți particulare ale distribuției de viteze.

Primită la redacție la 30 decembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. D. Mangeron, *Asupra unor proprietăți ale accelerațiilor reduse de ordin oarecare*, Bul. Inst. Politehnic Iași, **III**, 1–2 (1957).
2. D. Mangeron, Gh. Ciobanu, A. Braier, *Problema distribuției accelerațiilor de ordin oarecare în mișcarea sistemelor materiale*, Bul. Inst. politehnic Iași, **II**, *1–2* (1956).
3. D. Mangeron, C. Drăgan, *Aplicarea teoriei accelerațiilor de ordin oarecare la studiul mecanismelor plane de clasa a treia* (sub tipar).
4. D. Mangeron, *Asupra unor proprietăți ale crucilor lui Kotelnicov*, Anal. științ. Univ. „Al. I. Cuza", Iași, **VI**, *3* (1960).
5. Chr. Pelecudi și T. V. Huncker, *Studiul analitic al grupelor assurice*, St. cerc. mec. apl., *3* (1964).
6. Chr. Pelecudi, *Sistematizarea analizei grafice a lanțurilor cinematice plane*, St. cerc. mec. apl., *2* (1964).
7. — *Metoda accelerațiilor compuse în lanțurile cinematice plane*, St. cerc. mec. apl., *2* (1965).

CONTRIBUȚII LA CALCULUL RANDAMENTULUI SCRIPEȚILOR DE CABLU

de I. EGRI
Institutul politehnic, Galați

621.01

Formula clasică a factorului de pierdere nu se folosește în practică, deoarece nu este exactă și dă rezultate care sînt în contradicție flagrantă cu rezultatele obținute pe baza măsurătorilor.

În această lucrare, prin luarea în considerare a tuturor pierderilor (frecarea scripetelui pe fus, rigiditatea cablului, deformația cablului și frecarea de alunecare a cablului pe coroana scripetelui), se stabilește o formulă de calcul complexă, practică și generală, mai precisă decît cea clasică și care permite studiul științific (teoretic și experimental) al palanelor.

În stadiul actual al tehnicii, una dintre problemele care se ridică în domeniul mașinilor de ridicat este problema randamentului, folosirea cît mai rațională a energiei. Avînd în vedere răspîndirea largă a mașinilor de ridicat în toate ramurile economiei naționale, volumul mare al puterii instalate pentru acționarea mecanismelor acestor mașini, îmbunătățirea randamentului chiar numai cu fracțiuni de procente duce la economii importante de energie. Așadar, stabilirea cît mai precisă a randamentelor mașinilor de ridicat este o necesitate obiectivă și importanța ei crește o dată cu creșterea gradului de mecanizare și de automatizare a proceselor de producție.

În privința puterii instalate, mecanismele de ridicare cu scripeți au ponderea cea mai mare.

Deși scripeții și palanele sînt organe de foarte largă utilizare în domeniul mașinilor de ridicat, totuși problema calculului randamentului scripeților nu a fost practic rezolvată.

Relațiile teoretice stabilite pentru randamentul scripeților de cablu nu numai că nu sînt exacte și practice, dar duc și la contradicții flagrante cu rezultatele obținute pe baza măsurătorilor. Din această cauză relațiile teoretice ale randamentelor întîlnite în literatura tehnică de specialitate

nu au căpătat utilizarea cuvenită. Practic randamentele scripeților se stabilesc pe baza măsurătorilor. Dar stabilirea randamentului pe baza măsurătorilor, din cauza numărului mare de factori care influențează randamentul și al diversității lor, este foarte grea, iar generalizarea valorilor obținute pe baza măsurătorilor este de asemenea dificilă.

În prezent, la proiectare, din lipsa formulelor practice de calcul, aprecierea randamentului scripeților se face „din ochi", între limite mai mult sau mai puțin restrînse. Acest mod de apreciere a randamentului duce la erori care influențează precizia de calcul.

În această lucrare se urmărește stabilirea unei formule generale și practice pentru calculul randamentului scripeților de cablu.

★

Ecuația energetică a palanelor (relația dintre forța de acționare și forța rezistentă) se deduce din ecuația energetică fundamentală a scripeților componenți, adică din relația dintre forțele care acționează asupra celor două ramuri ale organului flexibil care se înfășoară pe scripete.

La scripeții ideali (fig. 1), fără pierderi, forța T_{e_0} din ramura care se desfășoară (ramura de ieșire) este egală cu forța T_i din ramura care se înfășoară pe scripete (ramura de intrare):

$$T_{e_0} = T_i. \tag{1}$$

La scripeții reali (fig. 2), din cauza frecărilor și rezistențelor pasive, forța T_e din ramura de ieșire este totdeauna mai mare decît forța T_i din ramura de intrare ($T_e > T_i$).

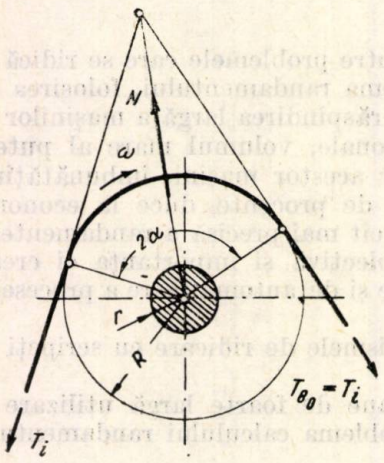


Fig. 1

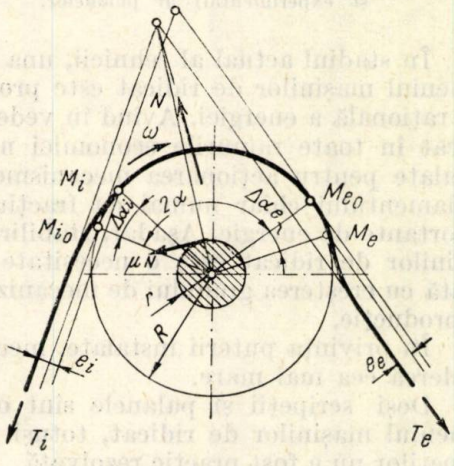


Fig. 2

În general, între aceste forțe există relația:

$$T_e = k \cdot T_i, \tag{2}$$

unde factorul de pierdere k este totdeauna supraunitar.

Randamentul scripetelui este :

$$\eta = \frac{T_{e_0}}{T_e} = \frac{1}{k} \tag{3}$$

Cunoscînd factorul de pierdere k al scripeților componenți, se poate stabili relativ ușor ecuația energetică pentru orice palan.

În literatura tehnică de specialitate de obicei se dă următoarea expresie pentru factorul de pierdere :

$$k = 1 + 2\frac{r}{R}\mu \sin \alpha + 2\, C_r \tag{4}$$

unde :

R — raza scripetelui ;
r — raza fusului scripetelui ;
α — semiunghiul de înfășurare ;
μ — coeficientul de frecare de alunecare dintre scripete și fus ;
C_r — coeficientul de rigiditate al cablului.

Coeficientul de rigiditate al cablului este raportul :

$$C_r = \frac{e}{R}, \tag{5}$$

unde e este „excentricitatea" cablului față de punctul real de tangență — deplasarea transversală a ramurii de cablu față de punctul real de contact cu scripetele (fig. 3).

Calculul analitic al coeficientului de rigiditate este dificil și neprecis. Considerînd cablul ca o bară curbă masivă, care se înconvoaie pe un suport cilindric rigid, avem în punctul real de tangență cu scripetele :

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}. \tag{6}$$

Întrucît în punctul de tangență $M = T.e$, avem :

$$e = \frac{EI}{TR}. \tag{7}$$

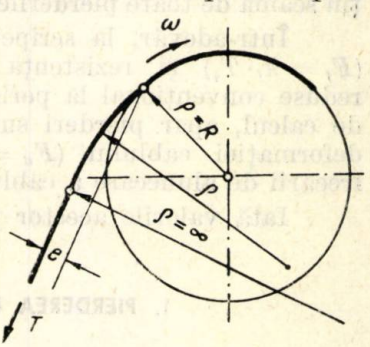


Fig. 3

În consecință, coeficientul de rigiditate este :

$$C_r = \frac{EI}{TR^2} = \frac{E}{\sigma} \cdot \frac{I}{AR^2}. \tag{8}$$

În această expresie a coeficientului de rigiditate :

A — secțiunea efectivă a cablului ;
I — momentul de inerție axial al cablului (față de axa cablului) ;

E — „modulul de elasticitate" al cablului;

σ — tensiunea din ramura de cablu $\left(\sigma = \frac{T}{A}\right)$.

Sub această formă, coeficientul de rigiditate apare ca produsul a doi factori. Unul dintre factori $\left(\frac{I}{AR^2}\right)$ depinde de caracteristicile constructive — geometrice — ale cablului şi este o mărime constantă (raportul dintre momentul de inerţie al cablului faţă de axa neutră proprie şi momentul de inerţie al cablului faţă de axa scripetelui), a cărei valoare se poate calcula cu suficientă precizie. Celălalt factor $\left(\frac{E}{\sigma}\right)$ depinde de caracteristicile mecanice ale cablului şi este o mărime variabilă cu tensiunea, respectiv cu forţa care acţionează asupra ramurii de cablu. „Modulul de elasticitate" E depinde de construcţia şi execuţia cablului, precum şi de starea lui de întreţinere (ungere, obosire,...). Din cauza înfăşurării (răsucirii) firelor şi a frecărilor dintre fire, determinarea „modulului de elasticitate" E este extrem de dificilă şi neprecisă. Din acest motiv, în practică, în locul relaţiei teoretice (8), pentru calculul coeficientului de rigiditate se folosesc diferite formule empirice.

Conform ecuaţiei (4), factorul de pierdere este cu atît mai mare şi, în consecinţă, randamentul este cu atît mai mic cu cît sînt mai mari frecările în fus şi rigiditatea cablului. După această ecuaţie cablurile de oţel, care sînt mai rigide, ar trebui să aibă un randament mai scăzut, iar funiile de cînepă, mai elastice, un randament mai ridicat. În realitate, lucrurile se petrec tocmai invers. Această contradicţie se datoreşte faptului că formulele clasice de calcul care se dau în literatura tehnică de specialitate nu ţin seama de toate pierderile care există în realitate.

Într-adevăr, la scripeţii reali, pe lîngă frecarea scripetelui pe fus ($F_f = k_f \cdot T_i$) şi rezistenţa datorită rigidităţii cablului ($F_r = k_r \cdot T_i$), reduse convenţional la periferia scripetelui, cuprinse în formulele clasice de calcul, apar pierderi suplimentare: rezistenţa suplimentară datorită deformaţiei cablului ($F_d = k_d \cdot T_i$) şi rezistenţa snplimentară datorită frecării de alunecare a cablului pe coroana scripetelui ($F_a = k_a \cdot T_i$).

Iată valorile acestor pierderi:

1. PIERDEREA DATORITĂ DEFORMAŢIEI CABLULUI

Datorită forţelor care acţionează asupra cablului (fig. 4), cablul se deformează (se alungeşte şi se înconvoaie).

Luînd în considerare numai lucrul mecanic de alungire, avem:

$$L_d = \frac{1}{2} \Delta T \cdot \Delta l \qquad (9)$$

unde :

ΔT — diferența de forțe care acționează asupra porțiunii de înfășurare ;

Δl — alungirea cablului pe lungimea de înfășurare a scripetelui.

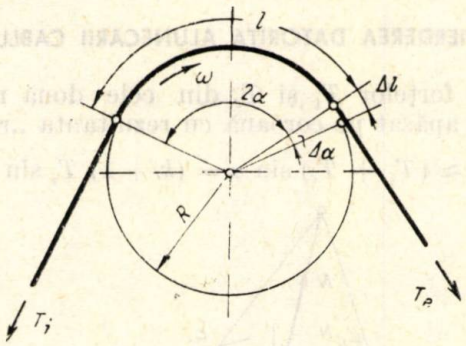


Fig. 4

Diferența de forțe care acționează asupra porțiunii de înfășurare este :

$$\Delta T = T_e - T_i = (k-1)\, T_i . \tag{10}$$

Alungirea Δl a cablului pe lungimea de înfășurare a scripetelui ($l = 2R\,\alpha$) este :

$$\Delta l = \frac{\Delta T \cdot l}{A \cdot E} = (k-1)\,\frac{T_i}{A \cdot E} \cdot 2R\,\alpha = (k-1)\,\frac{\sigma_i}{E} \cdot 2R\,\alpha. \tag{11}$$

Prin urmare, lucrul mecanic de deformație este :

$$L_d = \frac{1}{2}\,(k-1)^2 \cdot \frac{\sigma_i}{E} \cdot T_i \cdot 2R\,\alpha. \tag{12}$$

Forța de rezistență suplimentară F_d datorită deformației cablului, care se deplasează pe lungimea de înfășurare și care produce un lucru mecanic echivalent cu lucrul mecanic de deformație L_d, este definită de relația :

$$L_d = F_d \cdot 2R\,\alpha \tag{13}$$

Avem :

$$F_d \cdot 2R\,\alpha = \frac{1}{2}\,(k-1)^2 \cdot \frac{\sigma_i}{E} \cdot T_i \cdot 2R\,\alpha.$$

De unde rezultă :

$$F_d = \frac{1}{2}\,(k-1)^2 \cdot \frac{\sigma_i}{E} \cdot T_i . \tag{14}$$

În consecință, coeficientul de pierdere, urmare a deformației (alungirii) cablului, este :

$$k_d = \frac{F_d}{T_i} = \frac{1}{2}(k-1)^2 \cdot \frac{\sigma_i}{E}. \tag{15}$$

2. PIERDEREA DATORITĂ ALUNECĂRII CABLULUI

Sub acțiunea forțelor T_i și T_e din cele două ramuri ale cablului (fig. 5), cablul este apăsat pe coroană cu rezultanta „radială"

$$N \approx (T_i + T_e) \sin \alpha = (k+1)\, T_i \sin \alpha. \tag{16}$$

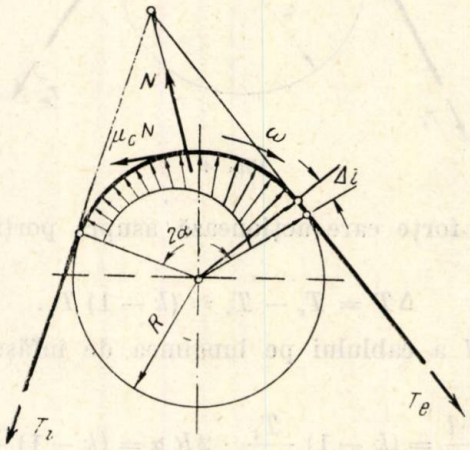


Fig. 5

Sub acțiunea diferenței de forțe ΔT, cablul, alungindu-se cu Δl, alunecă pe suprafața de contact, dînd naștere unei frecări de alunecare.

Apăsarea totală N dă naștere pe suprafața de contact dintre coroană și cablu la o forță de frecare tangențială :

$$F_{f_c} = \mu_c N = \mu_c (k+1)\, T_i \sin \alpha, \tag{17}$$

care se opune alunecării cablului și efectuează o deplasare egală cu jumătate din alungirea Δl a cablului.

Așadar, lucrul mecanic de frecare de alunecare este :

$$L_a = \frac{1}{2} F_{f_c} \cdot \Delta l \tag{18}$$

$$L_a = \frac{1}{2} \mu_c (k+1)\, T_i \sin \alpha \cdot (k-1) \frac{\sigma_i}{E} \cdot 2R\alpha.$$

$$L_a = \frac{1}{2} \mu_c (k^2-1)\, T_i \cdot \frac{\sigma_i}{E} \sin \alpha \cdot 2R\alpha. \tag{19}$$

Forța de rezistență suplimentară F_a, care se opune alunecării și produce un lucru mecanic echivalent cu lucrul mecanic de frecare L_a, este definită de relația:

$$L_a = F_a \cdot 2R\alpha. \tag{20}$$

Avem:

$$F_a \cdot 2R\alpha = \frac{1}{2}\mu_c (k^2 - 1) T_i \frac{\sigma_i}{E} \sin\alpha \cdot 2R\alpha.$$

De unde rezultă:

$$F_a = \frac{1}{2}\mu_c (k^2 - 1) \frac{\sigma_i}{E} \sin\alpha \cdot T_i. \tag{21}$$

Prin urmare, coeficientul de pierdere datorit frecării de alunecare pe scripete este:

$$k_a = \frac{F_a}{T_i} = \frac{1}{2}\mu_c (k^2 - 1) \frac{\sigma_i}{E} \sin\alpha. \tag{22}$$

★

Forța reală T_e care acționează asupra ramurii care se desfășoară este egală cu forța T_i aplicată la ramura care se înfășoară plus toate rezistențele suplimentare, reduse convențional la periferia scripetelui: F_f, F_r, F_d și F_a:

$$T_e = T_i + (F_f + F_r + F_d + F_a) \tag{23}$$

$$T_e = [1 + (k_f + k_r + k_d + k_a)] \cdot T_i = k \cdot T_i. \tag{24}$$

Așadar, factorul de pierdere total k:

$$k = 1 + (k_f + k_r + k_d + k_a) = 1 + k_p, \tag{25}$$

unde k_p este coeficientul total de pierdere, are o structură mai complexă, mai apropiată de realitate decît cea indicată de formula clasică (4).

Întrucît:

$$k_f = \mu (k + 1) \frac{r}{R} \sin\alpha \tag{26}$$

$$k_r = 2C_r \tag{27}$$

avem:

$$k = 1 + \mu (k + 1) \frac{r}{R} \sin\alpha + 2C_r + \frac{1}{2}(k - 1)^2 \frac{\sigma}{E} + \\ + \frac{1}{2}\mu_c (k^2 - 1) \frac{\sigma}{E} \cdot \sin\alpha. \tag{28}$$

Această expresie a factorului total de pierdere este generală (valabilă atît pentru cabluri metalice cît şi pentru cabluri vegetale) şi determină randamentul scripeţilor şi palanelor cu suficientă precizie. Permite întocmirea bilanţului energetic al pierderilor pe cele patru categorii de pierderi şi, în consecinţă, permite o analiză mai profundă a factorilor care influenţează randamentul. De asemenea această expresie a factorului total de pierdere elimină contradicţia rezultată în cazul folosirii formulei clasice(4) la cabluri de oţel şi funii de cînepă şi permite efectuarea unor studii teoretice şi experimentale mai temeinice în legătură cu randamentul scripeţilor şi palanelor.

Relaţia(28) este utilizabilă şi în cazul scripeţilor cu lagăre de rostogolire. În acest caz, în locul coeficientului de frecare de alunecare μ se introduce un coeficient de frecare aparent echivalent.

★

Înlocuind în relaţia (28) factorul de pierdere prin coeficientul de pierdere ($k_p = k - 1$), notînd $\frac{E}{\sigma} = \lambda$ şi grupînd termenii în raport cu k_p, rezultă :

$$(1 + \mu_c \sin\alpha)\, k_p^2 - 2\left(\lambda - \lambda\mu\frac{r}{R}\sin\alpha - \mu_c \sin\alpha\right) k_p + \\ + 4\lambda\left(\mu\frac{r}{R}\sin\alpha + C_r\right) = 0\,, \tag{29}$$

respectiv :

$$k_p^2 - 2\cdot\frac{\lambda - \lambda\mu\frac{r}{R}\sin\alpha - \mu_c\sin\alpha}{1 + \mu_c\sin\alpha}\cdot k_p + \frac{4\lambda\left(\mu\frac{r}{R}\sin\alpha + C_r\right)}{1 + \mu_c\sin\alpha} = 0. \tag{30}$$

Ecuaţia de forma :

$$k_p^2 - 2C_1\cdot k_p + C_0 = 0\,, \tag{31}$$

unde :

$$C_1 = \frac{\lambda - \lambda\mu\frac{r}{R}\sin\alpha - \mu_c\sin\alpha}{1 + \mu_c\sin\alpha} \tag{32}$$

$$C_0 = \frac{4\lambda\left(\mu \frac{r}{R} \sin \alpha + C_r\right)}{1 + \mu_c \sin \alpha}. \tag{33}$$

Coeficientul de pierdere este :

$$k_p = C_1 - \sqrt{C_1^2 - C_0} \tag{34}$$

și, în consecință, factorul de pierdere :

$$k = 1 + k_p.$$

Calculul coeficientului de pierdere k_p necesită cunoașterea „modulului de elasticitate" E.

Lipsa de date precise pentru „modulul de elasticitate " E constituie o dificultate pentru utilizarea formulei (34).

Totuși, aceasta nu constituie o dificultate de neînlăturat, deoarece raportul $\lambda = \frac{E}{\sigma}$ poate fi stabilit indirect, pornind de la expresia teoretică a coeficientului de rigiditate, a cărui valoare este dată de formule empirice.

Într-adevăr, din relația (8) rezultă :

$$\lambda = \frac{E}{\sigma} = C_r \cdot \frac{A \cdot R^2}{I}. \tag{35}$$

Prin urmare, între limitele de valabilitate ale formulelor empirice pentru coeficientul de rigiditate C_r putem determina cu suficientă precizie raportul λ și, în consecință, coeficientul k_p, respectiv factorul de pierdere k.

★

Calculele numerice, efectuate la scripeți de 500 și 300 mm Ø pentru un cablu de oțel și frînghie de cînepă cu diametrul nominal de 20 mm în diferite condiții de lucru, confirmă afirmațiile făcute pe baza de calcule teoretice, indică erorile la calculul randamentului palanelor în cazul folosirii formulei clasice de calcul (4), justifică importanța și necesitatea utilizării unor formule mai precise de calcul și permite stabilirea justă și cu suficientă precizie a influenței diverșilor factori asupra randamentului scripeților și palanelor.

Pentru calculul numeric s-au folosit organe flexibile cu următoarele caracteristici :

1. Cablu mat 19,5—6×37—160—S/Z—STAS 1355—50 cu 6 toroane, respectiv cu 222 de sîrme de oțel de 0,9 mm Ø, cu secțiunea

Tabela

Factorul

Organul flexibil	Diametrul scripetelui D mm	Coeficientul de rigiditate C_r	$\lambda = \frac{E}{\sigma}$	Coeficientul de frecare μ_c
Cablu de oţel 19,5 mm Ø STAS 1355—50	500	0,00385	9,5980	—
				0,25
				0,35
	300	0,0064	5,7410	—
				0,25
				0,35
Frînghie de cînepă 20 mm Ø STAS 2203—51	300	0,0008	0,8760	—
				0,20
				0,30

Tabela

Bilanţul energetic

Organul flexibil	Diametrul scripetelui D mm	Coeficientul de rigiditate C_r	Coeficientul de frecare μ_c
Cablu de oţel 19,5 mm Ø STAS 1355—50	500	0,00385	—
			0,25
			0,35
	300	0,0064	—
			0,25
			0,35
Frînghie de cînepă 20 mm Ø STAS 2203—51	300	0,0088	—
			0,20
			0,30

1

de pierdere

Coeficientul de pierdere					Factorul de pierdere k	Formula de calcul
k_f	k_r	k_d	k_a	k_p		
0,0400	0,0077	—	—	0,0477	1,0477	Formula clasică (4)
0,0410	0,0077	0,0001	0,0014	0,0502	1,0502	Formula exactă (34)
0,0410	0,0077	0,0001	0,0019	0,0507	1,0507	Formula exactă (34)
0,0400	0,0128	—	—	0,0528	1,0528	Formula clasică (4)
0,0411	0,0128	0,0003	0,0026	0,0568	1,0568	Formula exactă (34)
0,0411	0,0128	0,0003	0,0036	0,0578	1,1578	Formula exactă (34)
0,0400	0,0016	—	—	0,0416	1,0416	Formula clasică (4)
0,0412	0,0016	0,0019	0,0137	0,0584	1,0584	Formula exactă (34)
0,0414	0,0016	0,0029	0,0253	0,0712	1,0712	Formula exactă (34)

2

al pierderilor

Coeficientul de pierdere k_p	Pierderile relative (procentuale)				
	k_p/k_p %	k_f/k_p %	k_r/k_p %	k_d/k_p %	k_a/k_p %
0,0477	100,0	83,8	16,2	—	—
0,0502	100,0	81,6	15,4	0,2	2,8
0,0507	100,0	80,8	15,2	0,2	3,8
0,0528	100,0	75,8	24,2	—	—
0,0568	100,0	72,4	22,5	0,5	4,6
0,0578	100,0	71,1	22,2	0,5	6,2
0,0416	100,0	96,2	3,8	—	—
0,0584	100,0	70,5	2,7	3,3	23,5
0,0712	100,0	58,2	2,2	4,1	35,5

Tabela

Randamentul scripeților

Numărul scripeților z	Cablu de oțel 19,5 mm Ø STAS 1355–50 D = 500 mm Ø			
	–	μ_c = 0,25	μ_c = 0,35	–
	k = 1,0477	k = 1,0502	k = 1,0507	k = 1,0528
	Formula clasică (4)	Formula exactă (34)	Formula exactă (34)	Formula clasică (4)
1	95,45	95,22	95,17	94,98
2	93,27	92,94	92,88	92,60
4	89,12	88,61	88,50	88,07
6	85,22	84,54	84,40	83,84
8	81,55	80,72	80,56	79,88
10	78,09	77,14	76,95	76,18

Tabela 4

Diferențele dintre randamentele (în %) calculate cu formula clasică (4) și randamentele calculate cu formula recomandată (34)

Numărul scripeților z	Cablul de oțel 19,5 mm Ø STAS 1355–50				Fringhie 20 mm Ø STAS 2203–51	
	D=500 mm Ø		D = 300 mm Ø		D = 300 mmØ	
	μ_c = 0,25	μ_c = 0,35	μ_c = 0,25	μ_c = 0,35	μ_c = 0,20	μ_c = 0,30
	k = 1,0502	k = 1,0507	k = 1,0568	k = 1,0578	k = 1,0584	k =1,0712
1	0,23	0,28	0,36	0,44	1,53	2,66
2	0,33	0,39	0,52	0,65	2,21	3,84
4	0,51	0,62	0,81	1,00	3,46	5,96
6	0,68	0,82	1,05	1,31	4,55	7,77
8	0,83	0,99	1,27	1,58	5,49	9,31
10	0,95	1,14	1,45	1,81	6,31	10,62

3

și palanelor factorilor (%)

		Frînghie 20 mm Ø STAS 2203—51		
$D = 300$ mm Ø		$D = 300$ m Ø		
$\mu_c = 0{,}25$	$\mu_c = 0{,}35$	—	$\mu_c = 0{,}20$	$\mu_c = 0{,}30$
$k = 1{,}0568$	$k = 1{,}0578$	$k = 1{,}0416$	$k = 1{,}0584$	$k = 1{,}0712$
Formula exactă (34)	Formula exactă (34)	Formula clasică (4)	Formula exactă (34)	Formula exactă (34)
94,62	94,54	96,01	94,48	93,35
92,08	91,95	94,09	91,88	90,25
87,26	87,07	90,41	86,95	84,45
82,79	82,53	86,92	82,37	79,15
78,61	78,30	83,61	78,12	74,30
74,73	74,37	80,47	74,16	69,85

netă $A = 142{,}08$ mm² și cu momentul de inerție axial (mijlociu) $I = 3562$ mm⁴.

2. Frînghie 20—STAS 2203—51 cu 4 toroane de cca. 8,3 mm ∅, cu secțiunea netă $A = 171$ mm² și cu momentul de inerție axial (mijlociu) $I = 3510$ mm⁴.

Raportul dintre diametrul fusului și diametrul scripetelui (respectiv $\frac{r}{R} = 0{,}20$) și coeficientul de frecare al scripetelui pe fus ($\mu = 0{,}10$) s-au păstrat constante în toate cazurile, pentru a putea urmări mai bine influența diverșilor factori asupra randamentului și pentru a stabili importanța lor.

Coeficientul de rigiditate s-a calculat cu formula empirică :

$$C_r = 0{,}045 \frac{d^2}{D}\left(1 + \frac{500}{T}\right) \text{ pentru cablul de oțel}$$

și

$$C_r \approx 0{,}006 \frac{d^2}{D} \text{ pentru frînghia de cînepă ,}$$

unde diametrele d și D sînt exprimate în cm și forța de întindere T în kgf.

La cablul de oţel, forţa de întindere s-a luat aceeaşi în toate cazurile $T=4000$ kgf, ceea ce corespunde coeficientului de siguranţă $C \approx 5$.

Raportul $\lambda = \frac{E}{\sigma}$ s-a calculat din relaţia (35).

Coeficienţii de frecare de alunecare pe coroană s-au stabilit pe bază de măsurători:

$\mu_c \approx 0{,}25 \ldots 0{,}35$ pentru cabluri de oţel

şi

$\mu_c \approx 0{,}20 \ldots 0{,}30$ pentru frînghii de cînepă.

Coeficienţii de pierdere şi factorii de pierdere în diferite cazuri şi condiţii de lucru sînt daţi în tabela 1, iar bilanţul energetic al pierderilor este indicat în tabela 2.

În cazurile şi condiţiile studiate, la cablul de oţel pierderile prin deformaţia cablului şi frecarea ei pe coroana scripetelui se ridică la 3. . .4% în cazul scripetelui de 500 mm ∅ şi la 5 . . . 7% în cazul scripetelui de 300 mm ∅, iar la frînghia de cînepă aceste pierderi variază între 26. . .40%

Importanţa acestor pierderi devine mai evidentă la calculul randamentului palanelor.

La palane factoriale de exemplu, cele mai des întîlnite la macarale, randamentul palanului în funcţie de factorul de pierdere k şi de numărul de scripeţi (raportul de transmisie) z este:

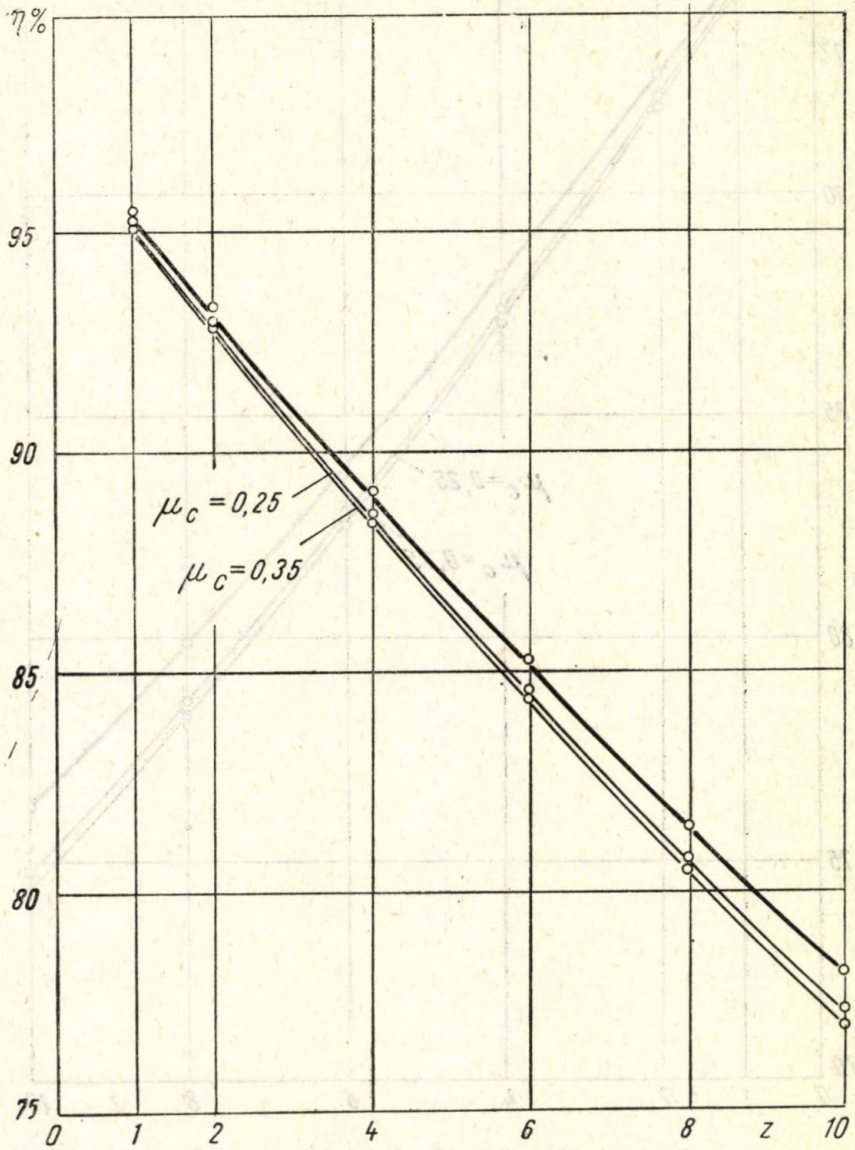
$$\eta = \frac{1}{z \cdot k^z} \cdot \frac{k^z - 1}{k - 1} \tag{36}$$

Conform relaţiei (36), randamentul palanelor, în cazurile şi în condiţiile studiate, pentru diferite rapoarte de transmisie ($i=z$), sînt indicate în tabela 3 şi în graficele anexe.

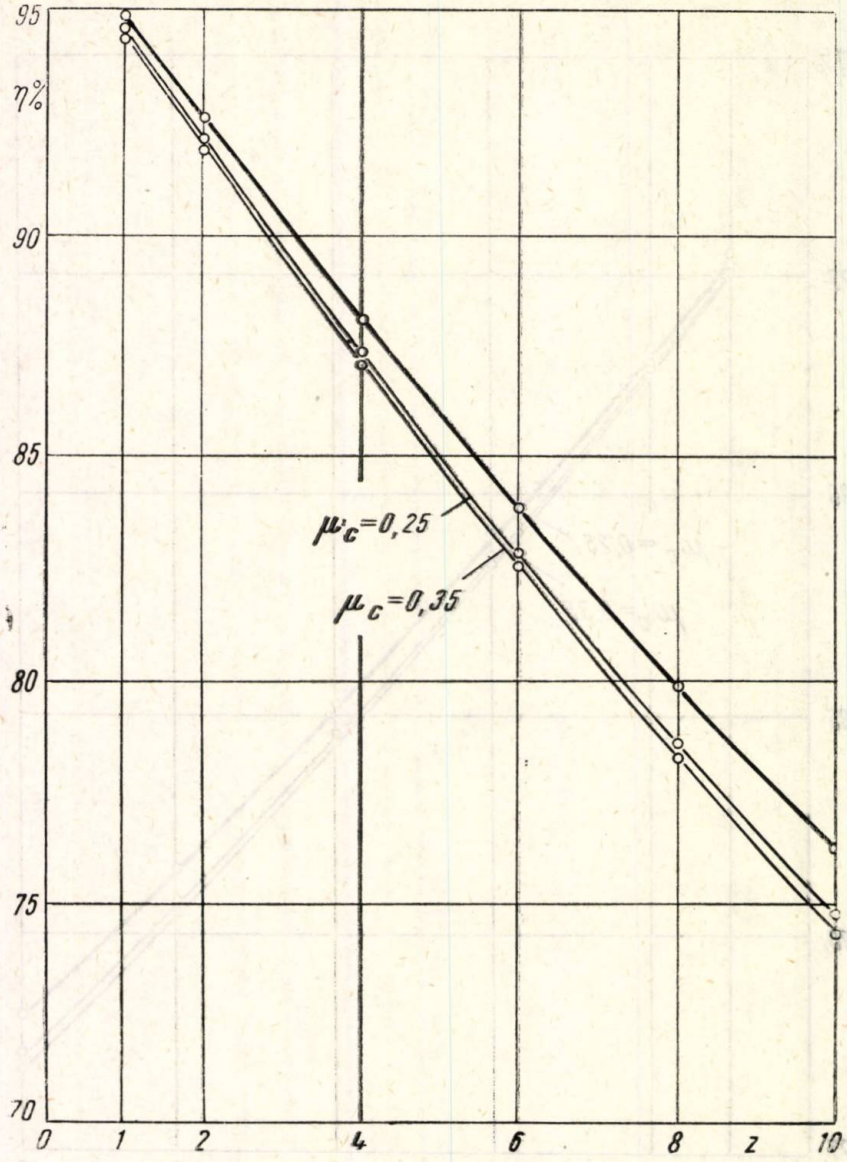
Diferenţele dintre randamentele calculate cu formula clasică (4) şi cele calculate cu formula (34) recomandată în această lucrare sînt indicate în tabela 4 şi în graficele anexe.

Diferenţele dintre randamente sînt de ordinul fracţiunilor de procente şi chiar de ordinul procentelor la cabluri de oţel. Diferenţele de randamente — erorile de calcul — sînt foarte mari la frînghii de cînepă, ceea ce face ca formula clasică (4) să fie practic inutilizabilă.

Ţinînd seama de volumul relativ mare al puterii instalate a mecanismelor de acţionare cu palane, diferenţe de ordinul procentelor şi chiar de ordinul fracţiunilor de procente prezintă o deosebită importanţă în gospodărirea mai raţională a energiei.



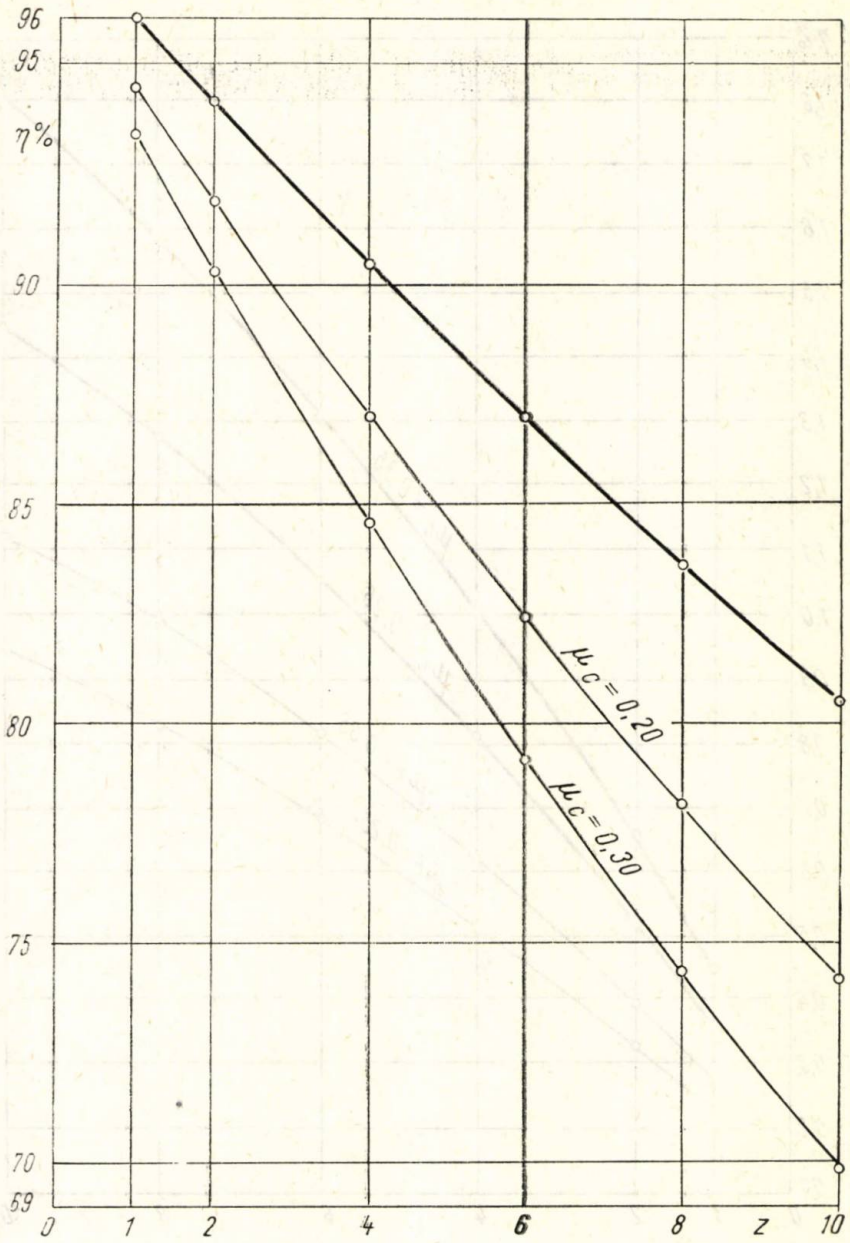
I. Randamentul palanelor factoriale cu scripeți de 500 mm pentru cabluri metalice.
——— Randamentul calculat cu formula clasică (4)
——— Randamentul calculat cu formula recomandată (34)



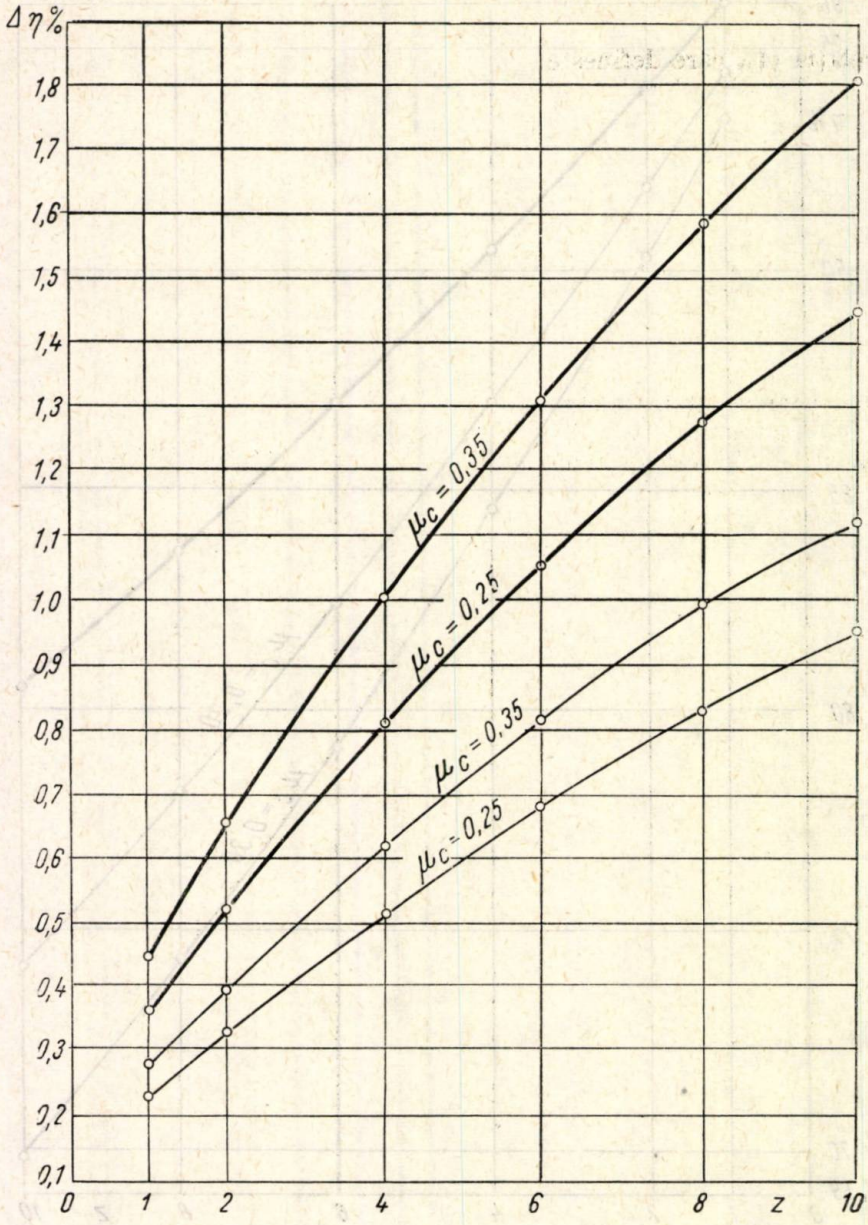
II. Randamentul palanelor **factoriale** cu scripeţi de 300 mm Ø pentru cabluri metalice

——— Randamentul **calculat** cu formula clasică (4)

——— Randamentul **calculat** cu formula recomandată (34)



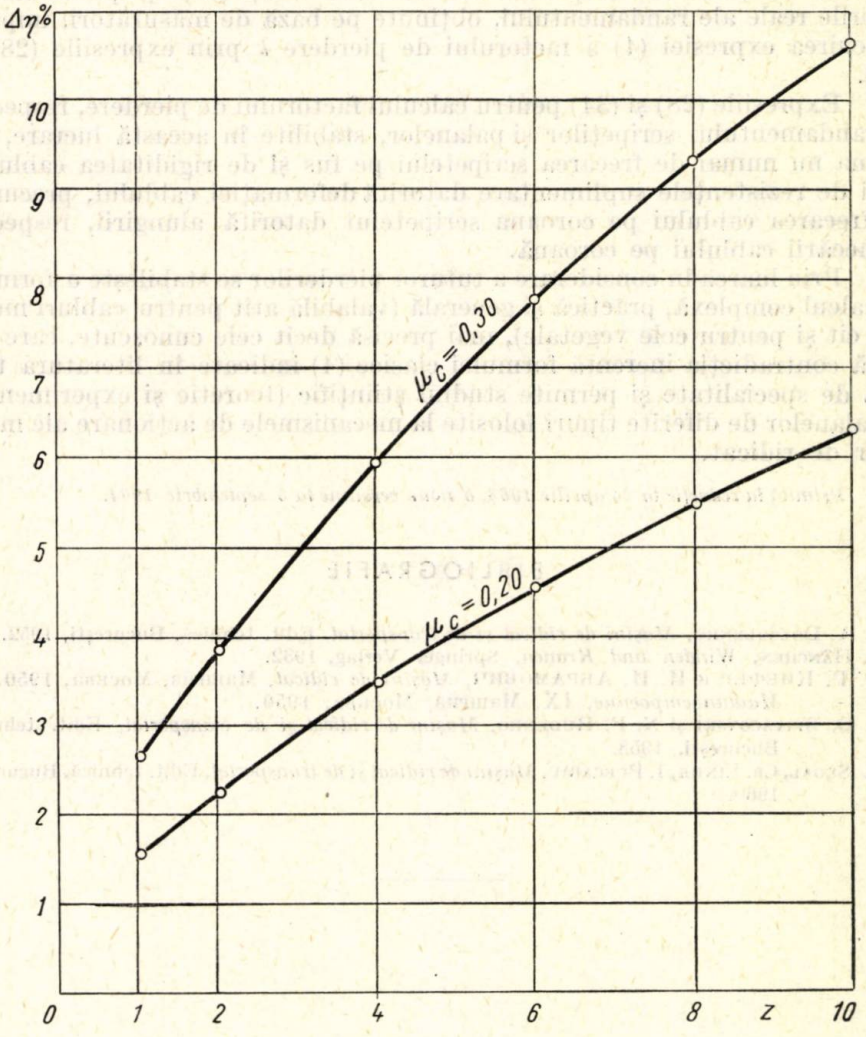
III. Randamentul palanelor factoriale cu scripeți de 300 mm Ø pentru fringhii.
——— Randamentul calculat cu formula clasică (4)
——— Randamentul calculat cu formula recomandată (34)



IV. Diferențele dintre randamentele (în %) calculate cu formula clasică (4) și cu cea recomandată (34) la palane factoriale pentru cabluri metalice.

——— Scripete de 300 mm Ø

——— Scripete de 500 mm Ø



V. Diferenţele dintre randamentele (în %) calculate cu formula clasică (4) şi cea recomandată (34) la palane factoriale pentru frînghii.
——— Scripete de 300 mm Ø.

CONCLUZIE

Rezolvarea contradicției care există între relația (4), care definește factorul de pierdere, respectiv randamentul scripeților și palanelor, și valorile reale ale randamentului, obținute pe bază de măsurători, impune înlocuirea expresiei (4) a factorului de pierdere k prin expresiile (28) și (34).

Expresiile (28) și (34) pentru calculul factorului de pierdere, respectiv al randamentului scripeților și palanelor, stabilite în această lucrare, țin seama nu numai de frecarea scripetelui pe fus și de rigiditatea cablului, ci și de rezistențele suplimentare datorită deformației cablului, precum și de frecarea cablului pe coroana scripetelui datorită alungirii, respectiv alunecării cablului pe coroană.

Prin luarea în considerare a tuturor pierderilor se stabilește o formulă de calcul complexă, practică și generală (valabilă atît pentru cabluri metalice cît și pentru cele vegetale), mai precisă decît cele cunoscute, care elimină contradicția inerentă formulei clasice (4) indicate în literatura tehnică de specialitate și permite studiul științific (teoretic și experimental) al palanelor de diferite tipuri folosite la mecanismele de acționare ale mașinilor de ridicat.

Primită la redacție la 25 aprilie 1963, o nouă versiune la 5 septembrie 1964.

BIBLIOGRAFIE

1. A. A. Dolgolenko, *Mașini de ridicat și de transportat*, Edit. tehnică, București, 1952.
2. R. Hänchen, *Winden und Kranen*, Springer Verlag, 1932.
3. Л. Г. Киефер и И. И. Абрамович, *Маşini de ridicat*, Машгиз, Москва, 1950.
4. — *Машиностроение*, IX, Машгиз, Москва, 1950.
5. A. O. Spivacovski și N. F. Rudenko, *Mașini de ridicat și de transportat*, Edit. tehnică, București, 1953.
6. H. Segal, Cr. Linde, I. Purcariu, *Mașini de ridicat și de transportat*, Edit. tehnică, București, 1960.

MICŞORAREA, PRIN CORECŢIE ELECTRICĂ, A TIMPULUI DE RĂSPUNS AL UNOR TRADUCTOARE DE MĂRIMI MECANICE [1])

de A. ZAHARESCU

Institutul de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R., Bucureşti

537.7 : 621.371

Se arată că, prin introducerea în lanţul de măsurare a unui cuadripol electric cu o caracteristică corespunzător aleasă, se poate realiza o reducere apreciabilă a inerţiei unor traductoare de mărimi mecanice. Se indică unele posibilităţi de sinteză a circuitelor de corecţie, pentru traductoare care reprezintă sisteme dinamice de ordinul II.

Se dau rezultatele verificărilor experimentale, care confirmă metoda de corecţie propusă.

1. După cum se ştie, numeroase traductoare de mărimi mecanice la care convertirea mărimii mecanice de măsurat (forţă, presiune, acceleraţie etc.) într-una electrică, nu se face direct, ci prin intermediul unei alte mărimi mecanice intermediare (deplasare, deformaţie), reprezintă sisteme de ordinul II, descrise de o ecuaţie de forma :

$$\ddot{y}_m + 2\delta \dot{y}_m + \omega_0^2 y_m = a_m \cdot x_m(t) \qquad (1)$$

în care $x_m(t)$ şi $y_m(t)$ sînt respectiv mărimea mecanică de măsurat şi mărimea mecanică intermediară, iar a_m o constantă.

Aceeaşi ecuaţie descrie şi legătura dintre $x_m(t)$ şi mărimea electrică y în care aceasta este convertită, în ipoteza că y este proporţional cu y_m. În acest caz a_m va fi înlocuit cu o altă constantă a, avînd alte dimensiuni.

[1]) Publicată şi în „Rev. roum. sci. techn. Mécanique appliquée, **10**, *3* (1965) (în limba engleză).

2. Comportarea dinamică a traductorului depinde esențial de parametrii δ și ω_0. Acest lucru reiese, de exemplu, foarte clar studiind răspunsul $y_1(t)$ al sistemului la funcția treaptă ($x_m(t) = 0$ pentru $t < 0$, $x_m = 1$ pentru $t > 0$) care se poate obține aplicînd transformarea Laplace ecuației (1) scrisă pentru x_m și y, în care se pune $X_m(p) = \mathfrak{L}[x_m(t)] = \frac{1}{p}$

Rezultă :

$$Y_1(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{a}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2} \tag{2}$$

în care

$$\frac{a}{p^2 + 2\delta p + \omega_0^2} = \frac{Y(p)}{X_m(p)} = F(p) \tag{3}$$

este funcția de transfer a traductorului.

Din (2) se obține :

$$y_1(t) = \frac{a}{\omega_0^2}\left[1 - e^{-\delta t} \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \cdot \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t + \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{\delta}\right)\right] \tag{4}$$

$$\text{pentru } n = \frac{\delta}{\omega_0} < 1$$

$$y_1(t) = \frac{a}{\omega_0^2}[1 - (1 + \omega_0 t)\, e^{-\omega_0 t}] \tag{5}$$

$$\text{pentru } n = \frac{\delta}{\omega_0} = 1 \quad \text{și}$$

$$y_1(t) = \frac{a}{\omega_0^2}\left[1 - e^{-\delta t} \cdot \frac{\omega_0}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \cdot t + \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{\delta}\right)\right] \tag{6}$$

$$\text{pentru } n = \frac{\delta}{\omega_0} > 1$$

De cele mai multe ori [1] amortizarea proprie a traductorului este foarte slabă ($n \simeq 0$) și, în acest caz, răspunsul la funcția treaptă :

$$y_1(t) \simeq \frac{a}{\omega_0^2}(1 - \cos \omega_0 t) \tag{7}$$

reflectă o puternică distorsionare a semnalului $x_m(t)$ de către traductor, așa cum se poate vedea în figura 7*a*.

După cum se poate deduce din relațiile (4)—(6) parametrii δ și ω_0 determină erorile dinamice ale traductorului, care se pot manifesta sub forma apariției oscilațiilor proprii și în nereproducerea corectă de către acesta a variațiilor rapide ale mărimii $x_m(t)$.

3. Într-o lucrare [1] apărută în S.C.M.A. nr. 4/1962. I. Jakab a arătat că realizarea prin frecare vîscoasă a unei amortizări optime a traductorului din punctul de vedere al erorilor dinamice, care este legată de dificultăți tehnice și duce la soluții constructive incomode, poate fi înlocuită cu succes, obținîndu-se un rezultat absolut identic, prin corectarea pe cale electrică a răspunsului traductorului neamortizat. Astfel, pentru a se trece de la funcția de transfer a traductorului real, a cărui amortizare o neglijăm :

$$F(p) = \frac{a}{p^2 + \omega_0^2} \tag{8}$$

la aceea corespunzînd unui traductor optim amortizat :

$$F_{opt}(p) = \frac{a}{p^2 + 2\,\delta_{opt} \cdot p + \omega_0^2} \tag{9}$$

este suficientă intercalarea în lanțul de măsură a unui cuadripol electric avînd o funcție de transfer :

$$K(p) = \frac{p^2 + \omega_0^2}{p^2 + 2\,\delta_{opt} \cdot p + \omega_0^2} \tag{10}$$

astfel încît $F(p) \cdot K(p) = F_{oIt}(p)$

O astfel de funcție de transfer se poate obține cu circuite electrice relativ simple.

4. Pornind de la ideea expusă în lucrarea menționată, se poate observa că este posibilă sinteza unor circuite electrice care să asigure nu numai amortizarea echivalentă optimă a traductorului, ci și obținerea prin corecție a unui „traductor echivalent" cu o frecvență proprie diferită de aceea a traductorului real. Acest lucru este important, întrucît pe de o parte timpul de răspuns al traductorului depinde de frecvența proprie a acestuia, iar pe de altă parte realizarea unor frecvențe proprii foarte mari sau foarte mici întîmpină uneori dificultăți.

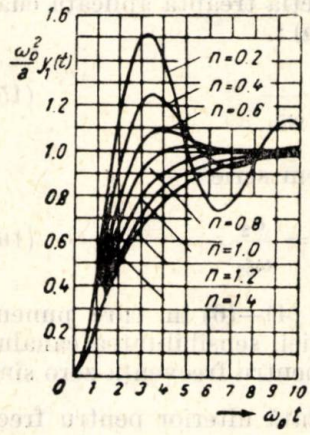


Fig. 1

Caracterul dependenței dintre ω_0 și timpul de răspuns al traductorului la funcția treaptă *) pentru $n = \frac{\delta}{\omega_0}$ dat, este de forma

$$t_r = \frac{\alpha}{\omega_0} \tag{11}$$

unde α este o constantă care depinde de n. Acest lucru rezultă din relațiile (4)—(6) și din reprezentarea lor făcută în figura 1.

*) Prin timpul de răspuns la funcția treaptă se înțelege de obicei intervalul de timp dintre momentele trecerii funcției $y_1(t)$ prin valorile $\beta . y_1(\infty)$ și $(1 - \beta)\, y_1(\infty)$, β avînd cel mai frecvent valorile 0,05 sau 0,1.

Din cele de mai sus rezultă că timpul de răspuns al traductorului este cu atît mai mic cu cît ω_0 este mai mare.

Timpul de răspuns al traductorului depinde și de n și anume este cu atît mai scurt cu cît n este mai mic. Totuși, datorită faptului că la valori mici ale lui n, răspunsul $y_1(t)$ capătă un caracter oscilatoriu (fig.1) apărînd o așa numită supracreștere și prin aceasta erori dinamice, singura cale de reducere eficientă a timpului de răspuns t_r, rămîne mărirea frecvenței proprii a traductorului.

Pentru a trece de la funcția de transfer a traductorului real:

$$F_1(p) = \frac{a_1}{p^2 + \omega_{01}^2} \qquad (\delta_1 \simeq 0) \tag{12}$$

la aceea a traductorului echivalent dorit:

$$F_2(p) = \frac{a_2}{p^2 + 2\delta_2 p + \omega_{02}^2} \tag{13}$$

este necesară intercalarea în lanțul de măsură a unui cuadripol electric avînd o funcție de transfer:

$$K(p) = \frac{F_2(p)}{F_1(p)} = K_c \cdot \frac{p^2 + \omega_{01}^2}{p^2 + 2\delta_2 \cdot p + \omega_{02}^2} \tag{14}$$

unde K_c este o constantă.

Se observă că funcția de transfer (14), ca și (10), are un nul pentru $p = j\omega_{01}$, adică acolo unde funcția de transfer a traductorului neamortizat are un pol.

Exprimînd transformata răspunsului la funcția treaptă aplicată cuadripolului rezultant cu funcția de transfer $F_2(p)$:

$$Y_2(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{a_2}{p^2 + 2\delta_2 \cdot p + \omega_{02}^2} \tag{15}$$

și ținînd seama de o relație cunoscută [2], putem scrie:

$$y_2(t = \infty) = \lim_{p \to 0} \cdot p \cdot Y_2(p) = \frac{a_2}{\omega_{02}^2}. \tag{16}$$

Comparînd relația (16) cu una din relațiile (4)—(6) în care punem în prealabil $t = \infty$ constatăm că, în urma corecției, sensibilitatea canalului de măsură ca și valoarea funcției de transfer pentru frecvența zero sînt afectate de factorul $\frac{\omega_0^2}{\omega_{02}^2}$ sau, după notația adaptată ulterior pentru frecvența proprie a traductorului, $\frac{\omega_{01}^2}{\omega_{02}^2}$.

Un circuit simplu care realizează a funcție de transfer de forma (14) cu $\omega_{02} > \omega_{01}$ este cel din figura 2.

Într-adevăr, funcția de transfer în tensiune este:

$$K(p) = \frac{p^2 + \frac{1}{LC_1}}{p^2 + 2\frac{R}{2L}\cdot p + \frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)} \tag{17}$$

în care:

$$\omega_{01}^2 = \frac{1}{LC_1};\quad \omega_{02}^2 = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) > \omega_{01}^2;\quad \delta_2 = \frac{R}{2L}.$$

O funcție de transfer de forma (14) are și circuitul *RC* din figura 3, în care b, g și h sînt constante, dacă este îndeplinită, condiția:

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{bgh + b + g}{(b+1)\ gh + b + g}. \tag{18}$$

Diferiții parametri ai funcției de transfer sînt determinați prin relațiile:

$$n_2 = \frac{\delta_2}{\omega_{02}} = \frac{(b+1)\ gh + b + g}{2\sqrt{(b + g + 1)\cdot bgh}} \tag{19}$$

$$\frac{\omega_{01}^2}{\omega_{02}^2} = \frac{g^2h - b - g}{gh\ (b + g + 1)} \tag{20}$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{b + g + 1}{bgh}\cdot\frac{1}{R^2C^2} \tag{21}$$

$$K_c = \frac{gh}{(b+1)\ gh + b + g} \tag{22}$$

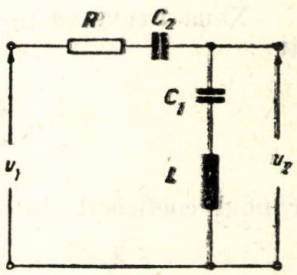


Fig. 2

Întrucît se adoptă de obicei $n_{2\,opt} = 0{,}5 \div 1$, iar în circuitul descris nu se pot obține valori ale lui n_2 suficient de mici, pentru a se realiza valoarea dorită a amortizării traductorului echivalent, trebuie utilizată schema cu reacție din figura 4, ale cărei elemente, reprezentate schematic, sînt următoarele: 1 — amplificator cu amplificarea constantă și care inversează faza în banda de frecvență care interesează; 2 — circuitul de corecție din figura 3; 3 — un circuit electric care servește la introducerea semnalului u_s furnizat de traductor în sistemul de corecție și în care se face diferența dintre semnalul obținut prin reacție și semnalul u_s.

Circuitul din figura 4 are funcția de transfer:

$$K'(p) = \frac{u_3}{u_s} = -\frac{AK(p)}{1 + AK(p)}; \quad (A > 0 \text{ și const.}) \tag{23}$$

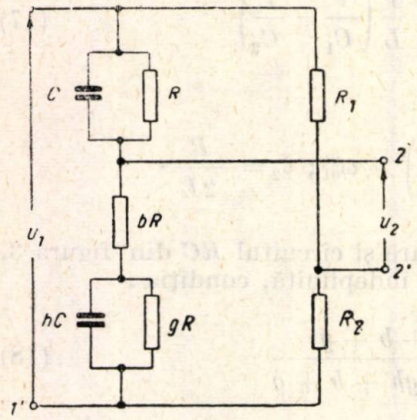


Fig. 3

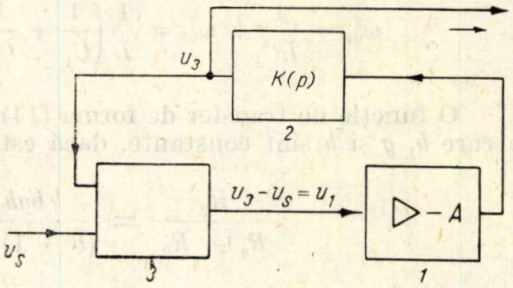


Fig. 4

Noua funcție de transfer $K'(p)$ este de aceeași formă cu $K(p)$ și are aceeași frecvență de extincție $p = j\omega_{01}$. Într-adevăr, se obține:

$$K'(p) = -\frac{AK_c}{1 + AK_c} \cdot \frac{p^2 + \omega_{01}^2}{p^2 + \frac{\delta_2}{1 + AK_c} \cdot p + \frac{\omega_{02}^2 + AK_c\ \omega_{01}^2}{1 + AK_c}} \tag{24}$$

Noua frecvență proprie a traductorului echivalent este dată de relația:

$$\omega_{02}'^2 = \omega_{02}^2 \frac{1 + AK_c \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{02}^2}}{1 + AK_c} \tag{25}$$

iar noul coeficient de amortizare:

$$n_2' = \frac{\frac{\delta_2}{1 + AK_c}}{\sqrt{\frac{\omega_{02}^2 + AK_c\ \omega_{01}^2}{1 + AK_c}}} = n_2 \frac{1}{\sqrt{(1 + AK_c)\left(1 + AK_c \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{02}^2}\right)}}. \tag{26}$$

Întrucît $A > 0$ și $K_c > 0$ (vezi relația (22)), coeficientul de amortizare n_2' este mai mic decît n_2 al circuitului din figura 3, obținîndu-se astfel rezultatul dorit.

Pentru schema bloc din figura 4 se poate adopta realizarea concretă din figura 5.

În această schemă prin amplificarea A a etajului fără reacție trebuie să se înțeleagă produsul dintre amplificarea fără reacție a etajului și raportul de divizare $\frac{R_4}{R_3 + R_4}$. Rezistența totală a divizorilor 2 ($R_3 + R_4$) trebuie să fie mult mai mare decît impedanța de ieșire a circuitului anodic între punctele 2 și 2'.

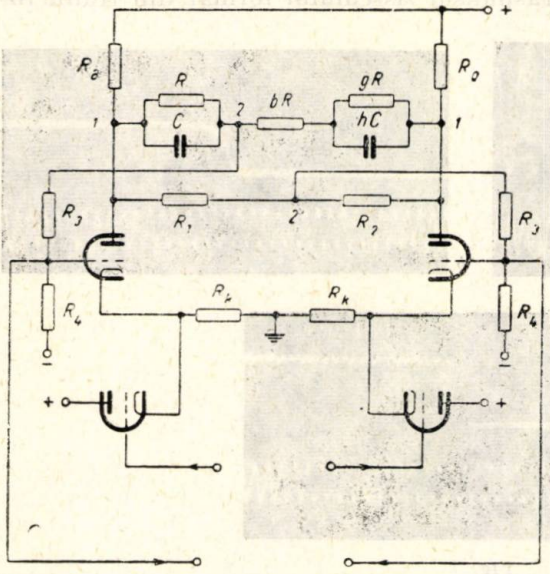


Fig. 5

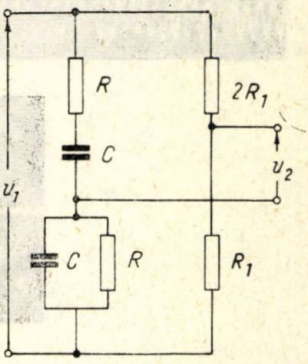


Fig. 6

5. Pentru verificarea experimentală a celor expuse s-au făcut înregistrări privind comportarea dinamică a unui traductor de forță cu funcția de transfer de forma (12), deci cu o amortizare neglijabilă, și avînd o frecvență proprie $\frac{\omega_{01}}{2\pi}$ de 25,5 Hz. În acest scop traductorului i s-a aplicat un semnal treaptă de forță. Mărimea mecanică derivată y_m a fost deformația specifică într-un punct de pe elementul elastic al traductorului și a fost înregistrată cu aparatură tensometrică.

Corecția, cu simplu scop de verificare, s-a făcut cu ajutorul circuitului din figura 3, cu funcția de transfer de tipul (14), avînd $n_2 = 1{,}5$ și $\omega_{02} = 2\,\omega_{01}$.

Pentru comparație s-a mai înregistrat răspunsul la funcția treaptă al sistemului format din traductorul real și un circuit de corecție cu o funcție de transfer de forma (10) și avînd de asemenea $n = 1{,}5$, care nu „modifică" frecvența proprie a traductorului. Acest circuit (punte Wien) este prezentat în figura 6 și are funcția de transfer:

$$K(p) = \frac{1}{3} \cdot \frac{p^2 + \omega_0^2}{p^2 + 2\,\omega_0\, p + \omega_0^2}; \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}. \tag{27}$$

Rezultatele experimentale sînt prezentate prin oscilogramele din figura 7, pe fiecare dintre aceste oscilograme fiind înregistrată și o oscilație electrică cu frecvența de 50 Hz, pentru stabilirea scării timpului.

În figura 7 *a* este prezentat răspunsul la funcția treaptă, necorectat al traductorului, în figura 7 *b* răspunsul sistemului format din traductor

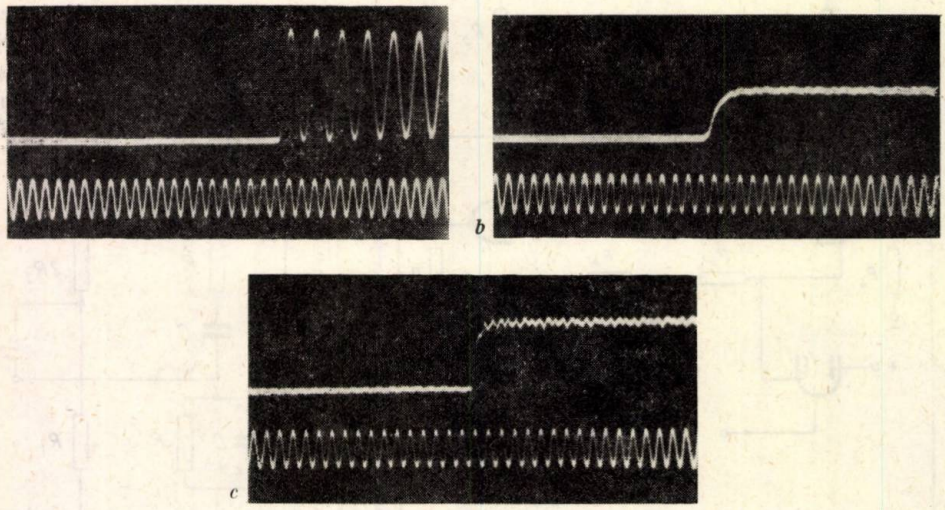


Fig 7

și circuitul de corecție din figura 6, iar în figura 7 *c* răspunsul obținut în urma efectuării unei corecții electrice cu circuitul din figura 3. În acest din urmă caz se observă o reducere la jumătate a frontului răspunsului în raport cu cazul 7 *b*.

Micile oscilații reziduale care apar în semnalul rezultat prin corecție se datoresc faptului că traductorul este numai cu aproximație un sistem mecanic cu constante concentrate, în el fiind posibilă și apariția altor oscilații, care ies în evidență datorită accentuării prin corecție a frecvențelor înalte.

6. Pe marginea celor expuse se pot face următoarele observații:

Raportul dintre frecvența proprie ω_{02} a traductorului echivalent obținut prin corecție și frecvența proprie a traductorului real poate fi luat cu atît mai mare, cu cît aproximația făcută considerînd traductorul un sistem de ordinul II cu constante concentrate este mai bună. Raportul frecvențelor ω_{02} și ω_{01} mai este limitat și de faptul că, după cum s-a mai arătat, în urma corecției sensibilitatea canalului de măsură este afectată de factorul $\frac{\omega_{01}^2}{\omega_{02}^2}$.

În unele cazuri, cum este acela al măsurării amplitudinii vibrațiilor, se folosesc traductoare constituite din sisteme seismice de ordinul II cu constante concentrate, pentru care este important ca frecvența proprie să

fie inferioară tuturor frecvențelor conținute în spectrul mărimii de măsurat. În aceste cazuri este avantajoasă micșorarea frecvenței proprii a traductorului pentru că în acest fel se extinde domeniul de măsură către frecvențele joase. În cazul citat al traductoarelor vibrometrice, efectuarea unei corecții electrice prin care să se realizeze o funcție de transfer echivalentă unui traductor cu o frecvență proprie mai coborîtă ar permite extinderea către frecvențele joase a domeniului de frecvență în care traductorul măsoară corect amplitudinea vibrațiilor.

Primită la redacție la 16 decembrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. Iakab I., *Un procedeu electric pentru amortizarea unor traductoare de mărimi mecanice*, St. cerc. mec. apl., XIII, *4*, 1021–1029 (1962).
2. Гарднер М. Ф., Бэрнс Дж. Л., *Переходные процессы в линейных системах I* Гос. изд. техн.-теорет. литературы, Москва—Ленинград, 1951.

RECENZII

M. NIŢĂ, T. IANOVICI, C. MIHALACHE, *Teoria mecanismelor şi a maşinilor*. Edit. Acad. Militară Generală, iunie, 1963, 2 vol. 776 p.,

Ambele volume cuprind 25 de capitole şi se referă la structura şi cinematica mecanismelor. Sînt riguros tratate şi bine dezvoltate atît problemele cuprinse în programa analitică a cursului de teoria mecanismelor şi maşinilor de la facultăţile cu profil mecanic cît şi alte probleme suplimentare.

Părţile importante ale lucrării sînt expuse în următoarea ordine: structura cu clasificarea mecanismelor, cinematica mecanismelor cu cuple inferioare, mecanismele cu roţi, mecanismele cu came. După o introducere în care sînt prezentate mecanismele sub forma lor constructivă, sînt expuse problemele cuplelor cinematice, lanţurilor de corpuri şi mecanismelor plane şi spaţiale.

În partea de cinematica mecanismelor cu cuple inferioare sînt expuse detaliat stabilirea grafică a deplasărilor şi traiectoriilor, iar metodele de determinare a vitezelor şi acceleraţiilor, pe lîngă că sînt suficient de bine dezvoltate, sînt încadrate de exemplificări foarte utile şi constructive. S-a dat o atenţie deosebită situaţiilor singulare, la care unele construcţii clasice prezintă nedeterminări. Ecuaţiile vectoriale ale cinematicii relative nu au însă notaţiile consacrate prin utilitatea lor în teoria mecanismelor. Cinematica grafică se încheie cu prezentarea metodei punctelor particulare assurice, suficientă pentru executarea analizei la un mare număr de mecanisme uzuale.

Este bine reprezentată cinematica analitică, precum şi metoda diagramelor cinematice. În sfîrşit, ultima parte a primului volum se ocupă de problemele roţilor dinţate şi cu fricţiune, în care trebuie evidenţiate problemele danturii cicloidale şi evolventice, dar şi prezenţa danturii Novikov.

Volumul al doilea începe cu probleme geometrice şi cinematice ale roţilor elicoidale şi conice, cuprinzîndu-se şi problemele roţilor conice cu dinţi curbi. În capitole scurte sînt expuse mecanismele cu roţi dinţate necirculare, mecanismele cu mişcări intermitente, mecanismele cu elemente flexibile, trenurile de roţi dinţate. Un capitol important, bine încadrat cu rezolvări teoretice şi exemplificări practice, se referă la mecanismele planetare. Încheierea acestei părţi se face prin capitolele de cutii de viteză şi variatoare de viteză. În ultima secţiune sînt tratate mecanismele, cu came cu probleme de analiză şi de sinteză. Sînt cuprinse problemele camelor spaţiale.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 19 NR. 3 P. 793–797 BUCUREŞTI 1965.

Lucrarea este clar expusă și cuprinde, afară de problemele obișnuite ale cursului de teoria mecanismelor și mașinilor, și o serie de probleme speciale utile în proiectare. De aceea ea se adresează atît studenților de la facultățile care au cursuri separate de teoria mecanismelor și mașinilor, cît și inginerilor din producție și proiectanților.

Chr. Pelecudi

Mechanisms of Solid Friction, editat de P. J. Bryant, M. Lavik și G. Solomon, Elsevier Publishing Company, Amsterdam — Londra — New York, 1964.

Volumul cuprinde textul celor 13 lucrări prezentate la conferința asupra mecanismelor fundamentale ale frecării uscate care a avut loc la Midwest Research Institute în Kansas City, Missouri, S.U.A., între 16 și 18 septembrie 1963. În afară de comunicări, se dau textul discuțiilor purtate și concluziile finale trase la încheierea lucrărilor fiecărei secțiuni de specialitate din cadrul conferinței. Aceste secțiuni, în număr de cinci, cuprind următoarele domenii:

1. Energie superficială și considerații asupra temperaturilor;
2. Solide cu rețea ionică;
3. Solide lamelare;
4. Frecarea metalică;
5. Uzura metalelor.

Introducerea, scrisă de G. Solomon de la laboratorul central T.N.O. Delft (Olanda) precizează unele noțiuni de bază întîlnite în lucrare și terminologia corespunzătoare, apoi cuprinde considerații succinte asupra forțelor de frecare și a lubrifianților pentru ungerea la limită și se încheie cu unele puncte de vedere asupra naturii pierderilor prin frecare.

În prima grupă, cuprinse sub punctul 1 din enumerarea precedentă, sînt două lucrări: în prima, *Utilizările practice ale criteriului energiei superficiale*, de E. Rabinowicz, de la Massachussetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., S.U.A., se scoate în evidență rolul raportului energie superficială -duritate, precum și influența dimensiunilor particulelor rezultate prin uzură asupra parametrilor privind frecarea sistemelor cu alunecare reciprocă. În a doua, *Temperaturile probabile pe interfața solidelor în contact cu alunecare*, de F. F. Ling și S.L.Pu (Rensselaer Polytehnic Inst. Troy, New York, S.U.A., se prezintă distribuția de temperatură pe suprafața de contact, saltul de temperaturi la numere Péclet mari și se introduce un model simplu stocastic pentru a se arăta legătura dintre temperaturile măsurabile la o distanță de interfață și această distanță, precum și fluctuațiile temperaturilor pe suprafață.

A doua categorie se compune din trei studii. Primul, *Efectele iradiației cu raze X asupra frecării reciproce a clorurii de sodiu*, de Earl Zwicker și G H. Jirgal, Illinois Institute of Technology, Chicago, Ill. S.U.A., analizează frecarea statică și de alunecare a NaCl sub efectul radiațiilor, arătînd creșteri de 14—65%. Studiul următor, *Frecarea și uzura monocristalelor* de R. P. Steijn (Wilmington, Del., S.U.A.), conține date asupra forțelor și lățimii urmei lăsate prin zgîrierea cu un vîrf de diamant sau cu o sferă de safir pe suprafețe diferite de cristale (cupru, aluminiu, nichel, fier, NaCl, LiF, KBr, KCl și MgO). Se dau, de asemenea, expresii analitice asupra forțelor de tăiere și de adeziune. *Frecarea și uzura safirului*, de C. H. Riesz și H. S. Weber (IIT Research Institute Chicago, Ill., S.U.A., este titlul celei de-a treia lucrări care studiază frecarea de alunecare safir pe safir la presiuni variind de la

10^{-6} mm Hg la cea atmosferică și la temperaturi între 25°C și 1550°C. Se relevă existența unor anomalii ale coeficientului de frecare la 600°C și se arată factorii predominanți în procesele de uzură și frecare pentru diferite game de temperaturi.

Sub al treilea punct (Solide lamelare) volumul cuprinde trei cercetări, dintre care două, *Factorii mecano-chimici în lubrificația cu MoS_2*, de G. Salomon, A.W.J. De Gee și J. H. Zaat (Metal Research Institute TNO și Central Laboratory TNO, Delft), și *O evaluare a rolului mecanismelor lubrificației cu vapori la MoS_2*, de A. J. Haltner (General Electric Laboratory Schenectady, New York, S.U.A.), studiază lubrificația cu MoS_2 urmărind proprietățile de frecare și limitele de anduranță ale filmului de MoS_2 în funcție de diferiți factori fizici și chimici sau efectul descompunerii acestuia și al eventualei formări a unui film din vapori de sulf acționînd ca lubrifiant. Autorii ultimei lucrări arată că această ultimă ipoteză nu este verificată experimental. Ultima lucrare din această secțiune, *Studiul mecanismelor de frecare și uzură ale grafitului*, de P. J. Bryant, P. L. Gutshall și L. H. Taylor (Midwest Research Institute, Kansas City, Mo. S.U.A.), urmărește fenomenele fundamentale ale lubrificației cu grafit și cu alte corpuri solide lamelare în diferite condiții (presiune atmosferică, vid foarte înalt, vapori de apă, oxigen). Se fac un calcul al energiei de legătură pentru laticea teoretică a grafitului și experiențe asupra clivajului, emițîndu-se o teorie asupra lubrificației cu solide lamelare pe baza forțelor de legătură interlamelare.

În a patra grupă (Frecarea metalelor) sînt prezentate alte trei lucrări. Dintre acestea prima, *Proprietățile lubrifiante ale filmelor de plumb pe cupru* de Yuko Tsuya și Rutsu Takagi (Tokio), cercetează comportarea filmelor de plumb de 0,1—130 μ pe suprafețe de cupru la viteze de 0,005 cm/s și presiuni de 0,4—100 kg/cm^2. Coeficientul de frecare este mai ridicat pentru straturi mai groase de Pb și scade cînd presiunea crește. Suprafața de contact depinde de duritatea cuprului și conduce la diferențe apreciabile față de valorile teoretice. Studiul următor, *Adeziunea metalelor și factorii care o influențează* de M. E. Sikorski (Bell Laboratories, Murray Hill, N. J. S.U.A.), urmărește adeziunea probelor metalice în funcție de frecare prin metoda răsucirii relative a acestora sub o încărcare dată, arătînd dependența acesteia de duritate și de punctele de topire ale metalelor. Al treilea studiu, *Frecarea de alunecare a cuprului*, de Tung Liu (Air Force Materials Laboratory, Ohio, S.U.A., conține determinări asupra frecării de alunecare între diferite epruvete de Cu la încărcări reduse, în funcție de gradul de curățenie a suprafețelor. Se evidențiază efectele adeziunii și ale deformărilor plastice, arătîndu-se că există două nivele diferite de frecare.

Ultima secțiune conține două lucrări: *Procese de transfer de metal și uzură*, de Morton Antler (Norwalk Conn., S.U.A.) și *Frecarea și transferul de metal la patine cu deformație accentuată*, de Geoffrey W. Rowe (Universitatea Birmingham, Anglia). În prima se studiază direcția transferului de metal, cu formațiile caracteristice de pană sau provă, și efectul său asupra frecării și uzurii în funcție de durata procesului. A doua lucrarea scoate în evidență efectul combinat al asperităților și al deformațiilor suprafețelor asupra transferului de metal, ținînd seama de durităţile suprafețelor și de gradul de contaminare a acestora.

Volumul conține studii de înalt nivel experimental și teoretic asupra bazelor mecanismului frecării lubrificației și uzurii. El interesează pe specialiștii acestui domeniu, pe fizicieni și pe ingineri. Unele dintre subiectele expuse sînt strîns legate de construcția aparatajului pentru cercetarea spațiului cosmic, dar cu posibilități de aplicare mult mai largi. În ansamblu, constituie o valoroasă colecție de cercetări diferite, în conexiune cu marea varietate a fenomenelor ce intervin în procesele studiate, și prezintă rezultate foarte recente, obținute într-o serie de centre cu reputație științifică mondială.

N. Țipei

C. F. KOLLBRUNNER, N. HAJDIN, *Wölbkrafttorsion dünnwandiger Stäbe mit offenem Profil* (Torsiunea barelor cu pereți subțiri cu profil deschis), partea I, *Schweitzer Stahlbau-Vereinigung* (Camera elvețiană de construcții metalice), Mitteilungen der Technischen Kommission (Comunicările Comisiei tehnice), Verlag Schweitzer Stahlbau-Vereinigung, Zürich, 29 (1964), 122 p. + 18 tabele pliante.

Continuînd preocupări anterioare privitoare la problema torsiunii barei drepte de secțiune constantă oarecare (primul dintre autori, în colaborare cu K. Basler, caietele 23 și 27 din colecția menționată sau în colaborare cu N. Hajdin caietul 26 din colecție) după B. de Saint Venant [1], C. F. Kollbrunner și K. Basler s-au ocupat de torsiunea barelor cu pereți subțiri cu profil deschis din punctul de vedere al rezistenței materialelor [2] (caietul 28 din colecție) (mărimi vectoriale și tensiuni corespunzătoare). Lucrarea prezentă cuprinde problemele de statică ce se pun în cazul torsiunii barelor cu pereți subțiri, într-o tratare cu caracter atît teoretic cît și direct aplicativ.

Lucrarea este împărțită în trei părți, urmate de o bibliografie de 46 de titluri.

În prima parte se prezintă teoria generală a torsiunii barelor cu pereți subțiri cu profil deschis; se studiază deformațiile secțiunii transversale și se stabilesc ecuațiile diferențiale corespunzătoare variației acestei deformații în lungul barei. Se obțin, de asemenea, relațiile între mărimile statice (eforturi pe secțiune) și tensiunile suplimentare care iau naștere pe secțiune. Problema centrului de forfecare joacă un rol important.

Partea a doua este dedicată calculului diagramelor de eforturi pe secțiune. Se dau asemenea diagrame pentru diferite tipuri de secțiuni transversale utile în practică; exemple numerice de calcul completează partea teoretică.

Studiul ecuației diferențiale a deformației se face în partea a treia, pentru diferite cazuri de rezemare (care conduc la fenomenul de torsiune împiedicată). În baza acestor rezultate se consideră fenomenul de torsiune datorit unor sarcini transversale, obținîndu-se diagramele de eforturi pe secțiune; aplicarea practică a formulelor obținute se face într-un exemplu numeric, amplu prezentat.

În afară de diferite tabele utile în calcul, se dau — sub formă grafică și de tabel — liniile de influență ale eforturilor pe secțiune pentru diferite cazuri de încărcare cu sarcini unitare și diferite cazuri de rezemare (în total 27 de tabele).

Această monografie, caracterizată printr-o deosebită claritate de expunere, poate fi folosită cu succes în practica de proiectare și, ca material informativ, în cercetarea științifică.

P. P. Teodorescu

* * * *Fusées françaises pour la recherche spatiale*, Dunod, Paris, 1964, p. 115

Interesanta lucrare publicată de „Centre National d'études spatiales" reprezintă o amplă trecere în revistă a tuturor rachetelor franceze concepute pentru a servi ca vehicule spațiale pentru cercetări științifice în atmosfera rarefiată (pînă la 600—700 km altitudine).

[1] Recenzate în „St. cerc. mec. apl.", **16**, 4 (1964).
[2] Recenzată în „St. cerc. mec. apl.", **17**, (1964).

Sînt prezentate principalele caracteristici ale rachetelor franceze construite de: „Laboratoire de recherches balistiques et aérodynamiques", „Société pour l'étude et la réalisation d'engins balistiques", „Sud-Aviation", „Office national d'études et de recherches aérospatiales" și „Société engins MATRA", scoțîndu-se în evidență schemele constructive ale structurii fiecărei rachete, instalațiile de propulsie și stabilizare, echipamentele auxiliare, problemele specifice de tehnologie și fabricație, modul de exploatare și performanțele (altitudine maximă, încărcătură utilă, viteze ascensionale etc.).

Parcurgînd paginile lucrării, cercetătorii, inginerii și tehnicienii care se preocupă de problemele aerospațiale își vor putea face o idee clară și completă despre realizările Franței în domeniul rachetelor destinate explorării spațiului cosmic din vecinătatea suprafeței pămîntului.

C. S. Ioan

LUCRĂRI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE

* * * *Adnotații zakoncennîh v. 1961 godu naucinoissledovatelskih rabot po ghidrotehnike*, Moscova, 1963, 837 p.

V. S. MATVEICIUK, *Issledovanie zagruzocino-razgruznocih ustroistv s magnitnîmi i vakuumnîmi zahvatmi*, Lvov, 1959, 105 p.

IA. F. POGREBNOI, *Izgotovlenie i montaj predvaritelnogo napriajennîh jelezobetonnîh konstrukții*, Izdv. Lvovskogo Univ., 1963, 371 p.

I. GLUȘCENKO, *Osnovî proektirovannia țepnîh peredaci vtolocinorolikovîmi țepiami*, Izdv. Lvovskogo Univ., 1964, 225 p.

— *Referati dokladov na VII konferenții rabotnikov zavodskih i proizvodstvennîh laboratorii Kazahstana i srednei Azii*. Inst. Himiceskih Nauk AN KazSSR, Alma-Ata 1964.

C. A. MERCER, *Response of a multi-supported beam to a random pressure field*, Univ. of Southampton ISAV, Memorandum nr. 103, 1964.

G. L. BLOOMSBURG, *Diffusion of entrapped air from porous media*, Colorado State Univ. Hydrology Papers, nr. 5, 1964.

G. M. LILLEY, ANNE STEVENSON, *The liniarised flow field of a relaxing gas through a non-uniform channel and in a jet at supersonic speeds*, CoA Report Aero, nr. 172, 1964.

J. C. ASCOUGH, *The development of a nozzle for absolute air-flow measurement by Pitot-static traverse*, Aeronautical Research Council Reports and Memoranda, nr. 3384, 1964.

L. WOODGATE, P. G. PUGH, *Measurements of the pitching-moment derivatives on a sharp-edged delta wing in incompressible flow*, Aeronautical Research Council Reports and Memoranda, nr. 3379, 1964.

D. S. WHITEHEAD, *Bending flutter of unstalled cascade blades at finite deflection*, Aeronautical Research Council Reports and Memoranda, nr. 3386, 1964.

F. M. ABECASIS, A. C. QUINTELA, *Hysteresis in steady free-surface flow*, Laboratorio Nacional de Engenharia Civil Technical, Lisabona, Paper nr. 221, 1964.

J. FERRY BORGES, *Non-linear analysis of reinforced concrete structures*, Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, Lisabona, Techn. Paper, nr. 221, 1964.

E. R. ARANTES, *Automatizaçao do calculo de estruturas*, Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, Lisabona, Techn. Paper nr. 220, 1964.

— *Programme et horaire des cours*, Université de Liége, Année Académique 1964—1965, 7 vol.

G. DI RICCO, *Sull'impiego della formula Colebrook e White per il moto uniforme turbolento*. Publ. nr. 37, Faculta di Ingegneria dell'Univ. di Roma, 1963—1964.

C. BRUTTI, *Vibrazioni meccaniche. Valori ottimi dello smorzamento nello smorzatore idraulico in un sistema a due gradi di liberta*, Publ. nr. 6, Faculta di Ingegneria dell'Univ. di Roma, 1963—1964.

C. MARTINELLI, *Lubrificazione fluidodinamica con particolare riguardo all'impiego di lubrificanti gassosi*, Publ. nr. 53, Faculta di Ingegneria dell Univ. di Roma, 1963—1964.

— *La statistique en mécanique des fluides et en hydrologie, C. R. Sci.* Comité Technique nov. 1963, Mém. et Trav. de la Soc. Hydrotechn. de France, suppl. la vol. II, 1963.

M. BANIC, *Les réactions au contour pour une plaque encastrée*, Paris, 1964.

— *Scientific activities of the Institute of Basic Technical Problems of the Polish Academy of Sciences in 1962*, Varșovia, 1964.

F. KEUNE *Einfluss endlicher Spannweite oder endlicher Fläche im Endquerschnitt vorn spitzer Flügel kleiner Streckung oder schlanker Rotationskörper auf die Strömung am und hinter dem Körper*, Deutsche Luft- und Raumfahrt Forschungsnericht, nr. 64—21.

E. SAPPL, *Optimierung linearer Systeme für statistische Signale*, Deutsche Luft- und Raumfahrt Forschungsbericht, nr. 64—24.

K. SCHUSTER, *Vergleichende Betrachtungen über die Plasmaerzeugung in thermionischen Konverten*, Deutsche Luft- und Raumfahrt Forschungsbericht, nr. 64—27.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 19, nr. 4 1965

SUMAR

STUDII

Pag.

D. MANGERON şi R. CHALÉAT, Aproximaţii de ordin superior în studiul mişcării perturbate a oscilatorilor 801

M. MIŞICU, O extindere a ecuaţiilor lui Cosserat relative la mişcarea mediilor deformabile structural neomogene 839

GHEORGHE BUZDUGAN şi LUCIA FETCU, Grinda continuă pe reazeme elastice de lungime dată 849

RADU PRIŞCU şi MIHAI CONSTANTINESCU, Calculul elastic al arcelor circulare solicitate de presiuni variabile 863

MIRCEA SOARE, Calculul numeric al paraboloidului de rotaţie pleoştit pe contur rombic 881

VICTOR DROBOTĂ, Flambajul lateral al grinzilor pendulare continue sub sarcini mobile 919

CHR. PELECUDI, Punctele caracteristice ale acceleraţiilor compuse superioare . . . 933

I. SZÉKELY, T. MUREŞAN şi AL. LELUŢIU, Mecanisme de comandă logică cu elemente rigide şi elastice 949

SANDU IOAN, Alegerea reţelei structurale optime la elaborarea cinematicii cutiilor de viteze cu mai mult de două axe 961

E. CARAFOLI, Extinderea mişcărilor conice la mişcări cvasiconice 981

E. CARAFOLI şi SILVIA RĂDULESCU, Scurgerea supersonică în jurul aripii delta subţiri în derivă 991

T. HACKER, Progrese recente în dinamica zborului. II. Unele probleme actuale ale teoriei stabilităţii şi maniabilităţii avioanelor 1009

N. N. PATRAULEA, NICOLAE POSTELNICU, ELEONORA MALAIU şi MARIA GAVRILĂ, Perna de aer cu cameră plină cu recirculaţie 1031

HORIA I. ENE, Generalizarea unei probleme din mişcarea apelor arteziene 1043

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

CHR. PELECUDI, A VII-a sesiune ştiinţifică a Institutului politehnic Iaşi, Secţia a III-a, Mecanică teoretică şi fizică. 1051

RECENZII 1055

LUCRĂRI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 1061

St. cerc. mec. apl. Tom. 19 Nr. 4 p. 799—1062 Bucureşti 1965

APROXIMAŢII DE ORDIN SUPERIOR ÎN STUDIUL MIŞCĂRII PERTURBATE A OSCILATORILOR[1)]

de D. MANGERON şi R. CHALÉAT

Institutul politehnic Iaşi
Facultatea de ştiinţe şi Institutul politehnic
al Universităţii din Besançon

534 : 531

Se reia studiul primei aproximaţii de ordin superior al mişcării perturbate a oscilatorilor, folosind în mod simultan metodele de variaţie a constantelor şi a aproximaţiilor succesive. Se deduce a doua şi a treia aproximaţie a perturbaţiilor amplitudinii şi a perioadei.

Rezultatele obţinute se aplică la un mare număr de probleme de mecanică neliniară a vibraţiilor.

§1. INTRODUCERE

1. Autorii, lucrînd separat, au consacrat mai multe articole de specialitate studiului unor probleme de mecanică neliniară a vibraţiilor. Rezultatele obţinute, îmbinate cu cercetările altor oameni de ştiinţă, s-au cristalizat în două volume închinate respectiv studiului problemelor de cronometrie şi teoriei generale a oscilaţiilor [1] sau expunerii problemelor clasice, precum şi unor probleme şi metode noi, interesînd îndeosebi mecanica tehnică a vibraţiilor [2].

Primul dintre autori a studiat diferite sisteme de ecuaţii care generalizează problema clopotului în plan sau în spaţiu, elementele constitutive ale lanţurilor dinamice considerate fiind cu mase constante sau cu mase

[1)] Publicat într-o variantă uşor redusă în „Revue Roumaine des Sciences techniques, Série Mécanique appliquée", **10**, *4* (1965).

variabile [45]. Astfel, de exemplu, un şir de studii iniţiat în această ordine de idei ia ca punct de plecare sistemul de ecuaţii

$$(l_{n-i}\ m_{n-i} + a_{n-i}\ m_{n-i+1} + a_{n-i}\ m_{n-i+2} + \ldots + a_{n-i}\ m_n) \times$$
$$\times \left\{ \sum_{j=1}^{n-i} a_j [\theta_j'' \cdot \cos(\theta_{n-i} - \theta_j) + \theta_j'^2 \sin(\theta_{n-i} - \theta_j)] + g \sin \theta_{n-i} \right\} + \tag{a}$$
$$+ m_{n-i}(k_{n-i}^2 - l_{n-i}\ a_{n-i})\ \theta_{n-i}'' + a_{n-i} \sum_{k=1}^{i} (l_{n-i+k}\ m_{n-i+k} + a_{n-i+k}\ m_{n-i+k+1} +$$
$$+ a_{n-i+k}\ m_{n-i+k+2} + \ldots + a_{n-i+k}\ m_n) \times [\theta_{n-i+k}'' \cos(\theta_{n-i} - \theta_{n-i+k}) +$$
$$+ \theta_{n-i+k}'^2 \sin(\theta_{n-i} - \theta_{n-i+k})] = 0,$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

care corespunde la ipotezele ce urmează.

Fie $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$, n corpuri rigide grele, articulate între ele prin axe paralele, presupuse, pentru a fixa ideile, orizontale O_1z_1, O_2z_2, ..., $O_{n-1}\ z_{n-1}$. Axa O_iz_i este legată invariabil de corpul C_i, fiind totodată axa de suspensie pentru corpul C_{i+1}. Corpul C_1 este suspendat şi el de o axă orizontală O_0z_0 paralelă la axele O_iz_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ şi legată rigid de batiu.

Fie $O_0x_0y_0z_0$ şi $O_ix_iy_iz_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, n sisteme de axe de coordonate rectangulare congruente între ele, O_0x_0 şi O_ix_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ fiind verticale descendente. Se presupune că toate punctele O_0, $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$, precum şi $G_1, G_2, \ldots, G_n$, centrele de greutate ale corpurilor considerate, se află într-un acelaşi plan vertical $x_0O_0y_0$, ce coincide de altfel cu planele $x_i\ O_i\ y_i$, iar punctul G_i se găseşte pe axa $O_{i-1}\ O_i$. În (a), prin $m_1, m_2, \ldots, m_n$ s-au notat masele corpurilor considerate, g, ca de obicei, este constanta gravitaţiei pământeşti din locul considerat, $a_i = O_{i-1}\ O_i$, $l_i = O_{i-1}\ G_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, θ_i este unghiul între axa $O_{i-1}\ O_i$ şi verticala descendentă, θ_i' şi θ_i'' sînt derivatele acestui unghi în raport cu timpul t şi, în fine, k_i este raza de giraţie a corpului C_i în raport cu axa $O_{i-1}z_{i-1}$ [2]).

Metoda ecuaţiilor integrale [3]), elaborată de primul dintre autori, a fost aplicată apoi, în cadrul conferinţelor internaţionale recente consacrate oscilaţiilor neliniare şi organizate, respectiv, la Kiev şi la Berlin, de către IUTAM (Uniunea internaţională de mecanică teoretică şi aplicată) şi de către DAW (Academia Germană de Ştiinţe, R.D.G.), la studiul oscilatorilor cu lămpi, ca, de exemplu,

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = \left[(M - LD)\frac{d}{dt} - DR\right] f(E_r + u), \tag{b}$$

[2]) Pentru variate detalii algoritmice relative la diferite aproximări a sistemelor oscilatoare de forma (a), vezi de exemplu lucrările primului dintre autori [4]–[6], iar pentru diferite variante şi extinderi seria de lucrări [7]–[10], [46] şi [47], publicate în paginile „Buletinului Institutului politehnic din Iaşi".

[3]) Această metodă a fost numită de diferiţi cercetători „Metoda integrală a lui Mangeron" [11]–[13].

sau la studiul *sistemelor polivibrante* [4]), liniare sau neliniare, cu termeni de remanență, care se prezintă, dacă ne mărginim la două variabile independente, sub forma

$$M^k[v(\xi,\eta)] = f_1(\xi,\eta) + \lambda \iint_{R_1} K_1(\xi,\eta;\ \xi_0,\eta_0) f_2[\xi_0,\eta_0;\ v(\xi_0,\eta_0)]\, d\xi_0\, d\eta_0, \quad \text{(c)}$$

$$M[\cdot] \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)[\cdot], \quad M^k[\cdot] \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) M^{k-1}[\cdot],$$

$$R_1 \equiv [a_1, b_1] \times [a_2, b_2], \frac{\partial^{2R} u(x,y)}{\partial x^k\, \partial y^k} = F_1(x, y) + \quad \text{(d)}$$

$$+ \lambda \iint_R K_2(x, y;\ t, \tau)\, f[t, \tau;\ u(t, \tau)]\, dt d\tau,$$

$$u(x,y) \equiv v\left(\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x-y)\right), \quad F_1(x, y) \equiv f_1\left(\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x-y)\right).$$

$$K_2(x, y; t, \tau) \equiv K_1\left(\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x-y); \frac{1}{2}(t+\tau), \frac{1}{2}(t-\tau)\right) \text{ etc.}$$

$$R \equiv [a, b] \times [c, d],$$

ecuația (d) obținîndu-se din ecuația (c) în urma executării schimbărilor de variabile $\xi = \frac{1}{2}(x+y)$, $\eta = \frac{1}{2}(x-y)$. Ecuațiile de tipul (*d*), numite de primul dintre autori ecuații cu derivate totale în sensul lui Picone [16], au fost studiate sistematic în ultima vreme de D. Mangeron și L.E. Krivoșein [17], [18], aceste din urmă lucrări constituind izvor de inspirație pentru alți cercetători [48] — [50].

Al doilea dintre autori a studiat sistematic în ultima vreme numeroase probleme relative la oscilatori neliniari [19] — [22].

Prezenta lucrare este consacrată aplicării aproximațiilor de ordin superior în studiul mișcărilor perturbate a oscilatorilor [23], [24].

2. Șirul de studii esențiale în domeniul teoriei perturbațiilor a avut la bază studiul mișcărilor planetare (Lindstedt, 1883; Poincaré, 1893). Rezultatele acestor studii au fost preluate apoi de către fondatorii mecanicii neliniare a vibrațiilor (van der Pol, 1921; J. Haag, 1930; N.M. Krylov și N.N. Bogoliubov, 1934).

Rezultatele obținute de către autorii menționați constituie o primă aproximație, care, în multe cazuri, este și suficientă pentru a se decide

---

[4]) Ecuațiile polivibrante au fost numite de numeroși cercetători „ecuațiile Mangeron" [14], [15]. Noutatea și cîmpul de aplicații în necontenită lărgire a sistemelor polivibrante, considerate pentru prima oară de primul dintre autori, are ca punct de plecare prototipul care generalizează clasicile sisteme ale lui Strum-Liouville [21]:

$$[A(x)u' + \lambda B(x)u]' + \lambda [B(x)u' + C(x)u] = 0, \quad \text{(e)}$$

$$(x = x_1, x_2, \ldots, x_m),\ u\big|_{Fr\,R} = 0,\ R = (x_i^* \leqslant x_i \leqslant x_i^{**}),\ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

asupra comportării unui oscilator. În unele cazuri însă, importante în mecanica tehnică a vibraţiilor actuală, prima aproximaţie nu permite să se determine cuantumul perturbaţiei suferite de perioadă sau de amplitudine. Pe lîngă aceasta, termenii perturbatori intervenind în mod izolat, prima aproximaţie nu pune în evidenţă "interacţiunile" între diferiţi termeni şi, prin urmare, nu conduce la interpretarea exactă a fenomenelor reale. Apare astfel deosebit de utilă cunoaşterea aproximaţiilor de ordin superior.

Luînd ca punct de plecare un număr de rezultate obţinute de cel de-al doilea autor [25] — [30], iar într-o lucrare aflată în curs de redactare [52] şi de noile metode grafice şi analitice interesînd mecanica tehnică a vibraţiilor expuse de primul dintre autori în [4], se reia în ceea ce urmează studiul primei aproximaţii, expunîndu-l într-un mod riguros graţie utilizării simultane, folosind calea urmată de J. Haag [32], a metodelor de variaţie a constantelor şi a aproximaţiilor succesive. După punerea în evidenţă, pe această nouă cale, a posibilităţilor oferite de prima aproximaţie în studiul mişcării oscilatorilor, vom deduce în ceea ce urmează *a doua* şi *a treia* aproximaţie a perturbaţiilor amplitudinii şi a perioadei. Într-una din lucrările viitoare se va expune rolul aproximaţiilor de ordin superior în unele probleme concrete, care necesită astăzi *aproximaţii de ordin şi mai mare decît trei.*

Rezultatele obţinute se aplică nemijlocit la un vast număr de probleme de mecanică neliniară a vibraţiilor. Lucrarea cuprinde în continuare un număr de exemple deosebit de importante în practica actuală.

Se va arăta, în fine, rolul unui cuplu de rapel neliniar în problema de amortizare a unui oscilator. Legea de variaţie a amplitudinilor succesive a fost calculată în cazul rezistenţelor pasive de natură vîscoasă şi pentru diferite tipuri de cupluri de rapel ce se întîlnesc în practică. Forma curbei de amortizare este modificată prin introducerea termenilor neliniari. Determinarea experimentală a curbei de amortizare permite stabilirea simultană a efectelor datorate rezistenţelor pasive şi a părţii neliniare a cuplului de rapel.

3. *Oscilator liniar perturbat.* Considerăm un oscilator avînd un singur grad de libertate, determinat prin parametrul θ, şi care, pentru $t = 0$, este abandonat fără viteză iniţială şi cu elongaţie pozitivă y. Mişcarea unui astfel de oscilator este cristalizată prin ecuaţia diferenţială

$$\theta'' + \omega^2\theta = \lambda\omega^2 f(\theta, \theta'). \tag{1}$$

În ecuaţiile (e) însă, „dreptunghiul" $R = (x_i^* \leqslant x_i \leqslant x_i^{**})$ este cu m dimensiuni, iar *derivata totală* de primul ordin u' este dată prin

$$u' \equiv \frac{\partial^m u}{\partial x_1, \partial x_2 \ldots \partial x_m}. \tag{f}$$

Interesul faţă de atare probleme, tratate de D. Mangeron în schematizări liniare sau neliniare, cu conture formate din caracteristice sau nu, a fost subliniat foarte curînd după apariţia primelor lucrări ale autorului, publicate în „Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei" [34] şi în „Rendiconti dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche din Napoli" [51], de numeroşi autori, începînd cu academicienii M. Picone, A. Rosenblatt, M. Salvadori, J. Favard, G. Stampacchia ş.a.

Se presupune că maximul funcției perturbatoare $\lambda\omega^2 f(\theta, \theta')$ este foarte mic în comparație cu maximul expresiei $\omega^2\theta$, așa încît parametrul λ va juca rolul unui infinit mic principal.

În lipsa perturbațiilor ($\lambda = 0$), elongația și viteza sînt date prin

$$\theta_0 = y\cos\alpha,\quad \theta_0' = -\omega y\sin\alpha,\quad \alpha = \omega t,\quad \omega = \frac{2\pi}{T_0}, \tag{2}$$

în care prin T_0 s-a notat perioada completă a oscilațiilor.

În prezența forțelor perturbatoare, pentru $\lambda \neq 0$ vom pune soluția generală a ecuației (1) sub forma

$$\theta = Y\cos\varphi,\quad \theta' = -\omega Y\sin\varphi,\quad \varphi = \alpha + x. \tag{3}$$

Este evident că Y și x nu mai sînt acum constante, ci funcții necunoscute de timpul t. Dată fiind micimea membrului al doilea al ecuației (1), decalajele între Y și x și niște constante convenabile sînt aproape de zero. Funcțiile Y și x sînt astfel apriori funcții cu *variație lentă*, fapt ce se va verifica mai tîrziu.

Transformarea de variabile (3) nu este altceva decît transformarea ce caracterizează *metoda variației constantelor*. Ea face ca sistemul (1) să se transforme într-un sistem echivalent

$$\Delta Y = Y(t) - y = -\lambda\omega\int_0^t f(\theta,\ \theta')\sin\varphi\,dt,$$

$$x(t) = -\lambda\omega\int_0^t \frac{f(\theta,\ \theta')\cos\varphi\,dt}{Y(t)}. \tag{4}$$

Cu toate că nu se reușește în general să se obțină o soluție a sistemului (4), așa cum nu s-a putut obține în general nici soluția sistemului (1), sistemul (4) convine, în schimb, aplicării *metodei aproximațiilor succesive*.

4. Justificarea metodei aproximațiilor succesive [5])

Să punem integrala generală a ecuației (1) sub forma

$$\theta = A\cos\alpha + B\sin\alpha,\quad \theta' = -\omega A\sin\alpha + B\omega\cos\alpha, \tag{5}$$

în care prin A și B s-au notat funcții necunoscute de t. Derivînd prima ecuație din (5) în raport cu t, avem, ținînd seama de a doua, $A'\cos\alpha - B'\sin\alpha = 0$. Derivînd a doua ecuație din (5) în raport cu t și introducînd-o apoi în (1), se obține

$$\omega(-A'\sin\alpha + B'\cos\alpha) = \lambda\omega^2 f(\theta,\ \theta').$$

Din sistemul format din două ecuații precedente se capătă nemijlocit

$$A' = -\lambda\omega f\sin\alpha,\quad B' = \lambda\omega f\cos\alpha. \tag{6}$$

[5]) Aplicarea metodei aproximațiilor succesive, făcută sistematic de primul dintre autori în legătură cu studiul sistemelor neliniare polivibrante [5], a fost urmată apoi, pentru ecuații de același tip, de numeroși cercetători [11]–[13].

În funcţia f care figurează în membrul drept al sistemului (6), θ şi θ' trebuie să fie înlocuite prin expresiile lor (5) care conţin funcţii necunoscute A şi B. Prin urmare, membrii din dreapta din (6) sînt de forma $F(A, B, t)$ şi $G(A, B, t)$.

Trebuie să calculăm soluţia sistemului diferenţial (6) în condiţiile $\theta = y$, $\theta' = 0$, ceea ce se traduce prin condiţiile $A_0 = y$ şi $B_0 = 0$. În corespondenţă cu acest caz concret vom aplica metoda aproximaţiilor succesive.

Presupunem că pentru

$$0 < t < t_1, \ |\theta - y| \leqslant a, \ |\theta'| \leqslant \omega b, \tag{7}$$

a şi b fiind constante pozitive. Mai presupunem că f este o funcţie continuă, de modul M, verificînd condiţiile lui Lipschitz [6])

$$|f(\theta, \theta') - f(\theta_1, \theta'_1)| < p(\theta - \theta_1) + \frac{q}{\omega} |\theta' - \theta'_1|, \tag{8}$$

în care p şi q sînt constante pozitive.

Un calcul elementar arată că avem *a fortiori* :

$$\begin{aligned} |F(A, B, t) - F(A_1, B_1, t)| &< P|A - A_1| + Q|B - B_1|, \\ |G(A, B, t) - G(A_1, B_1, t)| &< Q|A - A_1| + P|B - B_1|, \end{aligned} \tag{9}$$

în care s-a notat

$$P = \frac{p + 2q}{2\omega}, \quad Q = \frac{2p + q}{2\omega}.$$

Pe de altă parte, inegalităţile (7) sînt, ţinîndu-se seama de (5), verificate în mod cert dacă avem

$$|A| < (a + y)/\sqrt{2}, \ |B| < a/\sqrt{2}, \ |A| < (b + y)/\sqrt{2}, \ |B| < b/\sqrt{2}.$$

Prin urmare, demonstraţia clasică este aplicabilă la sistemul (6).

Menţionăm că am presupus că funcţia $f(\theta, \theta')$ este continuă. Însă în mecanica tehnică a vibraţiilor întîlnim forţe perturbatoare discontinue, ce se pot exprima prin funcţii generalizate (distribuţii) (mecanisme cu intermitenţă, scăpări ale oscilatorilor mecanici, frecări constante ş.a.) [53]. J. Haag a demonstrat [32] că putem să ne dispensăm de această restricţie dacă discontinuităţile au loc pentru anumite valori fixe θ_i ale lui θ (cazuri în care oscilatorii mecanic scapă) sau pentru $\theta' = 0$ (frecare constantă), cu condiţia ca y să fie superior tuturor valorilor θ_i şi lui zero.

5. *Aproximaţia de ordin n.* Teoria generală a aproximaţiilor succesive arată [35] că, dacă ne mărginim la aproximaţia de ordin n, eroarea

---

[6]) A. Rosenblatt [33], urmînd ordinea de idei a primului dintre autori relativă la studiul problemelor polivibrante, de exemplu [34]

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}, u_{x^2y}, u_{xy^2}), \ u|_{FrR} = 0, \ R = [a, b] \times [c, d],$$

a propus utilizarea unor condiţii care generalizează condiţiile lui Lipschitz. Vom face uz de această extindere cu un alt prilej.

comisă este cel mult de ordinul expresiei $\lambda^{n+1} t^n$. Pentru orice valoare finită a lui t, această expresie este un infinit mic de ordin $n+1$.

Fie Y_n şi x_n, respectiv a n — a aproximaţie a amplitudinii şi a avansului de fază instantanee şi fie $\bar{Y}_n$ şi $\bar{x}_n$ valorile lor la finele unei perioade complete. Mişcarea oscilatorului este definită, în cadrul aproximaţiei a n — a, prin

$$\theta_n = Y_n \cos \varphi_n, \quad \theta_n' = -\omega Y_n \sin \varphi_n, \quad \varphi_n = \omega t + x_n. \tag{10}$$

La finele unei perioade complete de durată $T_n = T_0 + \Delta T$, T_0 fiind perioada normală, viteza se anulează şi avem $\omega(T_0 + \Delta T) + \bar{x}_n = 2\pi$. De aici se deduce *perturbaţia relativă a perioadei* şi *perioada*, date, respectiv, prin

$$\frac{\Delta T}{T_0} = -\frac{\bar{x}_n}{2\pi}, \quad T_n = T_0\left(1 - \frac{x_n}{2\pi}\right). \tag{11}$$

Perturbaţia amplitudinii este dată în aproximaţia de ordin n prin

$$\Delta \bar{Y}_n = \bar{Y}_n - y. \tag{12}$$

§ II. PRIMA APROXIMAŢIE

6. În prima aproximaţie, membrii din dreapta din (4) sînt supuşi la substituirea valorilor lui θ şi θ' prin valorile lor, care corespund la absenţa perturbaţiilor, adică prin θ_0 şi θ_0', date prin (2). Se înlocuieşte, în fine, φ prin $\alpha = \omega t$ şi Y prin y. Eroarea astfel comisă este cel mult de ordinul lui λ^2 (cf. **4**).

Valorile instantanee ale perturbaţiei în amplitudine şi a avansului de fază sînt date prin

$$\begin{aligned} \Delta Y_1(\alpha) &= -\lambda \int_0^{\alpha} F(\alpha') \sin \alpha' d\alpha' + 0(\lambda^2), \\ x_1(\alpha) &= -\frac{\lambda}{y} \int_0^{\alpha} F(\alpha') \cos \alpha' d\alpha' + 0(\lambda^2), \quad 0 < \alpha' < \alpha_1 \end{aligned} \tag{13}$$

în care s-a notat

$$F(\alpha) = f(\theta_0, \theta_0') \tag{14}$$

şi s-a luat faza α drept variabilă de integrare.

Valorile lor la finele unei perioade complete se obţin luînd, pe baza celei de-a treia relaţii din (10), $\alpha = 2\pi - \bar{x}_1$ drept limita superioară a integralei. Descompunem integrala

$$\int_0^{2\pi - \bar{x}_1} \text{în} \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{2\pi - \bar{x}_1}.$$

Pentru ultima din integralele considerate adineauri, intervalul de integrare este $\bar{x}_1$. Acesta, pe baza (13), este de ordinul întîi în λ. În expresiile lui $\bar{Y}_1$ şi $\bar{x}_1$, această integrală va fi multiplicată prin λ. Termenul

corespunzător în expresiile lui $\overline{Y}_1$ şi $\overline{x}_1$ este, prin urmare, de ordinul lui λ^2, adică de acelaşi ordin ca şi eroarea sistematică datorită primei aproximaţii. Se poate lua, prin urmare, $\alpha = 2\pi$ ca limită superioară a integralei. Avem astfel

$$\Delta\overline{Y}_1 = -\lambda\int_0^{2\pi} F(\alpha)\sin\alpha d\alpha + 0(\lambda^2), \tag{15}$$

$$\overline{x}_1 = -\frac{\lambda}{y}\int_0^{2\pi} F(\alpha)\cos\alpha d\alpha + 0(\lambda^2). \tag{16}$$

Perioada este dată prin $T_1 = T_0\left(1 - \frac{\overline{x}_1}{2\pi}\right)$, în care $\overline{x}_1$ este definit prin (16).

7. *Consecinţa primei aproximaţii.* Observăm că :

1° Funcţia perturbatoare f intervine liniar sub simbolurile de sumare din (15) şi (16). Prin urmare, dacă f este sumă constituită din mai multe funcţii perturbatoare, perturbaţiile globale de amplitudine şi de perioadă sînt sumele perturbaţiilor parţiale de amplitudine şi de perioadă rezultate din înşiruirile luate separat ale funcţiilor perturbatoare constitutive.

2° Dacă f este o funcţie impară de viteză sau o funcţie pară de elongaţie θ, avem $T_1 = T_0$.

3° Dacă f este o funcţie pară de viteză sau o funcţie impară de θ, avem $\Delta\overline{Y}_1 = 0$.

Toate aceste rezultate nu mai sînt exacte dacă se trece la aproximaţii de ordin superior.

Formulele (15) şi (16) sînt astăzi clasice. Prima poate fi de altfel obţinută imediat dacă se foloseşte teorema energiei cinetice sub forma integrală, corespunzătoare duratei între începutul şi sfîrşitul unei oscilaţii complete. Aplicaţiile formulelor (15) şi (16) sînt numeroase. Ele se folosesc îndeosebi în cronometrie şi în teoria oscilaţiilor (1).

După cîte ştim, pare că ecuaţiile (13) nu au fost folosite de alţi cercetători. Ele sînt însă foarte preţioase în studiul mişcării. Vom indica mai jos unele aplicaţii simple ale lor.

8. *Prima aproximaţie a legii de mişcare.* Ţinînd seama de (10), avem $\theta_1 = Y_1\cos\varphi_1$. Fie apoi

$$\theta_1 = Y_1\cos(\alpha + x_1) = y\left(1 + \frac{\Delta Y_1}{y}\right)(\cos\alpha - x_1\sin\alpha) + 0(\lambda^2),$$

sau, în fine,

$$\theta_1 = y\left(1 + \frac{\Delta Y_1}{y}\right)\cos\alpha - yx_1\sin\alpha + 0(\lambda^2). \tag{17}$$

În această expresie ΔY_1 şi x_1 sînt date, respectiv, prin (13).

Aplicaţia 1. *Frecare vîscoasă.* Fie $2\lambda Aa\omega\theta'$ termenul ce corespunde la frecare vîscoasă, în care a este o constantă pozitivă şi A este coeficientul de inerţie (masă, moment de inerţie, selfinducţie ş.a.). Avem :

$$f(\theta, \theta') = -\frac{2a\theta'}{\omega}, \text{ de unde rezultă } F(\alpha) = 2ay\sin\alpha.$$

Introducînd în (13), se obţine

$$\frac{\Delta Y_1}{y} = -2a\lambda \int_0^{\alpha} \sin^2 \alpha' d\alpha' = -\lambda a(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha),$$
$$x_1 = -2\lambda a \int_0^{\alpha} \sin \alpha' \cos \alpha' d\alpha' = -\lambda a \sin^2 \alpha. \tag{18}$$

Formula (17) dă imediat

$$\theta_1 = y(1 - \lambda\alpha)\cos \alpha + \lambda a y \sin \alpha + 0(\lambda^2).$$

Se regăsesc primii doi termeni ai dezvoltării după puterile lui λ a soluţiei exacte a ecuaţiei diferenţiale

$$\theta'' + 2a\omega\, \theta' + \omega^2 \theta = 0$$

dacă se ţine seama de condiţiile iniţiale $\theta = y$, $\theta' = 0$.

Aplicaţia 2. *Funcţia perturbatoare în* θ^2. Fie $f(\theta, \theta') = b\theta^2$. Avem succesiv

$$F(\alpha) = y^2 b \cos^2 \alpha, \frac{\Delta Y_1}{y} = -\lambda b y (1 - \cos^3 \alpha)/3$$

şi, după executarea unor transformări elementare,

$$\theta_1 = y\left(1 - \frac{1}{3}\lambda y b\right)\cos \alpha + \frac{1}{2}\lambda b y^2 - \frac{1}{6}\lambda b y^2 \cos 2\alpha + 0(\lambda^2).$$

Acelaşi rezultat poate fi obţinut prin metoda numită a perturbaţiilor, care constă în a pune

$$\theta = \theta_0 + \sum_{n \geq 1} \lambda^n \theta_n, \quad \omega = \omega_1 + \sum_{n \geq 1} \lambda^n \alpha_n,$$

în care θ_n sînt funcţii necunoscute de t şi α_n constante, şi în a introduce apoi aceste valori în ecuaţia diferenţială considerată. Însă, în acest din urmă caz, calculele, chiar şi limitate numai la termenii în λ, devin mult mai prolixe.

Aplicaţia 3. *Funcţia perturbatoare în* θ^3. Fie $f(\theta, \theta') = \lambda c \theta^3$. Se obţine uşor

$$\theta_1 = y \cos \alpha + \frac{1}{2}\lambda y^3 c\left(3\alpha \sin \alpha + \frac{1}{4}\cos \alpha - \frac{1}{4}\cos 3\alpha\right) + 0(\lambda^2).$$

Rezultatul de mai sus se obţine lesne şi în urma folosirii metodelor clasice încetăţenite în mecanica neliniară.

Aplicaţia 4. *Oscilator de relaxare.* Un atare oscilator este schematizat matematic prin ecuaţia diferenţială

$$\theta'' + \omega^2 \theta = \lambda\omega\, \theta'(1 - \theta^2).$$

Formula (17) conduce, după executarea tuturor calculelor, la

$$\theta = y\left[1 - \frac{1}{2}\lambda\alpha\left(1 - \frac{1}{4}y^2\right)\right]\cos\alpha - \frac{1}{2}\lambda y\left(1 - \frac{1}{4}y^2\right)\sin\alpha +$$

$$+ \lambda y^3(3\sin\alpha - \sin 3\alpha)/32 + 0(\lambda^2).$$

Funcţia perturbatoare $f(\theta, \theta') = \theta'(1 - \theta^2)/\omega$ este o funcţie impară de viteză şi o funcţie pară de elongaţie. Perturbaţia perioadei este nulă (cf. 7,2). Pentru a calcula perioada oscilatorului de relaxare este necesar să se cunoască cel puţin a doua aproximaţie din cadrul teoriei perturbaţiilor, lucru pe care-l vom face în ceea ce urmează.

§ III. A DOUA APROXIMAŢIE

9. În a doua aproximaţie [30] înlocuim în membrii din dreapta din sistemul (4) θ şi θ' prin θ_1 şi θ_1', definiţi prin

$$\theta_1 = Y_1\cos\varphi_1, \quad \theta_1' = -\omega Y_1\sin\varphi_1, \quad \varphi_1 = \alpha + x_1, \tag{19}$$

în care s-a notat $Y_1 = y + \Delta Y_1$, iar x_1 şi ΔY_1 sînt date prin (13). Se înlocuieşte, în fine, în sistemul (4) φ prin φ_1 şi Y prin Y_1.

Eroarea astfel comisă este de ordinul λ^3 (cf. 4). Prin urmare, în calcule ulterioare va trebui să neglijăm toţi termenii de ordinul egal sau superior lui λ^3.

Dacă se alege faza α drept variabilă de integrare în sistemul (4) şi dacă se ţine seama de cea de-a treia formulă din (10), valorile perturbaţiei în amplitudine şi a avansului de fază la finele unei perioade complete sînt date prin integrale între limitele 0 şi $2\pi - \bar{x}_2$. Descompunem integrala

$$\int_0^{2\pi-\bar{x}_2} \text{în} \int_0^{2\pi-\bar{x}_1} + \int_{2\pi-\bar{x}_1}^{2\pi-\bar{x}_2}.$$

Aplicînd formula de medie, se constată că cea de-a doua integrală din suma de mai sus este de ordinul lui $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = 0(\lambda^2)$. Întrucît această integrală este multiplicată prin λ în formulele (4), aportul său este, prin urmare, de ordinul lui λ^3 şi, în consecinţă, el poate fi neglijat. Rămîne astfel

$$\Delta\bar{Y}_2 = \bar{Y}_2 - y = -\lambda\int_0^{2\pi-\bar{x}_1} f(\theta_1, \theta_1')\sin\varphi_1\,d\alpha + 0(\lambda^3),$$

$$\bar{x}_2 = -\lambda\int_0^{2\pi-\bar{x}_1} f(\theta_1, \theta_1')\frac{\cos\varphi_1}{Y_1}d\alpha + 0(\lambda^3). \tag{20}$$

Valorile *instantanee* ale lui $\Delta Y_2 = Y_2 - y$ și x_2 sînt date prin

$$\Delta Y_2 = -\lambda \int_0^\alpha f(\theta_1, \theta_1') \sin \varphi_1 \, d\alpha + 0(\lambda^3),$$
$$x_2 = -\lambda \int_0^\alpha f(\theta_1, \theta_1') \frac{\cos \varphi_1}{Y_1} d\alpha + 0(\lambda^3). \tag{21}$$

Vom mai nota

$$\Delta Y_2 = -\lambda (I_2' - I_2'') + 0(\lambda^3),$$
$$\bar{x}_2 = -\lambda (J_2' - J_2'') + 0(\lambda^3), \tag{22}$$

în care s-a pus

$$I_2' = \int_0^{2\pi} \Phi_1(\alpha) \, d\alpha, \quad I_2'' = \int_{2\pi - \bar{x}_1}^{2\pi} \Phi_1(\alpha) \, d\alpha,$$
$$\Phi_1(\alpha) = f(\theta_1, \theta_1') \sin \alpha_1, \tag{23}$$

și

$$J_2' = \int_0^{2\pi} \Psi_1(\alpha) \, d\alpha, \quad J_2'' = \int_{2\pi - \bar{x}_1}^{2\pi} \Psi_1(\alpha) \, d\alpha,$$
$$\Psi_1(\alpha) = f(\theta_1, \theta_1') \frac{\cos \varphi_1}{Y_1} \tag{24}$$

și în care se ține seama de faptul că integralele I_2', I_2'', J_2' și J_2'' trebuie să fie calculate cu aproximație pînă la ordinul lui λ^2, $0(\lambda^2)$.

10. *Calculul integralelor* I_2'' și J_2''. Aplicînd formula mediei și notînd prin $\bar{\Phi}_1(\alpha)$ valoarea medie a funcției $\Phi_1(\alpha)$ în intervalul $2\pi - \bar{x}_1 < \alpha < 2\pi$, obținem

$$I_2'' = \bar{x}_1 \bar{\Phi}_1(\alpha). \tag{25}$$

Formula lui Taylor dă

$$f(\theta_1, \theta_1') = f(\theta_0, \theta_1') + (\theta_1 - \theta_0) \frac{\partial}{\partial \theta} f[\theta_0 + \varepsilon(\theta_1 - \theta_0), \theta_0' + \varepsilon(\theta_1' - \theta_0')] +$$
$$+ (\theta_1' - \theta_0') \frac{\partial}{\partial \theta'} f[\theta_0 + \varepsilon(\theta_1 - \theta_0), \theta_0' + \varepsilon(\theta_1' - \theta_0')], \; 0 < \varepsilon < 1. \tag{26}$$

Din (2) și (19) se obține

$$\theta_1 - \theta_0 = Y_1 \cos \varphi_1 - y \cos \alpha = (y + \Delta Y_1) \cos(\alpha + x_1) - y \cos \alpha,$$

sau, dezvoltînd după puterile lui ΔY_1 și x_1:

$$\theta_1 - \theta_0 = \Delta Y_1 \cos \alpha - y x_1 \sin \alpha + 0(\lambda^2). \tag{27}$$

În mod cu totul analog se obţine

$$\theta_1' - \theta_0' = -\omega\ (\Delta Y_1 \sin\alpha + y x_1 \cos\alpha) + 0(\lambda^2). \tag{28}$$

Introducînd rezultatele astfel căpătate în (26), avem

$$f(\theta_1, \theta_1') = F(\alpha) + 0(\lambda), \tag{29}$$

în care $F(\alpha)$ este definit prin (14). Se deduce

$$\Phi_1(\alpha) = F(\alpha)\sin(\alpha + x_1) = F(\alpha)\sin\alpha + 0(\lambda),$$

$$\bar{\Phi}_1(\alpha) = F(2\pi - \varepsilon' x_1)\ \sin\ (2\pi - \varepsilon' x_1) = 0(\lambda),\ 0 < \varepsilon' < 1.$$

Introducînd în (25), se obţine $I_2'' = 0(\lambda^2)$. Se poate, prin urmare, neglija I_2'', care contribuie în prima ecuaţie din sistemul (22) cu un termen de acelaşi ordin de mărime ca şi eroarea sistematică ce corespunde la cea de-a doua aproximaţie.

În acelaşi mod avem $J_2'' = \bar{x}_1\,\overline{\Psi}_1(\alpha)$, în care prin $\overline{\Psi}_1(\alpha)$ s-a notat valoarea medie a funcţiei $\overline{\Psi}_1(\alpha)$, definită prin (24), în intervalul $2\pi - \bar{x}_1 < \alpha < 2\pi$. În virtutea egalităţii (29) avem

$$\Psi_1(\alpha) = [F(\alpha) + 0(\lambda)]\frac{\cos(\alpha + x_1)}{y + \Delta Y_1} = F(\alpha)\frac{\cos\alpha}{y} + 0(\lambda),$$

de unde

$$\overline{\Psi}_1(\alpha) = \frac{1}{y}F(2\pi - \varepsilon'' x_1)\cos(2\pi - \varepsilon'' x_1) = \frac{F(2\pi)}{y} + 0(\lambda),\ 0 < \varepsilon'' < 1,$$

şi, în fine,

$$J_2'' = \bar{x}_1\frac{F(2\pi)}{y} + 0(\lambda^2). \tag{30}$$

11. *Calculul funcţiei* $\Phi_1(\alpha)$. Utilizînd (14), (26)—(28), (30), se obţine

$$\Phi_1(\alpha) = [F(\alpha) + p_0(\Delta Y_1\cos\alpha - y x_1\sin\alpha) - \omega q_0(\Delta Y_1\sin\alpha + y x_1\cos\alpha) +$$
$$+ 0(\lambda^2)\,] \times [\sin\alpha + x_1\cos\alpha + 0(\lambda^2)] =$$
$$= F(\alpha)\sin\alpha - y x_1\,(p_0\sin\alpha + \omega q_0\cos\alpha)\sin\alpha +$$
$$+ \Delta Y_1\sin\alpha\,(p_0\cos\alpha - \omega q_0\sin\alpha) + F(\alpha)\,x_1\cos\alpha + 0(\lambda^2),$$

în care s-a pus

$$p_0 = \frac{\partial}{\partial\theta}f(\theta_0,\ \theta_0'),\ q_0 = \frac{\partial}{\partial\theta'}f(\theta_0,\ \theta_0'). \tag{31}$$

Ţinînd seama de faptul că avem

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial\theta_0}\frac{d\theta_0}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial\theta_0'}\frac{d\theta_0'}{d\alpha},$$

și, prin urmare, avînd în vedere (2),

$$\frac{d\theta_0}{d\alpha} = -y \sin\alpha, \frac{d\theta_0'}{d\alpha} = -\omega y \cos\alpha, \tag{32}$$

de unde se obține

$$\frac{dF}{d\alpha} = -y\,(p_0 \sin\alpha + \omega q_0 \cos\alpha). \tag{33}$$

Introducînd expresia lui $\frac{dF}{d\alpha}$ din (33) în $\Phi_1(\alpha)$, se obține $\Phi_1(\alpha) =$

$$= F\sin\alpha + Fx_1\cos\alpha + \frac{dF}{d\alpha}x_1\sin\alpha - \omega q_0 \Delta Y_1 - \frac{\Delta Y_1}{y}\frac{dF}{d\alpha}\cos\alpha + 0(\lambda^2).$$

Dacă se ține seama de faptul că

$$\frac{dF}{d\alpha}x_1\sin\alpha = \frac{d}{d\alpha}(Fx_1\sin\alpha) + \lambda\frac{F^2}{y}\cos\alpha\sin\alpha - Fx_1\cos\alpha,$$

$$\frac{\Delta Y_1}{y}\frac{dF}{d\alpha}\cos\alpha = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\Delta Y_1}{y}F\cos\alpha\right) + F\sin\alpha\frac{\Delta Y_1}{y} + \frac{\lambda F^2}{y}\sin\alpha\cos\alpha,$$

avem, în definitiv,

$$\Phi_1(\alpha) = F\sin\alpha - \frac{\Delta Y_1}{y}(F\sin\alpha + y\,\omega\,q_0) + \\ + \frac{d}{d\alpha}\left[F - \frac{\Delta Y_1}{y}\cos\alpha + x_1\sin\alpha\right] + 0(\lambda^2). \tag{34}$$

12. *Calculul funcției* $\Psi_1(\alpha)$. În virtutea (24) avem

$$\Psi_1(\alpha) = \frac{f(\theta_1, \theta_1')}{y\left(1 + \frac{\Delta Y_1}{y}\right)}\cos(x_1 + \alpha) =$$

$$= \frac{f(\theta_1, \theta_1')}{y}\left(1 - \frac{\Delta Y_1}{y}\right)(\cos\alpha - x_1\sin\alpha) + 0(\lambda^2)$$

sau, utilizînd relațiile (14), (26), (27) și (28),

$$\Psi_1(\alpha) = \frac{1}{y}\left[F\cos\alpha + p_0\cos\alpha\,(\Delta Y_1\cos\alpha - y x_1\sin\alpha) - \right.$$

$$\left. - \omega q_0\cos\alpha\,(\Delta Y_1\sin\alpha + y x_1\cos\alpha) - F\frac{\Delta Y_1}{y}(\cos\alpha - F x_1\sin\alpha\right] + 0(\lambda^2),$$

şi, ţinînd seama de (33),

$$\Psi_1(\alpha)=\frac{1}{y}\left[F\cos\alpha - F x_1 \sin\alpha - F\frac{\Delta Y_1}{y}\cos\alpha + \frac{\Delta Y_1}{y}\frac{dF}{d\alpha}\sin\alpha + \right.$$

$$\left. + p_0\,\Delta Y_1 + x_1\frac{dF}{d\alpha}\cos\alpha\right] + 0(\lambda^2).$$

Observînd că

$$\frac{\Delta Y_1}{y}\frac{dF}{d\alpha}\sin\alpha = \frac{d}{d\alpha}\left[F\frac{\Delta Y_1}{y}\sin\alpha\right] - F\frac{\Delta Y_1}{y}\cos\alpha + \frac{\lambda F^2\sin^2\alpha}{y},$$

$$x_1\frac{dF}{d\alpha}\cos\alpha = \frac{d}{d\alpha}(F x_1\cos\alpha) + F x_1\sin\alpha + \frac{\lambda}{y}F^2\cos^2\alpha,$$

avem, în definitiv,

$$\Psi_1(\alpha) = \frac{1}{y}\left[F\cos\alpha - 2F\frac{\Delta Y_1}{y}\cos\alpha + \lambda\frac{F^2}{y} + p_0\,\Delta Y_1\right] + \tag{35}$$

$$+\frac{1}{y}\frac{d}{d\alpha}\left[F\frac{\Delta Y_1}{y}\sin\alpha + x_1\cos\alpha\right] + 0(\lambda^2).$$

13. *Perturbaţie în amplitudine.* Introducînd $\Phi_1(\alpha)$, definit prin (34), în prima dintre ecuaţiile (21) şi ţinînd seama de faptul că, în virtutea lui (13), $\Delta Y_1 = -\lambda\int_0^\alpha F\sin\alpha'\,d\alpha'$, rezultă pentru *perturbaţia instantanee a amplitudinii*

$$\Delta Y_2 = \Delta Y_1 + \lambda F(\alpha)\left[\frac{\Delta Y_1}{y}\cos\alpha - x_1\sin\alpha\right] + \tag{36}$$

$$+\lambda\int_0^\alpha\frac{\Delta Y_1(\alpha')}{y}(F\sin\alpha' + y\,\omega\,q_0)\,d\alpha' + 0(\lambda^3)\quad(0<\alpha'<\alpha).$$

Integrînd $\Phi_1(\alpha)$ între limitele 0 şi 2π, se obţine îndată

$$I_2' = \int_0^{2\pi} F\sin\alpha\,d\alpha - \int_0^{2\pi}\frac{\Delta Y_1}{y}(F\sin\alpha + y\,\omega\,q_0)\,d\alpha - F(2\pi)\,\frac{\Delta\overline{Y}_1}{y} + 0(\lambda^2).$$

Introducînd această expresie în prima dintre ecuaţiile (22), în care I_2'' este nul, se obţine, în fine, *perturbaţia de amplitudine la finele unei perioade complete*, dată sub forma

$$\Delta Y_2 = \overline{Y}_2 - y = \Delta\overline{Y}_1\left(1 + \frac{\lambda}{y}F(2\pi)\right) + \lambda\int_0^{2\pi}\frac{\Delta Y_1(\alpha)}{y}(F\sin\alpha + \tag{37}$$

$$+\omega\,y\,q_0)\,d\alpha + 0(\lambda^3).$$

În expresiile (36) şi (37), $\Delta Y_1(\alpha)$ este dat prin prima formulă (13).

14. *Avansul de fază și perturbația de perioadă.* A doua ecuație (21) dă, după ce se înlocuiește într-însa $\Psi_1(\alpha)$ prin (35) și x_1, dat prin cea de-a doua formulă din (13),

$$x_2 = x_1 - \frac{\lambda^2}{y^2}\int_0^\alpha F^2\,\mathrm{d}\,\alpha' - \frac{\lambda}{y}F(\alpha)\left[\frac{\Delta Y_1}{y}\sin\alpha + x_1\cos\alpha\right] - \\ - \frac{\lambda}{y}\int_0^\alpha \frac{\Delta Y_1(\alpha')}{y}(p_0 y - 2F\cos\alpha')\,\mathrm{d}\,\alpha' + 0(\lambda^3). \tag{38}$$

Avem apoi, integrînd $\Psi_1(\alpha)$ între 0 și 2π,

$$J_2' = \frac{1}{y}\int_0^{2\pi} F\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha + F(2\pi)\frac{\overline{x}_1}{y} + \frac{\lambda}{y^2}\int_0^{2\pi} F^2\,\mathrm{d}\alpha + \\ + \frac{1}{y}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta Y_1(\alpha)}{y}(p_0 y - 2F\cos\alpha)\,\mathrm{d}\alpha,$$

de unde, ducînd această expresie în a doua din ecuațiile (20) și ținînd seama de (30), se obține

$$\overline{x}_2 = \overline{x}_1 - \frac{\lambda}{y}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta Y_1(\alpha)}{y}(p_0 y - 2F\cos\alpha)\,\mathrm{d}\alpha - \frac{\lambda^2}{y^2}\int_0^{2\pi} F^2\,\mathrm{d}\alpha + 0(\lambda^3). \tag{39}$$

Avînd în vedere (11), *perturbația relativă a perioadei* este dată în aproximația a doua prin

$$\frac{\Delta T_2}{T_0} = -\frac{\overline{x}_1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\lambda}{y}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta Y_1(\alpha)}{y}(p_0 y - 2F\cos\alpha)\,\mathrm{d}\alpha + \right. \\ \left. + \frac{\lambda^2}{y^2}\int_0^{2\pi} F^2\,\mathrm{d}\alpha\right] + 0(\lambda^3). \tag{40}$$

În aceste expresii, $\Delta Y_1(\alpha)$ și $x_1(\alpha)$ sînt date prin (13), iar $\overline{x}_1$ prin (16).

A doua aproximație a *legii de mișcare* este, pe baza relațiilor (10),

$$\theta_2 = Y_2\cos\varphi_2,\quad \theta_2' = -\omega Y_2\sin\varphi_2,\quad \varphi_2 = \alpha + x_2, \tag{41}$$

în care x_2 este dat prin (38) și $Y_2 = y + \Delta Y_2$, ΔY_2 fiind definit prin (36).

Observații. Rezultatele din numerele 12 și 13 și-au găsit numeroase aplicații. Ne vom mărgini aici să menționăm, trimițînd cititorul la [1], calculul amplitudinii, al perioadei și al legii de variație a amplitudinilor succesive pentru un oscilator de relaxare, calculul perioadei unui oscilator supus la acțiunea unei funcții perturbatoare proporțională cu o putere întreagă a elongației sau cu o putere impară a vitezei ș.a. [54], [55].

Oricare ar fi funcția perturbatoare, cu o *singură condiție ca ea să fie continuă*, formulele precedente dau imediat perturbațiile de amplitudine și de perioadă, exprimate sub formă de integrale simple și duble. Această metodă este cu mult mai preferabilă decît metodele clasice a aproximațiilor succesive și a perturbațiilor, care conduc la calcule prolixe și care trebuie reluate pentru fiecare caz particular luat în parte.

§ IV. A TREIA APROXIMAŢIE

15. În cazul luării în consideraţie a celei de-a treia aproximaţii se înlocuiesc în (4) valorile lui θ, θ', φ, Y, respectiv prin θ_2, θ_2', φ_2, Y_2 definite prin (41). Eroarea astfel comisă este de ordinul lui λ^4 [(36].

Dacă se ia drept variabilă independentă faza α şi dacă se ţine seama de cea de-a treia formulă din (10), valorile perturbaţiei de amplitudine şi de avans de fază la finele unei perioade complete se obţin prin integrarea între limitele 0 şi $2\pi - \bar{x}_2$. Ţinînd seama că

$$\int_0^{2\pi-\bar{x}_3} = \int_0^{2\pi-\bar{x}_2} + \int_{2\pi-\bar{x}_2}^{2\pi-\bar{x}_3}$$

şi avînd în vedere, ca urmare a aplicării formulei integrale de medie, că ultima din integralele scrise mai sus este de ordinul lui $\bar{x}_3 - \bar{x}_2 = 0(\lambda^3)$, precum şi de faptul că această integrală este multiplicată prin factorul λ în formulele (4), rezultă că ea conduce la un termen de acelaşi ordin de mărime ca şi eroarea sistematică care figurează la baza aproximaţiei luate în consideraţie. Avem astfel pentru perturbaţia de amplitudine şi pentru avansul de fază la finele unei perioade complete

$$\Delta\bar{Y}_3 = -\lambda\,(I_3' - I_3'') + 0(\lambda^4),\quad \bar{x}_3 = -\lambda\,(J_3' - J_3'') + 0(\lambda^4), \tag{42}$$

în care s-a notat

$$I_3' = \int_0^{2\pi} \Phi_2(\alpha)\,d\alpha,\quad I_3'' = \int_{2\pi-\bar{x}_2}^{2\pi} \Phi_2(\alpha)\,d\alpha, \tag{43}$$

$$J_3' = \int_0^{2\pi} \Psi_2(\alpha)\,d\alpha,\quad J_3'' = \int_{2\pi-\bar{x}_2}^{2\pi} \Psi_2(\alpha)\,d\alpha, \tag{44}$$

$$\Phi_2(\alpha) = f(\theta_2,\ \theta_2')\sin\varphi_2, \tag{45}\qquad \Psi_2(\alpha) = \frac{f(\theta_2,\ \theta_2')\cos\varphi_2}{Y_2}. \tag{46}$$

16. *Calculul funcţiei* $f(\theta_2,\ \theta_2') = F_2$. Folosind formula lui Taylor, avem nemijlocit

$$F_2 = F(\alpha) + p_0\,(\theta_2 - \theta_0) + q_0\,(\theta_2' - \theta_0') + \frac{r_0}{2}(\theta_2 - \theta_0)^2 +$$

$$+ s_0(\theta_2 - \theta_0)\,(\theta_2 - \theta_0') + \frac{t_0}{2}(\theta_2' - \theta_0')^2,$$

în care s-au folosit notaţiile

$$p_0 = \frac{\partial f}{\partial \theta_0}, q_0 = \frac{\partial f}{\partial \theta_0'}, r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_0^2}, s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_0\,\partial \theta_0'}, t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_0'^2}.$$

Dezvoltînd

$$\theta_2 - \theta_0 = Y_2\cos\varphi_2 - y\cos\alpha \text{ şi } \theta_2' - \theta_1' = -\omega\,(Y_2\sin\varphi_2 - y\sin\alpha)$$

după puterile crescătoare ale cantităților infinit mici, avem succesiv

$$\theta_2 - \theta_0 = \Delta Y_2 \cos\alpha - y\, x_2 \sin\alpha - x_1 \Delta Y_1 \sin\alpha - \frac{x_1^2}{2} y \cos\alpha + 0(\lambda^3),$$

$$\theta_2' - \theta_0' = -\omega\left[\Delta Y_2 \sin\alpha + y\, x_2 \cos\alpha + x_1 \Delta Y_1 \cos\alpha - \frac{x_1^2}{2} y \sin\alpha\right] + 0(\lambda^3),$$

$$(\theta_2 - \theta_0)^2 = \Delta Y_1^2 \cos^2\alpha + y^2 x_1^2 \sin^2\alpha - 2\, y\, x_1 \Delta Y_1 \sin\alpha\cos\alpha + 0(\lambda^3), \quad (47)$$

$$(\theta_2 - \theta_0)(\theta_2' - \theta_0') = -\omega\,[\Delta Y_1^2 \sin\alpha\cos\alpha - y^2 x_1^2 \sin\alpha\cos\alpha + y\, x_1 \Delta Y_1 (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)] + 0(\lambda^3),$$

$$(\theta_2' - \theta_0')^2 = \omega^2\,[\Delta Y_1^2 \sin^2\alpha + y^2 x_1^2 \cos\alpha + 2\, y\, x_1 \Delta Y_1 \sin\alpha\cos\alpha] + 0(\lambda^3).$$

Nu ne rămîne acum decît să introducem aceste expresii în expresia precedentă a funcției F_2.

17. *Calculul funcției* $\Phi_2(\alpha)$. Se obține $\Phi_2(\alpha)$ înmulțind F_2 prin $\sin\varphi_2 = \sin\alpha + x_2\cos\alpha - \frac{1}{2}x_1^2\sin\alpha + 0(\lambda^3)$. Simplificări sensibile intervin atunci cînd se folosește expresia lui $\frac{dF}{d\alpha}$ dată prin (33) și aceea a lui $\frac{d^2F}{d\alpha^2}$ dată prin

$$\frac{d^2F}{d\alpha^2} = y\,(-p_0\cos\alpha + \omega q_0 \sin\alpha) + y^2\,(r_0\sin^2\alpha + 2\,\omega s_0 \sin\alpha\cos\alpha + \omega^2 t_0 \cos^2\alpha).$$

Este avantajos apoi, înainte de a se păși la integrare, să se transforme unii termeni pentru a se pune în evidență maximul de derivate. Se obține astfel, după executarea tuturor calculelor,

$$\Phi_2(\alpha) = F\sin\alpha - \frac{\Delta Y_2}{y}(F\sin\alpha + y\,\omega q_0) - \lambda\frac{x_1}{y}F\sin\alpha\,(F\sin\alpha + \omega y q_0) + \lambda\frac{\Delta Y_1}{y}p_0 F\sin\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta Y_1}{y}\right)^2\left[y^2(r_0 + \omega^2 t_0)\sin\alpha + \omega y q_0 + \frac{dF}{d\alpha}\cos\alpha + F\sin\alpha\right] + \frac{d}{d\alpha}\left\{F\left(-\frac{\Delta Y_2}{y}\cos\alpha + x_2\sin\alpha\right) + \frac{1}{2}x_1^2\frac{d}{d\alpha}(F\sin\alpha) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta Y_1}{y}\right)^2\left(F\cos\alpha - \frac{dF}{d\alpha}\sin\alpha\right) - x_1\frac{\Delta Y_1}{y}\left(\frac{dF}{d\alpha}\cos\alpha + \omega y q_0\right)\right\}. \quad (48)$$

MUSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR

Ajunge să se integreze această expresie între 0 și 2π pentru a se obține I_3'. În ceea ce privește I_3'', se găsește

$$I_3'' = \frac{1}{2} F(2\pi)\,\bar{x}_1^2 + 0(\lambda^3).$$

18. *Calculul funcției* $\Psi_2(\alpha)$. Se obține $\Psi_2(\alpha)$ înmulțind succesiv F_2 (cf. n° 16) prin

$$\cos\varphi_2 = \cos\alpha - x_2 \sin\alpha - \frac{1}{2} x_1^2 \cos\alpha + 0(\lambda^3)$$

și prin

$$\frac{1}{Y_2} = \frac{1}{y + \Delta Y_2} = \frac{1}{y}\left(1 - \frac{\Delta Y_2}{y} + \frac{\Delta Y_2}{y^2}\right) + 0(\lambda^3).$$

Nu vom reproduce aici detalii algoritmice și ansamblul transformărilor care sînt apte de a pune în evidență, așa cum s-a făcut anterior, maximum de derivate. Ne vom mulțumi prin a reproduce rezultatul la care se ajunge :

$$\begin{aligned}\Psi_2(\alpha)\,y = {} & F\cos\alpha + \frac{\Delta Y_1}{y}(p_0 y - 2F\cos\alpha) + \frac{\lambda}{y}F^2 + \frac{\lambda^2}{y^2}F^3\cos\alpha + \\ & + \lambda\frac{\Delta Y_1}{y}\left(3F p_0\cos\alpha - 4\frac{F^2}{y}\right) + \frac{\lambda}{y}(p_0 y - \\ & - 2F\cos\alpha)\int_0^\alpha \frac{\Delta Y_1(\alpha')}{y}\,\omega\, y\, q_0(\alpha')\,d\alpha' + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta Y_1}{y}\right)^2 [y^2(r_0\cos\alpha + \\ & + \omega s_0\sin\alpha + 2\omega^2 t_0\cos\alpha) - 4(p_0 y - 2F\cos\alpha)] + \qquad (49) \\ & + \frac{d}{d\alpha}\left\{F\left(x_2\cos\alpha + \frac{\Delta Y_2}{y}\sin\alpha\right) + \frac{\lambda}{y}F^2 x_1 + \frac{1}{2}x_1^2\frac{d}{d\alpha}(F\cos\alpha) - \right. \\ & - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta Y_1}{y}\right)^2\left[\frac{d}{d\alpha}(F\cos\alpha) + 5F\sin\alpha - \omega\, y\, q_0\right] + \\ & \left. + x_1\frac{\Delta Y_1}{y}\left[p_0 y - 2F\cos\alpha + \frac{d}{d\alpha}(F\sin\alpha)\right]\right\} + 0(\lambda^3).\end{aligned}$$

Se obține J_3' integrînd această din urmă expresie între limitele 0 și 2π. În ceea ce privește J_3'', avem, după executarea tuturor calculelor,

$$y\,J_3'' = \bar{x}_2 F(2\pi) + \frac{1}{2}\bar{x}_1^2 F'(2\pi) + \bar{x}_1\frac{\Delta\bar{Y}_1}{y}[y\,p_0(2\pi) - F(2\pi)] + 0(\lambda^3).$$

19. *A treia aproximație a perioadei și a perturbației în amplitudine.* Introducînd expresiile mărimilor I_3', I_3'', J_3', J_3'' în formulele (42), se ajunge, în definitiv, la următoarele rezultate:

1° Pentru *perturbația de amplitudine*

$$\Delta\overline{Y}_3 = \Delta\overline{Y}_2\left[1+\frac{\lambda F(2\pi)}{y}\right]-\lambda\frac{\Delta\overline{Y}_1}{y}\left[F(2\pi)\left(1+\frac{\Delta\overline{Y}_1}{y}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}y\ p_0(2\pi)\frac{\Delta\overline{Y}_1}{y}\right]-\frac{1}{2}\lambda\int_0^{2\pi}\left(\frac{\Delta Y_1}{y}\right)^2[3F\sin\alpha+2\omega y q_0+$$
$$+y^2(\omega^2 t_0\sin\alpha-\omega s_0\cos\alpha)]\,d\alpha+\frac{\lambda^2}{y}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta Y_1}{y}F\omega y q_0\cos\alpha\,d\alpha+ \tag{50}$$
$$+\frac{\lambda^2}{y}\int_0^{2\pi}(F\sin\alpha+\omega y q_0)\int_0^{\alpha}\frac{\Delta Y_1(\alpha')}{y}\,\omega y q_0(\alpha')\,d\alpha'\,d\alpha+0(\lambda^4).$$

2° Pentru *avansul de fază* la finele unei perioade

$$\overline{x}_3=\overline{x}_2+\frac{\lambda}{y}\left(\frac{\Delta\overline{Y}_1}{y}\right)^2F'(2\pi)-\frac{\lambda^3}{y^3}\int_0^{2\pi}F^3\cos\alpha\,d\alpha-$$
$$-\frac{\lambda^2}{y^2}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta Y_1}{y}(3p_0 y\cos\alpha-4F)\,F d\alpha-\frac{1}{2}\frac{\lambda}{y}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\Delta Y_1}{y}\right)^2[y^2(r_0\cos\alpha+ \tag{51}$$
$$+\omega s_0\sin\alpha+2\omega^2 t_0\cos\alpha)-4(p_0 y-2F\cos\alpha)]\,d\alpha-$$
$$-\frac{\lambda^2}{y^2}\int_0^{2\pi}(p_0 y-2F\cos\alpha)\int_0^{\alpha}\frac{\Delta Y_1(\alpha')}{y}\,\omega y q_0(\alpha')\,d\alpha'\,d\alpha+0(\lambda^4).$$

În aceste expresii se reamintește că s-a pus

$$x_1(\alpha)=-\frac{\lambda}{y}\int_0^{\alpha}F(\alpha')\cos\alpha'\,d\alpha', \tag{13_2}$$

$$\frac{\Delta Y_1(\alpha)}{y}=-\frac{\lambda}{y}\int_0^{\alpha}F(\alpha')\sin\alpha'\,d\alpha', \tag{13_1}$$

$$\overline{x}_1=x_1(2\pi),\ \overline{x}_2=\overline{x}_1-\frac{\lambda}{y}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta Y_1}{y}(p_0 y-2F\cos\alpha)\,d\alpha-$$
$$-\frac{\lambda^2}{y^2}\int_0^{2\pi}F^2(\alpha)\,d\alpha, \tag{39}$$

$$\Delta\overline{Y}_1=\Delta Y_1(2\pi),\ \frac{\Delta\overline{Y}_2}{y}=\frac{\Delta\overline{Y}_1}{y}\left[1+\frac{\lambda}{y}F(2\pi)\right]+\frac{\lambda}{y}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta Y_1}{y}(F\sin\alpha+$$
$$+\omega y q_0)\,d\alpha, \tag{37}$$

$$F(\alpha)=f(\theta_0,\ \theta_0'),\ \theta_0=y\cos\alpha,\ \theta_0'=-\omega y\sin\alpha,\ \alpha=\omega t. \qquad (14),\ (2)$$

Ţinînd seama de (11), perioada este dată în aproximaţia a treia prin

$$T_3 = T_0\left(1 - \frac{\overline{x}_3}{2\pi}\right), \tag{52}$$

în care x_3 este definit prin (51).

Simplificări evidente se introduc în formulele (50) şi (51) dacă se ţine seama de paritatea eventuală a funcţiei $f(\theta, \theta')$ în raport cu θ şi θ'.

§ V. APLICAŢII ALE CELEI DE-A TREIA APROXIMAŢII

20. Vom studia acum un număr de aplicaţii ale formulelor generale (50) şi (51). Ne vom mulţumi să indicăm în fiecare caz numai rezultatele la care se ajunge relative la perturbaţii în amplitudine şi în perioadă. Vom indica apoi consecinţele practice care rezultă pentru diferite tipuri de oscilatori luaţi în consideraţie.

1° *Frecare uscată.* Fie, aşa cum s-a făcut la nr. 7, aplicaţia 1, $f(\theta, \theta') = -2\frac{a\theta'}{\omega}$, funcţia perturbatoare corespunzătoare.

Amplitudinea la finele unei perioade complete este dată prin

$$\overline{Y}_3 = y + \Delta\overline{Y}_3 = y\left[1 - 2\pi\lambda a + 2\pi^2\lambda^2 a^2 - 4\pi a^3\lambda^3\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{1}{4}\right)\right] + 0(\lambda^4).$$

Se regăseşte ansamblul a patru primii termeni din dezvoltarea clasică a lui $Y = ye^{-\delta}$, în care prin δ s-a notat, ca de obicei, decrement logaritmic, dat prin

$$\delta = \frac{2\pi\lambda a}{\sqrt{1 - \lambda^2 a^2}}. \tag{53}$$

Perioada este definită ţinînd seama de (51), prin $T = T_0\left(1 - \frac{\overline{x}_3}{2\pi}\right)$ sau, după executarea tuturor calculelor, prin $T = T_0\left(1 + \frac{\lambda^2 a^2}{2} + 0(\lambda^4)\right)$.

Expresia sa exactă este

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \lambda^2 a^2}} = T_0(1 - \lambda^2 a^2)^{-\frac{1}{2}} = T_0\left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2 a^2\right) + 0(\lambda^4).$$

Legea de mişcare este dată în a *doua aproximaţie* prin prima din formulele (47), adică prin

$$\theta_2 = y\left(1 + \frac{\Delta Y_2}{y}\right)\cos\alpha - y x_2 \sin\alpha - y x_1 \frac{\Delta Y_1}{y}\sin\alpha -$$

$$-\frac{1}{2} y x_1^2 \cos\alpha + 0(\lambda^3),$$

sau, înlocuind x_1 şi ΔY_1 prin expresiile lor (13), ΔY_2 prin (36) şi x_2 prin (38),

$$\theta_2 = y\cos\alpha + \Delta Y_1\cos\alpha - y\,x_1\sin\alpha + \lambda F\,\frac{\Delta Y_1}{y} - y\,x_1\frac{\Delta Y_1}{y}\sin\alpha -$$
$$-\frac{1}{2}y\cos\alpha\left[x_1^2+\left(\frac{\Delta Y_1}{y}\right)^2\right] + \lambda^2\frac{\sin\alpha}{y}\int_0^\alpha F^2(\alpha')\,d\alpha' + \tag{54}$$
$$+\lambda\cos\alpha\int_0^\alpha\frac{\Delta Y_1}{y}\,\omega\,y\,q_0\,d\alpha' + \lambda\sin\alpha\int_0^\alpha\frac{\Delta Y_1}{y}(p_0\,y - 2F\cos\alpha')\,d\alpha' +$$
$$+ 0(\lambda^3).$$

Aplicînd acest rezultat la cuplul de frecare vîscoasă, se obţine

$$\theta_2 = y(1-\lambda a\alpha)\cos\alpha + \lambda\alpha y\sin\alpha + \frac{1}{2}\lambda^2 a^2 y^2\alpha(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha) + 0(\lambda^3),$$

cu alte cuvinte primii trei termeni din dezvoltarea după puterile lui λ a soluţiei exacte

$$\theta = y\,e^{-\lambda a\omega t}(\cos\omega_1 t + \lambda a\sin\omega_1 t),$$

în care s-a pus $\omega_1 = \omega\sqrt{1-\lambda^2 a^2}$.

21. *Funcţia perturbatoare proporţională cu o putere întreagă a elongaţiei.* Fie $f(\theta, \theta') = \theta^n$, în care n este un număr întreg. Formula (51) dă pentru *perioadă*:

a) în cazul $n = 2p$:

$$T = T_0\left[1 + \lambda^2 H y^{4p-2} - \lambda^3 H\frac{4p-2}{2p+1}y^{6p-3}\right] + 0(\lambda^4),$$

în care s-a pus

$$H = 2p\,\frac{4p+1}{(2p+1)^2}\,\frac{C_{4p}^{2p}}{2^{4p}},$$

C_k^h fiind numărul combinărilor din k obiecte luate cîte h;

b) în cazul $n = 2p-1$:

$$T = T_0\left\{1 + \lambda K_2 y^{2p-2} - \lambda^2\frac{y^{4p-4}}{p}[(p-1)K_2 - (2p-1)K_4] + \right.$$
$$+\lambda^3\frac{y^{6p-6}}{2p^2}[(p-1)(p-2)K_2 - 2(2p-1)(2p-2)K_4 +$$
$$\left.+(3p-1)(3p-2)K_6]\right\} + 0(\lambda^4),$$

în care s-a notat $K_{2n} = \dfrac{C_{2np}^{np}}{2^{2np}}$.

Se regăsesc astfel rezultatele obţinute printr-o metodă cu totul diferită într-una din lucrările precedente [27]. Aceste rezultate se aplică imediat la un mare număr de probleme de mecanică neliniară [28], [56].

Formula (54) permite să se determine *legea de mişcare* în cazul în care funcţia perturbatoare este proporţională cu o putere întreagă a elongaţiei. Se obţine astfel:

a) pentru $n = 2$:

$$\theta_2 = y\cos\alpha + \lambda y^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos\alpha - \frac{1}{6}\cos 2\alpha\right) + \lambda^2 y^3\left(\frac{15}{2}\alpha\sin\alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3} + \frac{29}{144}\cos\alpha + \frac{1}{9}\cos 2\alpha + \frac{1}{48}\cos 3\alpha\right) + 0(\lambda^3);$$

b) pentru $n = 3$:

$$\theta_2 = y\cos\alpha + \frac{\lambda y^3}{8}\left(3\alpha\sin\alpha + \frac{1}{4}\cos\alpha - \frac{1}{4}\cos 3\alpha\right) +$$

$$+ \frac{\lambda^2 y^5}{256}\left(-18\alpha^2\cos\alpha + 24\alpha\sin\alpha - 9\alpha\sin 3\alpha + \frac{23}{4}\cos\alpha - 6\cos 3\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}\cos 5\alpha\right) + 0(\lambda^3).$$

Aceste rezultate sînt identice, abstracţie făcînd de notaţii, cu acelea obţinute de Mac-Lachlan în [37].

Este uşor de a studia, plecînd de la expresiile precedente, variaţiile lui θ în funcţie de $\alpha = \omega t$. De exemplu, pentru $n = 2$, se găseşte că θ este o funcţie descrescătoare de α, care se anulează pentru prima dată pentru

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\pi + \frac{2}{3}\lambda y + \lambda^2 y^2\left(\frac{15}{\pi} - \frac{2}{9}\right) + 0(\lambda^3),$$

această cantitate fiind superioară sau inferioară lui $\frac{1}{2}\pi$, după cum λy este superior sau inferior lui $-\frac{24}{135\pi - 8} = -0{,}0577.$

Minimul este atins pentru $\alpha = \alpha_2 = \pi + \frac{1}{2}15\pi\lambda^2 y^2$, ordonata de minim $-y + \frac{2}{3}\lambda y^2\left(1 - \frac{2}{3}\lambda y\right)$ fiind superioară lui $-y$ cînd λy este pozitiv. Funcţia θ se anulează din nou pentru

$$\alpha = \alpha_3 = \frac{3\pi}{2} - \frac{2}{3}\lambda y + \lambda^2 y^2\left(\frac{45\pi}{4} + \frac{2}{9}\right).$$

Această cantitate este inferioară lui $\frac{3}{2}\pi$ cînd avem

$$0 < \lambda y < \frac{24}{405\,\pi + 8} = 0{,}0188.$$

Maximul ei este atins pentru $\alpha = \alpha_4 = 2\,\pi + 15\,\pi\,\lambda^2 y^2$.

Fie C curba reprezentativă a lui $\theta_2(\alpha)$ şi C_0 curba corespunzătoare la $\lambda = 0$. Se demonstrează că, în vecinătatea lui $\alpha = 0$, C se găseşte dedesubtul lui C_0 dacă $-\frac{18}{255} = -0{,}0706 < \lambda y < 0$ şi este deasupra lui C_0 dacă λy este exterior intervalului precedent. În fine, curba C este simetrică în raport cu dreapta

$$\alpha = \pi + \frac{15}{2}\pi\lambda^2 y^2.$$

Aceste rezultate date, abstracţie făcînd de termeni de ordinul lui $0(\lambda^3)$, permit construcţia curbei C, care a fost trasată foarte schematic pentru diferite cazuri posibile în figurile 1 şi 2. Aceste rezultate au fost verificate, cu ajutorul unui calculator analogic, de către Marcel Joannis, asistent principal la Facultatea de ştiinţe a Universităţii din Besançon.

22. *Oscilator supus la acţiunea unui cuplu de frecare vîscoasă şi a unui cuplu perturbator proporţional cu cubul elongaţiei.* Fie $\omega - 2\lambda A\omega\theta'$ cuplul de frecare vîscoasă şi $+\lambda Ac\,\omega^2\theta^3$ partea neliniară a cuplului de rapel, în care prin A s-a notat ca şi la $n°$ 7 coeficientul de inerţie. Funcţia perturbatoare corespunzătoare este

$$f(\theta, \theta') = -2a\frac{\theta'}{\omega} + c\theta^3.$$

Introducînd-o în formulele (50) şi (51), se obţine *perioada*

$$T = T_0\left\{1 + \frac{3}{8}\pi\lambda c y^2 - \frac{1}{2}\lambda^2\left(-a^2 + \frac{3}{2}\pi a c y^2 - \frac{57}{128}c^2y^4\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\lambda^3 c y^2\left[a^2\left(\frac{2}{3}\pi^2 - \frac{21.17}{64}\right) - \frac{45}{16}acy^2 + \frac{315}{1024}c^2y^4\right]\right\} + 0(\lambda^4).$$

Pentru $a = 0$ şi $c = 0$ se regăsesc expresiile clasice ale perioadei pentru un oscilator supus la un cuplu perturbator de forma θ^3 (cf. nr. 21) sau la o frecare vîscoasă (cf. nr. 20, în care s-a înlocuit λ prin λa).

Amplitudinea este dată în a treia aproximaţie prin

$$\overline{Y}_3 = y\left\{1 - 2\pi\lambda a + \pi\lambda^2 a\left(2\pi a - \frac{11\,c}{8}y^2\right) + \pi\lambda^3 a\left[-a^2\left(1 + \frac{4}{3}\pi^2\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{11}{2}acy^2 - \frac{163}{128}c^2y^4\right]\right\} + 0(\lambda^4). \tag{55}$$

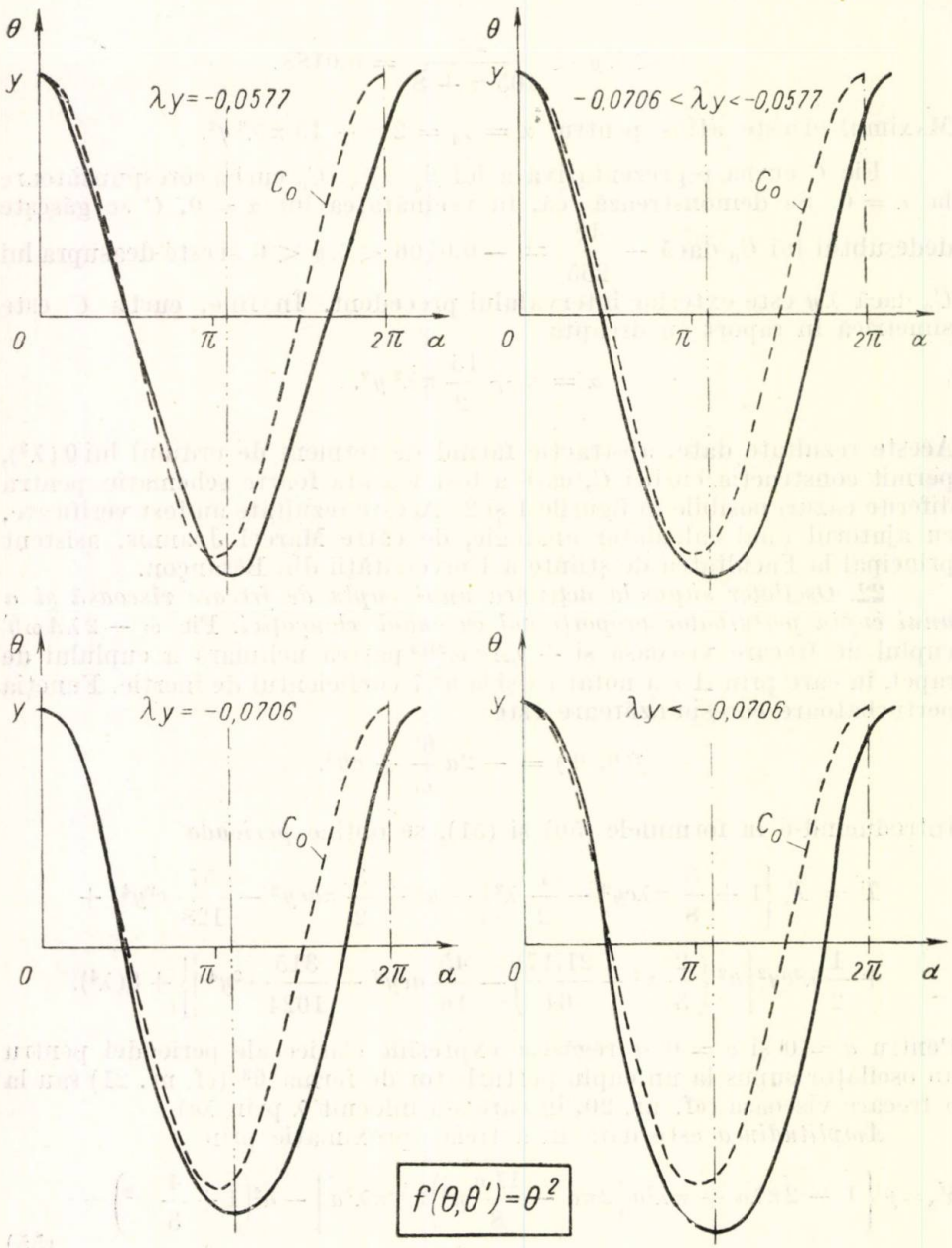

θ
y
λy = -0,0577
C0
0
π
2π
α
θ
y
-0,0706 < λy < -0,0577
C0
0
π
2π
α
θ
y
λy = -0,0706
C0
0
π
2π
α
θ
y
λy < -0,0706
C0
0
π
2π
α
f(θ,θ') = θ²

Fig. 1

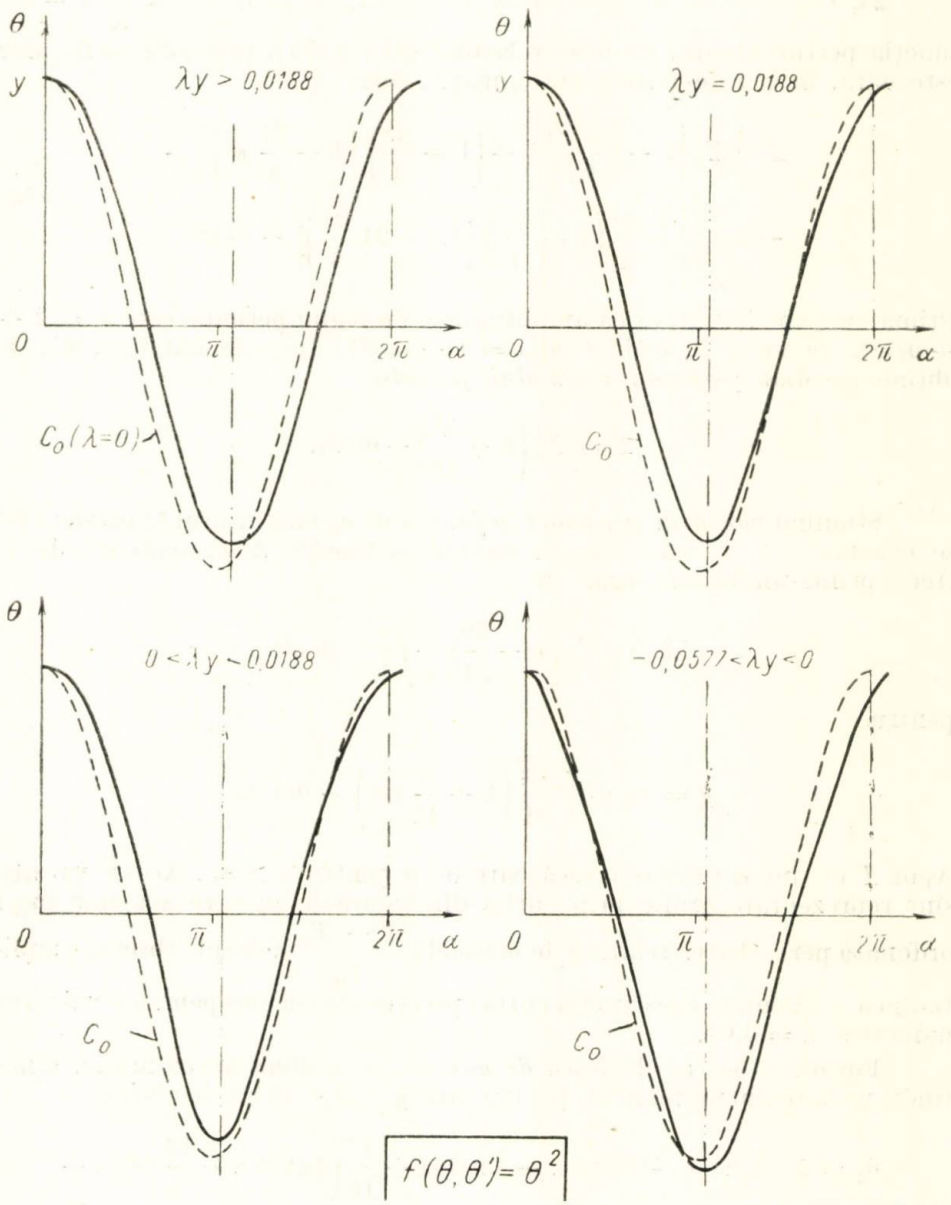

θ
y
λy > 0,0188
0
π
2π
α
C0 (λ=0)
θ
y
λy = 0,0188
0
π
2π
α
C0
θ
0 < λy < 0,0188
0
π
2π
α
C0
θ
−0,0577 < λy < 0
0
π
2π
α
C0
f(θ, θ') = θ²

Fig. 2

Vom reveni asupra ultimei expresii, examinînd ulterior influenţa termenilor neliniari din cuplul de rapel asupra legii de amortizare.

23. *Oscilator de relaxare.* Fie, ca la nr. 7, $f(\theta, \theta') = \frac{\theta'}{\omega}(1 - \theta^2)$ funcţia perturbatoare. Pe baza relaţiilor (11) şi (51), perioada oscilaţiilor este dată, în cea de-a treia aproximaţie, prin

$$T = T_0\left\{1 + \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2\left[1 + \left(1 - \frac{y^2}{4}\right)\left(1 - \frac{21}{4}y^2\right)\right] - \right.$$
$$\left. - 2\pi\left(\frac{\lambda}{4}\right)^3 \frac{y^2}{4}\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)\left(11 - 21\frac{y^2}{4}\right)\right\} + 0(\lambda^4). \tag{56}$$

Prima aproximaţie arată că amplitudinea de regim periodic este $y_e = 2 + 0(\lambda^2)$, de unde se deduce $y_2^2/4 = 1 + 0(\lambda^2)$. Introducînd în (56), se obţine imediat *perioada regimului periodic*

$$T = T_0\left(1 + \frac{\lambda^2}{16}\right) + 0(\lambda^4).$$

Studiind *variaţiile perioadei în funcţie de* y, cu ajutorul expresiei (56) se constată că T, care este la început o funcţie descrescătoare de y, trece printr-un minim egal cu

$$T_m = T_0\left[1 - \frac{79}{21}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2\right] + 0(\lambda^4)$$

pentru

$$y = y_m = \sqrt{\frac{44}{21}}\left(1 + \frac{5}{42}\lambda\pi\right) + 0(\lambda^2).$$

Apoi T devine o funcţie crescătoare de y pentru $y > y_m$. Aceste variaţii sînt reprezentate grafic prin curba din figura 3, în care s-a luat drept ordonată perturbarea relativă de perioadă $\frac{T - T_0}{T_0}$ şi drept abscisă amplitudinea y. Pentru construcţia curbei precedente s-a ales pentru λ valoarea numerică $\lambda = 0{,}04$.

Formula (54) ne dă *legea de mişcare* în a doua aproximaţie. Limitîndu-ne la regim permanent, pentru care $y = 2 + 0(\lambda^2)$, se obţine

$$\theta_2 = 2\cos\alpha + \frac{\lambda}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha) + \frac{\lambda^2}{16}\left(2\alpha\sin\alpha - \frac{13}{6}\cos\alpha + \right.$$
$$\left. + 3\cos 3\alpha - \frac{5}{6}\cos 5\alpha\right) + 0(\lambda^3).$$

Această din urmă expresie a fost obținută de diferiți autori folosind fie metoda aproximațiilor succesive, fie aceea a perturbațiilor. Ea permite construcția curbei ce reprezintă θ în funcție de α.

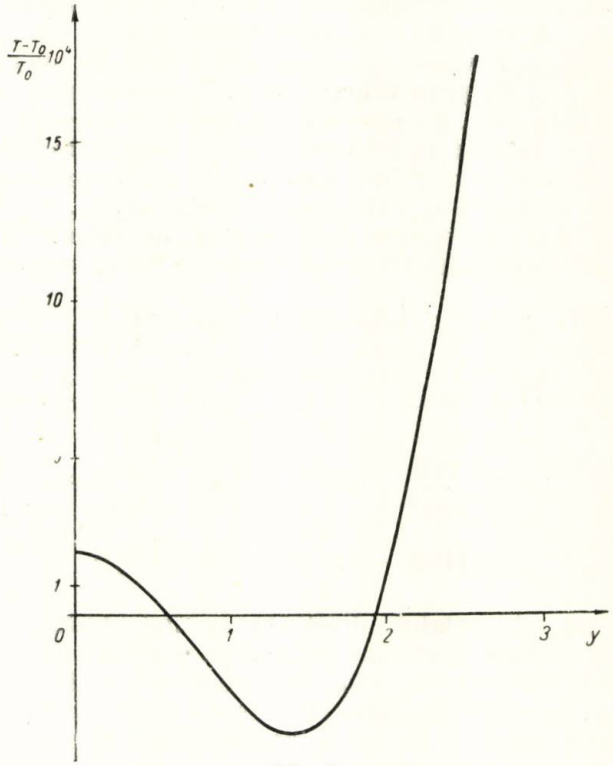


Fig. 3

24. *Amplitudinea oscilatorului de relaxare.* Introducînd $F(\alpha) = y \sin\alpha$ $(y^2 \cos^2\alpha - 1)$ în (50), se obține pentru *amplitudine*

$$\overline{Y}_3 = y\left\{1 + \pi\lambda\left(1 - \frac{y^2}{4}\right) + \frac{\pi^2\lambda^2}{2}\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)\left(1 - \frac{3y^2}{4}\right) + \right.$$
$$+ \frac{\pi}{6}\lambda^3\left[\pi^2\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)^2\left(1 - \frac{7y^2}{4}\right) + \frac{1}{16}\left[1 + 11\left(1 - \frac{y^2}{4}\right) - \right.\right. \qquad (57)$$
$$\left.\left.\left. - \frac{163}{4}\left(1 - \frac{y^2}{4}\right)^2\right]\right]\right\} + 0(\lambda^4).$$

Pentru cazul unui *regim întreținut* (sau permanent), amplitudinea $\overline{Y}_3$ la finele unei perioade este egală cu amplitudinea inițială y. Din ecuația $\overline{Y}_3 = y$ se deduce

$$y_e = 2 + \frac{\lambda^2}{96} + 0(\lambda^3),$$

pe cînd prima aproximație dă $y_e = 2 + 0(\lambda)$ și a doua $y_e = 2 + 0(\lambda^2)$.

Trebuie să ajungem, prin urmare, la aproximaţia a treia pentru a determina contribuţia adusă de termenul perturbator în valoarea amplitudinii întreţinute.

Presupunem că amplitudinea iniţială y este diferită de amplitudinea întreţinută y_e şi să examinăm *regimul tranzitoriu*.

Fie y_n a treia aproximaţie a amplitudinii la finele unei perioade complete. Formula (57) dă y_1 în funcţie de y. Valoarea lui y_n în funcţie de y_{n-1} este dată prin (57), în care s-a înlocuit y_1 prin y_n şi y prin y_{n-1}. În particular, s-a obţinut astfel y_2 în funcţie de y_1. De unde se deduce, ţinînd seama de (57) şi neglijînd termenii de ordin egal sau superior lui λ^4, y_2 în funcţie de y şi aşa mai departe pentru y_3, y_4, ... În aceste condiţii se obţine *legea de recurenţă* care leagă y_n de amplitudinea iniţială y şi care, ordonată după puterile crescătoare ale lui y, se scrie

$$\begin{aligned} y_n = y\Big[1 + n\pi\lambda + \frac{1}{2}n^2\pi^2\lambda^2 + \frac{1}{2}n\pi^3\lambda^3\Big(\frac{1}{4\pi^2} + \frac{n^2}{3}\Big)\Big] - \\ - \frac{n\pi\lambda}{4}\Big\{1 + 2n\pi\lambda + \frac{\pi^2\lambda^2}{2}\Big[\frac{29}{8\pi^2} + \frac{13n^2 - 4}{3}\Big]\Big\}y^3 + \\ + \frac{n}{32}\Big\{3n + \pi\lambda\Big[\frac{163}{24\pi^2} + 9n^2 - 4\Big]\Big\}y^5 - \frac{n}{384}\pi^3\lambda^3\Big[\frac{163}{16\pi^2} + \\ + n(15n - 8)\Big]y^7 + 0(n^4\pi^4\lambda^4 y^9). \end{aligned} \tag{58}$$

Formula (58) nu este valabilă decît atunci cînd produsul $n\lambda\pi$ este mic faţă de unitate şi dacă y este de ordinul de mărime egal cu unitatea. În particular, chiar dacă $\lambda\pi$ este mic, această formulă dă rezultate iluzorii pentru n destul de mare. În cazul cînd se doreşte a se calcula y_n pentru o valoare relativ mare a lui n, se descompune intervalul $(0, n)$ în p intervale parţiale, astfel ca $\frac{n}{p}\lambda\pi$ să fie mic faţă de unitate. Se parvine în aşa fel din aproape în aproape la o valoare precisă a lui y_n, pe cînd aplicarea nemijlocită a formulei (58) conduce la rezultate eronate.

În figura 4 s-au reprezentat regimurile tranzitorii în cazul particular cînd $\lambda\pi = 0{,}1$, unul corespunzînd la o amplitudine iniţială $y = 3$, iar celălalt la $y = 0{,}1$. Fiecare din curbele din figura 4 este înfăşurătoarea pseudosinusoidelor ce reprezintă oscilaţiile succesive şi tinde asimptotic către valoarea-limită $y_n = 2 + \frac{\lambda^2}{96}$.

Figura 5 dă sub titlu de comparaţie curbele înfăşurătoare care pornesc din $y = 3$ şi corespund la diferite ordine de aproximaţie. Curba A corespunde la prima aproximaţie, formula pentru $y_n = y\Big[1 + n\pi\lambda\Big(1 - \frac{y^2}{4}\Big)\Big] + 0(\lambda^2)$ fiind aplicată în mod brutal pentru n oarecare. Pentru curba B s-a făcut calculul din aproape în aproape, plecînd de la prima

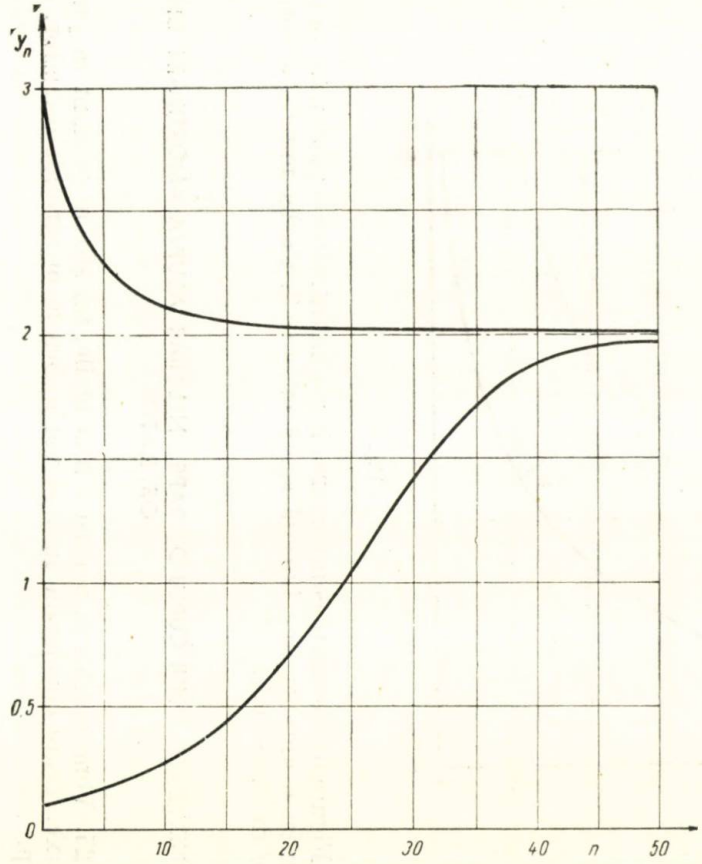


Fig. 4. — Regim tranzitoriu.

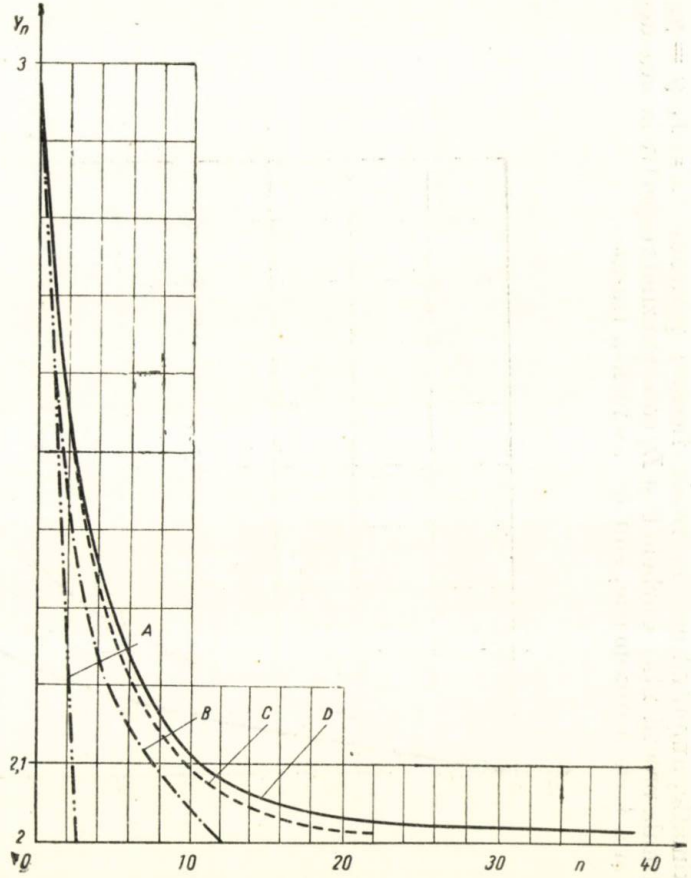


Fig. 5. — Oscilator de relaxare.

aproximaţie, amplitudinea la finele fiecărei perioade ($n = 1$, $y = y_{n-1}$ în formula precedentă). Curbele C şi D, corespunzînd respectiv la cea de-a doua şi a treia aproximaţie, sînt de asemenea trasate.

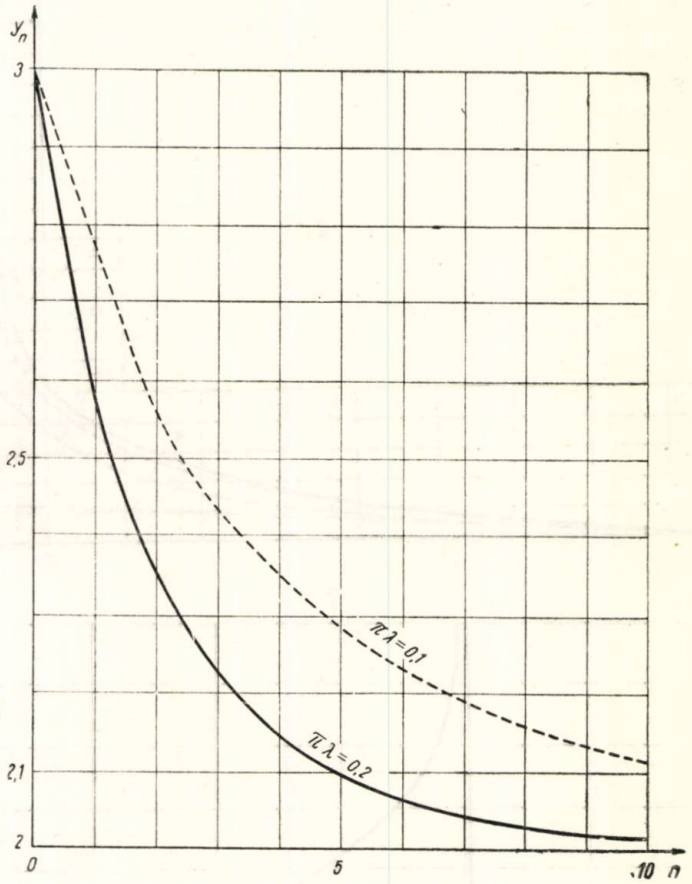


Fig. 6

Figura 6 reprezintă comportarea în regim tranzitoriu pentru $\lambda\pi = 0,2$ şi pentru o amplitudine iniţială egală cu $y = 3$. Curba punctată corespunde de $\lambda\pi = 0,1$.

§ VI. INFLUENŢA UNUI CUPLU DE RAPEL NELINIAR ASUPRA AMORTIZĂRII UNUI OSCILATOR

25. Vom considera, pentru a fixa ideile, un sistem oscilant în jurul unei axe. Toate concluziile însă se vor aplica la oricare alt oscilator, de alt tip.

De regulă, amortizarea unui oscilator se studiază presupunîndu-se implicit că cuplul de rapel este proporțional în mod riguros cu elongația. În realitate, această liniaritate restrictivă este excepțională, întrucît cuplul de rapel face să intervină o parte liniară și termeni neliniari, în general proporționali cu puteri întregi ale elongației. Este ușor de a demonstra că legea de amortizare este afectată de termenii neliniari din cuplul de rapel.

Să punem în ecuația diferențială (1)

$$f(\theta,\ \theta') = F(\theta) + G(\theta'),$$

în care prin $F(\theta)$ și $G(\theta')$ s-au notat respectiv funcțiile perturbatoare corespunzătoare la termenii neliniari din cuplul de rapel și din cuplul de amortizare.

Dacă ne limităm la prima aproximație (cf. nr. 5), funcția $f = F + G$ intervine liniar în expresiile perturbațiilor de perioadă și de amplitudine. Rezultă (cf. nr. 6) că acestea din urmă sînt sume de perturbații parțiale care provin, pe de o parte, din partea neliniară a cuplului de rapel și, pe de altă parte, din cuplul rezistent, atunci cînd se consideră că aceste două acțiuni se prezintă *izolat*.

Pentru aproximații de ordin superior primului ordin, funcția intervine prin pătratul său și prin combinații mult mai complicate (cf. III și IV). Considerînd, pentru a fixa ideile, numai pătratul lui f,

$$f^2 = F^2(\theta) + G^2(\theta') + 2F(\theta)G(\theta'),$$

care intervine sub semnul sumă, se constată că termenul al treilea introduce simultan cuplurile de rapel și de amortizare. Participarea sa în expresiile perturbației de amplitudine sau de perioadă este diferită după cum cuplul de rapel este liniar, în care caz $F(\theta) = 0$, sau neliniar, fapt care corespunde la cazul cînd $F(\theta) \not\equiv 0$. În general, perturbațiile de amplitudine și de perioadă depind simultan de două funcții perturbatoare $F(\theta)$ și $G(\theta')$, care nu mai intervin izolat. În particular, de îndată ce calculele sînt duse dincolo de prima aproximație, *termenii neliniari din cuplul de rapel intervin în legea de amortizare.* Acest lucru apare foarte pregnant luînd în considerație formula (55), în care termenii în acy^2 (într-un anume sens termenii de cuplaj) introduc frecarea uscată și defect de izocronism (termenul în θ^3).

26. *Aplicații.* Vom trece în revistă un număr de probleme în care intervin simultan rezistențe pasive și termeni de rapel neliniari. Ne-am limitat, în fiecare caz, pentru rezistențe pasive la un cuplu de frecare vîscoasă $-2\lambda A a\omega\theta'$, la care corespunde funcția perturbatoare $G(\theta') = -2a\dfrac{\theta'}{\omega}$ și, atunci cînd $F(\theta)=0$, decrementul logaritmic $\delta = \dfrac{2\pi\lambda a}{\sqrt{1-\lambda^2 a^2}}$.

1° *Funcția perturbatoare $F(\theta)$ proporțională cu o putere întreagă a elongației $F(\theta) = b_p\theta^p$.*

Formula (50) ne dă, odată executate toate calculele prealabile, pentru valoarea amplitudinii y_n la finele celei de-a n-a perioade complete şi în a treia aproximaţie :

a) pentru $p = 2q$, $q \geqslant 1$:

$$y_n = y\left(1 - n\delta + \frac{n^2\delta^2}{2!} - \frac{n^3\delta^3}{3!}\right) + \lambda n\delta b_p y^{2q}(2q-1)\left(\frac{n\delta}{2} - \frac{1}{2q+1}\right) -$$
$$- \lambda^2 n\delta b_p^2 \frac{y^{4q-1}}{2q+1}\left[2q-1+\frac{8q^2+2q+1}{(2q+1)^2}\frac{C_{1q}^{2q}}{2^{4q}} + \sum_{r=1}^{\nu}\frac{H_{qr}C_{4q-2r}^{2q-r}}{(2q-r+1)2^{4q-2r}}\right] + 0(\lambda^4), \tag{59}$$

în care s-a notat

$$H_{qr} = \frac{2q(2q-2)\ldots(2q-2r+2)}{(2q+1)(2q-1)\ldots(2q-2r+1)};$$

b) pentru $p = 2q-1$, $q \geqslant 2$:

$$y_n = y\left(1 - n\delta + \frac{n^2\delta^2}{2!} - \frac{n^2\delta^2}{3!}\right) + \lambda n\delta b_p y^{2q-1}\left(n\delta - \frac{1}{q}\right)\left(q - 1 + \frac{C_{2q}^{q}}{2^{2q}}\right) -$$
$$- \lambda^2 n\delta b_p^2 \frac{y^{4q-3}}{2q^2}\left[2q(q-1) + (2q-1)\left(\frac{C_{4q}^{2q}}{2^{2q}}\right)^2 + \frac{1}{2^{4q-1}}\sum_{r=1}^{q}(C_{2q}^{q-r})^2\right] + \theta(\lambda^4). \tag{60}$$

Aceste expresii sînt valabile pentru $n\delta \ll 1$. Coeficientul lui y este format, după cum se vede, din primii patru termeni ai dezvoltării lui $\theta^{-n\delta}$, care corespunde la frecare uscată.

În particular, pentru $p=2$, $(q=1)$, formula (59) dă, punînd $\lambda b_2 = 3\beta$:

$$y_n = y\left(1 - n\delta + \frac{n^2\delta^2}{2!} - \frac{n^3\delta^3}{3!} - n\delta\beta y^2\left(1 - \frac{3}{2}n\delta\right) - \frac{39}{8}n\delta p^2 y^3\right) + 0(\lambda^4). \tag{61}$$

De asemenea, *pentru* $p=3$ $(q=2)$, formula (60) dă, punînd $\lambda b_3 = 16\gamma$:

$$y_n = y\left(1 - n\delta + \frac{n^2\delta^2}{2!} - \frac{n^3\delta^3}{3!} - 11n\delta\gamma y^3(1-2n\delta) - 163n\delta\gamma^2 y^5\right) + 0(\lambda^4). \tag{62}$$

27. *Influenţa termenilor neliniari asupra curbei de amortizare.* Fie C_0' curba de amortizare ce corespunde numai la frecare uscată, obţinută purtînd y_n în ordonată, n în abscisă şi relativă la o amplitudine iniţială y.

Fie C curba de amortizare în prezenţa termenilor neliniari şi relativă la aceeaşi amplitudine iniţială y. Este uşor de arătat că, plecînd de la (59) sau (60), *curba* C *se găseşte dedesubtul curbei* C_0 *cînd coeficientul* b_p *este pozitiv şi deasupra curbei* C_0 *cînd* b_p *este negativ.* Făcînd să intervină *un decrement logaritmic local, aceste rezultate se extind* la rezistenţe pasive oarecare.

Rezultă că *preluarea experimentală a curbei de amortizare nu permite determinarea decrementului sau a coeficienţilor termenilor de rezistenţă decît atunci cînd cuplul de rapel este riguros liniar.*

Cele mai multe din măsurători executate asupra coeficienţilor de amortizare *sînt sistematic falsificate*, datorită prezenţei termenilor neliniari

în expresia cuplului de rapel. În particular, măsurile frecării interne prin metodele de oscilaţie sînt, în cea mai mare parte a cazurilor, eronate.

În cazul experienţelor executate mai de demult asupra dispozitivului

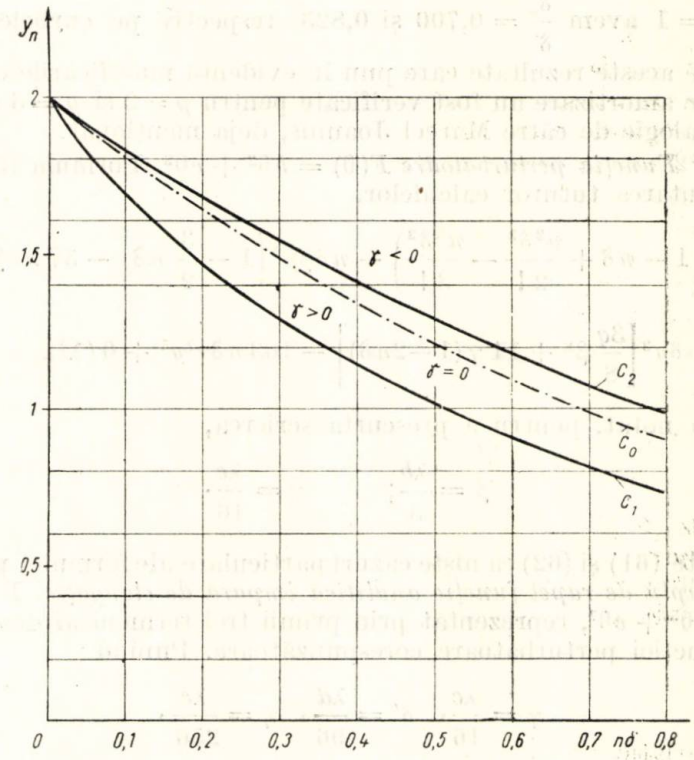


Fig. 7. — Influenţa unui cuplu de rapel neliniar asupra amortizării.

constituit din ceasornic oscilant, în care un ceas este pus pe platoul unui bifilar, s-a constatat că decrementul definit prin $\delta = \frac{1}{n} \log \frac{y}{y_n}$ trece de la valoarea 0,009 pentru amplitudini mari la valoarea 0,004 pentru amplitudini foarte mici. Acest lucru se explică imediat în mod calitativ, fără a mai fi nevoie să cunoaştem caracteristicile oscilatorului utilizat. Pentru un oscilator suspendat de un bifilar, primul termen al dezvoltării părţii neliniare cuplului de rapel este de forma $\lambda A \omega^2 b_3 \theta^3$, în care coeficientul b_3 este pozitiv. Din ceea ce precedă, curba de amortizare C se găseşte dedesubtul curbei C_0 şi curbura sa este mai mică. Decrementul real local δ_n este superior lui δ pentru amplitudini mari şi inferior pentru amplitudini foarte mici ; *el este o funcţie descrescătoare de amplitudinea* y_n.

Pentru a preciza cele stabilite mai sus, în figura 7 s-au construit curbele de amortizare corespunzătoare la $y = 2$, $\gamma = 0{,}01$ în valoare absolută. Curba C_1 corespunde la $\gamma = +\,0{,}01$, curba C_2 la $\gamma = -\,0{,}01$.

Aceste curbe au fost construite folosind (62) şi purtînd produsul $n\delta$ în abscisă. Se observă că pentru $y = 2$ avem pe C_1 $\frac{\delta_n}{\delta} = 1{,}813$ şi pe C_2, pentru $y = 1$ avem $\frac{\delta_n}{\delta} = 0{,}700$ şi $0{,}823$, respectiv pe curbele C_1 şi C_2.

Toate aceste rezultate care pun în evidenţă modificările ce intervin în curba de amortizare au fost verificate pentru $p = 2$ şi $p = 3$ cu un calculator analogic de către Marcel Joannis, deja menţionat.

28. *2° Funcţia perturbatoare* $F(\theta) = b\theta^2 + c\theta^3$. Formula (50) ne dă, după executarea tuturor calculelor,

$$y_n = y\left(1 - n\delta + \frac{n^2\delta^2}{2!} - \frac{n^3\delta^3}{3!}\right) - n\delta\beta y^2\left(1 - \frac{3}{2}n\delta\right) - 37\, n\delta\beta\gamma y^4 +$$

$$- n\delta y^3\left[\frac{3q}{8}\beta^2 + 11\,\gamma(1 - 2n\delta)\right] - 163\, n\delta\gamma^2 y^5 + 0(\lambda^4),$$

în care s-a notat, pentru a prescurta scrierea,

$$\beta = \frac{\lambda b}{3}; \qquad \gamma = \frac{\lambda c}{16}.$$

Se regăseşte (61) şi (62) ca nişte cazuri particulare ale formulei precedente

3° *Cuplu de rapel funcţie analitică impară de elongaţie.* Fie $F(\theta) = c\theta^3 + d\theta^5 + e\theta^7$, reprezentat prin primii trei termeni ai dezvoltării în serie a funcţiei perturbatoare corespunzătoare. Punînd

$$\gamma = \frac{\lambda c}{16}, \quad \delta' = \frac{\lambda d}{96}, \quad \eta = \frac{\lambda e}{256},$$

legea de variaţie a amplitudinilor se scrie

$$y_n = y\left(1 - n\delta + \frac{n^2\delta^2}{2!} - \frac{n^3\delta^3}{3!}\right) + 11\, n\delta(2n\delta - 1)\gamma y^3 +$$

$$+ n\delta\,[-163\gamma^2 + 74\delta'(3n\delta - 1)]y^5 + n\delta\left[-2\cdot 123\,\gamma\delta' + \frac{419}{2}\eta(4n\delta - 1)\right]y^7 -$$

$$- n\delta\,[6.837\,\delta'^2 + 5.917\,\gamma\eta]y^9 - 37.899\, n\delta\delta'\eta y^{11} -$$

$$- \frac{104.739}{2} n\delta\eta^2 y^{13} + 0(\lambda^4).$$

29. *Determinarea experimentală a parametrilor.* Trasarea experimentală a curbei de amortizare permite *să se determine experimental coeficientul de amortizare vîscoasă, ca şi coeficienţii termenilor neliniari din cuplul de rapel.*

Astfel, în cazul, important în practică, în care $F(\theta) = c\theta^3$, decrementul logaritmic δ și coeficientul λc sînt dați respectiv prin

$$\delta = \frac{Z_n}{n} + \frac{Z_n Z_N (Z_n - Z_N)}{2\Delta}\left\{ + \frac{1}{6\Delta}\left[7\left(nZ_N^2 - NZ_n^2\right) + 24\,(n-N)\,Z_n Z_N\right]\right\} + 0(\lambda^4),$$

$$\lambda_c = \frac{8}{11\,y^2}\left\{\frac{nZ_N^2 - NZ_n^2}{\Delta} + \frac{1}{\Delta^2}\left[\frac{721}{726}\left(nZ_N^2 - NZ_n^2\right) - \frac{2}{3}nNZ_nZ_N(Z_n - Z_N)^2\right]\right\} + 0(\lambda^4).$$

În expresiile precedente, diferența $Z_i = 1 - \frac{y_i}{y}$ este măsurată pentru două puncte distincte ale curbei de amortizare, avînd respectiv abscisele n și N. Prin Δ s-a notat mărimea

$$\Delta = nZ_N - NZ_n.$$

Se pot expune numeroase alte aplicații ale primelor trei aproximații ale teoriei perturbațiilor în domeniile teoriei oscilațiilor, cronometriei, mecanicii neliniare ș.a. Menționăm, de exemplu, că ecuațiile de mișcare și unele probleme relative la această ordine de idei, mai puțin generală însă, sînt date de primul dintre autori și de G. Bradistilov în paginile „Buletinului Institutului politehnic din Iași", deja citat [46].

30. Într-un șir de note în curs de elaborare se vor prezenta unele aspecte comparative privitoare la metoda expusă mai sus și o serie de metode recente datorite lui Y. A. Mitropolski [38], V. O. Kononenko [39], V. M. Starjinski [40], N. Minorsky [58], R. Reissig, G. Sansone, R. Conti [59], Th. Vogel [62], R. M. Rosenberg [60] ș.a. În [41] vom da, bazîndu-ne pe lucrările recente proprii consacrate sincronizării [42]—[43], alte rezultate relative la sincronizarea unor sisteme dinamice vecine cu sistemele lui Liapunov [44] ș.a.

Primită la redacție la 24 aprilie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. R. Chaléat, J. Haag, *Problèmes de chronométrie et de théorie générale des oscillations.* Gauthier-Villars, Eyrolles, Paris 1960.
2. D. Mangeron, Z. Gábos, I. Stan, *Fundamentele mecanicii, Cap. IV. Mecanica vibrațiilor.* Edit. Acad. R.P.R., București 1962.
3. D. Mangeron, *Sur le mouvement de certains sytèmes articulés de corps rigides pesants.* C. r. Acad. Sci., Paris, 223, 190—191, 1946.
4. — *Neue graphisch-analytische Methoden zum Studium der nichtlinearen Schwingungen. III.* Internationale Konferenz über Nichtlinearen Schwingungen. DAW, Berlin, 25—30 mai 1964 (sub tipar).
5. — *The integral-equations method in nonlinear mechanics.* Proc. IUTAM Sympos. nonlinear Oscillations. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Kiev, vol. I, 347—350 (1963).
6. — *The integral-equations method by studying the polyvibrating systems.* Proc. Ninth Congress on Theoretical and Applied Mechanics. Kharagpur, 20—23 Dec., 1964 (sub tipar).

7. D. MANGERON, *Notes de Mécanique rationnelle. Remarques sur le problème généralisant celui de la cloche et de son battant*, Bull. Inst. polytechn. Jassy, **I**, *2*, 304—307, 1946.
8. — *Mécanique non-linéaire. Sur les systèmes oscillatoires non-lineaires.* Bull. Inst. Polytechn. Jassy, **I**, *1*, 62—66, 1946.
9. V. M. STARJINSKY, *Sur la stabilité des mouvements périodiques.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n., **V (IX)**, *1—2*, 51—100, 1959.
10. GH. CIOBANU, *Sur quelques systèmes oscillatoires non-linéaires dans l'espace.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s. n. **XI (XV)**, *1—2*, 1965.
11. F. ROSSI, *Sopra il metodo di Mangeron in certi problemi al contorno non lineari.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s. n., **IX (XIII)**, *3—4*, 39—42, 1963.
12. Т. КАМЫТОВ, *Приближенное решение методом Манжерона некоторых задач для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.* Доклады третьей Сибирской конференции по математике и механике. Изд. Томского Ун-та. Томск, 113—115, 1964.
13. ST. RUSCIOR, *Sul metodo delle equazioni integrali di Mangeron nello studio di certi sistemi a rimanenza.* Atti Accad. Naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. VIII, **XXXV**, *6*, 1963.
14. M. SALVADORI, *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica.* Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa, s. **2-a**, **V**, 51—72, 1936.
15. J. FAVARD, *Quelques théorèmes concernant les équations polyvibrantes, dites „Equations de Mangeron".* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s.n. **XI (XV)**, *1—2*, 1965.
16. D. MANGERON, *Sopra i problemi di Dirichlet per una classe di equazioni alle derivate totali.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s. n., **III (VII)**, *3—4*, 49—52, 1957.
17. D. MANGERON, L. E. KRIVOSEIN, *Sopra una classe di problemi al contorno per le equzioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone (A Mauro Picone nel suo 75° compleanno).* Atti dell'Accad. Naz. dei Lincei. Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat. s. 8, **XXXI**, *1—2*, 27—32 (1961).
18. — *Sopra i problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate parziale con derivata d'ordine superiore di Picone.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **XXXIII**, 226—266, 1963.
19. R. CHALÉAT, *Système d'entretien à plusieurs pendules conjugués.* C. r. Acad. Sci., Paris, **228**, 1104—1106, 1949.
20. — *Sur un dispositif de couplage de plusieurs pendules.* C. r. Acad. Sci., Paris, **228**, 538—540, 1949.
21. — *Synchronisation par action directe sur le spiral.* C. r. Acad. Sci., Paris, **237**, 141—142, 1953.
22. — *Sur l'oscillateur de Lord Rayleigh*, Colloque international du Centre National de la Recherche Scientifique sur les vibrations forcées dans les systèmes non-linéaires. Marseille, 1964, 17 pages (à paraître dans les „Actes du Colloque").
23. R. CHALÉAT, D. MANGERON, *Approximations d'ordre supérieur dans la théorie des perturbations*, I. Bul. Inst. politehn. Iaşi, s. n., **X (XIV)**, *3—4*, 12 p., 1964.
24. — *Approximations d'ordre supérieur dans la théorie des perturbations*, **II**. Bul. Inst. politehn. Iaşi, s. n., **XI (XV)**, *3—4*, 1965.
25. R. CHALÉAT, *Calcul de la période des petites oscillations en fonction de leur amplitude.* C. r. Acad. Sci., Paris, **246**, *11*, 69—1171, 1958.
26. — *Seconde approximation de la perturbation d'amplitude d'un oscillateur quasi linéaire.* C. r. Acad. Sci., Paris, **250**, 1177—1179, 1960.
27. — *Période d'un oscillateur soumis à un couple perturbateur proportionnel à une puissance entière de l'élongation.* C. r. Acad. Sci., Paris, **254**, 1917—1919, 1962.
28. — *Calcul de la période des oscillations en fonction de leur amplitude.* Zagadnienia drgań nieliniowych, tome 5. I nstytut Podstawowych Problemów Techniki. PNW, Warszawa, 108—119, 1964.
29. — *Troisième approximation de la perturbation d'amplitude des oscillateurs.* C. r. Acad. Sci., Paris, **256**, 1908—1911, 1963.
30. — *Troisième approximation de la période d'un oscillateur non-linéaire.* C. r. Acad. Sci., Paris, **256**, 3575—3578, 1963.

31. D. MANGERON, *Sur une nouvelle classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.* C. r. Acad. Sci., Paris, **204**, 94—96; 544—546; 1022—1024, 1937.

32. J. HAAG, *Sur certains systèmes d'équations différentielles définies par des solutions périodiques et discontinues.* Bull. Sci. Math., **71**, 1—14, 1947.

33. A. ROSENBLATT, *Sur l'application de la méthode des approximations successives de M. Picard à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles à caractèristiques réelles et multiples.* C. r. Acad. Sci., Paris, **197**, 1278—1280, 1933.

34. D. MANGERON, *Sopra un problema al contorno non lineare concernente equazioni alle derivate parziali con caratteristiche reali.* Atti Accad. Naz. dei Lincei. Rend. Cl. Sci. fis., mat. e nat. s. 6, **XVI**, *7—8*, 305—310, 1932.

35. G. VALIRON, *Cours d'analyse mathématique.* t. *II*, p. 308. Masson, Paris, 1945.

36. R. CHALÉAT, *Influence d'un couple de rappel non-linéaire sur l'amortissement d'un oscillateur.* C. r. Acad. Sci., **258**, 1143—1145, 1964.

37. N. W. MAC LACHLAN, *Application of Mathieu's Equation to stability of non-linear oscillator.* The mathematical Gazette, 35, p. 105, 1951.

38. Y. A. MITROPOL'SKIY, *The method of integral manifolds in the theory of non linear oscillations.* Intern. Sympos. Nonlinear Different. Equations and Nonlinear Mechan, Colorado Springs, 1961. New York, London, Acad. Press, 1963, 1—15.

39. В. О. КОНОНЕНКО, *Колебательные системы с ограниченным возбуждением.* M., „Наука", 1964.

40. В. М. СТАРЖИНСКИЙ, *Об одном методе в теории нелинейных колебаний.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s. n. **XI (XV)**, *3—4*, 1965.

41. R. CHALÉAT, D. MANGERON, *Problèmes concernant la synchranisation.* Bull. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci. (sub tipar).

42. R. CHALÉAT, *La théorie générale de la synchronisation*, I. Bul. Inst. politehn. Iaşi, s. n., **XI (XV)**, *3—4*, 1965.

43. D. MANGERON, L. E. KRIVOSEIN, *New methods concerning Equations of Mathematical Physics.* **I.** *Polyvibratings integro-differential Systems.* Revue Roumaine Sci. Techn., Série Mécanique appl., Acad. R.P.R., **9**, *6*, 1195—1222, 1964.

44. Р. Ф. НАГАЕВ, *О синхронизации одинаковых динамических систем, близких к системам Ляпунова.* Приклад. матем. и механ. 28, 3, 483—492, 1964.

45. D. MANGERON, *Probleme variaţionale în mecanica corpurilor de masă variabilă şi în teoria mecanismelor şi maşinilor.* Programul celei de a III-a sesiuni ştiinţifice a cadrelor didactice. Institutul politehnic Iaşi, p. 44, 19—21 mai 1956.

46. G. BRADISTILOV, G. BOYADJEV, *Cas général des mouvements périodiques relatifs d'un pendule physique double situé dans un plan soumis à rotation.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s. n., **VIII (II)**, *1—2*, 75—82, 1962.

47. I. A. MITROPOLSKI, O. B. LYKOVA, *Sur le problème de détermination des solutions périodiques des systèmes d'équations différentielles non linéaires à membres droites non différentiables*, Bul. Inst. politehn. Iaşi, s. n., **VI (X)**, *3—4*, 7—12, 1960.

48. A. LOWAN, *Some problems concerning calculus of variation.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s. n., **XI (XV)**, *1—2*, 1965.

49. J. LAVOINE, P. DELERUE, *Sur une généralisation du calcul symbolique à l'aide des distributions.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s. n., **VI (X)**, *3—4*, 37—42, 1960.

50. A. OPREA, ŞT. RUSCIOR, *Calculul numeric al unor sisteme integro-diferenţiale interesînd fizica-matematică.* Programul sesiunii ştiinţifice a Universităţii din Timişoara, 1965.

51. D. MANGERON, *Sopra un problema al contorno per le equazioni differenziali a derivate parziali con caratteristiche reali multiple.* Rend. Accad. Sci. fis., mat. e nat., Napoli, s. 4, **II**, 1—11, 1932.

52. D. MANGERON, E. CHALÉAT, *Quelques théorèmes concernant les systèmes polyvibrants.* Bull. Acad. Roy. Sci. Belgique (sub tipar).

53. A. BRAIER, H. ROSMAN, *Asupra bilanţului energetic în cazul oscilatorilor liniari perturbaţi periodic.* Bul. Inst. politehn. Iaşi, s. n., **VI (X)**, *3—4*, 69—74, 1960.

54. S. ZIEMBA, *Typical nonlinearities, their physical character and action, their technical significance.* III. Konferenz über nichtlineare Schwingungen. Berlin, 25—30 Mai 1964. DAW. Inst. für angew. Math. u. Mechanik.

55. D. MANGERON, *Green's functions expansions in series of fundamental solutions concerned with linear partial differential operators*. Rend. Accad. Sci. fis. e mat., Napoli, s. 4, 31, 1964.
56. R. BELLMAN, S. DREYFUS. *Applied dynamic programming*. Princeton Univ. Press. N. J., 1962.
57. A. BRAIER, *Graphische Untersuchung der Bewegung nichtlinearen Oszillatoren mit zwei Freiheitsgraden*. Rev. Méc. appl., Acad. R.P.R., **7**, *1*, 83—98, 1962.
58. N. MINORSKY, *Nonlinear Mechanics*. J. W. Edwards, Ann Arbor, Mich. 1947.
59. R. REISSIG, G. SANSONE, R. CONTI, *Teoria delle oscillazioni non lineari*. Ed. Cremonese, Roma, 1964.
60. R. M. ROSENBERG, *Nonlinear Oscillations*. Appl. Mech. Reviews, **14**, *11*, 837, 841, 1961.
61. H. KAUDERER, *Nichtlineare Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958.
62. TH. VOGEL, *Les vibrations forcées dans les systèmes non linéaires*. Bul. Inst. politehn. Iaşi, s. n., **X (XIV)**, *3—4*, 1964.
63. J. K. HALE, *Oscillations in Nonlinear Systems*. Mc. Graw-Hill, N. Y., 1963.

O EXTINDERE A ECUAŢIILOR LUI COSSERAT RELATIVE LA MIŞCAREA MEDIILOR DEFORMABILE STRUCTURAL NEOMOGENE [1]

de M. MIŞICU
Centrul de mecanica solidului al Academiei R.S.România

539.3

Se stabilesc ecuaţiile dinamicii mediilor deformabile cu efecte interne de microstructură de ordin superior.

Teoria mediilor deformabile cu stare asimetrică de tensiune a fost iniţiată în lucrările lui W. Voigt [1], [2] şi ulterior, sub o formă sistematizată, de către E. şi F. Cosserat [3]. Considerarea structurii interne şi a modificării teoriei apare şi în cercetări mai recente, ca în cazul teoriei mediilor, pentru care în fiecare punct un sistem de orientări variabile pot caracteriza mişcarea locală. Această teorie a fost elaborată de C. Truesdell şi R. A. Toupin [4]. În [5] G. Grioli extinde teoria asimetrică liniară, formulînd ecuaţiile constitutive pentru medii elastice, în care intervine, în afara modulilor lui Lamé, un modul caracterizînd proporţionalitatea cuplelor de tensiune de gradienţii rotaţiilor. În [6] E. L. Aero şi E. V. Kuvşinski dau o formulare mai generală în sensul teoriei lui Cosserat, considerînd şi rotaţiile particulelor materiale, precum şi un număr mai mare de moduli elastici. În [7], [8], R. A. Toupin, respectiv R. A. Mindlin şi H. F. Tiersten consideră cazul elasticităţii constrînse, fără rotaţii independente ale particulelor, precizînd numeroase elemente fundamentale.

În [9]—[12] au fost date o serie de extinderi privind teoria asimetrică a elasticităţii, viscoelasticităţii şi viscoelastoplasticităţii constrînse şi s-a analizat problema plană. Asupra dezvoltării ulterioare a elaborării lucrării de faţă vom reveni în următoarele articole citate în bibliografie [13].

[1] Publicată în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", IX, *6* (1964) (în lb. engleză).

În cele ce urmează se prezintă, sub forma dată inițial în [11], ecuațiile dinamicii mediilor cu microstructură, ținînd seama de efecte de ordin superior.

1. *Configurația elementelor structurale.* Vom considera un mediu care la o scară macrostructurală poate fi caracterizat printr-un model mecanic al sistemului de puncte materiale distribuite în spațiu în mod continuu sau nu, dar foarte apropiate, astfel ca, în anumite condiții, acest model

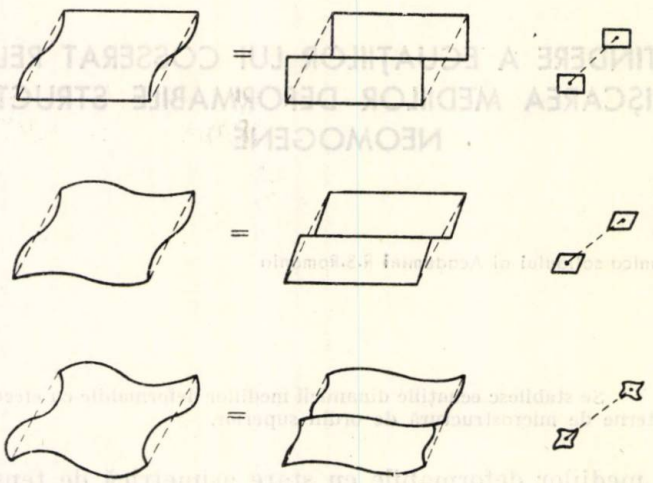


Fig. 1

să apară ca un continuu. De asemenea vom admite posibilitatea definirii, la o scară de mărime inferioară (microstructurală), a elementelor structurale componente.

De exemplu, agregatele policristaline, structurile celulare sau sistemele reticulate (bare și diafragme), în anumite cazuri, pot fi echivalate cu modelele mecanice structurale în sensul celor precedente, proprietățile mecanice ale elementelor definite la scară microstructurală putînd fi distincte de cele ce apar la o scară mai mare a ansamblului. În cazul mediului lui Cosserat, elementele (particulele) efectuează mișcări rigide, pe cînd ansamblul se poate deforma. În cazuri mai generale [11], deformația (mișcarea nerigidă) poate apărea la ambele scări de mărime.

Astfel, fie o porțiune din corp reprezentată schematic în figură și formată din două elemente structurale.

Pentru elemente rigide, ansamblul apare deformat, cu toate că elementele se mișcă în spațiu fără deformări. În figură apare de asemenea cazul unor deformații liniare sau neliniare ale elementelor.

Schemele pot sta și la baza unor procedee de echivalență cu modele structurale la care mișcarea locală e descrisă și de funcții liniare sau de coordonatele locale (raportată, de exemplu, la un sistem de referință cu originea în baricentrul unui element structural).

2. *Funcția deplasării.* Fie o particulă materială definită într-un punct P al corpului și aparținînd unui element structural de baricentru $\overline{P}$ (fig. 2). Mișcarea sa va fi caracterizată de coordonate materiale x_i^0 și spațiale $x_i = x_i(t)$ relative la un sistem ortogonal de referință cu originea într-un punct O. De asemenea, în cele ce urmează considerăm o mișcare la scară macrostructurală a punctelor P, definită de funcțiile $x_i(\overline{P})$. Vom pune

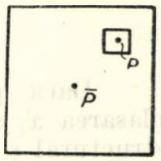


Fig. 2

$$x_i(P) = \overline{x}_i + x_i'(P), \tag{2.1}$$

astfel că mișcarea particulei P se descompune într-o mișcare generală aceeași cu a baricentrului său

$$\overline{x}_i = x_i(\overline{P}) \tag{2.2}$$

și o mișcare relativă la aceasta

$$x_i' = x_i'(P). \tag{2.3}$$

Ea se anulează în $\overline{P}$:

$$x_i'(\overline{P}) = 0, \quad x_i = \overline{x}_i. \tag{2.4}$$

Funcțiile

$$\xi_i = \xi_i(P) = x_i(P) - x_i(\overline{P}) = x_i(P) - \overline{x}_i \tag{2.5}$$

se vor denumi microcoordonatele în punctul P relative la baricentrul $\overline{P}$ al elementului structural.

Deplasarea particulei materiale P este caracterizată de funcțiile deplasării (sau vitezei de deplasare)

$$U_i = x_i - x_i^0, \tag{2.6}$$
$$\dot{U}_i = \dot{x} = \dot{\overline{x}}_i + \dot{x}_i',$$

unde

$$(\,)^{\cdot} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\,)^{\cdot}, \tag{2.7}$$

t fiind variabila temporală.

În vederea deducerii ecuațiilor dinamicii mediilor structurale ținînd seama de efectele de structură de ordin superior, vom presupune că funcțiile coordonate introduse pot fi exprimate cu ajutorul dezvoltărilor în serie

$$\dot{x}_j(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_n} \dot{x}_{i_1 \ldots i_n j},$$

$$\dot{\overline{x}}_j(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_n} \dot{\overline{x}}_{i_1 \ldots i_n j} \tag{2.8}$$

$$\dot{x}_j'(P) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_n} \dot{x}_{i_1 \ldots i_n j}',$$

unde

$$\dot{x}_{i_1 \ldots i_n j} = \dot{\overline{x}}_{i_1 \ldots i_n j} + \dot{x}'_{i_1 \ldots i_n j},$$

$$\dot{x}, \dot{\overline{x}}, \dot{x}'_{i_1 \ldots i_n j} = \left(\frac{\partial^n \dot{x}, \dot{\overline{x}}, \dot{x}'_j (P)}{\partial \xi_{i_1} \ldots \partial \xi_{i_n}} \right)_{P = \overline{P}} . \tag{2.9}$$

Dacă pentru $n \geqslant 1$, $\dot{\overline{x}}_{i_1 \ldots i_n j} = 0$, atunci $\dot{\overline{x}}_j (P) = \dot{\overline{x}}_j (\overline{P})$, iar deplasarea $\overline{x}_i$ se reduce la o translație rigidă în interiorul elementului structural și

$$\dot{x}'_i = \dot{\xi}_i (P) = \dot{x}_i - \dot{\overline{x}}_i (\overline{P}). \tag{2.10}$$

3. *Starea de tensiune.* Suprapunerea mișcării locale și a celei definite la scară macrostructurală conduce la o variație locală a tensiunilor caracterizate prin gradienți ai tensiunii de diferite ordine, calculați relativ la microcoordonate (fig. 3). În figură apar schematic variațiile locale ale tensiunilor, notate cu o bară superioară, care se suprapun peste cele definite la o scară macrostructurală. Alte elemente, privind definiția funcțiilor de tensiune, vor apărea ulterior. În mod analog vom considera forțele de inerție și masă. În definitiv vom considera funcțiile tensiunilor forțelor de masă și inerție

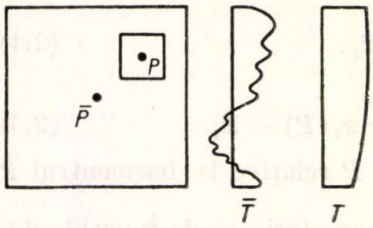


Fig. 3

$$T^t_{ij} = \overline{T}_{ij} + T_{ij}, \quad f_i = \rho \ddot{u}_i = \overline{f}_i + f'_i, \quad \overline{f}_i = \rho \ddot{\overline{u}}_i, \quad f'_i = \rho \ddot{u}'_i, \quad F_i = \overline{F}_i + F'_i \tag{3.1}$$

ρ fiind densitatea medie într-un volum dv, definit la scară microstructurală.

În baza ecuațiilor dinamicii vom scrie ecuațiile de mișcare pentru un element de volum dv și, prin integrarea peste un domeniu D conținînd cel puțin un element structural, vom stabili ecuația

$$\int_S T^t_{jk} \, ds_k + \int_V (F_j - f_j) \, dv = 0, \tag{3.2}$$

unde S, V reprezintă conturul și volumul domeniului D, iar ds_k, dv ariile și volumul definite la o scară locală în P.

În urma integrării relative la un singur element structural de suprafață $d\overline{S}_k$, $(k = 1, 2, 3)$ și volum $d\overline{V}$, vor apărea următoarele funcții de

tensiune, inerție și forțe de volum reduse în baricentrul $\overline{P}$ al acestui element :

$$T^t_{jk}(\overline{P}) = \int_{\mathrm{d}\overline{S}} T^t_{jk}(P)\,\mathrm{d}s/\mathrm{d}\overline{S}_k,$$

$$F_{jk}(\overline{P}) = \int_{\mathrm{d}\overline{V}} F_{jk}\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}V, \tag{3.3}$$

$$f_{jk}(\overline{P}) = \int_{\mathrm{d}\overline{V}} f_{jk}\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}V,$$

formule analoge apărînd pentru $\overline{T}_{jk}$, T_{ik}, $\overline{F}_j$, F'_j, $\overline{f}_j$, f'_j.

În baza acestora, ecuațiile (integrate) de mișcare se mai scriu astfel :

$$\int_S T^t_{jk}(\overline{P})\,\mathrm{d}\overline{S}_k + (F_j(\overline{P}) - f_j(\overline{P}))\,\mathrm{d}\overline{V} = 0, \tag{3.4}$$

funcțiile de sub integrale apărînd definite la o scară macrostructurală. În cele ce urmează le vom presupune continue și satisfăcînd condițiile necesare aplicării teoremei lui Green, astfel că acestea se mai scriu

$$T^t_{jk,k}(P) + F_j(\overline{P}) - f_j(\overline{P}) = 0, \tag{3.5}$$

unde s-a notat

$$(\ \ )_{,k} = \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad x_k = x_k(\overline{P}). \tag{3.6}$$

Pentru cele $9 + 9$ componente ale tensiunii $\overline{P}_{jk}$, T_{jk} sau cele 9 componente T^t_{jk}, se deduc astfel trei ecuații.

În mod analog putem considera condițiile

$$\int_S x_{i_1}(P) \ldots x_{i_n}(P)\, T^t_{jk}\,\mathrm{d}s_k + \int_V x_{i_1}(P) \ldots x_{i_n}(P)\,(F_j(P) - f_j(P))\,\mathrm{d}v =$$

$$= \int_V L_{i_1 \ldots i_n jk}(P)\,\mathrm{d}v, \tag{3.7}$$

unde $L_{i_1 \ldots i_n jk}$ sînt de natura unor funcții de corecție care se vor determina ulterior. În cazul particular al unei distribuții foarte fine a particulelor materiale (continuu), aceste funcții capătă o importanță mai redusă.

Observăm că au loc relațiile

$$x_{i_1}(P) \ldots x_{i_n}(P) = \overline{x}_{i_1} \ldots \overline{x}_{i_n} + \sum_{l=1}^{n} \overline{x}_{i_1} \ldots \overline{x}_{i_{l-1}}\, \overline{x}_{i_{l+1}} \ldots \overline{x}_{i_n}\, \xi_{i_l} \ldots +$$

$$= \sum_{l=1}^{n+1} \sum_{m=i} \overline{x}_{m_1} \ldots \overline{x}_{m_{l-1}}\, \xi_{m_l} \ldots \xi_{m_n}, \tag{3.8}$$

unde ultimul termen e notat prescurtat, iar

$$\overline{x}_i = \overline{x}_i(\overline{P}), \quad \xi_i = \xi_i(P). \tag{3.9}$$

Ecuația precedentă implică considerarea următoarelor integrale:

$$\int_{\mathrm{d}\overline{S}} \xi_{m_1} \dots \xi_{m_n} T^t_{jk}(P) \frac{\mathrm{d}s_k}{\mathrm{d}S_k} = M^t_{m_1 \dots m_n jk}(\overline{P}) \tag{3.10}$$

(cuple de tensiune de ordin superior),

$$\int_{\mathrm{d}\overline{S}} \xi_{m_1} \dots \xi_{m_n} F_j(P) \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\overline{V}} = F_{m_1 \dots m_n j}(\overline{P}),$$
$$\int_{\mathrm{d}\overline{S}} \xi_{m_1} \dots \xi_{m_n} f_j(P) \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\overline{V}} = f_{m_1 \dots m_n j}(\overline{P}) \tag{3.11}$$

(cuple de masă și inerție de ordin superior).

Analog notăm cuplele corespunzătoare celorlalte tensiuni sau forțe de inerție și masă. Deducem atunci că ecuația integrată pentru cuple se mai scrie astfel, utilizînd notația concentrată a sumelor utilizată în (3.8):

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{m=i} \left\{ \int_S \overline{x}_{m_1} \dots \overline{x}_{m_{l-1}} M^t_{m_l \dots m_n jk}(\overline{P}) \, \mathrm{d}S_k + \right.$$
$$\left. + \int_V \overline{x}_{m_1} \dots \overline{x}_{m_{l-1}} (F_{m_l \dots m_n j}(\overline{P}) - f_{m_l \dots m_n j}(\overline{P}) - L_{m_l \dots m_n j}(\overline{P})) \, \mathrm{d}\overline{V} \right\} = 0, \tag{3.12}$$

unde $L \dots (\overline{P})$ reprezintă o integrală pe $\mathrm{d}\overline{V}$ a funcțiilor de corecție considerate mai înainte.

În baza ipotezelor precedente îi vom aplica teorema lui Green și deducem ecuațiile diferențiale

$$M^t_{i_1 \dots i_n jk,k} + \mathfrak{M}^t_{i_1 \dots i_n j} + F_{i_1 \dots i_n j} - f_{i_1 \dots i_n j} = L_{i_1 \dots i_n j}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \tag{3.13}$$

unde

$$\mathfrak{M}^t_{i_1 \dots i_n j} = \sum_{l=1}^{n+1} M^t_{i_1 \dots i_{l-1} i_{l+1} \dots i_n j i_l}. \tag{3.14}$$
$$(\mathfrak{M}^t_i = \mathfrak{M}_i = \overline{\mathfrak{M}}_i = 0)$$

Pentru cele cîte $3^2(n+1)(n+2)/2$ componente $M^t_{i_1 \dots i_n jk}$ se pot stabili deci $3(n+2)(n+1)/2$ ecuații.

4. *Cazuri particulare.* Funcția de corecție se determină pe baza anumitor proprietăți legate de structură și comportarea mecanică a corpului. Într-o analiză ulterioară, pornind de la proprietățile invarianților mecanici în raport cu anumite grupuri de mișcări, de exemplu mișcările

rigide în spațiul euclidian la o singură scară sau la ambele scări de mărime, se particularizează ecuațiile de mișcare. Astfel se poate arăta că în cazul mecanicii clasice putem pune în condiții destul de generale

$$L_i = 0, \quad L_{[ij]} = 0, \quad (n = 1)$$

și, pentru $n \geqslant 1$, $L_i = 0$, precum și o anumită relație între funcțiile de corecție, astfel că invariantul de tipul energiei de deformare să fie neschimbat în urma unei rotații rigide adiționale (vezi [14—17]). În scopul precizării acestor condiții este atunci necesară stabilirea expresiei energiei de deformare, care rezultă stabilind ecuația de conservare a energiei dată mai jos.

Menționăm, de asemenea, particularizările ce rezultă impunînd condițiile de tip cinematic

$$x_{i_1 \ldots i_n j} = x_{j, i_1 \ldots i_n} \tag{4.1}$$

pentru anumite valori ale lui n sau condițiile de deformare

$$x_{(ij)} = 0 \quad \text{etc.} \tag{4.2}$$

Aceste condiții le denumim, conform unei denumiri adoptate anterior [15], constrîngeri, respectiv restrîngeri, ele putînd fi definite sub o formă generală. Prima condiție intervine în cazul că mișcarea locală se confundă cu cea definită la scară macrostructurală, iar a doua (4.2) în caz că mișcarea structurală se efectuează fără deformații de primul ordin etc.

5. *Ecuația de conservare a energiei.* Vom considera ecuația de conservare a masei și energiei

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \, \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}M = 0, \quad (\mathrm{d}M = \rho \mathrm{d}V), \\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V {}_0E \mathrm{d}M = \int_S {}_0h^k \, \mathrm{d}S_k, \end{aligned} \tag{5.1}$$

unde S' și V reprezintă conturul și volumul unui mediu deformat la scară macrostructurală ocupat de o porțiune din corp, iar ${}_0E$, ${}_0h^t$, ${}_0q$ sînt, respectiv, densitatea, fluxul și sursa de energie. Aceste din urmă funcții se exprimă în modul următor :

$$\begin{aligned} {}_0E &= {}_0\chi + \varepsilon, \\ {}_0h_i &= \int_{\mathrm{d}\bar{S}} \dot{x}_j(P) \, T^t_{ji}(P) \frac{\mathrm{d}s_i}{\mathrm{d}\bar{S}_i} + h_i, \\ {}_0q &= \int_{\mathrm{d}\bar{V}} \dot{x}_i(P) F_i(P) \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{V}} + q = \sum_{0,1,2,\ldots} \frac{1}{n!} \dot{x}_{i_1 \ldots i_n j} F_{i_1 \ldots i_n j} + q, \end{aligned} \tag{5.2}$$

unde

$$\frac{\mathrm{d}_0\chi}{\mathrm{d}t} = \int_{\bar{\mathrm{d}}\bar{V}} \dot{x}_i(P) f_i(P) \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{V}} = \sum_{0,1,\dots} \frac{1}{n!} x_{i_1 \dots i_n} f_{i_1 \dots i_n} \tag{5.3}$$

reprezintă derivata în raport cu timpul a energiei cinetice raportate la unitatea de masă, ε energia internă, q sursa adițională de energie, iar h_i influxul sau fluxul adițional (nemecanic) de energie. Funcțiile se presupun definite în puncte ale macrostructurii după integrare pe elementul structural.

Presupunem că funcțiile introduse satisfac condițiile necesare pentru ca teorema lui Green să poată fi aplicată. În acest caz avem, procedînd analog ca în cazul ecuațiilor de mișcare, următorul rezultat

$$\dot{\omega} = \rho\dot{\varepsilon} - (h_{j,j} + q), \tag{5.4}$$

unde

$$\dot{\omega} = \sum_{n=0,1,2,\dots} \frac{1}{n!} (\dot{x}_{j_1 \dots j_n}, {}_i M_{j_1 \dots j_n i} - \dot{x}_{j_1 \dots j_n} M_{j_1 \dots j_n}) - L$$

$$L = \sum \frac{1}{n!} \dot{x}_{j_1 \dots j_n} L_{j_1 \dots j_n}. \tag{5.5}$$

S-au aplicat ecuațiile [13].

Pentru diferite cazuri particulare, $\dot{\omega}$ are diferite expresii. Astfel, dacă $\dot{x}_{j_1 \dots j_n} \cong 0$, pt. $n > 2$ avem

$$\dot{\omega} = (\dot{x}_{(j,i)} - \dot{x}_{(ji)})\, T_{(ji)} + (\dot{x}_{[ji]} - \dot{x}_{(ji)})\, T_{[ji]} + \dot{x}_{jk,i} M_{jki} - L$$

$$L = \dot{x}_j L_j + \frac{1}{2} \dot{x}_{jk} L_{jk}.$$

Dacă considerăm o mișcare adițională de translație și rotație uniformă, astfel ca la momentul t poziția corpului să fie aceeași ca în lipsa acestei mișcări,

$$x^i \to x^i + c^i, \quad x_{ij} \to x_{ij} + \omega_{ij};$$

$\dot{\omega}$ este invariant dacă

$$\dot{c}_j L_j + \frac{1}{2} \omega_{jk} L_{jk} = 0.$$

$\dot{c}_j$ și ω_{jk} fiind arbitrari, avem

$$L_j = 0, \quad L_{[jk]} = 0.$$

Dezvoltarea teoriei mediilor deformabile pentru care sînt satisfăcute condițiile de invarianță de mai sus sau generale apare în [14—17].

Primită la redacție la 26 aprilie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. W. Voigt, *Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Krystalle.* Abh. Ges. Wiss. Göttingen, 1887, 34.
2. — *Über Medien ohne innere Kräfte und eine durch die gelieferte mechanische Deutung der Maxwell-Hertzschen Gleichungen.* Göttingen, Abh. 1894, 72—79.
3. E. Cosserat, F. Cosserat, *Théorie des corps déformables.* A. Hermann et Fils, Paris, 1909.
4. C. Truesdell, R. A. Toupin, *The Classical Field Theories. Encyclopedia of Physics.* Vol. 3, secțiunile 200, 203, 205, Springer, Berlin-Göttingen-Heidenberg, 1960.
5. G. Grioli, *Elasticita assimetrica.* Ann di Mat. pura ed applicata, *4*, *50*, 389—417 (1960).
6. E. L. Aero și E. V. Kuvșinski, *Ecuațiile funcționale ale teoriei mediilor elastice cu particule care se rotesc și interacționează.* Fizika Tverdoro Tela, 1960, 1399—1409.
7. R. A. Toupin, *Elastic Materials with Couple-Stresses.* Archive Rat. Mech. and Analysis, **211**, *5*, 385—415 (1962).
8. R. A. Mindlin, H. F. Tiersten, *Effects of Couplestresses in linear Elasticity,* Archive of Rat. Mech. and Analysis, **211**, *5*, 415—418 (1962).
9. M. Mișicu, *Theory of Viscoelasticity with Couples Stresses and some Reductions to two-dimensional Problems.* Rev. de Mec. Appl., **VIII**, *6*, 921—951 (1963); (II) Ibidem, **IX**, *1*, 3—35 (1964).
10. — *On a theory of asymmetric plastic and viscoelastic-plastic solids.* Rev. de Méc. Appl., **IX**, *3*, 477—495 (1964); St. cerc. mec. apl., **17**, *5*, 1973—1091 (1964).
11. — *A Generalisation of the Cosserat equations of the Motion of deformable Bodies with internal degrees of freedom.* Rev. de Méc. Appl., **IX**, *6*, 1351—1359 (1964).
12. — *A Generalisation of the Cosserat equations of the Motion of deformable Media.* Archivum Mechaniki Stosowanej (Archives de Mécanique Appliquée, Varșovia), **2**, *17* (1965).
13. — *On the asymmetric theory of singular dislocations.* Rev. roum. sci. techn. — Méc. Appl., **X**, *1* (1965).
14. — *On the mechanics of structural media. Non correlated fields.* Rev. roum. sci. techn. — Méc. Appl., **X**, *2* (1965).
15. — *On the mecanics of structural media. II. General correlated fields.* Rev. de Mec. Appl., **X**, *3* (1965).
16. — *General correlated field of the nonlinear theory of partial constrained elastic media.* Rev. roum. sci. techn. — Méc. Appl., **X**, *4* (1965).
17. — *The infinitesimal theory of the partial constrained elastic media.* Rev. roum. sci. techn. — Méc. Appl., **X**, *5* (1965).

GRINDA CONTINUĂ PE REAZEME ELASTICE DE LUNGIME DATĂ [1])

de GHEORGHE BUZDUGAN şi LUCIA FETCU
membru corespondent al Academiei
R. S. România
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

539.4

Se stabileşte o metodă de calcul pentru determinarea eforturilor şi deformaţiilor care apar la o grindă continuă pe reazeme lungi, elastice (fig. 1), solicitată la încovoiere.

Se utilizează metoda parametrilor iniţiali, scriindu-se relaţiile dintre deformaţiile şi eforturile într-o secţiune şi parametrii iniţiali sub formă matriceală (2), (6).

Folosind condiţiile la limită şi condiţiile de continuitate, se obţine sistemul de ecuaţii (13), din care se determină parametrii iniţiali necunoscuţi.

Metoda de calcul propusă este aplicată la determinarea eforturilor pentru o grindă continuă pe trei reazeme, încărcată cu o sarcină uniform distribuită (fig. 6).

Se pune în evidenţă efectul modificării lungimii şi elasticităţii reazemelor asupra distribuţiei momentelor încovoietoare (fig. 7), precum şi diferenţele care apar între valorile eforturilor obţinute prin metoda propusă şi cele obţinute prin utilizarea unor scheme de calcul aproximative (fig. 8).

În literatura tehnică, grinda continuă este considerată cu reazeme punctiforme, fie ele rigide sau elastice. În studiul grinzilor pe teren elastic se consideră de obicei rezemare continuă pe toată lungimea grinzii.

Este greu de imaginat o rezemare punctiformă a unei grinzi continue. Reazemele au anumite lungimi şi elasticităţi, care fac ca eforturile în grindă să difere de cele obţinute cu schema rezemării punctiforme.

Într-o lucrare anterioară [1] s-a examinat grinda cu o singură deschidere, avînd reazeme elastice, de diferite lungimi. Este vorba despre problema cunoscută a încastrării parţiale (elastice), la care s-au introdus

[1] Publicată în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **10**, *4* (1965) (în lb. engleză).

cei doi parametri ce caracterizează rezemarea : elasticitatea şi lungimea reazemului.

În lucrarea de faţă ne propunem a extinde studiul la grinda continuă, avînd reazeme elastice, de lungimi cunoscute. Reazemele (de lungimi

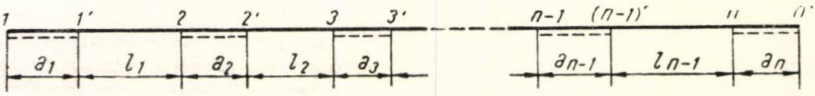


Fig. 1

$a_1, a_2, \ldots$) şi deschiderile grinzii (de lungimi $l_1, l_2, \ldots$) se notează ca în figura 1.

Se folosesc următoarele ipoteze de calcul :

— reazemele elastice au acţiune bilaterală ;

— coeficientul de tasare a terenului k este acelaşi pe toate reazemele ;

— se admite ipoteza lui Winkler ;

— grinda este încărcată numai pe deschiderile libere l_i dintre reazeme ;

— grinda are moment de inerţie constant pe toată lungimea sa.

Se va face un studiu general pentru calculul deformaţiilor şi eforturilor în orice secţiune, urmat de tratarea unui exemplu numeric.

1. STUDIUL EFORTURILOR ŞI DEFORMAŢIILOR

Se consideră un reazem elastic intermediar, de lungime a_i, deformat sub acţiunea sarcinilor aplicate pe grindă (fig. 2). Conform ipotezei lui Winkler,

$$p(x) = kv(x).$$

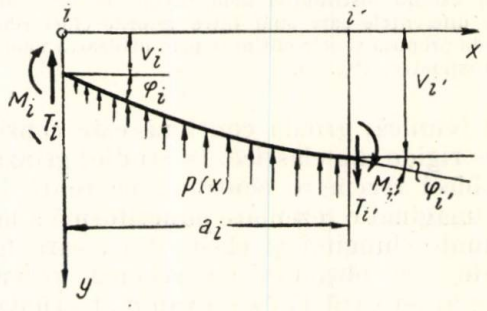


Fig. 2

Rezolvînd ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate pentru grinda pe teren elastic

$$EI_z \frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} + kv = 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant a_i)$$

şi exprimînd soluţia şi primele trei derivate cu ajutorul funcţiilor fundamentale ale lui Krîlov, după determinarea constantelor de integrare se obţin expresiile deformaţiilor şi eforturilor într-o secţiune x a grinzii :

$$\left.\begin{aligned}
v_x &= V_1(mx)\cdot v_i + \frac{V_2(mx)}{m}\cdot\varphi_i - \frac{V_3(mx)}{m^2EI_z}\cdot M_i - \frac{V_4(mx)}{m^3EI_z}\cdot T_i \\
\varphi_x &= -4mV_4(mx)\cdot v_i + V_1(mx)\cdot\varphi_i - \frac{V_2(mx)}{mEI_z}\cdot M_i - \frac{V_3(mx)}{m^2EI_z}\cdot T_i \\
M_x &= 4m^2EI_zV_3(mx)\cdot v_i + 4mEI_zV_4(mx)\cdot\varphi_i + \\
&\qquad + V_1(mx)\cdot M_i + \frac{V_2(mx)}{m}\cdot T_i \\
T_x &= 4m^3EI_zV_2(mx)\cdot v_i + 4m^2EI_zV_3(mx)\cdot\varphi_i - \\
&\qquad - 4mV_4(mx)M_i + V_1(mx)\cdot T_i
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

în care $m = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI_z}}$, V_1, V_2, V_3, V_4 sînt funcţiile fundamentale ale lui Krîlov calculate în secţiunea de coordonată x, iar v_i, φ_i, M_i, T_i reprezintă deformaţiile şi eforturile în extremitatea i a reazemului, de coordonată $x = 0$, considerate ca parametri iniţiali.

Se observă că relaţiile (1) se pot scrie matriceal :

$$\begin{Vmatrix} v_x \\ \varphi_x \\ M_x \\ T_x \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} V_1(mx) & \frac{V_2(mx)}{m} & -\frac{V_3(mx)}{m^2EI_z} & -\frac{V_4(mx)}{m^3EI_z} \\ -4mV_4(mx) & V_1(mx) & -\frac{V_2(mx)}{mEI_z} & -\frac{V_3(mx)}{m^2EI_z} \\ 4m^2V_3(mx)EI_z & 4mV_4(mx)EI_z & V_1(mx) & \frac{V_2(mx)}{m} \\ 4m^3V_2(mx)EI_z & 4m^2V_3(mx)EI_z & -4mV_4(mx) & V_1(mx) \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ M_i \\ T_i \end{Vmatrix} \quad (2)$$

Notînd matricea din membrul stîng

$$\| v_x \|$$

şi matricele din membrul drept respectiv

$$\| V_x \|, \quad \| v_i \|,$$

relaţiile dintre eforturi şi deformaţii la extremităţile (i, i') ale reazemului se pot scrie

$$\| v_{i'} \| = \| V_i \| \times \| v_i \|, \quad (3)$$

unde

$$\| V_i \| = \| V_{x=a_i} \|.$$

Pentru porţiunea de grindă de lungime l_i cuprinsă între două reazeme elastice (fig. 3), se pot scrie, considerînd originea în punctul i', următoarele expresii ale deformaţiilor şi eforturilor din secţiunea x [4]:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{i'} + \varphi_{i'} \cdot x - \frac{M_{i'} \cdot x^2}{2EI_z} - \frac{T_{i'} \cdot x^3}{6EI_z} + v_{ei} \\ \varphi_x &= \varphi_{i'} - \frac{M_{i'} \cdot x}{EI_z} - \frac{T_{i'} x^2}{2EI_z} + \varphi_{ei} \\ M_x &= M_{i'} + T_{i'} x + M_{ei} \\ T_x &= T_{i'} + T_{ei} \\ &\text{unde } 0 \leqslant x \leqslant l_i . \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

S-au notat cu v_{ei}, φ_{ei}, M_{ei}, T_{ei} deformaţiile şi eforturile produse în secţiunea x de încărcările exterioare de pe tronsonul de lungime l_i.

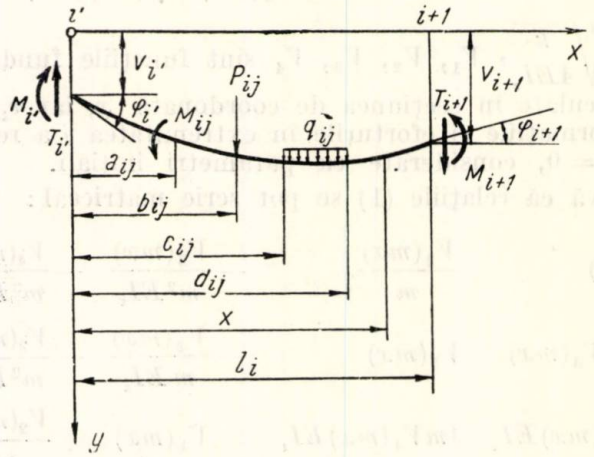


Fig. 3

În figura 3 indicii **i** reprezintă tronsonul de grindă **i**, iar indicii **j** — putînd lua diferite valori — reprezintă secţiunile în care se aplică sarcinile.

Mărimile v_{ei}, φ_{ei}, M_{ei}, T_{ei} au expresiile

$$\left.\begin{aligned} v_{ei} &= \sum_j \frac{M_{ij}(x-a_{ij})^2}{2EI_z} + \sum_j \frac{P_{ij}(x-b_{ij})^3}{6EI_z} + \sum_j \frac{q_{ij}(x-c_{ij})^4}{24EI_z} - \sum_j \frac{q_{ij}(x-d_{ij})^4}{24EI_z} \\ \varphi_{ei} &= \sum_j \frac{M_{ij}(x-a_{ij})}{EI_z} + \sum_j \frac{P_{ij}(x-b_{ij})^2}{2EI_z} + \sum_j \frac{q_{ij}(x-c_{ij})^3}{6EI_z} - \sum_j \frac{q_{ij}(x-d_{ij})^3}{6EI_z} \\ M_{ei} &= -\sum_j M_{ij} - \sum_j P_{ij}(x-b_{ij}) - \sum_j \frac{q_{ij}(x-c_{ij})^2}{2} + \sum_j \frac{q_{ij}(x-d_{ij})^2}{2} \\ T_{ei} &= -\sum_j P_{ij} - \sum_j q_{ij}(x-c_{ij}) + \sum_j q_{ij}(x-d_{ij}) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

unde a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, $d_{ji} \leqslant x$.

Relaţiile (4) se pot scrie de asemenea matriceal :

$$\begin{Vmatrix} v_x \\ \varphi_x \\ M_x \\ T_x \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & x & -\frac{x^2}{2EI_z} & -\frac{x^3}{6EI_z} \\ 0 & 1 & -\frac{x}{EI_z} & -\frac{x^2}{2EI_z} \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_{i'} \\ \varphi_{i'} \\ M_{i'} \\ T_{i'} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} v_{ei} \\ \varphi_{ei} \\ M_{ei} \\ T_{ei} \end{Vmatrix} \tag{6}$$

Se notează matricele care intră în relaţia (6), respectiv

$$\| v_x \|, \quad \| U_x \|, \quad \| v_{i'} \|, \quad \| v_{ei} \|,$$

astfel că ea devine

$$\| v_x \| = \| U_x \| \times \| v_{i'} \| + \| v_{ei} \|. \tag{7}$$

Pentru extremitatea $i+1$ a tronsonului considerat, relaţia (7) devine

$$\| v_{i+1} \| = \| U_i \| \times \| v_{i'} \| + \| v_{ei} \|, \tag{7a}$$

unde

$$\| U_i \| = \| U_{x=l_i} \|.$$

Utilizînd condiţia de continuitate a grinzii în secţiunea i' (fig. 4), se poate înlocui în relaţia (7) expresia matricei $\| v_{i'} \|$ dată de relaţia (3). Se obţine

$$\| v_x \| = \| U_x \| \times \| V_i \| \times \| v_i \| + \| v_{ei} \|. \tag{8}$$
$$0 \leqslant x \leqslant l_i$$

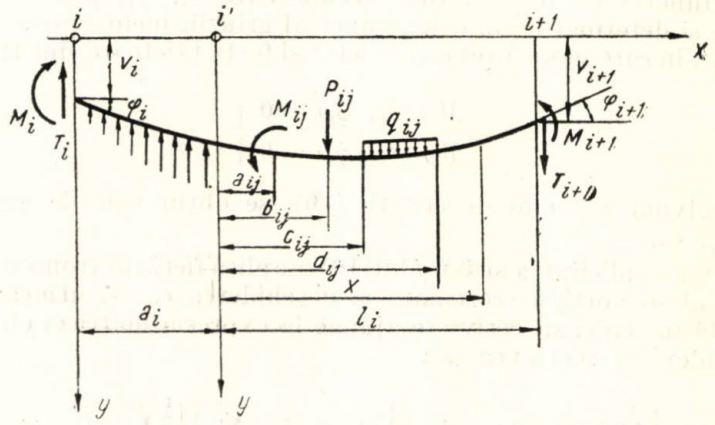


Fig. 4

Pentru $x = l_i$, relaţia (8) devine

$$\| v_{i+1} \| = \| U_i \| \times \| V_i \| \times \| v_i \| + \| v_{ei} \|. \tag{8a}$$

Relaţiile (8) şi (8 a) se pot utiliza dacă se cunosc, cel puţin pentru o valoare a indicelui i, eforturile şi deformaţiile. Cunoscînd, de exemplu, pentru capătul din stînga al grinzii valorile v_1, φ_1, M_1, T_1, se pot calcula succesiv mărimile v, φ, M, T pentru ori ce punct de pe grindă.

2. DETERMINAREA PARAMETRILOR INIŢIALI

În punctele extreme ale unei grinzi continue pe reazeme elastice lungi, momentele încovoietoare şi forţele tăietoare sînt nule, săgeţile şi

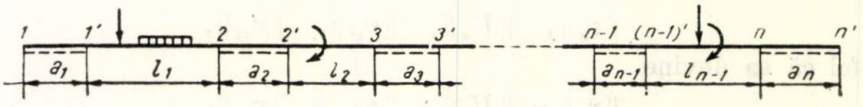


Fig. 5

rotirile putînd fi diferite de zero. Astfel , pentru $i = 1$ (fig. 5), matricea $\|v_i\|$ devine

$$\|v_1\| = \left\| \begin{matrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ M_1 \\ T_1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \tag{9}$$

În funcţie de deformaţiile necunoscute v_1, φ_1, pot fi exprimate eforturile şi deformaţiile în orice punct al grinzii, inclusiv cele din extremitatea n', în care momentul încovoietor şi forţa tăietoare sînt iarăşi nule :

$$\left.\begin{aligned} M_{n'}(v_1,\ \varphi_1) &= 0 \\ T_{n'}(v_1,\ \varphi_1) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii (10), se obţin valorile parametrilor iniţiali v_1, φ_1.

Pentru explicitarea sistemului (10) se aplică fiecărui tronson de grindă, format dintr-o porţiune rezemată şi deschiderea care-i urmează, relaţia (8 *a*). Prin înlocuiri succesive se ajunge la expresia matricei eforturilor şi deformaţiilor în secţiunea n :

$$\|v_n\| = \left[\prod_{i=n}^{1}(\|U_i\| \times \|V_i\|)\right] \times \|v_1\| + \sum_{k=1}^{n-2}\left\{\left[\prod_{i=n}^{k+1}(\|U_i\| \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \|V_i\|)\right] \times \|v_{ek}\|\right\} + \|v_{e(n-1)}\| .$$

Aplicînd relaţia (3) tronsonului $(n - n')$, se obţine

$$\|v_{n'}\| = \|V_n\| \times \|v_n\| = \|V_n\| \times \left[\prod_{i=n}^{1} (\|U_i\| \times V_i\|)\right] \times$$

$$\times \|v_1\| + \|V_n\| \times \sum_{k=1}^{n-2} \left\{\left[\prod_{i=n}^{k+1} (\|U_i\| \times \|V_i\|)\right] \times \|v_{ek}\|\right\} + \|V_n\| \times \|v_{e(n-1)}\|. \quad (11)$$

În membrul al doilea al relaţiei (11), toate matricele, în afara matricei $\|v_1\|$ definită de relaţia (9), se pot exprima prin datele numerice ale problemei; produsele lor calculate se obţin sub forma unor matrice numerice. Presupunînd efectuate aceste produse, relaţia (11) devine

$$\begin{Vmatrix} v_{n'} \\ \varphi_{n'} \\ M_{n'} \\ T_{n'} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} v_e \\ \varphi_e \\ M_e \\ T_e \end{Vmatrix} \quad (12)$$

în care

$$\|a_{ij}\| = \|V_n\| \times \left[\prod_{i=n}^{1} (\|U_i\| \times \|V_i\|)\right], \quad (12')$$

$$\|v_e\| = \|V_n\| \times \sum_{k=1}^{n-2} \left\{\left[\prod_{i=n}^{k+1} (\|U_i\| \times \|V_i\|)\right] \times \|v_{ek}\|\right\} + \|V_n\| \times \|v_{e(n-1)}\|. \quad (12'')$$

Identificînd termenii din ultimele două linii ale relaţiei (12), se obţine sistemul căutat:

$$\left.\begin{aligned} M_{n'} &= a_{31} v_1 + a_{32} \varphi_1 + M_e = 0 \\ T_{n'} &= a_{41} v_1 + a_{42} \varphi_1 + T_e = 0 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Utilizînd soluţiile v_1, φ_1 ale acestui sistem şi relaţiile (8) şi (8 a), se pot determina pentru orice secţiune din grindă valorile eforturilor şi deformaţiilor.

Pentru grinzile cu momente de inerţie variabile în trepte, dar constante între punctele de discontinuitate, se scriu relaţiile (3) şi (7 a) pentru porţiunile cu moment de inerţie constant, punînd apoi condiţii de continuitate a eforturilor şi deformaţiilor şi în punctele de discontinuitate a momentelor de inerţie [3]. Dacă în porţiunile rezemate se aplică pe grindă sarcini exterioare, în relaţiile (1) apar termeni suplimentari care exprimă efectul acestor sarcini asupra eforturilor şi deformaţiilor de pe grindă; ei formează o matrice de tipul $\|v_e\|$, care se adună membrului drept al relaţiei (3).

Pentru forţe uniform distribuite sau concentrate şi pentru cupluri concentrate, expresiile acestor termeni sînt date în lucrarea [4].

O mare parte din calculele necesare determinării parametrilor iniţiali pot fi efectuate la maşini electronice de calcul dacă complexitatea grinzii o cere.

3. APLICAŢIE NUMERICĂ

Se va ilustra metoda de calcul propusă, determinînd eforturile şi deformaţiile la o grindă continuă pe trei reazeme de lungime dată, încărcată între reazeme cu o sarcină uniform distribuită (fig. 6). Iniţial, problema va fi rezolvată pentru următoarele date numerice :

$$a = 20 \text{ cm}; \quad m = \frac{1}{100}\text{cm}^{-1}; \qquad l = 100 \text{ cm}.$$

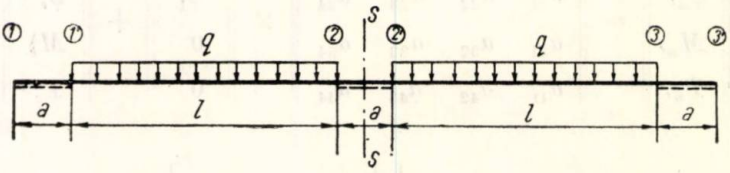


Fig. 6

Pentru a pune în evidenţă efectul modificării lungimii şi elasticităţii reazemelor, se vor modifica pe rînd valorile a şi m, rezolvînd problema şi pentru cazurile :

$$a = 10 \text{ cm}; \quad m = \frac{1}{100}\text{cm}^{-1}; \qquad l = 100 \text{ cm};$$

$$a = 20 \text{ cm}; \quad m = \frac{1}{10}\text{cm}^{-1}; \qquad l = 100 \text{ cm}.$$

Datele necesare rezolvării problemei sînt trecute în tabela 1.

Grinda fiind simetrică faţă de planul vertical S care trece prin mijlocul reazemului $2-2'$ (fig. 6), se va studia variaţia eforturilor şi deformaţiilor numai pentru prima jumătate de grindă.

Se consideră ca parametri iniţiali eforturile şi deformaţiile din secţiunea 1. Utilizînd relaţia (11), se scrie matricea deformaţiilor şi eforturilor în secţiunea $3'$ în funcţie de parametrii iniţiali şi de datele problemei :

$$\begin{aligned} \|v_{3'}\| = {} & \|V_3\| \times \|U_2\| \times \|V_2\| \times \|U_1\| \times \|V_1\| \times \|v_1\| + \\ & + \|V_3\| \times \|U_2\| \times \|V_2\| \times \|v_{e1}\| + \|V_3\| \times \|v_{e2}\|, \end{aligned} \tag{14}$$

în care, datorită simetriei

$$\|V_3\| = \|V_2\| = \|V_1\|; \quad \|U_2\| = \|U_1\|; \quad \|v_{e1}\| = \|v_{e2}\|.$$

Tabela 1

i	l_i cm	l_i^2 cm^2	l_i^3 cm^3	a_i cm	m cm^{-1}	ma_i	$V_1(ma_i)$	$V_2(ma_i)$	$V_3(ma_i)$	$V_4(ma_i)$	$v_{ei} = \frac{ql_i^4}{24EI_z}$ cm	$\varphi_{ei} = \frac{ql_i^3}{6EI_z}$ rad	$M_{ei} = -\frac{ql_i^2}{2}$ kgcm	$T_{ei} = -ql_i$ kg
1	100	100^2	100^3	20	$\frac{1}{100}$	0,2	0,9997	0,2	0,02	0,0014	$\frac{10^8}{24} \cdot \frac{q}{EI_z}$	$\frac{10^6}{6} \cdot \frac{q}{EI_z}$	$-\frac{10^4}{2} q$	$-10^2 q$
				10	$\frac{1}{100}$	0,1	1	0,1	0,005	0,0002				
				20	$\frac{1}{10}$	2	−1,5656	0,9558	1,649	1,2325				
2	100	100^2	100^3	20	$\frac{1}{100}$	0,2	0,9997	0,2	0,02	0,0014	$\frac{10^8}{24} \cdot \frac{q}{EI_z}$	$\frac{10^6}{6} \cdot \frac{q}{EI_z}$	$-\frac{10^4}{2} q$	$-10^2 q$
				10	$\frac{1}{100}$	0,1	1	0,1	0,005	0,0002				
				20	$\frac{1}{10}$	2	−1,5656	0,9558	1,649	1,2325				
3	—	—	—	20	$\frac{1}{100}$	0,2	0,9997	0,2	0,02	0,0014	—	—	—	—
				10	$\frac{1}{100}$	0,1	1	0,1	0,005	0,0002				
				20	$\frac{1}{10}$	2	−1,5656	0,9558	1,649	1,2325				

Înlocuind în (14) datele problemei şi dezvoltînd calculele, se determină pentru fiecare caz în parte parametrii iniţiali v_1, φ_1. Valorile deformaţiilor şi ale eforturilor pentru secţiunile 1, 1′, 2, S din prima jumătate a grinzii, calculate cu relaţiile (3) şi (7 a), sînt date în tabela 2.

Tabela 2

Mărimea	Valorile mărimilor enumerate pentru cazurile studiate		
	$a = 20$ cm ; $m = \frac{1}{100}$ cm^{-1}	$a = 10$ cm ; $m = \frac{1}{100}$ cm^{-1}	$a = 20$ cm ; $m = \frac{1}{10}$ cm^{-1}
v_1	$7{,}5869732.10^7 \frac{q}{EI_z}$	$16{,}127983.10^7 \frac{q}{EI_z}$	$-2{,}60662444.10^4 \frac{q}{EI_z}$
φ_1	$2{,}2980305.10^5 \frac{q}{EI_z}$	$2{,}0185.10^5 \frac{q}{EI_z}$	$2{,}25342223.10^3 \frac{q}{EI_z}$
v_1'	$8{,}0465793.10^7 \frac{q}{EI_z}$	$16{,}3298332.10^7 \frac{q}{EI_z}$	$6{,}2347520994.10^4 \frac{q}{EI_z}$
φ_1'	$2{,}2555434.10^5 \frac{q}{EI_z}$	$2{,}0056.10^5 \frac{q}{EI_z}$	$9{,}322700496.10^3 \frac{q}{EI_z}$
M_1'	$619{,}826827\ q$	$338{,}70766\ q$	$-608{,}3923096\ q$
T_1'	$62{,}53421\ q$	$64{,}915632\ q$	$48{,}979267704\ q$
v_2	$9{,}366641.10^7 \frac{q}{EI_z}$	$17{,}5008189.10^7 \frac{q}{EI_z}$	$4{,}0034501261.10^4 \frac{q}{EI_z}$
φ_2	$0{,}1756728.10^5 \frac{q}{EI_z}$	$0{,}0877774.10^5 \frac{q}{EI_z}$	$-8{,}0677404.10^3 \frac{q}{EI_z}$
M_2	$1873{,}247827\ q$	$1830{,}27086\ q$	$-710{,}4653392\ q$
T_2	$-37{,}4659\ q$	$-35{,}084368\ q$	$-51{,}020732296\ q$
v_S	$9{,}375591.10^7 \frac{q}{EI_z}$	$17{,}502898587.10^7 \frac{q}{EI_z}$	$-0{,}10252902117.10^4 \frac{q}{EI_z}$
φ_S	$-0{,}0004123.10^5 \frac{q}{EI_z} \approx 0$	$-0{,}0005752.10^5 \frac{q}{EI_z} \approx 0$	$0{,}000799137828.10^4 \frac{q}{EI_z} \approx 0$
M_S	$1686{,}0622\ q$	$1745{,}8603\ q$	$-829{,}076380838\ q$
T_S	$0{,}0206\ q \approx 0$	$-0{,}08068\ q \approx 0$	$0{,}047887387\ q \approx 0$

În figura 7 s-au reprezentat diagramele momentelor încovoietoare pentru grinda studiată în cele trei variante.

Pentru a evidenţia diferenţele care apar între valorile eforturilor obţinute prin metoda propusă şi cele obţinute prin utilizarea unor scheme de calcul aproximative, se va studia grinda din figura 6 în următoarele variante :

a) grindă pe reazeme punctiforme elastice,

b) grindă pe reazeme punctiforme rigide,

c) grindă încastrată la capete.

În cazul (*a*), reazemele punctiforme se amplasează în punctele de aplicație a rezultantei reacțiunilor reazemelor lungi; drept constantă

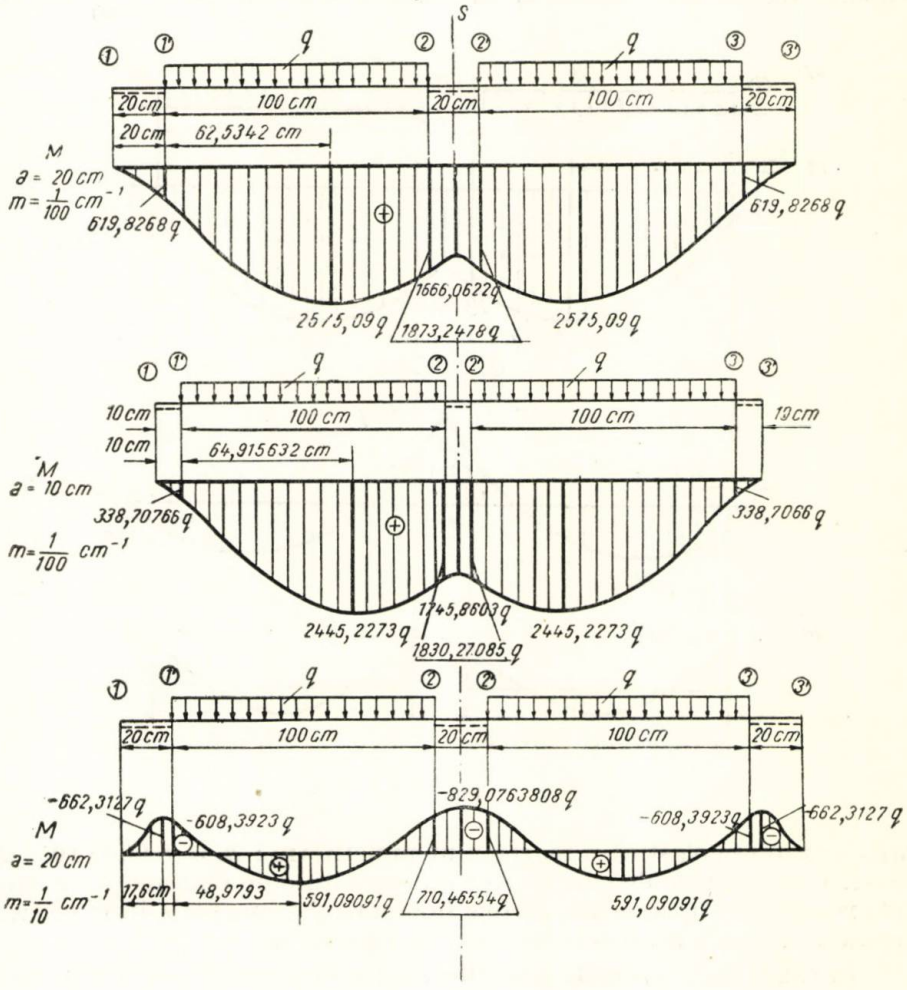


Fig. 7

elastică pentru reazemul punctiform, se ia raportul dintre rezultanta reacțiunilor reazemului lung și săgeata care apare în punctul de aplicație al acestei rezultante. O astfel de aproximare a reazemului lung are sens numai în cazul mediilor foarte deformabile (pentru exemplul considerat la $m = \frac{1}{100}\ \text{cm}^{-1}$), deoarece caracteristicile de încastrare elastică a

reazemului lung cu rigiditate mare nu permit aproximarea acestuia cu un reazem punctiform. Pentru utilizarea acestei scheme de calcul este necesară determinarea prealabilă a parametrilor inițiali prin metoda propusă. Utilizînd datele din tabela 2, în cazul $a = 20$ cm, $m = \frac{1}{100}$ cm^{-1}, se

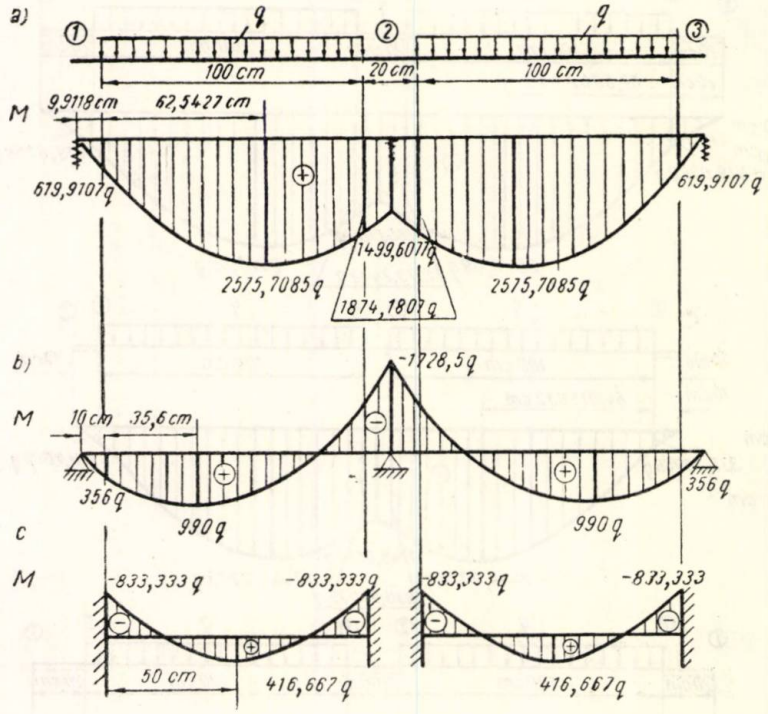


Fig. 8

obține constanta elastică a reazemului punctiform : $k_1 = 8{,}000 \cdot 10^{-7}\ EI_z$ kg/cm. Din ecuațiile de echilibru și din condițiile de deformație se calculează reacțiunile în reazeme, forțele tăietoare și momentele încovoietoare, acestea din urmă fiind reprezentate în figura 8*a*.

În cazul (*b*), reazemele punctiforme rigide se amplasează la mijlocul suprafețelor de rezemare ale grinzii din figura 6. Această schemă este de obicei folosită în calculele curente, datorită simplității sale. Reacțiunile în reazeme se determină cu metoda uzuală, introducînd ca necunoscută static nedeterminată momentul în reazemul intermediar și aplicînd ecuația celor trei momente. Distribuția momentelor încovoietoare în grindă este arătată în diagrama din figura 8*b*.

În cazul (*c*) se consideră tronsonul dintre două reazeme încastrat rigid la capete. Distribuția momentelor încovoietoare este dată în figura 8*c*.

Tabela 3

Nr. crt.	Schema de calcul	M_{max} kgcm	x cm
1	Grinda continuă pe reazeme elastice lungi $a = 20$ cm ; $m = \frac{1}{100}$ cm^{-1}	2575,09 q	62,5342
2	Idem $a = 10$ cm ; $m = \frac{1}{100}$ cm^{-1}	2445,2273 q	64,915632
3	Grinda continuă pe reazeme punctiforme elastice $k_1 = 8{,}000.10^{-7}$ kg/cm	2576,7085 q	62,5427
4	Grinda continuă pe reazeme punctiforme rigide	$-1728{,}5\ q$	110
5	Grinda încastrată la capete	$-833{,}33\ q$	100 (0)
6	Grinda continuă pe reazeme elastice lungi $a = 20$ cm ; $m = \frac{1}{10}$ cm^{-1}	$-829{,}0763808\ q$	110

În tabela 3 se prezintă, comparativ, valorile momentelor încovoietoare maxime şi abscisele secţiunilor în care ele se produc, măsurate de la secţiunea unde începe aplicarea sarcinii uniform distribuite.

4. CONCLUZII

În funcţie de coeficientul m, care depinde de modulul de tasare al reazemului elastic şi de rigiditatea de încovoiere a grinzii, problema poate fi tratată după diferite scheme de aproximare. Pentru valori mici ale lui m (reazeme moi) se poate considera o rezemare elastică punctiformă. La valori foarte mari ale lui m, reazemele lungi pot fi înlocuite prin încastrări totale. În cazuri intermediare trebuie luată în considerare elasticitatea şi lungimea reazemelor, aplicînd relaţiile stabilite.

Primită la redacţie la 16 februarie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Buzdugan, *Grinzi pe reazeme elastice de lungime dată*, St. cerc. mec. apl., **IX**, *2* (1958).
2. И. В. Кузнецов, *Упругое основание*. Москва, Гос. изд. литературы по строительству и архитектуре, 1952.
3. О. В. Лужин, *К расчету балок переменного сечения, лежащих на линейно-деформируемом основании*. Исследования по теории сооружений, **IX**, Москва, 1960.
4. S. D. Ponomariov, V. L. Biderman, C. K. Liharev, V. M. Makusin, N. N. Malinin, V. I. Feodosiev, *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*. Vol. I (traducere din limba rusă), Bucureşti, Edit. tehnică, 1960.

CALCULUL ELASTIC AL ARCELOR CIRCULARE SOLICITATE DE PRESIUNI VARIABILE [1])

de RADU PRIŞCU şi MIHAI CONSTANTINESCU

Institutul de construcţii, Bucureşti
Întreprinderea de construcţii hidroenergetice, Bucureşti

539.3

Plecînd de la ecuaţiile generale ale elasticităţii scrise în coordonate polare, se studiază starea de efort în arcele circulare solicitate de presiuni variabile. Pentru variaţia presiunilor se admite o lege de tipul $p = p_c \cos n\varphi$, care exprimă cu suficientă aproximaţie încărcarea arcelor componente ale barajelor arcuite. Punînd condiţiile de margine, se calculează coeficienţii elastici care figurează în funcţia de efort şi se determină apoi expresiile eforturilor şi ale deplasărilor.

Aplicînd formulele deduse la calculul unor arce caracteristice dintr-un baraj, se scot în relief diferenţele ce apar în repartiţia şi mărimea eforturilor în comparaţie cu rezultatele obţinute prin metodele de calcul obişnuite.

1. INTRODUCERE

Metodele curente de verificare a comportării statice a barajelor arcuite presupun că aceste structuri sînt constituite din punct de vedere static dintr-o reţea de console verticale, încastrate la bază, şi de arce orizontale, încastrate în versanţi. Punînd condiţiile de egalitate a deplasărilor care se produc în nodurile reţelei sub acţiunea presiunii hidrostatice, se poate determina, prin diferite procedee, repartiţia acestei presiuni după arce şi după console. Încărcările acestor elemente fiind cunoscute, se trece apoi la calculul eforturilor care apar în diferite secţiuni caracteristice.

[1]) Publicată în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **10**, *4* (1965) (în lb. franceză).

ST. CERC. MEC. APL. TOM 19 Nr. 4 P. 863–879 BUCUREŞTI 1965

În ce privește calculul arcelor componente ale unui baraj arcuit, în general de formă circulară, acesta se face în mod obișnuit aplicînd metodele cunoscute din statică. Toate acestea se bazează pe ipoteza repartiției plane a eforturilor, enunțată de Navier. Dacă pentru arcele subțiri a căror rază medie depășește de cel puțin cinci ori grosimea lor rezultatele care se obțin pe această cale sînt suficient de exacte, pentru arcele groase ele se îndepărtează de realitate. Acest lucru a fost verificat prin încercări pe modele și prin măsurători sistematice în natură.

Cu studiul riguros al arcelor circulare solicitate de o presiune uniformă la extrados, s-au ocupat, aplicînd teoria elasticității, diferiți autori, printre care menționăm pe M. Caquot și R. Chambaud. Cea mai completă tratare a problemei o găsim însă în lucrarea *Das Talsperrengewölbe*, întocmită în 1936 de K. Hofacker. El atrage atenția asupra repartiției neliniare a eforturilor și a diferențelor de valori care apar față de ipoteza lui Navier.

Este cunoscut însă că arcele componente ale unui baraj arcuit sînt solicitate în realitate de presiuni variabile, care descresc de la chei spre

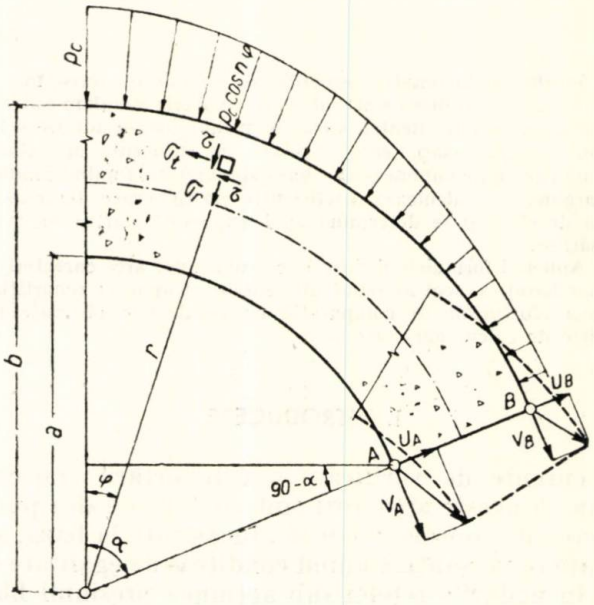


Fig. 1. — Schema de calcul pentru arcul solicitat de o presiune variabilă.

nașteri. Ne propunem deci în această lucrare să studiem arcele circular de grosime constantă, solicitate de presiuni hidrostatice care variază după legea generală (fig. 1)

$$p = p_c \cos n\varphi,$$

în care

p este presiunea hidrostatică într-o secțiune care face unghiul la centru φ,

p_c — presiunea hidrostatică la cheie ($\varphi = 0$),

p_n — presiunea hidrostatică la naștere ($\varphi = \alpha$),

$$n = \frac{1}{\alpha} \text{arc cos} \frac{p_n}{p_c} = \frac{1}{\alpha} \text{arc cos} k,$$

$k = \frac{p_n}{p_c}$ — raportul subunitar între presiunea la naștere și presiunea la cheie.

2. RELAȚII DE BAZĂ

Cu notațiile indicate în figura 1, ecuația generală a elasticității, scrisă în coordonate polare, este

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\right) = 0. \qquad (1)$$

După Airy, eforturile radiale, tangențiale și de lunecare au expresiile

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2},$$

$$\sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \qquad (2)$$

$$\tau = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right).$$

Funcția de efort F care satisface ecuațiile (1) și (2) este de forma

$$F(r, \varphi) = a_0 + b_0 r^2 + c_0 \ln r + d_0 r^2 \ln r + (a_1 r + b_1 r^3 + c_1 r^{-1} + d_1 r \ln r) \cos\varphi + (a_n r^n + b_n r^{n+2} + c_n r^{-n} + d_n r^{-n+2}) \cos n\varphi, \qquad (3)$$

în care $n \neq 0$ și $n \neq 1$, iar coeficienții elastici, deocamdată necunoscuți, sînt

a_0, b_0, c_0, d_0, pentru partea independentă de φ,

a_1, b_1, c_1, d_1, pentru partea care multiplică pe $\cos\varphi$,

a_n, b_n, c_n, d_n, pentru partea care multiplică pe $\cos n\varphi$.

Ţinînd seama de relaţiile (2) şi de expresia funcţiei de efort (3), expresiile eforturilor devin

$$\sigma_r = 2b_0 + \frac{c_0}{r^2} + d_0 (2 \ln r + 1) + \left(2 b_1 r - \frac{2 c_1}{r^3} + \frac{d_1}{r}\right) \cos\varphi -$$

$$- [n (n-1) a_n r^{n-2} + (n+1) (n-2) b_n r^n + n (n+1) c_n r^{-n-2} +$$

$$+ (n-1) (n+2) d_n r^{-n}] \cos n\varphi,$$

$$\sigma_t = 2b_0 - \frac{c_0}{r^2} + d_0 (2 \ln r + 3) + \left(6 b_1 r + \frac{2 c_1}{r^3} + \frac{d_1}{r}\right)\cos\varphi + \tag{4}$$

$$+ [n (n-1) a_n r^{n-2} + (n+1) (n+2) b_n r^n + n (n+1) c_n r^{-n-2} +$$

$$+ (n-1) (n-2) d_n r^{-n}] \cos n\varphi,$$

$$\tau = \left(2 b_1 r - \frac{2 c_1}{r^3} + \frac{d_1}{r}\right) \sin\varphi +$$

$$+ n [(n-1) a_n r^{n-2} + (n+1) b_n r^n - (n+1) c_n r^{-n-2} - (n-1) d_n r^{-n}] \sin n\varphi.$$

În coordonate polare, relaţiile dintre deformaţii şi deplasări sînt de forma

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu\sigma_t),$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{1}{E} (\sigma_t - \mu\sigma_r), \tag{5}$$

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{2}{E} (1 + \mu) \tau,$$

în care E reprezintă modulul de elasticitate al materialului arcului, iar μ coeficientul de deformaţie transversală al lui Poisson. Din relaţiile (5) rezultă

$$E \cdot u = \int (\sigma_r - \mu\sigma_t) \, dr + \lambda (\varphi),$$

$$E \cdot v = r \int \left[(\sigma_t - \mu\sigma_r) - \frac{Eu}{r}\right] d\varphi + \psi (r), \tag{6}$$

unde funcţiile de o singură variabilă $\lambda (\varphi)$ şi $\psi (r)$ trebuie să satisfacă ultima condiţie din (5), adică

$$\frac{d\psi}{dr} - \frac{\psi}{r} + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{2}{E} (1 + \mu) \tau. \tag{7}$$

Efectuînd calculele necesare, rezultă expresiile deplasărilor radiale (u) și tangențiale (v) :

$$Eu = [2(1-\mu)b_0 - (1+\mu)d_0]r - (1+\mu)\frac{c_0}{r} + 2(1-\mu)d_0 r\ln r +$$
$$+ 2d_1\varphi\sin\varphi + \left[(1-3\mu)b_1 r^2 + (1+\mu)\frac{c_1}{r^2} + (1-\mu)d_1\ln r\right]\cos\varphi +$$
$$+ [2(1-\mu)(b_n r^{n+1} + d_n r^{-n+1}) + (1+\mu)n(-a_n r^{n-1} - b_n r^{n+1} +$$
$$c_n r^{-n-1} + d_n r^{-n+1})]\cos n\varphi, \tag{8}$$

$$Ev = 4d_0 r\varphi + 2d_1\varphi\cos\varphi +$$
$$+ \left[(5+\mu)b_1 r^2 + (1+\mu)\frac{c_1}{r^2} - (1-\mu)d_1\ln r - (1+\mu)d_1\right]\sin\varphi +$$
$$+ [4(b_n r^{n+1} - d_n r^{-n+1}) + (1+\mu)n(a_n r^{n-1} + b_n r^{n+1} + c_n r^{-n-1} + d_n r^{-n+1})]\sin n\varphi.$$

3. DETERMINAREA COEFICIENȚILOR ELASTICI

Ținînd seama de condițiile de pe conturul interior ($r = a$) și exterior ($r = b$) și admițînd, așa cum s-a arătat, că presiunea hidrostatică variază după legea $p = p_c \cos n\varphi$, avem

$$\begin{cases} r = a \\ \tau = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} r = b \\ \tau = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} r = a \\ \sigma_r = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} r = b \\ \sigma_r = -p_c\cos n\varphi \end{cases} \tag{9}$$

Primele două condiții, referitoare la τ, conduc la relațiile

$$2b_1 a - \frac{2c_1}{a^3} + \frac{d_1}{a} = 0, \tag{10}$$

$$2b_1 b - \frac{2c_1}{b^3} + \frac{d_1}{b} = 0, \tag{11}$$

$$(n-1)a_n a^{n-2} + (n+1)b_n a^n - (n+1)c_n a^{-n-2} - (n-1)d_n a^{-n} = 0, \tag{12}$$

$$(n-1)a_n b^{n-2} + (n+1)b_n b^n - (n+1)c_n b^{-n-2} - (n-1)d_n b^{-n} = 0. \tag{13}$$

Cele două condiții referitoare la σ_r conduc la relațiile

$$2b_0 + \frac{c_0}{a^2} + d_0(2\ln a + 1) = 0, \tag{14}$$

$$2b_0 + \frac{c_0}{b^2} + d_0(2\ln b + 1) = 0, \tag{15}$$

$$(-n^2+n)a_n a^{n-2} + (-n^2+n+2)b_n a^n - (n^2+n)c_n a^{-n-2} -$$
$$- (n^2+n-2)d_n a^{-n} = 0, \tag{16}$$

$$(-n^2+n)a_n b^{n-2} + (-n^2+n+2)b_n b^n - (n^2+n)c_n b^{-n-2} -$$
$$- (n^2+n-2)d_n b^{-n} = -p_c. \tag{17}$$

Cele opt ecuaţii (10)—(17) conţin zece coeficienţi necunoscuţi, dintre care opt se pot exprima în funcţie de doi, care rămîn de determinat din alte condiţii (din cei 12 coeficienţi iniţiali, coeficienţii a_0 şi a_1 nu dau eforturi).

Astfel, din ecuaţiile (10), (11), (14) şi (15) rezultă

$$\begin{aligned} b_0 &= -\left(\frac{b^2 \ln b - a^2 \ln a}{b^2 - a^2} + \frac{1}{2}\right) d_0, \\ c_0 &= \frac{2\,a^2 b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a}\, d_0, \\ b_1 &= -\frac{1}{a^2 + b^2}\,\frac{d_1}{2}, \\ c_1 &= \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\,\frac{d_1}{2}, \end{aligned} \tag{18}$$

coeficienţii în expresiile cărora figurează încă d_0 şi d_1.

Rezolvînd sistemul de ecuaţii (12), (13), (16), (17), în care nu figurează d_0 şi d_1, se obţin după transformări relaţiile care dau direct expresiile coeficienţilor a_n, b_n, c_n şi d_n:

$$\begin{aligned} \frac{e}{p_c}(1-n)\,a^{3n}\,a_n &= b^2(b^{2n} - a^{2n}) + n(b^2 - a^2)\,a^{2n}, \\ \frac{e}{p_c}(1+n)\,a^{3n+2}\,b_n &= a^2(b^{2n} - a^{2n}) + n(b^2 - a^2)\,a^{2n}, \\ -\frac{e}{p_c}(1+n)\,a^n\,c_n &= b^2(b^{2n} - a^{2n}) + n(b^2 - a^2)\,b^{2n}, \\ -\frac{e}{p_e}(1-n)\,a^{n+2}\,d_n &= a^2(b^{2n} - a^{2n}) + n(b^2 - a^2)\,b^{2n}, \end{aligned} \tag{19}$$

unde s-a notat

$$\frac{e}{2} = \frac{n^2\,(b^2 - a^2)^2\,a^{2n-2}\,b^{2n-2} - (b^{2n} - a^{2n})^2}{a^{3n}\,b^n}. \tag{20}$$

Introducînd notaţiile

$$\begin{aligned} \overline{a} &= \frac{1}{(1-n)\,a^{3n}}\,[b^2(b^{2n} - a^{2n}) + n(b^2 - a^2)\,a^{2n}], \\ \overline{b} &= \frac{1}{(1+n)\,a^{3n+2}}\,[a^2(b^{2n} - a^{2n}) + n(b^2 - a^2)\,a^{2n}], \\ \overline{c} &= \frac{1}{(1+n)\,a^n}\,[b^2(b^{2n} - a^{2n}) + n(b^2 - a^2)\,b^{2n}], \\ \overline{d} &= \frac{1}{(1-n)\,a^{n+2}}\,[a^2(b^{2n} - a^{2n}) + n(b^2 - a^2)\,b^{2n}], \end{aligned} \tag{21}$$

expresiile (19) se transformă în

$$a_n = \bar{a}\frac{p_c}{e}, \quad c_n = \bar{c}\frac{p_c}{e},$$
$$b_n = \bar{b}\frac{p_c}{e}, \quad d_n = \bar{d}\frac{p_c}{e}. \tag{22}$$

Introducînd în expresiile eforturilor (4) și ale deplasărilor (8) coeficienții determinați pînă acum conform relațiilor (18) și (22), se obține:

— pentru eforturi:

$$\sigma_r = 2d_0\left[\ln\frac{r}{a} - \frac{b^2\ln\frac{b}{a}}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\right] + \frac{d_1 a}{r}\left[1-\frac{a^2}{b^2+a^2}\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{b^2}{r^2}\right)\right]\cos\varphi -$$
$$-\frac{p_c}{e}\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^n\left[\frac{n(n-1)a^2}{r^2}\bar{a}+(n+1)(n-2)\bar{b}\right]+\left(\frac{a}{r}\right)^n\left[\frac{n(n+1)a^2}{r^2}\bar{c}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(n-1)(n+2)\bar{d}\right]\right\}\cos n\varphi,$$

$$\sigma_t = 2d_0\left[1+\ln\frac{r}{a} - \frac{b^2\ln\frac{b}{a}}{b^2-a^2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\right] + \frac{d_1 a}{r}\left[1-\frac{a^2}{b^2+a^2}\left(3\frac{r^2}{a^2}-\frac{b^2}{r^2}\right)\right]\cos\varphi +$$
$$+\frac{p_c}{e}\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^n\left[\frac{n(n-1)a^2}{r^2}\bar{a}+(n+1)(n+2)\bar{b}\right]+\right. \tag{23}$$
$$\left.+\left(\frac{a}{r}\right)^n\left[\frac{n(n+1)a^2}{r^2}\bar{c}+(n-1)(n-2)\bar{d}\right]\right\}\cos n\varphi,$$

$$\tau = \frac{d_1 a}{r}\left[1-\frac{a^2}{b^2+a^2}\left(\frac{r^2}{a^2}+\frac{b^2}{r^2}\right)\right]\sin\varphi + n\frac{p_c}{e}\left\{\left(\frac{r}{a}\right)^n\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{(n-1)a^2}{r^2}\bar{a}+(n+1)\bar{b}\right]-\left(\frac{a}{r}\right)^n\left[\frac{(n+1)a^2}{r^2}\bar{c}+(n-1)\bar{d}\right]\right\}\sin n\varphi;$$

— pentru deplasările radiale și tangențiale:

$$\frac{E}{a}u = \frac{2rd_0}{a}\left[-1+(1-\mu)\left(\ln\frac{r}{a}-\frac{b^2}{b^2-a^2}\ln\frac{b}{a}\right)-\right.$$
$$\left.-(1+\mu)\frac{b^2}{b^2-a^2}\ln\frac{b}{a}\frac{a^2}{r^2}\right]+2d_1\varphi\sin\varphi + \tag{24}$$
$$+d_1\left[(1-\mu)\ln r+\frac{1+\mu}{2r^2}\frac{a^2b^2}{b^2+a^2}-\frac{1-3\mu}{2}\frac{r^2}{b^2+a^2}\right]\cos\varphi +$$
$$+\frac{rp_c}{ae}\left\{2(1-\mu)\left(\bar{b}\frac{r^n}{a^n}+\bar{d}\frac{a^n}{r^n}\right)-n(1+\mu)\left[\frac{r^n}{a^n}\left(\frac{a^2}{r^2}\bar{a}+\bar{b}\right)-\frac{a^n}{r^n}\left(\frac{a^2}{r^2}\bar{c}+\bar{d}\right)\right]\right\}\cos n\varphi.$$

$$\frac{E}{a}v = 4\frac{rd_0}{a}\varphi + 2d_1\varphi\cos\varphi +$$

$$+ d_1\left[(1-\mu)\ln r - \frac{1+\mu}{2}\frac{a^2b^2}{r^2}\frac{}{b^2+a^2} + \frac{\mu+5}{2}\frac{r^2}{b^2+a^2} + 1 + \mu\right]\sin\varphi +$$

$$+ \frac{rp_c}{ae}\left\{4\left(\bar{b}\frac{r^n}{a^n} - \bar{d}\frac{a^n}{r^n}\right) + n(1+\mu)\left[\frac{r^n}{a^n}\left(\frac{a^2}{r^2}\bar{a} + \bar{b}\right) + \frac{a^n}{r^n}\left(\frac{a^2}{r^2}\bar{c} + \bar{d}\right)\right]\right\}\sin n\varphi.$$

Se observă că deplasările specifice $\frac{u}{a}$ și $\frac{v}{a}$ rămîn funcție de raza vectoare r prin intermediul termenului $\ln r$.

Din cei 12 coeficienți elastici inițiali au mai rămas de determinat încă doi, adică d_0 și d_1, de care sînt funcție și b_0, c_0, b_1 și c_1, conform relațiilor (18). Mai sînt necesare deci încă două relații, pe care le vom deduce din condițiile de rezemare.

Condiția de încastrare perfectă nu poate fi exprimată riguros din punct de vedere matematic, deoarece se impune ca deplasările u și v și rotația θ să fie nule pe întreaga secțiune de la naștere ($\varphi = \pm\alpha$ și $a < r < b$).

K. Hofacker formulează condiția de încastrare pe baza deplasărilor din punctele A ($r = a$, $\varphi = \alpha$) și B ($r = b$, $\varphi = \alpha$), scriind că

— deplasarea punctului A după coarda arcului este nulă :

$$u_A\sin\alpha + v_A\cos\alpha = 0, \tag{25}$$

— rotația secțiunii de la naștere este nulă :

$$v_A - v_B = 0. \tag{26}$$

Se calculează deci în prealabil expresiile lui u_A, v_A și v_B utilizînd relațiile (24), și anume :

$$\frac{E}{a}\cdot u_A = 2d_0\left(-1 - \frac{2b^2}{b^2-a^2}\ln\frac{b}{a}\right) + 2d_1\alpha\sin\alpha +$$

$$+ d_1\left[(1-\mu)\ln a + \frac{1+\mu}{2}\frac{b^2}{b^2+a^2} - \frac{1-3\mu}{2}\frac{a^2}{b^2+a^2}\right]\cos\alpha + \tag{27}$$

$$+ \frac{p_c}{e}[2(1-\mu)(\bar{b}+\bar{d}) - n(1+\mu)(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}-\bar{d})]\cos n\alpha,$$

$$\frac{E}{a}v_A = 4d_0\alpha + 2d_1\alpha\cos\alpha -$$

$$- d_1\left[(1-\mu)\ln a - \frac{1+\mu}{2}\frac{b^2}{b^2+a^2} + \frac{\mu+5}{2}\frac{a^2}{b^2+a^2} + 1 + \mu\right]\sin\alpha +$$

$$+ \frac{p_c}{e}[4(\bar{b}-\bar{d}) + n(1+\mu)(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d})]\sin n\alpha, \tag{28}$$

$$\frac{E}{a}v_B=4d_0\,\alpha\,\frac{b}{a}+2\,d_1\,\alpha\,\cos\alpha-$$

$$-d_1\left[(1-\mu)\ln b-\frac{1+\mu}{2}\,\frac{a^2}{b^2+a^2}+\frac{\mu+5}{2}\,\frac{b^2}{b^2+a^2}+1+\mu\right]\sin\alpha+ \tag{29}$$

$$+\frac{p_e}{e}\,\frac{b}{a}\left\{4\left(\overline{b}\,\frac{b^n}{a^n}-\overline{d}\,\frac{a^n}{b^n}\right)+n\,(1+\mu)\left[\frac{b^n}{a^n}\left(\frac{a^2}{b^2}\,\overline{a}+\overline{b}\right)+\frac{a^n}{b^n}\left(\frac{a^2}{b^2}\,\overline{c}+\overline{d}\right)\right]\right\}\sin n\,\alpha.$$

Introducînd expresiile (27), (28) şi (29) în relaţiile (25) şi (26), se obţine după lungi transformări sistemul de două ecuaţii care determină necunoscutele d_0 şi d_1:

$$\left(\alpha\,\operatorname{cotg}\alpha-\frac{b^2\ln\frac{b}{a}}{b^2-a^2}-\frac{1}{2}\right)2\,d_0+\left(\frac{\alpha}{\sin\alpha}-\frac{2\,a^2\cos\alpha}{b^2+a^2}\right)d_1= \tag{30}$$

$$=2\,\frac{p_e}{e}[(\overline{d}-\overline{b})\,\operatorname{cotg}\alpha\,\sin n\,\alpha-(\overline{b}+\overline{d})\,\cos n\,\alpha],$$

$$2\,d_0\,\alpha\,\frac{a-b}{a}+\frac{\sin\alpha}{2}\left[(3+\mu)\,\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}+(1-\mu)\ln\frac{b}{a}\right]d_1= \tag{31}$$

$$=2\,\frac{bp_e}{ae}\,\sin n\alpha\left\{\overline{d}\left(\frac{a}{b}-\frac{a^n}{b^n}\right)+\overline{b}\left(\frac{b^n}{a^n}-\frac{a}{b}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{n\,(1+\mu)}{4}\left[\frac{b^n}{a^n}\left(\frac{a^2}{b^2}\,\overline{a}+\overline{b}\right)+\frac{a^n}{b^n}\left(\frac{a^2}{b^2}\,\overline{c}+\overline{d}\right)\right]\right\}.$$

Făcînd notaţiile

$$M=\alpha\,\operatorname{cotg}\alpha-\frac{b^2}{b^2-a^2}\ln\frac{b}{a}-\frac{1}{2},$$

$$N=\alpha\,\frac{b-a}{a},$$

$$P=\frac{\alpha}{\sin\alpha}-\frac{2\,a^2}{b^2+a^2}\cos\alpha, \tag{32}$$

$$Q=\left[(3+\mu)\,\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}+(1-\mu)\,\ln\frac{b}{a}\right]\frac{\sin\alpha}{2},$$

$$R=2\,(\overline{d}-\overline{b})\,\operatorname{cotg}\,\alpha\,\sin\,n\,\alpha-(\overline{b}+\overline{d})\,\cos n\alpha,$$

$$S=2\,\frac{b}{a}\sin n\alpha\left\{\overline{d}\left(\frac{a}{b}-\frac{a^n}{b^n}\right)+\overline{b}\left(\frac{b^n}{a^n}-\frac{a}{b}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{n\,(1+\mu)}{4}\left[\frac{b^n}{a^n}\left(\frac{a^2}{b^2}\,\overline{a}+\overline{b}\right)+\frac{a^n}{b^n}\left(\frac{a^2}{b^2}\,\overline{c}+\overline{d}\right)\right]\right\}$$

și rezolvînd sistemul de ecuații (30), (31), rezultă

$$d_0 = \frac{p_c}{2e}\frac{RQ - PS}{MQ + NP} + \frac{p_c}{2e}\bar{d}_0, \tag{33}$$

$$d_1 = \frac{p_c}{e}\frac{MS + NR}{MQ + NP} = \frac{p_c}{e}\bar{d}_1. \tag{34}$$

Introducînd valorile lui d_0 și d_1 în relațiile (23), obținem expresiile finale ale eforturilor :

$$\sigma_r \frac{e}{p_c} = \bar{d}_0\left[\ln\frac{r}{a} - \frac{b^2 \ln\frac{b}{a}}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\right] + \bar{d}_1\frac{a}{r}\left[1 - \frac{a^2}{b^2 + a^2}\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{b^2}{r^2}\right)\right]\cos\varphi - \left\{\frac{r^n}{a^n}\left[\frac{n(n-1)a^2}{r^2}\bar{a} + (n+1)(n-2)\bar{b}\right] + \frac{a^n}{r^n}\left[\frac{n(n+1)a^2}{r^2}\bar{c} + (n-1)(n+2)\bar{d}\right]\right\}\cos n\varphi, \tag{35}$$

$$\sigma_t \frac{e}{p_c} = \bar{d}_0\left[1 + \ln\frac{r}{a} - \frac{b^2 \ln\frac{b}{a}}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\right] + \bar{d}_1\frac{a}{r}\left[1 - \frac{a^2}{b^2 + a^2}\left(3\frac{r^2}{a^2} - \frac{b^2}{r^2}\right)\right]\cos\varphi + \left\{\frac{r^n}{a^n}\left[\frac{n(n-1)a^2}{r^2}\bar{a} + (n+1)(n+2)\bar{b}\right] + \frac{a^n}{r^n}\left[\frac{n(n+1)a^2}{r^2}\bar{c} + (n-1)(n-2)\bar{d}\right]\right\}\cos n\varphi, \tag{36}$$

$$\tau \frac{e}{p_c} = \bar{d}_1\frac{a}{r}\left[1 - \frac{a^2}{b^2 + a^2}\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{b^2}{r^2}\right)\right]\sin\varphi + n\left\{\frac{r^n}{a^n}\left[\frac{(n-1)a^2}{r^2}\bar{a} + (n+1)\bar{b}\right] - \frac{a^n}{r^n}\left[\frac{(n+1)a^2}{r^2}\bar{c} + (n-1)\bar{d}\right]\right\}\sin n\varphi, \tag{37}$$

iar pentru deplasări, înlocuind în relațiile (24), obținem expresiile finale ale deplasărilor :

$$u\frac{eE}{ap_c} = \bar{d}_0\frac{r}{a}\left[-1 + (1-\mu)\left(\ln\frac{r}{a} - \frac{b^2 \ln\frac{b}{a}}{b^2 - a^2}\right) - (1+\mu)\frac{b^2 \ln\frac{b}{a}}{b^2 - a^2}\frac{a^2}{r^2}\right] + 2\bar{d}_1\varphi\sin\varphi + \bar{d}_1\left[(1-\mu)\ln r + \frac{1+\mu}{2r^2}\frac{a^2b^2}{b^2 + a^2} - \frac{1-3\mu}{2}\frac{r^2}{b^2 + a^2}\right]\cos\varphi +$$

$$+\left\{2(1-\mu)\left(\bar{b}\frac{r^n}{a^n}+\bar{d}\frac{a^n}{r^n}\right)-n(1+\mu)\left[\frac{r^n}{a^n}\left(\frac{a^2}{r^2}\bar{a}+\bar{b}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{a^n}{r^n}\left(\frac{a^2}{r^2}\bar{c}+\bar{d}\right)\right]\right\}\cos n\varphi, \tag{38}$$

$$v\frac{eE}{ap_c}=2\bar{d}_0\frac{r}{a}\varphi+2\bar{d}_1\varphi\cos\varphi-\bar{d}_1\left[(1-\mu)\ln r-\frac{1+\mu}{2r^2}\frac{a^2b^2}{b^2+a^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mu+5}{2}\frac{r^2}{b^2+a^2}+1+\mu\right]\sin\varphi+\left\{4\left(\bar{b}\frac{r^n}{a^n}-\bar{d}\frac{a^n}{r^n}\right)+n(1+\right.$$

$$\left.+\mu)\left[\frac{r^n}{a^n}\left(\frac{a^2}{r^2}\bar{a}+\bar{b}\right)+\frac{a^n}{r^n}\left(\frac{a^2}{b^2}\bar{c}+\bar{d}\right)\right]\right\}\sin n\varphi. \tag{39}$$

Remarcăm proporționalitatea eforturilor cu raportul $\frac{p_c}{e}$, precum și proporționalitatea deplasărilor cu raportul $\frac{ap_c}{eE}$.

4. APLICAȚIE PRACTICĂ ȘI CONCLUZII

Formulele deduse în lucrarea de față au fost aplicate la calculul a patru arce de diferite dimensiuni. Ele reprezintă arcele echivalente, de

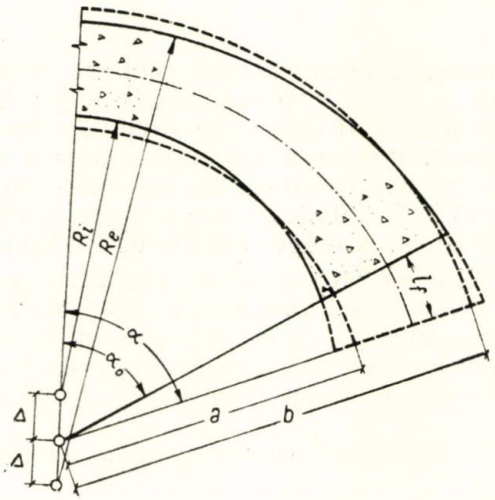


Fig. 2. — Determinarea arcului echivalent de grosime constantă.

grosime constantă, a unor arce caracteristice din barajul Vidraru-Argeș. Cum în realitate aceste arce au raze de curbură diferite pentru intrados

(R_i) și extrados (R_e) și deci grosimea ușor crescătoare spre nașteri, arcele echivalente s-au dedus punînd condițiile ca (fig. 2):

— lungimea lor, măsurată în ax, să fie identică,

— centrul de curbură al arcului echivalent să se găsească la mijlocul distanței dintre cele două centre,

— grosimea medie să rezulte împărțind suprafața arcului la lungimea măsurată în ax.

Pentru a se ține seama de rezemarea elastică a barajului pe versanți, s-a aplicat artificiul lui F. Vogt, care presupune arcele prelungite dincolo de fundațiile reale cu cîte o lungime egală cu $0{,}45 \frac{E_b}{E_s}(R_e - R_i - 2\Delta\cos\alpha_0)$. Admițînd pentru raportul între modulii de elasticitate ai betonului și stîncii $\frac{E_b}{E_s} = 1{,}5$ rezultă

$$l_f = 0{,}45 \times 1{,}5\ (R_e - R_i - 2\Delta\cos\alpha_0),$$

$$\alpha = \alpha_0 + 77{,}3\,\frac{R_e - R_i - 2\Delta\cos\alpha_0}{R_e + R_i},$$

$$a = R_i + \Delta\frac{\sin\alpha}{\alpha},$$

$$b = R_e - \Delta\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \qquad (40)$$

Cele patru arce echivalente deduse conform relațiilor de mai sus sînt caracterizate de rapoarte între raza medie și grosime de 6,86, 4,22, 2,85 și 2,44, primul putînd fi considerat drept arc subțire, iar ultimele trei drepte arce groase. Presiunea variabilă a apei a fost luată pentru fiecare arc identică cu aceea rezultată din calculul efectuat după metoda sarcinilor de probă (T.L.M.). Remarcăm că raportul dintre presiunea la naștere și cea de la cheie parcurge valorile 0,815, 0,843, 0,765 și 0,731.

Rezultatele calculelor făcute pentru eforturile tangențiale, radiale și de lunecare sînt reprezentate în figurile 3, 4, 5 și 6. Pentru o suficientă exactitate, cifrele s-au introdus în calcul cu cel puțin șase zecimale. Calculele numerice, destul de laborioase, au fost efectuate de către inginerii R. Mitulescu și A. Burlacu, cărora autorii le aduc pe această cale mulțumirile lor.

Examinînd diagramele de eforturi, putem face următoarele constatări:

— repartiția eforturilor tangențiale σ_t este cu atît mai diferită de cea liniară, cu cît arcele sînt mai groase; eforturile maxime de compresiune apar mai reduse, cu diferențe procentuale care se ridică pînă la 25%, în timp ce în zonele opuse lor apar eforturi de tensiune care nu rezultă aplicînd metodele de calcul din statică;

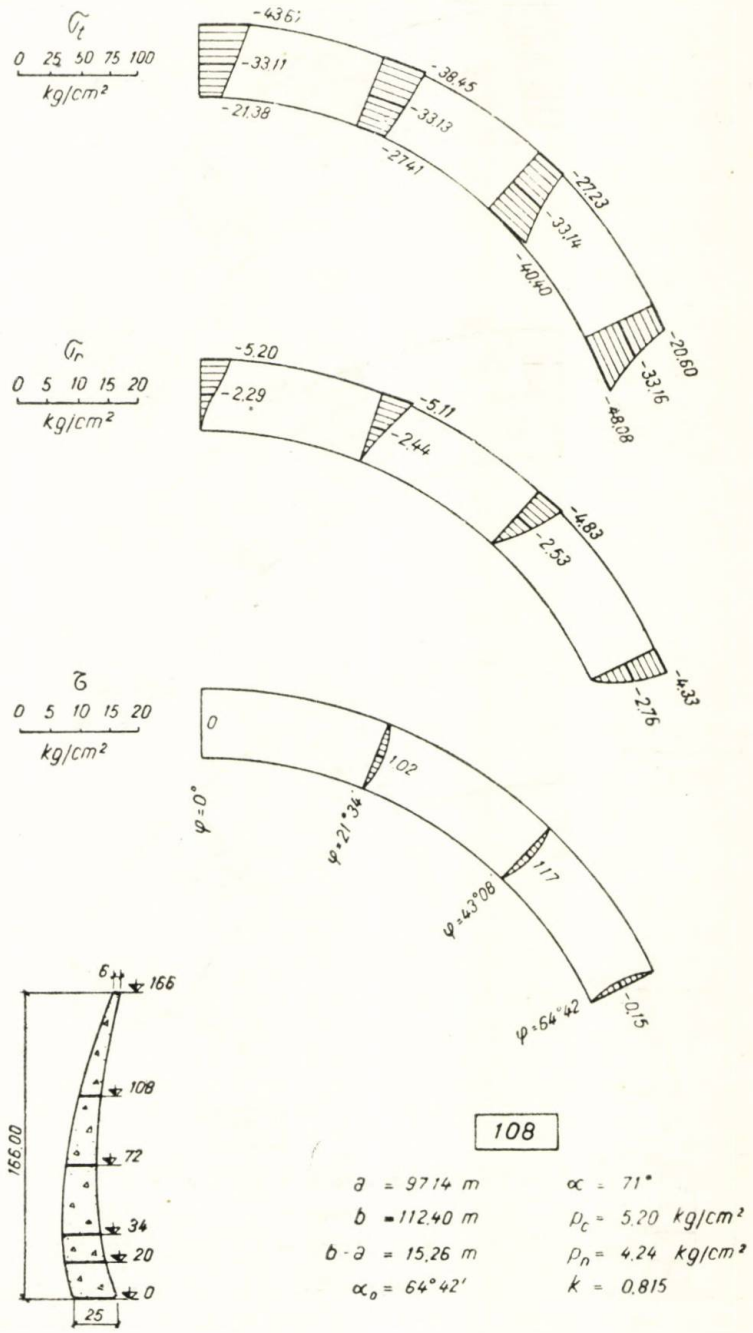


Fig. 3. — Variația eforturilor în arcul de la cota 108.

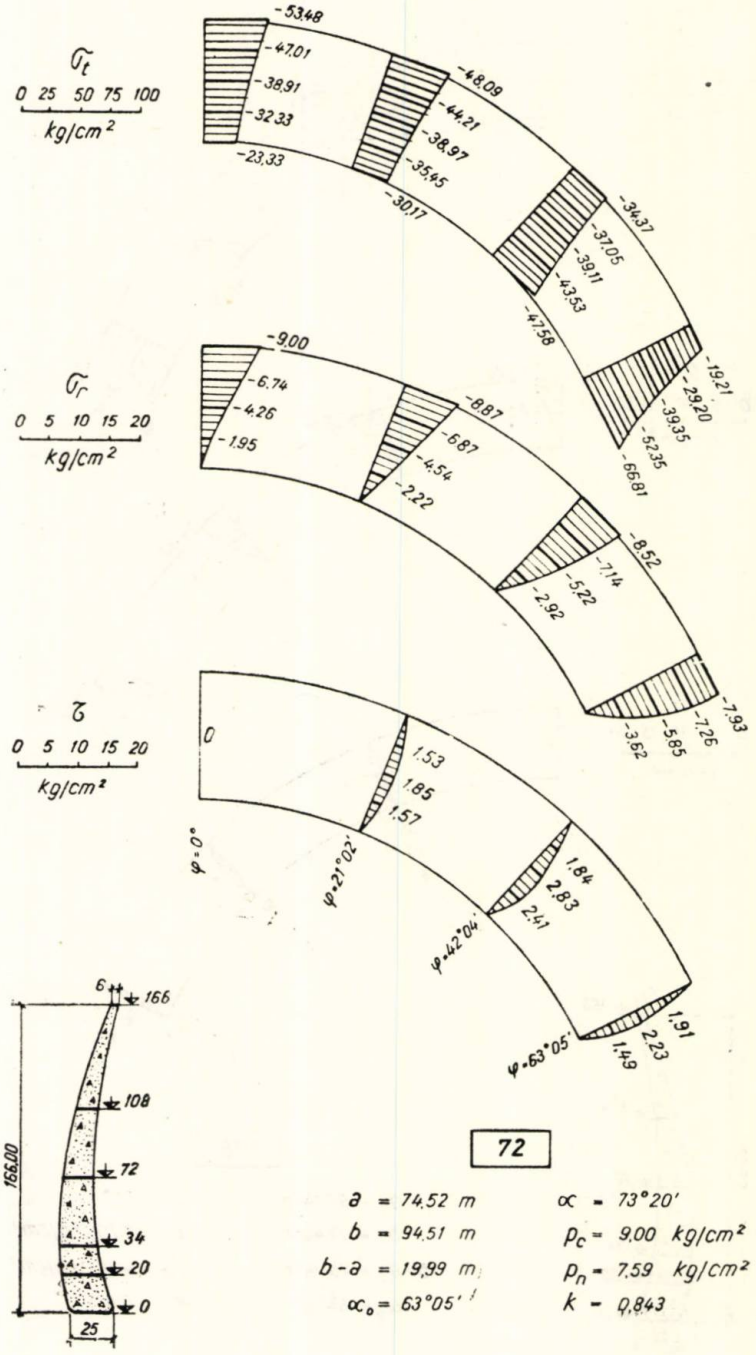


Fig. 4. — Variația eforturlior în arcul de la cota 72.

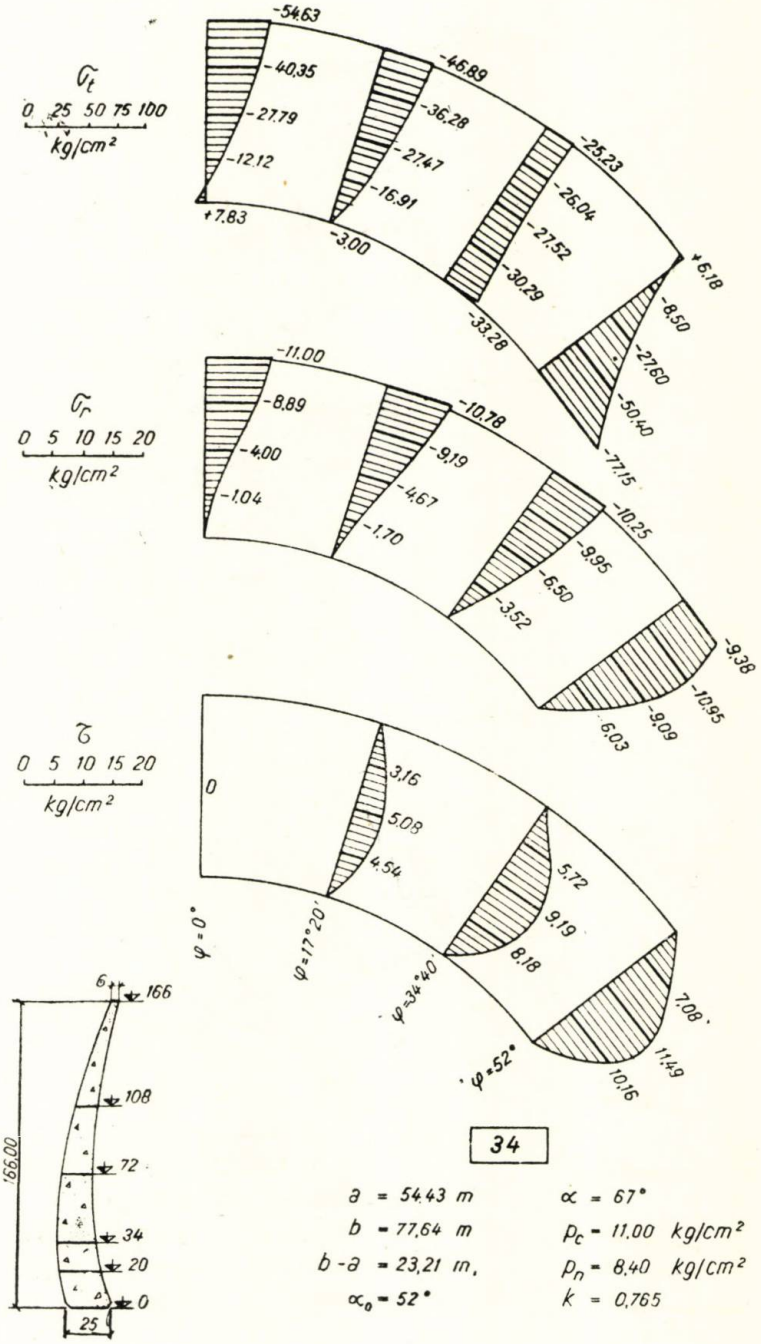


Fig. 5. — Variația eforturilor în arcul de la cota 34.

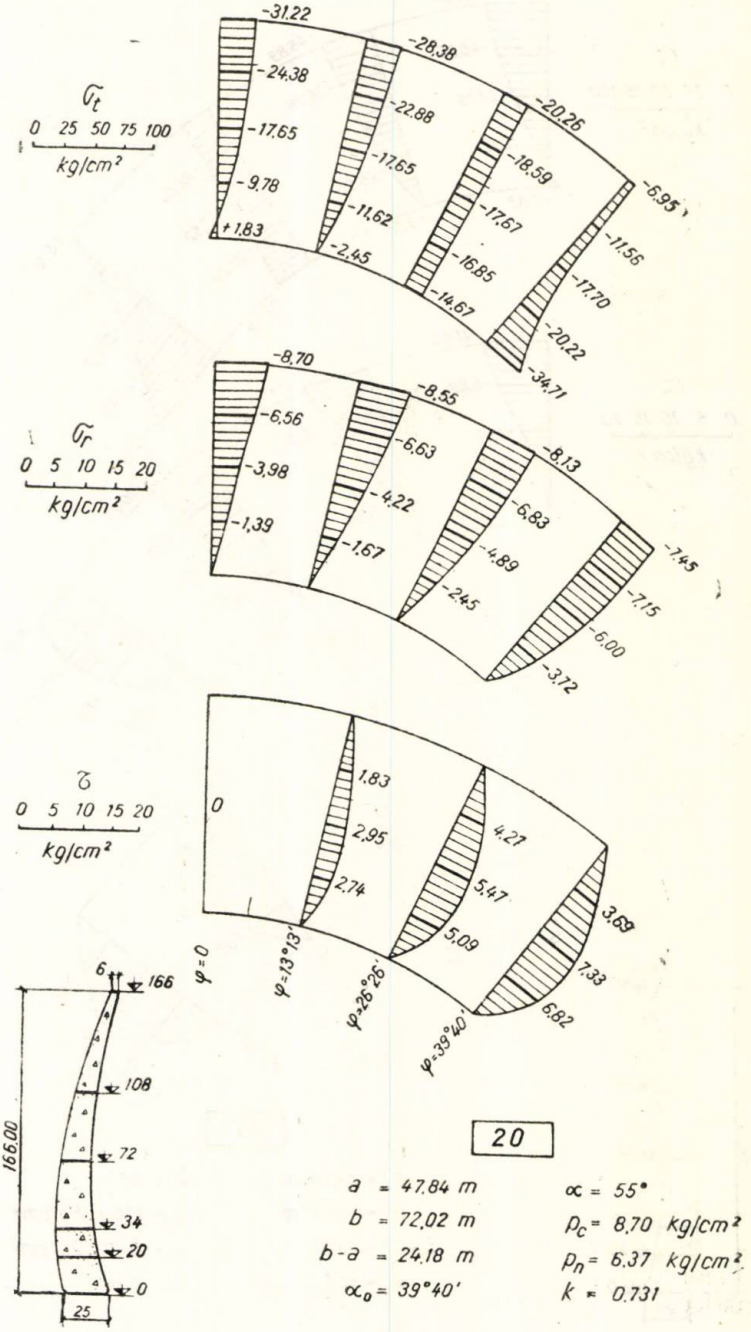


Fig. 6. — Variația eforturilor în arcul de la cota 20.

— eforturile radiale σ_r variază de la valoarea presiunii hidrostatice $p_e \cos n\varphi$ în amonte la zero în aval; legea de variație în secțiune este și ea diferită de cea liniară;

— eforturile de lunecare τ sînt nule în secțiunea de la cheie și iau valori din ce în ce mai mari mergînd spre nașteri; în cazul arcelor mai subțiri, valorile maxime apar în secțiuni intermediare, situate între cheie și nașteri; într-o secțiune oarecare, repartiția eforturilor de lunecare nu este simetrică față de centrul ei, eforturi ceva mai mari apărînd spre interiorul arcelor.

În concluzie, calculele mai riguroase care s-au putut face cu ajutorul formulelor deduse în această lucrare arată că în cazul arcelor groase eforturile maxime de compresiune au valori sensibil mai reduse decît cele care rezultă aplicînd metodele cunoscute din statică. În schimb, eforturile de tensiune care apar la intrados, în zona de la cheie, și la extrados, în zona de la nașteri, au comparativ valori mai mari. Aceste constatări trebuie avute în vedere la stabilirea caracteristicilor betoanelor din care se realizează corpul barajului.

Primită la redacție la 20 martie 1965

CALCULUL NUMERIC AL PARABOLOIDULUI DE ROTAȚIE PLEOȘTIT PE CONTUR ROMBIC [1)]

de MIRCEA SOARE
Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București

Lucrarea este închinată memoriei profesorului Mihail D. Hangan, dispărut dintre noi în plină activitate creatoare, în semn de recunoștință și pioasă aducere-aminte.

539.3

Se studiază starea de eforturi și de deformații într-o placă curbă subțire având forma unui paraboloid de rotație pleoștit, acoperind în plan un contur rombic. Calculul este efectuat în teoria încovoierii, aplicînd metoda rețelelor triunghiulare.

Problema revine la integrarea numerică a unei ecuații cu derivate parțiale de ordînul al patrulea pentru săgeți și apoi a unei ecuații de tip Poisson pentru funcția de eforturi.

Rezultatele sînt comparate cu cele ce rezultă din aplicarea teoriei de membrană și teoriei efectului de contur simplu.

Sălile de expoziție rombice în plan și cu pereții integral sau parțial vitrați constituie un element arhitectonic foarte reușit. Acoperișul poate fi realizat dintr-o placă curbă subțire în formă de paraboloid eliptic sau hiperbolic.

Teoria de membrană corespunzătoare acestor forme de suprafețe și de contur în plan a fost analizată de mai mulți autori (vezi § 8).

Scopul studiului de față este de a determina starea de eforturi și de deformații în teoria încovoierii pentru *paraboloidul de rotație pleoștit.*

Pe linia preocupărilor anterioare ale autorului, soluția a fost obținută pe cale numerică, prin aplicarea metodei rețelelor triunghiulare.

---

[1] Publicată în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **10**, *4* (1965) (în lb. franceză).

§ 1. GEOMETRIA SUPRAFEȚEI

Folosind notațiile din figura 1, ecuația suprafeței mediane se scrie

$$z = \frac{f}{3a^2}(x^2 + y^2). \tag{1.1}$$

Derivatele de ordinul întîi și al doilea ale funcției $z = z(x, y)$ sînt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{2fx}{3a^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg}\psi = \frac{2fy}{3a^2}, \tag{1.2}$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2f}{3a^2}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2f}{3a^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv 0.$$

Particularitatea acestei suprafețe este că derivatele secunde normale sînt constante și egale între ele, iar derivata secundă mixtă este nulă.

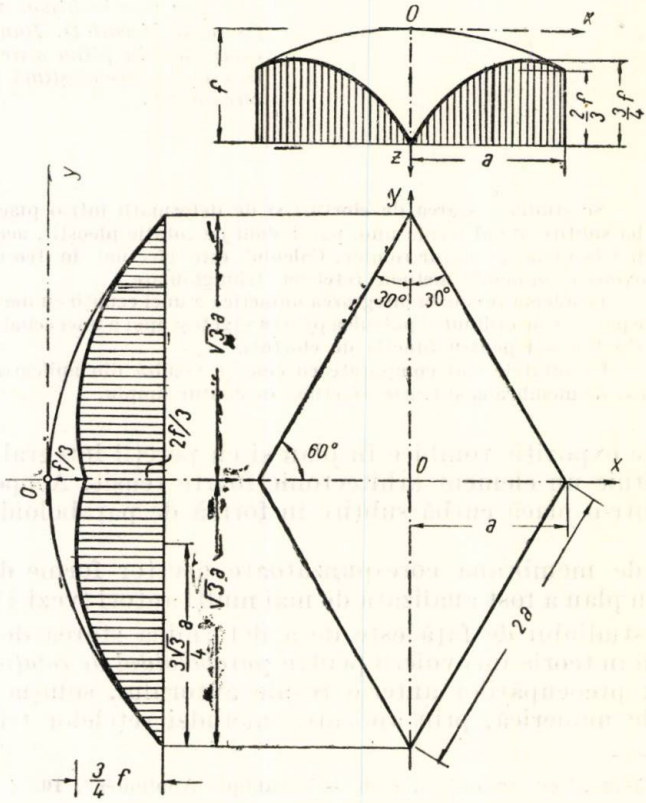


Fig. 1. — Paraboloidul de rotație pe contur rombic (plan și vederi).

Ecuațiile celor patru laturi ale rombului (în proiecție orizontală) sînt

$$\pm x + \frac{y}{\sqrt{3}} = a,$$

în care s-a admis că unghiul ascuțit al rombului este de 60°. Rombul apare astfel constituit din două triunghiuri echilaterale de laturi $2a$. Cele patru ecuații de mai sus reprezintă, totodată, ecuațiile planelor verticale (paralele cu axa Oz) care determină construcția. Intersecțiile lor cu paraboloidul de rotație sînt parabole (vezi fig. 1).

Paraboloidul va putea fi considerat *pleoștit* pentru valori mici ale raportului dintre săgeata f și diagonala mică $2a$; în mod orientativ se poate lua $f/2\ a \leqslant 1/5$.

§ 2. ECUAȚIILE GENERALE

Se știe că pentru anumite condiții de rezemare pe contur, asupra cărora vom reveni mai departe, determinarea stării de eforturi și de deformații în teoria încovoierii paraboloidului de rotație pleoștit poate fi redusă la integrarea *succesivă* a următoarelor două ecuații cu derivate parțiale [1], [8]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{E\delta}{KR^2}\,w = \frac{Z}{K}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{E\delta}{R}\,w, \tag{2.2}$$

în care:

w reprezintă săgețile elastice ale plăcii curbe subțiri (presupuse pozitive cînd sînt dirijate către z crescător),

F — funcția de eforturi de tip Airy,

E — modulul de elasticitate al materialului,

δ — grosimea plăcii (presupusă constantă),

μ — coeficientul lui Poisson (pentru beton armat $\mu = 1/6$),

$K = \dfrac{E\delta^3}{12\,(1-\mu^2)}$ modulul de rigiditate la încovoiere,

$R = \dfrac{3a^2}{2f}$ raza de curbură la creștetul paraboloidului de rotație,

Z încărcarea plăcii curbe subțiri, normală la suprafața mediană (pentru suprafețe pleoștite, ea poate fi considerată paralelă cu axa Oz).

Pentru ca necunoscutele de bază w și F să fie date de relațiile (2.1) și (2.2), este suficient (vezi [1], [8]) ca două din condițiile de rezemare

să fie următoarele :

$$w = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = N_n + N_t = 0, \tag{2.3}$$

în care N_n, respectiv N_t, reprezintă efortul normal pe contur, respectiv dirijat în lungul conturului.

Presupunînd cunoscute funcţiile w şi F, celelalte mărimi se deduc cu ajutorul următoarelor relaţii :

$$\left.\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ N_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ N_{xy} &= N_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{2.4 a}$$

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ M_y &= -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ M_{xy} &= M_{yx} = -K(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{2.4 b}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= -K\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ Q_y &= -K\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{2.4 c}$$

$$\left.\begin{aligned} R_x &= -K\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right], \\ R_y &= -K\left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.4 d}$$

Convenţiile de semne pentru eforturi sînt cele general admise [1], [8].

Pentru placa curbă subţire *izolată*, reprezentată în figura 1, este plauzibil să considerăm o rezemare articulată, cu deplasările normale pe contur neîmpiedicate. Vom putea deci scrie următoarele condiţii :

a) săgeţi nule $w = 0$, (2.5 a)

b) momente încovoietoare nule pe contur $M_n = 0$, (2.5 b)

c) eforturi normale pe contur $N_n = 0$, (2.5 c)

d) alungiri specifice în lungul conturului nule

$$\varepsilon_t = \frac{N_t - \mu N_n}{E\delta} = 0. \qquad (2.5\,\mathrm{d})$$

Condiția (*d*), cu caracter geometric, este echivalentă, dacă se ține seama de condiția (*c*), cu condiția statică

$$N_t = 0. \qquad (2.5\,\mathrm{e})$$

În acest fel se obține că $N_n + N_t = 0$ și astfel ambele condiții (2.3) sînt îndeplinite.

§ 3. APLICAREA REȚELELOR TRIUNGHIULARE

Forma rombică a conturului în plan sugerează adoptarea unei rețele triunghiulare pentru calculul numeric. Deoarece unghiul ascuțit este $2\alpha = 60°$, triunghiurile rețelei rezultă echilaterale. Relațiile care exprimă transcrierea operatorilor diferențiali în diferențe finite se simplifică considerabil față de cazul general cînd axele de coordonate fac între ele unghiuri oarecare [1], [8].

Să notăm cu 0 un nod oarecare al rețelei și cu 1, 2, 3, 4, 5, 6, respectiv 7, 8...17, 18, nodurile situate în jurul lui (fig. 2).

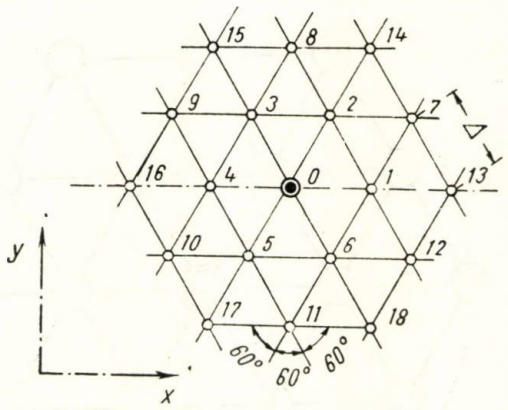


Fig. 2. — Nodurile rețelei la o rețea triunghiulară echilaterală.

Derivatele secunde, operatorul laplacean și bilaplacean care intervin în ecuațiile (2.1), (2.2) și (2.4) relative la nodul central 0 se transcriu în diferențe finite după cum urmează (funcția necunoscută a fost notată prin w):

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta^2}(w_1 - 2w_0 + w_4), \qquad (3.1\,\mathrm{a})$$

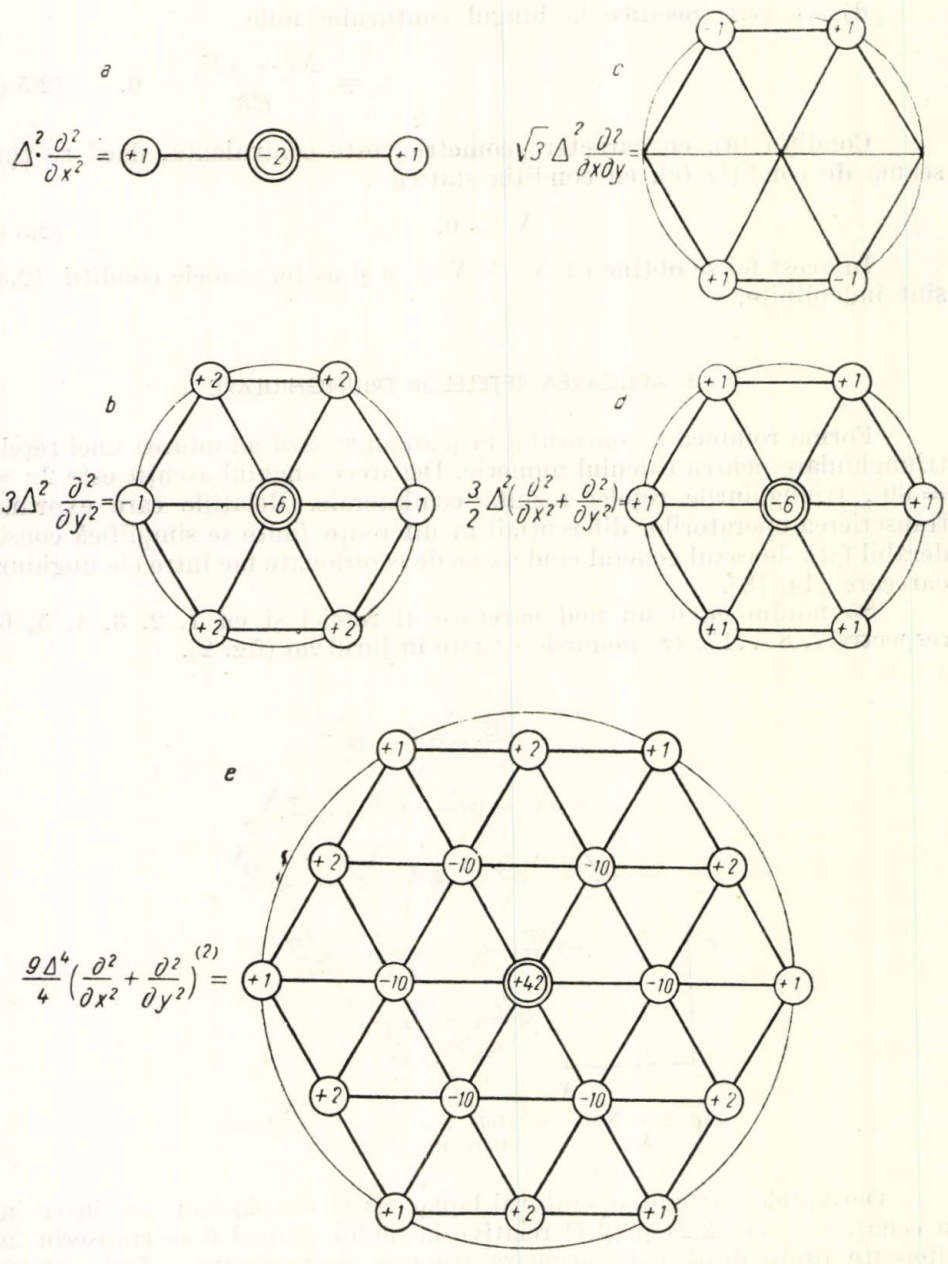


Fig. 3. — Imaginea coeficienților care intervin în coordonate triunghiulare echilaterale: *a* — în expresia derivatei secunde în raport cu x; *b* — în expresia derivatei secunde în raport cu y; *c* — în expresia derivatei secunde mixte; *d* — în operatorul laplacean; *e* — în operatorul bilaplacean.

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{1}{3\Delta^2}[2(w_2 + w_3 + w_5 + w_6) - (w_1 + 6w_0 + w_4)], \tag{3.1 b}$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\sqrt{3}\,\Delta^2}(w_2 - w_3 + w_5 - w_6), \tag{3.1 c}$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{2}{3\Delta^2}(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 - 6w_0), \tag{3.2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(2)} w_0 = \frac{4}{9\Delta^4}[42\, w_0 - 10\,(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6) + 2\,(w_7 + w_8 + w_9 + w_{10} + w_{11} + w_{12}) + (w_{13} + w_{14} + w_{15} + w_{16} + w_{17} + w_{18})]. \tag{3.3}$$

Imaginea coeficienţilor care intervin în expresiile (3.1), (3.2), (3.3) este redată în figurile 3 *a*, *b*, *c*, *d* şi *e*.

În relaţiile de mai sus, $\Delta = \frac{a}{k}$ reprezintă pasul reţelei.

Alţi operatori cu diferenţe finite, servind la scrierea condiţiilor marginale, vor fi precizaţi în paragraful următor.

§ 4. STUDIEREA EFECTULUI DE PLACĂ

Examinarea ecuaţiilor de bază (2.1) şi (2.2) arată că studierea efectului de placă poate fi făcută independent de efectul de perete, în condiţiile de rezemare precizate precedent.

Ne vom ocupa, aşadar, de ecuaţia (2.1), care determină săgeţile w. Pentru a lucra adimensional vom face schimbarea de variabilă

$$w = \frac{9p\Delta^4}{4K} W = \frac{9pa^4}{4k^4K} W, \tag{4.1}$$

în care W reprezintă noua funcţie fără dimensiuni (săgeata transformată).

Notînd încă coeficientul de amortizare a plăcii

$$\gamma^4 = \frac{9}{4}\Delta^4 k^4 \frac{E\delta}{KR^2} = 12(1 - \mu^2)\frac{f^2}{\delta^2}, \tag{4.2 a}$$

$$\gamma_k = \frac{\gamma^4}{k^4}, \tag{4.2 b}$$

ecuaţia cu diferenţe finite, relativă la nodul central 0, se scrie

$$[\![\ ]\!]\, W_0 + \gamma_k W_0 = 1, \tag{4.3}$$

în care operatorul cu diferenţe finite $[\![\ ]\!]$ este cel reprezentat în figura 3 *e*.

Ţinînd seama de condiţia $W = 0$ pe contur, ecuaţia (4.3) va trebui să fie scrisă pentru toate punctele interioare ale reţelei. În acest fel vor rezulta trei feluri de ecuaţii, pe care le vom examina mai jos.

1. Ecuaţii în care toate necunoscutele W se referă la noduri interioare ale reţelei; acestea nu prezintă nici o particularitate, putînd fi scrise direct.

2. Ecuaţii în care unele necunoscute W se referă la puncte de pe contur; termenii corespunzători vor fi luaţi egali cu zero la scrierea ecuaţiilor.

3. Ecuaţii scrise pentru punctele din vecinătatea conturului, în care intervin atît puncte de pe contur, cît şi puncte din exterior. Pentru a nu introduce necunoscute suplimentare, necunoscutele *exterioare* vor fi exprimate în funcţie de necunoscutele *interioare* cu ajutorul celei de-a doua condiţii marginale.

Evident că o mare reducere a volumului de calcul se obţine ţinînd seama, ori de cîte ori este posibil, de condiţiile de simetrie. Pentru încărcarea uniform distribuită pe toată suprafaţa şi aceeaşi rezemare pe tot conturul, ne vom putea limita la studierea unui sfert de placă.

Sistemul de ecuaţii cu diferenţe finite va prezenta simetrie în raport cu diagonala principală dacă vom înmulţi cu 0,25 coeficienţii ecuaţiei relative la centrul plăcii şi cu 0,50 coeficienţii ecuaţiilor relative la nodurile situate pe axele Ox şi Oy.

Presupunînd cunoscute săgeţile, momentele încovoietoare şi de torsiune se determină cu ajutorul relaţiilor (2.4 b), care se transcriu în diferenţe finite sub următoarea formă:

$$M_{x,0} = m_{x,0} + \mu m_{y,0}, \qquad M_{y,0} = m_{y,0} + \mu m_{x,0}, \tag{4.4 a}$$

în care

$$m_{x,0} = -K\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = -\frac{9pa^2}{4k^2}(W_1 - 2W_0 + W_4), \tag{4.4 b}$$

$$m_{y,0} = -K\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = -\frac{3pa^2}{4k^2}[2(W_2 + W_3 + W_5 + W_6) - (W_1 + 6W_0 + W_4)], \tag{4.4 c}$$

$$M_{xy,0} = M_{yx,0} = -K(1-\mu)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = -\frac{3\sqrt{3}(1-\mu)}{4k^2}pa^2(W_2 - W_3 + W_5 - W_6). \tag{4.4 d}$$

Ajungem acum la scrierea condiţiei marginale (2.5 b). Pentru secţiuni înclinate ($\alpha = 30°$) avem

$$M_n = M_x \cos^2\alpha + M_y \sin^2\alpha + 2M_{xy}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}(3M_x + M_y + 2\sqrt{3}M_{xy}) = 0.$$

Înlocuind mai sus momentele în funcție de săgeți conform relațiilor (3.4), se ajunge la condiția

$$(3 + \mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1 + 3\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\sqrt{3}(1 - \mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0.$$

Presupunînd că nodul 0, pentru care o transcriem în diferențe finite este situat pe contur, se obține

$$-3(1 + \mu)W_0 + W_1 + W_2 + W_4 + W_5 - \frac{1 - 3\mu}{2}(W_3 + W_6) = 0.$$

Pentru un punct curent 0 pe contur (fig. 4 *a*), în relația precedentă trebuie să luăm $W_0 = W_3 = W_6 = 0$; rezultă astfel

$$W_1 + W_2 = -(W_4 + W_5). \qquad (4.5\,a)$$

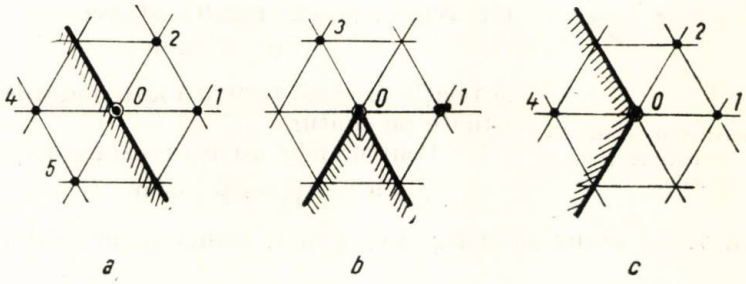


Fig. 4. — Scrierea condițiilor marginale pentru săgeți:
a — pentru un nod curent de pe contur; *b* — pentru vîrful ascuțit;
c — pentru vîrful obtuz.

Pentru vîrful ascuțit ($2\alpha = 60°$) avem $W_0 = W_5 = W_6 = 0$ și $W_1 = W_4$, $W_2 = W_3$ (din condiții de simetrie); relația generală de mai sus se reduce la (fig. 4 *b*):

$$2W_1 + \frac{1 + 3\mu}{2} W_3 = 0. \qquad (4.5\,b)$$

În sfîrșit, pentru vîrful obtuz ($180° - 2\alpha = 120°$) avem $W_0 = W_3 = W_5 = 0$ și $W_2 = W_6$ (din condiții de simetrie); relația generală se reduce la (fig. 4 *c*):

$$W_1 + \frac{1 + 3\mu}{2} W_2 = -W_4. \qquad (4.5\,c)$$

În membrii din dreapta au fost trecuți termenii presupuși cunoscuți (din nodurile *interioare* ale rețelei).

Dacă semidiagonala mică a a fost împărțită în k intervale egale ($\Delta = a/k$), latura rombului va avea $2k$ intervale. Rezultă astfel $(2k + 1)$

puncte pe contur (dintre care două puncte de colţ) şi $(2k + 2)$ puncte exterioare. Se pot scrie $(2k + 1)$ ecuaţii suplimentare cu $(2k + 2)$ necunoscute. Deoarece o relaţie suplimentară nu mai poate fi aleasă pe *considerente statice*, ea trebuie să fie aleasă.

Vom face această alegere prin analogie cu aplicarea diferenţelor finite într-un sistem de coordonate cartezian ortogonal. Derivata secundă normală se scrie (fig. 5):

$$\frac{\partial^2 w_m}{\partial n^2} \approx \frac{w_{m+1} - 2w_m + w_{m-1}}{\Delta^2};$$

ţinînd seama că pe contur $w_m = 0$, rezultă $w_{m+1} = -w_{m-1}$.

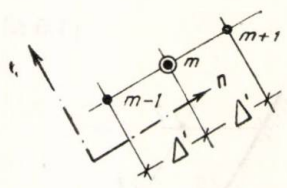


Fig. 5. — Scrierea derivatei secunde în coordonate carteziene ortogonale.

Revenind la cazul reprezentat în figura 4*a*, vom putea alege

$$W_1 = -W_5; \tag{4.6 a}$$

din relaţia (4.5 a) rezultă atunci

$$W_2 = -W_4 \tag{4.6 b}$$

şi relaţii similare pentru toate nodurile curente situate pe contur.

Pentru vîrful ascuţit (vezi fig. 4 *b*) se obţine

$$W_1 = W_3 = 0, \tag{4.6 c}$$

iar pentru vîrful obtuz (vezi fig. 4 *c*), ţinînd seama şi de relaţia (4.6 b), rezultă

$$W_1 = -\frac{1 - 3\mu}{2} W_4. \tag{4.6 d}$$

În felul acesta, toate necunoscutele în puncte din afara conturului pot fi exprimate simplu cu ajutorul necunoscutelor *interioare*.

Sistemul de ecuaţii astfel obţinut poate fi rezolvat prin iteraţie, convergenţa fiind asigurată şi cu atît mai rapidă, cu cît coeficientul γ_k este mai mare; acest efect favorabil se datorează faptului că în ecuaţia (2.1) necunoscuta w intervine nu numai prin derivatele sale, dar şi ca funcţie [7].

§ 5. STUDIEREA EFECTULUI DE PERETE

După determinarea săgeţilor transformate se poate trece la studierea efectului de perete. Funcţia de eforturi F rezultă din integrarea ecuaţiei de tip Poisson (2.2); înlocuind în membrul drept pe w în funcţie de W conform (3.1), se obţine după unele transformări simple

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{3}{2}\gamma_k \frac{pa^2}{f} W. \tag{5.1}$$

Vom introduce şi în acest caz funcţia adimensională Φ, legată de F prin relaţia

$$F = \frac{9}{64}\gamma_k \cdot \frac{pa^4}{f} \cdot \Phi. \tag{5.2}$$

Cu această substituţie, ecuaţia (4.1) devine

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = -\frac{32}{3a^2} W. \tag{5.3}$$

Faptul că W este cunoscut doar sub formă numerică în nodurile reţelei impune ca rezolvarea ecuaţiei cu derivate parţiale (5.3) să fie făcută tot numeric.

Folosind schema din figura 3*d* şi relaţia (4.2), se obţine următoarea ecuaţie cu diferenţe finite relativă la nodul central 0 :

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 - 6\,\Phi_0 = -W_0. \tag{5.4}$$

Rămîn încă de precizat valorile marginale ale lui Φ.

Deoarece una dintre condiţii exprimă că efortul normal este nul — vezi condiţia (2.5 c) — , rezultă [8] că în lungul conturului funcţia de eforturi are o variaţie liniară sau este constantă. Deşi există simetrie geometrică şi statică în raport cu ambele axe Ox şi Oy, o examinare atentă arată că funcţia Φ trebuie să aibă o variaţie liniară, cu respectarea condiţiilor de simetrie.

Pentru simplificare vom admite că funcţia Φ ia valoarea zero în vîrful ascuţit şi valoarea încă necunoscută $\bar{\Phi}$ în vîrful obtuz (fig. 6).

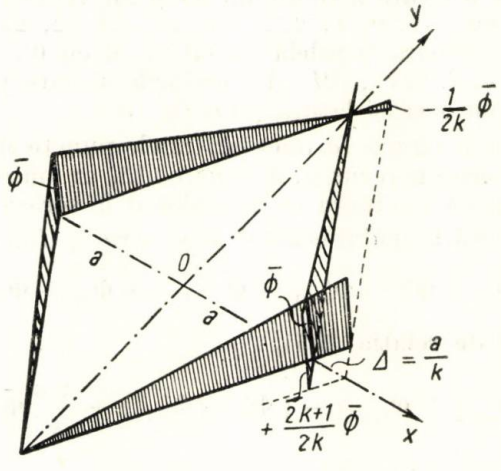


Fig. 6. — Variaţia liniară pe contur a funcţiei de eforturi.

Valorile funcției Φ pe contur se vor scrie sub forma

$$\Phi_M = \frac{m}{2k}\,\overline{\Phi}, \tag{5.5}$$

în care $m = -1, 0, 1, 2, \ldots, 2k, 2k+1$ reprezintă numărul de ordine al nodului considerat, începînd de la vîrful ascuțit al rombului. Valorile (-1) și $(2k+1)$ corespund unor noduri *exterioare*.

Ajungem acum să examinăm felurile de ecuații care pot fi scrise pentru determinarea funcției de eforturi :

1) ecuații în care toate necunoscutele Φ se referă la noduri interioare ale relației ; ele nu prezintă nici o particularitate, putînd fi scrise direct ;

2) ecuații în care unele necunoscute Φ se referă la puncte de pe contur ; termenii corespunzători vor lua valori determinate cu ajutorul relației (5.5).

Se pot scrie în total k^2 ecuații (relative la nodurile interioare ale relației), cu (k^2+1) necunoscute (inclusiv necunoscuta $\overline{\Phi}$).

Va trebui deci să mai scriem o relație pentru a obține un sistem de ecuații cu tot atîtea necunoscute.

Aceasta se poate face pe două căi, care vor fi examinate mai jos.

În primul rînd, vom observa că, presupunînd determinate toate valorile lui Φ în nodurile interioare ale relației și pe contur, pentru exprimarea eforturilor pe contur este necesară cunoașterea valorilor lui Φ și în nodurile exterioare (situate pe o linie paralelă cu latura rombului). Pentru determinarea acestor valori este suficient să aplicăm relația (5.4) pentru contur ; membrul din dreapta va fi nul, în conformitate cu condiția (2.5 a).

Vom nota cu I′, O, I, II, ... M, ... $2K-2$, $2K-1$, $2K+1$ nodurile situate pe o latură a rombului (O și $2K$ reprezintă vîrful ascuțit, respectiv obtuz), cu $-1, 0, 1, 2, \ldots m, \ldots 2k-2, 2k-1, 2k$ nodurile situate pe linia exterioară paralelă cu latura și cu $0', 1', 2', \ldots m', \ldots (2k-2)', (2k-1)', (2k)', (2k+1)'$ nodurile situate pe linia interioară paralelă și vecină cu aceeași latură (vezi fig. 7*a*).

Din examinarea figurii 7*a* reiese că unele puncte sînt situate pe cîte două din liniile descrise mai sus și, în consecință, ar putea fi caracterizate prin notații diferite. Acest lucru va fi subliniat la scrierea ecuațiilor.

Ecuația relativă la nodul central M se scrie [2]) (fig. 7*b*)

$$\Phi_{m-1} + \Phi_m + \Phi'_m + \Phi'_{m+1} + \Phi_{M-1} - 6\,\Phi_M + \Phi_{M+1} = 0,$$

sau, ținînd seama de relația (5.5),

$$\Phi_{m-1} + \Phi_m = -(\Phi'_m + \Phi'_{m+1}) + \frac{2m}{k}\,\overline{\Phi}. \tag{5.6}$$

---

[2]) Φ'_m reprezintă valoarea funcției Φ în nodul m'.

Vom scrie această relație pentru toate nodurile conturului ($m = 0, 1, 2, \ldots, 2k$):

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{-1} + \Phi_0 = -(\Phi'_0 + \Phi'_1),\\
&\Phi_0 + \Phi_1 = -(\Phi'_1 + \Phi'_2) - \frac{2}{k}\overline{\Phi},\\
&\Phi_1 + \Phi_2 = -(\Phi'_2 + \Phi'_3) - \frac{4}{k}\overline{\Phi},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Phi_{2k-3} + \Phi_{2k-2} = -(\Phi'_{2k-2} + \Phi'_{2k-1}) - \frac{4k-4}{k}\overline{\Phi},\\
&\Phi_{2k-2} + \Phi_{2k-1} = -(\Phi'_{2k-1} + \Phi'_{2k}) - \frac{4k-2}{k}\overline{\Phi},\\
&\Phi_{2k-1} + \Phi_{2k} = -(\Phi'_{2k} + \Phi'_{2k+1}) - 4\overline{\Phi}.
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

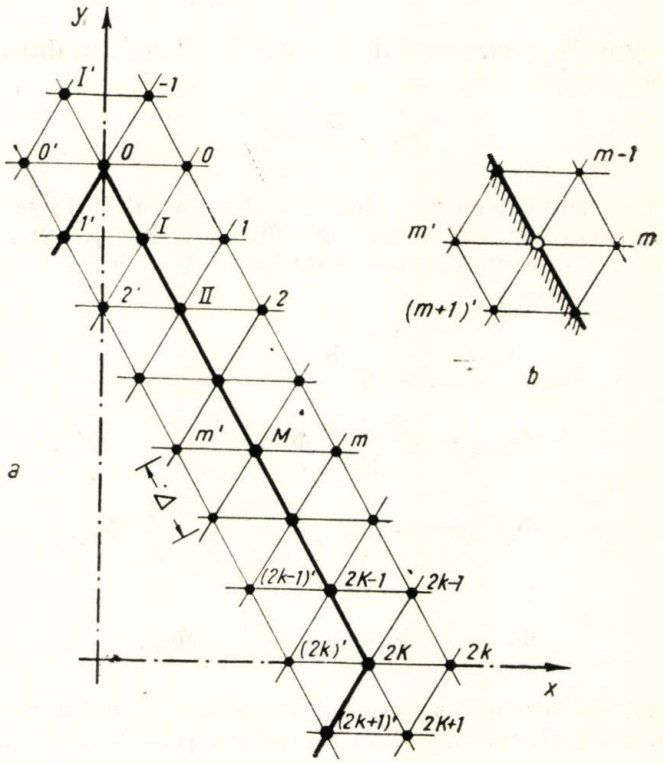


Fig. 7. — Numerotarea nodurilor situate pe contur și în vecinătatea conturului (a); scrierea ecuației relativă la nodul central M (b).

Dacă în sistemul de ecuaţii (5.7) schimbăm semnele în ecuaţiile de rang impar ($m = 1, 3, 5, \ldots, 2k-1$) şi apoi adunăm membru cu membru toate ecuaţiile afară de ultima, se obţine

$$\Phi_{-1} + \Phi'_0 = \Phi_{2k-1} + \Phi'_{2k} + \frac{2}{k}(1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1)\,\overline{\Phi} -$$

$$- \frac{4}{k}(1 + 2 + 3 + \ldots + k - 1)\,\overline{\Phi}. \tag{5.8}$$

Ţinînd seama că

$$\Phi_{-1} = -\Phi_I = -\frac{1}{2k}\overline{\Phi}; \quad \Phi_0 = \Phi'_0; \quad \Phi'_1 = \Phi_I = \frac{1}{2k}\overline{\Phi},$$

din prima ecuaţie (5.7) rezultă că $\Phi_0 = \Phi'_0 = 0$.

Înlocuind valorile lui Φ_{-1}, Φ'_0,

$$\Phi_{2k-1} = \Phi_{2K+1} = \frac{2k+1}{2k}\overline{\Phi}$$

şi sumînd progresiile geometrice din relaţia (5.8), rezultă după efectuarea tuturor simplificărilor

$$\overline{\Phi} = \frac{k}{k-1}\Phi'_{2k}. \tag{5.9}$$

Odată cunoscută această valoare, din sistemul (5.7) se pot deduce valorile necunoscutelor *exterioare* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{2k-2}, \Phi_{2k-1}, \Phi_{2k}$ în funcţie de valorile necunoscutelor *interioare* $\Phi'_1, \Phi'_2, \ldots, \Phi'_{2k}$. Astfel, de exemplu, se obţine

$$\Phi_{2k} = \frac{k+1}{k-1}\Phi'_{2k},$$

$$\Phi_{2k-1} = \frac{2k+1}{2k}\overline{\Phi} = \frac{2k+1}{2(k-1)}\Phi'_{2k}, \tag{5.10}$$

$$\Phi_{2k-2} = -\Phi'_{2k-1} - \frac{12k-5}{2(k-1)}\Phi'_{2k},$$

. . . . . .

$$\Phi_1 = -\Phi'_2 - \frac{5}{2(k-1)}\Phi'_{2k}.$$

Revenind la scrierea sistemului de ecuaţii pentru necunoscutele *interioare* Φ, vom observa că (5.9) reprezintă relaţia căutată. Înlocuind peste tot în cele k^2 ecuaţii pe $\overline{\Phi}$ prin valoarea sa dată de (5.9), avem un număr egal de ecuaţii şi de necunoscute. După rezolvarea sistemului, necunoscutele *exterioare* se pot calcula cu ajutorul relaţiilor (5.10).

În al doilea rînd, se poate ajunge la acelaşi rezultat exprimînd că pe contur eforturile N_n şi N_t sînt nule :

$$N_n = N_x \cos^2\alpha + N_y \sin^2\alpha + 2N_{xy} \sin\alpha\cos\alpha = 0,$$

$$N_t = N_x \sin^2\alpha + N_y \cos^2\alpha - 2N_{xy} \sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Pentru $\alpha = 30°$, din cele două relaţii se deduc condiţiile

$$\left.\begin{aligned} &N_n + N_t = 0, \\ &N_x + \sqrt{3}\cdot N_{xy} = 0, \\ &N_y - \sqrt{3}\cdot N_{xy} = 0 ; \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

una dintre aceste relaţii este consecinţa celorlalte două. Prima relaţie este echivalentă cu

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0,$$

de care ne-am ocupat anterior.

Una din celelalte două, de exemplu ultima, se transcrie în diferenţe finite după cum urmează :

$$\Phi_{m-1} + \Phi_m + \Phi'_m + \Phi'_{m+1} - \Phi_{M-1} - 2\,\Phi_M - \Phi_{M+1} = 0.$$

Observînd că pentru variaţia liniară a lui Φ pe contur avem egalitatea

$$\Phi_{M-1} + 2\,\Phi_M + \Phi_{M+1} = -\,\Phi_{M-1} + 6\,\Phi_M - \Phi_{M+1},$$

regăsim sistemul de ecuaţii (5.7).

Sistemul de k^2 ecuaţii obţinut pentru necunoscutele interioare, prin eliminarea lui $\overline{\Phi}$, nu mai prezintă simetria coeficienţilor faţă de diagonala principală.

Problema mai poate fi tratată pe o cale analogă cu aceea din teoria de membrană [1], [8], în care rezolvarea se face în două trepte, iar $\overline{\Phi}$ apare ca o solicitare omogenă a plăcii. Procedeul acesta este însă mai laborios şi de aceea nu vom mai insista asupra lui.

Cunoscînd valorile Φ, eforturile normale şi de lunecare se deduc din relaţiile (2.4 a) prin aplicarea diferenţelor finite. Pentru un nod central 0 se obţine

$$N_x = \frac{3}{64} k^2\gamma_k \left[2(\Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_5 + \Phi_6) - (\Phi_1 + 6\,\Phi_0 + \Phi_4)\right]\cdot\frac{pa^2}{f}, \tag{5.12 a}$$

$$N_y = \frac{9}{64} k^2\gamma_k (\Phi_1 - 2\,\Phi_0 + \Phi_4)\frac{pa^2}{f}, \tag{5.12 b}$$

$$N_{xy} = N_{yx} = -\frac{3\sqrt{3}}{64} k^2\gamma_k (\Phi_2 - \Phi_3 + \Phi_5 - \Phi_6)\frac{pa^2}{f}. \tag{5.12 c}$$

Efortul de lunecare în lungul conturului se obține cu ajutorul relației

$$N_{nt} = (N_x - N_y)\sin\alpha\cos\alpha - N_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$

care, pentru $\alpha = 30°$, duce la relația simplă

$$N_{nt} = -2N_{xy}. \tag{5.13}$$

§ 6. APLICAȚIE NUMERICĂ

Fie de determinat starea de eforturi și de deformații în cazul plăcii curbe subțiri de beton armat acoperind în plan un romb. Unghiurile la vîrf sînt de 60°, respectiv 120°.

Date numerice

diagonala mică	$2a = 30$ m,
diagonala mare	$2\sqrt{3}a = 52$ m,
săgeata	$f = 7{,}50$ m,
grosimea plăcii	$\delta = 0{,}15$ m.

Se alege beton B 300, avînd $E = 340\,000$ kg/cm² și o încărcare $p = 500$ kg/m², considerată uniform distribuită în plan orizontal (ea este compusă din 390 kg/m² greutatea proprie, 75 kg/m² zăpadă și 35 kg/m² izolații ușoare).

Pentru aplicarea diferențelor finite, se împarte diagonala $2a$ în opt părți egale, adică

$$\Delta = \frac{2a}{8} = \frac{a}{4}. \qquad (k = 4)$$

Numerotarea nodurilor se face în ordinea naturală, rezultînd pentru un sfert de placă (fig. 8):

16 noduri *interioare*	(0, 1, 2, ..., 15),
9 noduri pe *contur*	(16,17, ..., 24),
10 noduri *exterioare*	(25, 26, ..., 34).

Dintre acestea, nodurile 26 și 34 pot fi considerate, la studierea efectului de perete, și ca noduri situate pe prelungirea conturului.

Să arătăm modul de scriere al ecuațiilor cu diferențe finite.

Vom începe cu ecuațiile pentru săgeți.

Pentru nodurile interioare 0, 1, 4, 7 se pot scrie ecuații de tipul 1°; de exemplu, pentru nodul 1 avem

$$-10W_0 + (43 + \gamma_k)W_1 - 10W_2 + W_3 - 16W_4 - 20W_5 + 4W_6 + \\ + 2W_7 + 4W_8 + 2W_9 = 1.$$

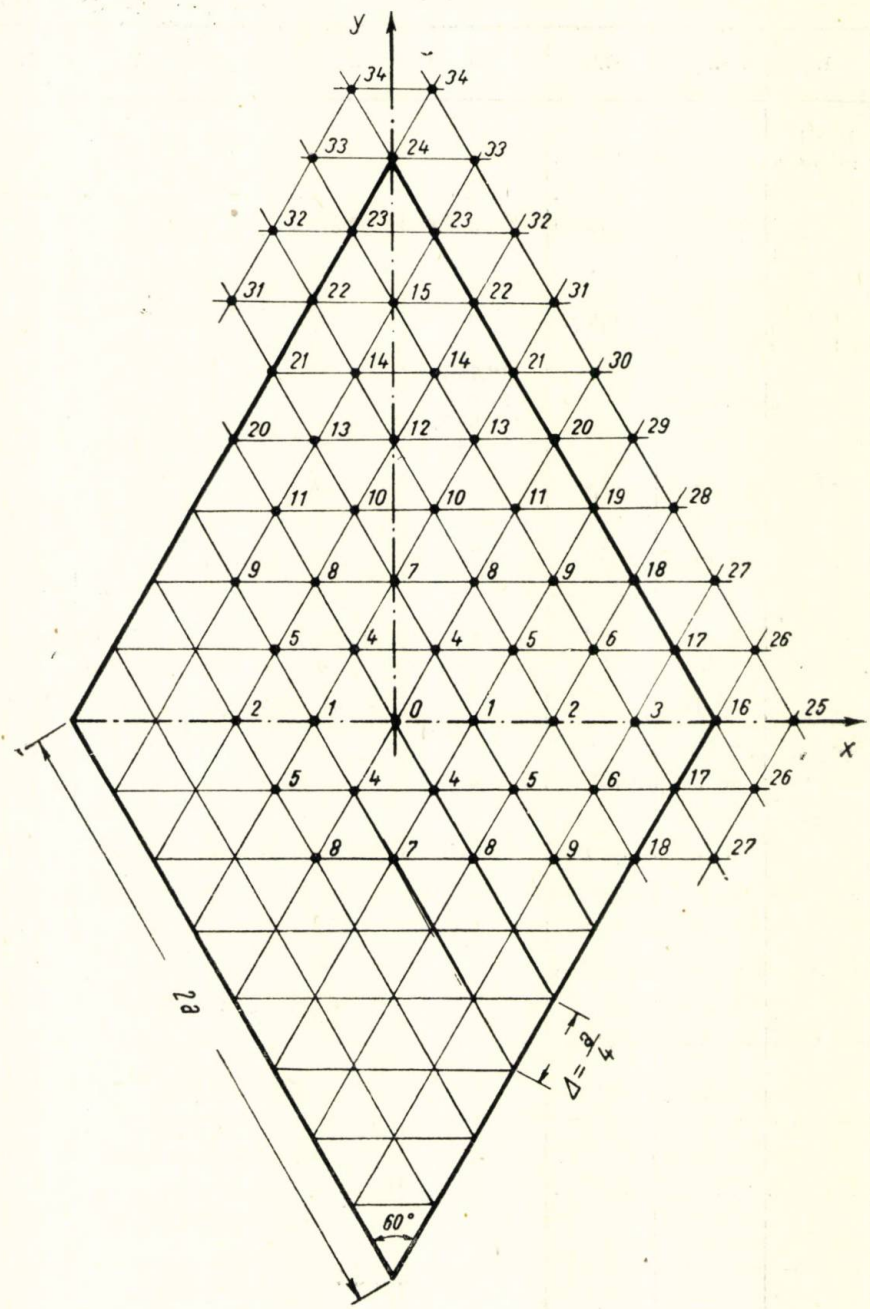


Fig. 8. — Fixarea reţelei de puncte la paraboloidul de rotaţie pe contur rombic.

Tabela

Nod	W_0	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	W_7
0	$10{,}5+$ $+0{,}25\,\gamma_k$	$-\ 5$	$+0{,}5$	.	-10	$+\ 2$	.	$+\ 1$
1	$-\ 5$	$21{,}5+$ $+\ 0{,}5\,\gamma_k$	$-\ 5$	$+0{,}5$	$-\ 8$	-10	$+\ 2$	$+1$
2	$+0{,}5$	$-\ 5$	$21+$ $+0{,}5\,\gamma_k$	$-\ 5$	$+\ 2$	-10	-10	.
3	.	$+0{,}5$	$-\ 5$	$18{,}75+$ $+0{,}75\,\mu+$ $+0{,}5\,\gamma_k$	.	$+\ 2$	-11	.
4	-10	$-\ 8$	$+\ 2$	.	$35+\gamma_k$	$-\ 8$	$+\ 1$	-10
5	$+\ 2$	-10	-10	$+\ 2$	$-\ 8$	$44+\gamma_k$	$-\ 9$	$+\ 2$
6	.	$+\ 2$	-10	-11	$+\ 1$	$-\ 9$	$42+\gamma_k$	.
7	$+\ 1$	$+\ 1$	.	.	-10	$+\ 2$	.	$21+$ $+0{,}5\,\gamma_k$
8	$+\ 1$	$+\ 2$	$+1$	.	$-\ 8$	-10	$+\ 2$	-10
9	.	$+\ 1$	$+\ 2$	$+\ 1$	$+\ 2$	-10	-11	$+\ 1$
10	.	.	.	.	$+\ 3$	$+\ 1$	.	-10
11	.	.	.	.	$+\ 1$	$+\ 2$	$+\ 1$	$+\ 2$
12	.	.	.	.	.	.	.	$+\ 1$
13	.	.	.	.	.	.	.	$+\ 1$
14	.	.	.	.	.	.	.	.
15	.	.	.	.	.	.	.	.

1

W_8	W_9	W_{10}	W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	= Termen liber
+ 1	.	.	.	.	.	.	.	= + 0,25
+ 2	+ 1	.	.	.	.	.	.	= + 0,50
+ 1	+ 2	.	.	.	.	.	.	= + 0,50
.	+ 1	.	.	.	.	.	.	= + 0,50
−8	+ 2	+ 3	+ 1	.	.	.	.	= + 1
−10	−10	+ 1	+ 2	.	.	.	.	= + 1
+ 2	−11	.	+ 1	.	.	.	.	= + 1
−10	+ 1	−10	+ 2	+ 1	+ 1	.	.	= + 0,50
$43 + \gamma_k$	−10	− 8	−10	+ 1	+ 2	.	.	= + 1
−10	$40 + \gamma_k$	+ 2	−11	.	+ 1	.	.	= + 1
− 8	+ 2	$32 + \gamma_k$	− 9	−10	− 8	+ 3	.	= + 1
−10	−11	− 9	$40 + \gamma_k$	+ 2	−11	+ 1	.	= + 1
+ 1	.	−10	+ 2	$21 + + 0{,}5\,\gamma_k$	−10	−10	+ 1	= + 0,50
+ 2	+ 1	− 8	−11	−10	$41 + \gamma_k$	− 9	+ 1	= + 1
.	.	+ 3	+ 1	−10	− 9	$30 + \gamma_k$	−11	= + 1
.	.	.	.	+ 1	+ 1	− 11	$19 + + 0{,}5\,\gamma_k$	= + 0,50

Pentru scrierea ecuaţiilor de tipul 2°, vom ţine seama că

$$W_{16} = W_{17} = W_{18} = W_{19} = W_{20} = W_{21} = W_{22} = W_{23} = W_{24} = 0.$$

Ele pot fi scrise pentru nodurile 2, 5, 8, 10, 12; de exemplu pentru nodul 10 avem

$$3W_4 + W_5 - 10W_7 - 8W_8 + 2W_9 + (32 + \gamma_k) W_{10} - \\ - 9W_{11} - 10W_{12} - 8W_{13} + 3W_{14} = 1.$$

Trecem mai departe să stabilim condiţiile marginale, ţinînd seama deocamdată numai că $W_{16} = W_{17} = \cdots = W_{24} = 0$. Pentru nodurile 17, 18, ..., 23, din aplicarea relaţiei (4.5 a) se obţine

$$W_{26} + W_{27} = - W_3 - W_6,$$
$$W_{27} + W_{28} = - W_6 - W_9,$$
$$W_{28} + W_{29} = - W_9 - W_{11},$$
$$W_{29} + W_{30} = - W_{11} - W_{13},$$
$$W_{30} + W_{31} = - W_{13} - W_{14},$$
$$W_{31} + W_{32} = - W_{14} - W_{15},$$
$$W_{32} + W_{33} = - W_{15};$$

la cele de mai sus adăugăm condiţiile (4.5 b) şi (4.5 c) relative la vîrfurile 24, respectiv 16 :

$$2W_{33} + \frac{1 + 3\mu}{2} W_{34} = 0,$$

$$W_{25} + \frac{1 + 3\mu}{2} W_{26} = - W_3.$$

Avem, aşadar, $2k + 1 = 9$ ecuaţii cu $2k + 2 = 10$ necunoscute suplimentare (se observă că nu se poate considera $W_{26} = 0$ şi $W_{34} = 0$, ca fiind situate pe prelungirea conturului).

Dacă se adaugă condiţia suplimentară (4.6 a), din relaţiile precedente rezultă

$$W_{25} = - \frac{1 - 3\mu}{2} W_3,$$

$$W_{26} = - W_3, \qquad W_{27} = - W_6,$$
$$W_{28} = - W_9, \qquad W_{29} = - W_{11},$$
$$W_{30} = - W_{13}, \qquad W_{31} = - W_{14},$$
$$W_{32} = - W_{15}, \qquad W_{33} = W_{34} = 0.$$

Vom putea scrie acum ecuații de tipul 3° pentru nodurile 3, 6, 9, 11, 13, 14 și 15; de exemplu, pentru nodul 11 avem, după efectuarea tuturor reducerilor de termeni asemenea,

$$W_4 + 2W_5 + W_6 + 2W_7 - 10W_8 - 11W_9 - 9W_{10} +$$
$$+ (40 + \gamma_k)\, W_{11} + 2W_{12} - 11W_{13} + W_{14} = 1.$$

Matricea sistemului de $k^2 = 16$ ecuații a fost trecută în tabela 1.

Coeficienții ecuației relativă la nodul 0 au fost înmulțiți cu 0,25, iar cei ai ecuațiilor relative la nodurile 1, 2, 3, 7, 12 și 15 cu 0,50, rezultînd astfel o matrice simetrică în raport cu diagonala principală.

Problema poate fi rezolvată pînă la capăt numai dacă se dau valori numerice lui μ și γ_k.

Luînd $\mu = \frac{1}{6}$ și $f/\delta = 50$, rezultă

$$\gamma_k = \frac{12\,(1 - 1/6^2)}{4^4} \cdot 50^2 = \frac{35}{768} \cdot 50^2 = 113{,}93229.$$

Datorită faptului că γ_k are o valoare mare în raport cu ceilalți coeficienți, este indicată rezolvarea sistemului prin metoda iterației; convergența este foarte bună.

Pentru determinarea necunoscutei principale din fiecare ecuație, pentru celelalte necunoscute se poate lua ca valoare inițială zero sau $W^{(0)} = \gamma_k^{-1} = 0{,}877714 \times 10^{-2}$ (această ultimă valoare va fi dedusă la paragraful următor).

Pentru a da o idee asupra convergenței, redăm în tabela 2 valorile a trei rădăcini, de exemplu W_0, W_{12} și W_{15}, pentru diferite trepte ale iterației.

Tabela 2

Treapta	W_0	W_{12}	W_{15}
0*)	0,641304	0,641304	0,658188
1	0,821767	0,859587	0,741853
2	0,860403	0,903508	0,753963
3	0,872919	0,914910	0,756744
4	0,876000	0,917255	0,757204
5	0,876922	0,917860	0,757325
6	0,877153	0,917988	0,757346
7	0,877220	0,918021	0,757353
8	0,877237	0,918028	0,757353
9	0,877242	0,918030	0,757353

*) Valori inițiale.
**) Valorile din tabelă se multiplică cu 10^{-2}.

Rădăcinile sistemului sînt trecute în tabela 3. Valorile lui W în nodurile exterioare se determină fără dificultate, de exemplu

$$W_{25} = -\frac{1-3/6}{2} W_3 = -\frac{1}{4}\, 0{,}799590 = -\,0{,}199898,$$
$$W_{29} = -\,W_{11} = -\,0{,}827515.$$

Momentele se evaluează cu ajutorul relaţiilor (4.4). De exemplu, pentru punctul 3 avem :

$$m_{x,3} = -\frac{9}{4\times 4^2}(W_2 - 2W_3 + W_{16})\, pa^2 = -\frac{9}{64}(0{,}910497 -$$
$$-\,2\times 0{,}799590 + 0)\cdot 10^{-2}\, pa^2 = +\,0{,}96846\times 10^{-3}\, pa^2,$$
$$m_{y,3} = -\frac{3}{4\times 4^2}[2\times 2\,(W_{17} + W_6) - (W_2 + 6W_3 + W_{16})]pa^2 =$$
$$= +\,1{,}11450\times 10^{-3}\, pa^2,$$
$$M_{x,3} = m_{x,3} + \mu\, m_{y,3} = \left(0{,}96846 + \frac{1}{6}\,1{,}11450\right)\cdot 10^{-3}\, pa^2 =$$
$$= +\,1{,}15421\times 10^{-3}\, pa^2,$$
$$M_{y,3} = m_{y,3} + \mu m_{x,3} = +\,1{,}27591\times 10^{-3}\, pa^2.$$

Valorile săgeţilor şi ale momentelor încovoietoare, raportate la factorii dimensionali pa^4/K, respectiv pa^2, au fost trecute în tabela 3.

Variaţia săgeţilor w în secţiunile $y = 0$ şi $x = 0$ a fost reprezentată în figura 9 *a* şi *b*.

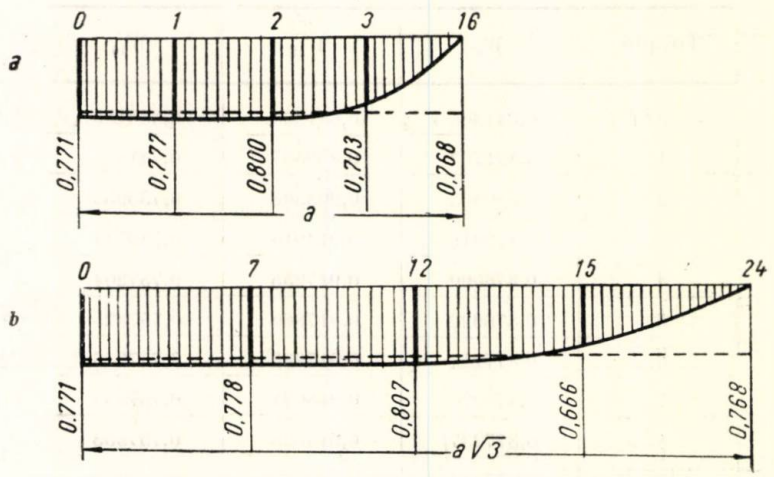


Fig. 9. — Variaţia săgeţilor w :
a — în lungul axei $x = 0$; *b* — în lungul axei $y = 0$.

Tabela 3

Nodul	W	w	M_x	M_y	$M_{xy} = M_{yx}$
0	0,87724	0,77101	−0,02197	−0,01131	0
1	0,88459	0,77747	−0,02826	−0,01731	0
2	0,91050	0,80024	+0,20947	+0,13450	0
3	0,79959	0,70276	+1,15421	+1,27591	0
4	0,88118	0,77447	−0,02751	−0,01431	−0,00389
5	0,89955	0,79062	+0,12544	+0,05275	+0,07274
6	0,83261	0,73178	+1,14071	+0,56344	+0,54577
7	0,88514	0,77795	−0,036	−0,01771	0
8	0,89759	0,78890	+0,12162	+0,05618	+0,07042
9	0,82793	0,72767	+1,12459	+0,52732	+0,57891
10	0,90166	0,79247	+0,11010	+0,05236	+0,07534
11	0,82752	0,72731	+1,11823	+0,52941	+0,57988
12	0,91803	0,80686	+0,25814	+0,12915	0
13	0,83150	0,73081	+1,10705	+0,53127	+0,58589
14	0,84388	0,74169	+1,25651	+0,61658	+0,51060
15	0,75735	0,66564	+2,22135	+0,90278	0
16	0	0	−0,54659	+1,63978	0
17	0	0	−0,03869	+0,03869	+0,02513
18	0	0	−0,00548	+0,00548	−0,00356
19	0	0	+0,00049	−0,00049	−0,00032
20	0	0	−0,00467	+0,00467	+0,00303
21	0	0	−0,01452	+0,01452	+0,00943
22	0	0	+0,10140	−0,10140	−0,06586
23	0	0	+0,88752	−0,88752	−0,57646
24	0	0	0	0	0
Multiplicator	10^{-2}	$10^{-4} \cdot \frac{pa^4}{K}$	$10^{-3} \cdot pa^2$	$10^{-3} \cdot pa^2$	$10^{-3} \cdot pa^2$

Putem trece mai departe la scrierea ecuațiilor cu diferențe finite pentru funcția de eforturi.

Ecuațiile de tipul 1° pot fi scrise pentru nodurile interioare 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10 și 12; alegînd, de exemplu, ca nod central punctul 4, obținem

$$\Phi_0 + \Phi_1 - 5\,\Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_7 + \Phi_8 = -\,W_4.$$

Pe contur, funcția Φ va avea variația liniară:

$$\Phi_{26} = \frac{9}{8}\,\bar{\Phi}, \quad \Phi_{16} = \bar{\Phi}, \quad \Phi_{17} = \frac{7}{8}\,\bar{\Phi}, \quad \Phi_{18} = \frac{3}{4}\,\bar{\Phi},$$

$$\Phi_{19} = \frac{5}{8}\,\bar{\Phi}, \quad \Phi_{20} = \frac{1}{2}\,\bar{\Phi}, \quad \Phi_{21} = \frac{3}{8}\,\bar{\Phi}, \quad \Phi_{22} = \frac{1}{4}\,\bar{\Phi},$$

$$\Phi_{23} = \frac{1}{8}\,\bar{\Phi}, \quad \Phi_{24} = 0, \quad \Phi_{34} = -\,\frac{1}{8}\,\bar{\Phi}.$$

În conformitate cu relația (5.9), $\bar{\Phi}$ se poate exprima prin intermediul lui Φ_3

$$\bar{\Phi} = \frac{4}{4-1}\,\Phi_3 = \frac{4}{3}\,\Phi_3,$$

astfel încît valorile pe contur scrise mai sus vor fi exprimate în funcție de Φ_3

$$\Phi_{26} = \frac{3}{2}\,\Phi_3, \quad \Phi_{16} = \frac{4}{3}\,\Phi_3, \quad \Phi_{17} = \frac{7}{6}\,\Phi_3, \quad \Phi_{18} = \Phi_3,$$

$$\Phi_{19} = \frac{5}{6}\,\Phi_3, \quad \Phi_{20} = \frac{2}{3}\,\Phi_3, \quad \Phi_{21} = \frac{1}{2}\,\Phi_3, \quad \Phi_{22} = \frac{1}{3}\,\Phi_3,$$

$$\Phi_{23} = \frac{1}{6}\,\Phi_3, \quad \Phi_{24} = 0, \quad \Phi_{34} = -\,\frac{1}{6}\,\Phi_3.$$

Putem scrie acum și ecuațiile de tipul 2° pentru nodurile 3, 6, 9, 11, 13, 14, 15; de exemplu, pentru nodul 11 vom scrie

$$\frac{3}{2}\,\Phi_3 + \Phi_8 + \Phi_9 + \Phi_{10} - 6\,\Phi_{11} + \Phi_{13} = -\,W_{11}.$$

Matricea sistemului de $k^2 = 16$ ecuații a fost trecută în tabela 4, iar rădăcinile Φ în tabela 5.

Tabela 4

Nod	Φ_0	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	Φ_6	Φ_7	Φ_8	Φ_9	Φ_{10}	Φ_{11}	Φ_{12}	Φ_{13}	Φ_{14}	Φ_{15}	= Termen liber
0	−1,5	+0,5	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$= -0{,}25\ W_0$
1	+0,5	− 3	+0,5	.	+1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$= -0{,}50\ W_1$
2	.	+0,5	− 3	+0,5	.	+1	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$= -0{,}50\ W_2$
3	.	.	+0,5	−7/6	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	$= -0{,}50\ W_3$
4	+ 1	+ 1	.	.	−5	+1	.	+1	+1	.	.	.	.	.	.	.	$= -W_4$
5	.	+ 1	+ 1	.	+1	−6	+1	.	+1	+1	.	.	.	.	.	.	$= -W_5$
6	.	.	+ 1	+19/6	.	+1	−6	.	.	+1	.	.	.	.	.	.	$= -W_6$
7	.	.	.	.	+1	.	.	−3	+1	.	+1	.	.	.	.	.	$= -0{,}50\ W_7$
8	.	.	.	.	+1	+1	.	+1	−6	+1	+1	+1	.	.	.	.	$= -W_8$
9	.	.	.	+11/6	.	+1	+1	.	+1	−6	.	+1	.	.	.	.	$= -W_9$
10	.	.	.	.	.	.	.	+1	+1	.	−5	+1	+1	+1	.	.	$= -W_{10}$
11	.	.	.	+1,5	.	.	.	.	+1	+1	+1	−6	.	+1	.	.	$= -W_{11}$
12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	.	−3	+1	+1	.	$= -0{,}50\ W_{12}$
13	.	.	.	+7/6	.	.	.	.	.	.	+1	+1	+1	−6	+1	.	$= -W_{13}$
14	.	.	.	+5/6	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	+1	−5	+1	$= -W_{14}$
15	.	.	.	+0,5	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	+1	−3	$= -0{,}50\ W_{15}$

Eforturile se deduc fără dificultate cu ajutorul relaţiilor (5.12); de exemplu, pentru nodul 14 avem

$$N_{y,14} = \frac{9}{64} 4^2 \cdot \gamma_k \left(\Phi_{14} - 2\,\Phi_{14} + \Phi_{21} \right) \frac{pa^2}{f} = \frac{9}{4} \times 113{,}93229\ (2{,}40911 -$$

$$- 3{,}18049) \cdot 10^{-2} \cdot \frac{pa^2}{f} = - 1{,}97741 \frac{pa^2}{f};$$

$$N_{x,14} = - N_{y,14} - \frac{3}{2} \gamma_k W_{14} \cdot \frac{pa^2}{f} = (+1{,}97741 - \frac{3}{2} \times 113{,}93229 \times$$

$$\times\ 0{,}84388) 10^{-2} \frac{pa^2}{f} = + 0{,}53523 \frac{pa^2}{f};$$

$$N_{xy,14} = N_{yx,14} = - \frac{3\sqrt{3}}{64} 4^2 \cdot \gamma_k \left(\Phi_{22} - \Phi_{15} + \Phi_{12} - \Phi_{13} \right) \frac{pa^2}{f} =$$

$$= + 148{,}00232\ (2{,}12033 - 1{,}73697 + 2{,}73174 - 3{,}11992) \times 10^{-2} \frac{pa^2}{f} =$$

$$= - 0{,}007134 \frac{pa^2}{f}.$$

Valorile eforturilor N_x, N_y şi N_{xy} au fost trecute în tabela 5 şi reprezentate în figura 10 *a*, *b* şi *c*.

Vom mai examina încă modul de descărcare al plăcii curbe subţiri pe contur.

Fie

$\mathcal{P}$ — rezultanta încărcării exterioare,

$\mathcal{P}'$ — rezultanta proiecţiilor pe verticală ale eforturilor de lunecare pe contur,

$\mathcal{P}''$ — suma forţelor tăietoare pe contur (Q_t),

θ — unghiul de înclinare a tangentei la parabola de contur (în plan vertical).

Pentru încărcarea uniform distribuită şi un sfert de placă, se poate scrie

$$\mathcal{P} = \frac{\sqrt{3}}{2} pa^2 = 0{,}86602\, pa^2,$$

$$\operatorname{tg}\ \theta = \frac{f}{a} \left(1 - \frac{4x}{3a} \right),$$

$$\mathcal{P}' = \int_0^{2a} N_{nt} \cdot \operatorname{tg} \theta \cdot \mathrm{d}x.$$

Tabela 5

Nodul	Φ	N_x	N_y	$N_{xy} = N_{yx}$
0	−3,37408	+0,23064	−1,72983	0
1	−3,71148	+0,20027	−1,71202	0
2	−4,71673	+0,08204	−1,63806	0
3	−6,36098	−0,14609	−1,22039	0
4	−3,42466	+0,24230	−1,74821	+0,02230
5	−4,10663	+0,19036	−1,72768	+0,07982
6	−5,46256	+0,12197	−1,54488	+0,11128
7	−3,22989	+0,29441	−1,80710	0
8	−3,58236	+0,27767	−1,81163	+0,08383
9	−4,64154	+0,27764	−1,69256	+0,11996
10	−3,12522	+0,35249	−1,89341	+0,05285
11	−3,86383	+0,37605	−1,79026	+0,09110
12	−2,73174	+0,42128	−1,99018	0
13	−3,11992	+0,45686	−1,87787	+0,04850
14	−2,40911	+0,53523	−1,97741	−0,00713
15	−1,73697	+0,67117	−1,96547	0
16	−8,48130	0	0	0
17	−7,42114	+0,41462	−0,41462	−0,23939
18	−6,36098	+0,61300	−0,61300	−0,35393
19	−5,30081	+0,72408	−0,72408	−0,41805
20	−4,24065	+0,81070	−0,81070	−0,46806
21	−3,18049	+0,89555	−0,89555	−0,51706
22	−2,12033	+0,99466	−0,99466	−0,57428
23	−1,06016	+0,98273	−0,98273	−0,56738
24	0	0	0	0
Multi-plicator	10^{-2}	pa^2/f	pa^2/f	pa^2/f

Integrala poate fi efectuată numeric, de exemplu prin metoda lui Simpson. Ţinînd seama de relaţia (5.13), se obţine

$$\mathcal{P}' = -2\frac{\Delta}{3}\cdot\frac{f}{a}\cdot\frac{pa^2}{f}\left[1.0.\left(-\frac{2}{6}\right)+4\,(-0{,}239394)\left(-\frac{1}{6}\right)+\right.$$

$$+2\,(-0{,}353933)\cdot 0+4\,(-0{,}418047)\frac{1}{6}+2\,(-0{,}468057)\frac{2}{6}+$$

$$+4\,(-0{,}517061)\frac{3}{6}+2\,(-0{,}574279)\frac{4}{6}+4\,(-0{,}567382)\frac{5}{6}+$$

$$\left.+1\cdot 0\cdot\frac{6}{6}\right)\Big] = +0{,}687\ pa^2.$$

Mai departe rezultă

$$\mathcal{P}'' = \mathcal{P} - \mathcal{P}' = 0{,}179\ pa^2,$$

adică circa 79% din încărcarea exterioară se transmite elementelor marginale prin eforturi de membrană, iar restul de 21% prin forţe tăietoare.

Discuţia stării de eforturi va fi făcută la paragraful următor.

Pentru a ne da seama de ordinul de mărime al eforturilor determinate precedent, vom introduce valorile numerice. Fie, mai întîi, factorii dimensionali

$$K = \frac{0{,}25\times 340.000\times 15^3}{12\,(1-1/6^2)} = 2458{,}9286\times 10^4\ \text{kgcm}$$

(pentru a se ţine seama de efectele deformaţiilor plastice în timp, s-a considerat, după A. A. Gvozdev [5], un modul de elasticitate redus $E_r = 0{,}25\ E$),

$$\frac{pa^4}{K} = \frac{500\times 15^4}{2458{,}9286\times 10^2} = 20588{,}33\ \text{cm} = 2{,}058833\times 10^4\ \text{cm},$$

$$pa^2 = 500\times 15^2 = 112500\ \text{kgm/m},$$

$$\frac{pa^2}{f} = \frac{112500}{7{,}5} = 15000\ \text{kg/m},$$

$$\frac{pa^2}{f\delta} = \frac{150}{15} = 10\ \text{kg/cm}^2.$$

Cu aceste valori rezultă :

— săgeata maximă (în nodul 12)

$$w_{\max} = 2{,}058833\times 10^4\times 0{,}80686\times 10^{-4} = 1{,}66\ \text{cm},$$

— efortul normal maxim (în nodul 22)

$$N_{x,\max} = +15000\times 0{,}99466 = +14919{,}9\ \text{kg/m},$$

— efortul normal maxim (în nodul 12)

$$N_{y,\max} = -15000 \times 1{,}99018 = -29852{,}7 \text{ kg/m},$$

— efortul de lunecare maxim (în nodul 22)

$$N_{xy,\max} = 15000 \times 0{,}57428 = 8614{,}2 \text{ kg/m},$$

— momentul încovoietor maxim (în nodul 15)

$$M_{x,\max} = 2{,}22135 \times 10^{-3} \times 112500 = 249{,}9 \text{ kgcm/cm},$$

— efortul normal (în nodul 15)

$$N_x = +15\,000 \times 0{,}67117 = +10067{,}55 \text{ kg/m}.$$

Pentru verificarea eforturilor unitare se face ipoteza unui material perfect elastic. Notînd cu′ eforturile unitare produse de N_x, N_y și N_{xy} și cu″ eforturile unitare produse de momente, rezultă

$$\sigma'_{x,\max} = \frac{N_{x,\max}}{\delta} = +\frac{149{,}199}{14} = +9{,}9 \text{ kg/cm}^2 \text{ (întindere)},$$

$$\sigma'_{y,\max} = \frac{N_{y,\max}}{\delta} = -\frac{298{,}527}{15} = -19{,}9 \text{ kg/cm}^2 \text{ (compresiune)},$$

$$\tau'_{\max} = \frac{N_{xy,\max}}{\delta} = \frac{86{,}142}{15} = 5{,}7 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma''_{x,\max} = \pm\frac{6M_{x,\max}}{\delta^2} = \pm\frac{6 \times 249{,}9}{15^2} = \pm 6{,}7 \text{ kg/cm}^2.$$

În același nod 15 rezultă din efortul normal N_x un efort unitar

$$\sigma'_x = \frac{100{,}6755}{15} = +6{,}7 \text{ kg/cm}^2 \text{ (întindere)}.$$

Prin suprapunerea efectelor se obține

$$\sigma_{x,15} = \sigma'_x \pm \sigma''_x = +6{,}7 \pm 6{,}7 = \begin{cases} 13{,}4 \text{ kg/cm}^2 \\ 0 \end{cases}.$$

Placa va trebui să fie armată cu rețea dublă pentru a asigura preluarea eforturilor de întindere importante care iau naștere.

Eforturile de compresiune maxime în beton (−19,9) sînt moderate, cu toată deschiderea mare a cupolei. Este necesar încă să cunoaștem rezerva de siguranță în raport cu pierderea stabilității elastice.

În lipsa unei soluții riguroase, sarcina critică se poate evalua cu formula [3], [9]

$$p_{cr} = \frac{E\delta^2}{20R^2} = \frac{E\delta^2 f^2}{45a^4},$$

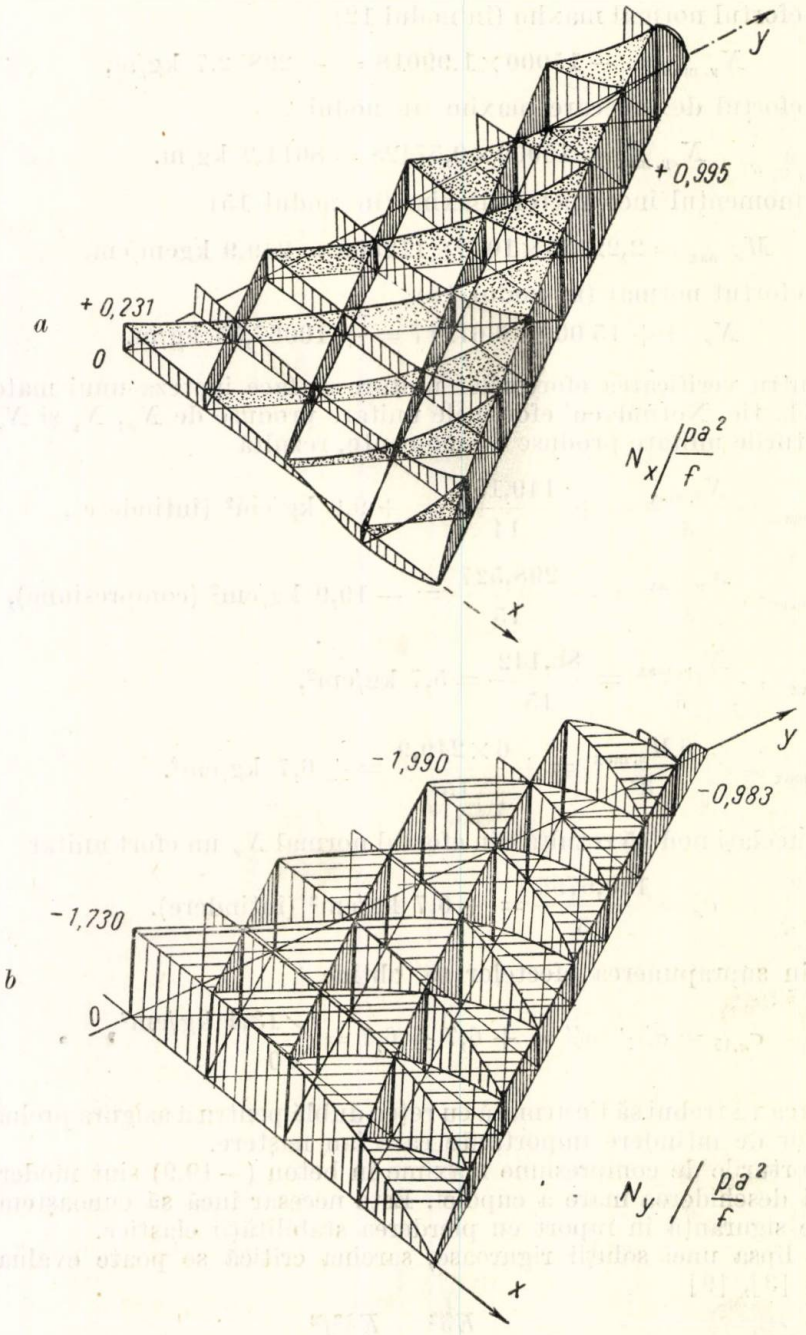


Fig. 10 *a*, *b*. — Variația eforturilor N_x, N_y și $N_{xy} = N_{yx}$.

sau, introducînd valorile numerice,

$$p_{cr} = \frac{340\,000 \times 10^4 \times 0{,}15^2 \times 7{,}5^2}{45 \times 15^4} = 1\,888{,}9 \text{ kg/m}^2.$$

Coeficientul de siguranţă

$$c_f = \frac{p_{cr}}{p} = \frac{1\,888{,}9}{500} = 3{,}78$$

poate fi considerat acceptabil.

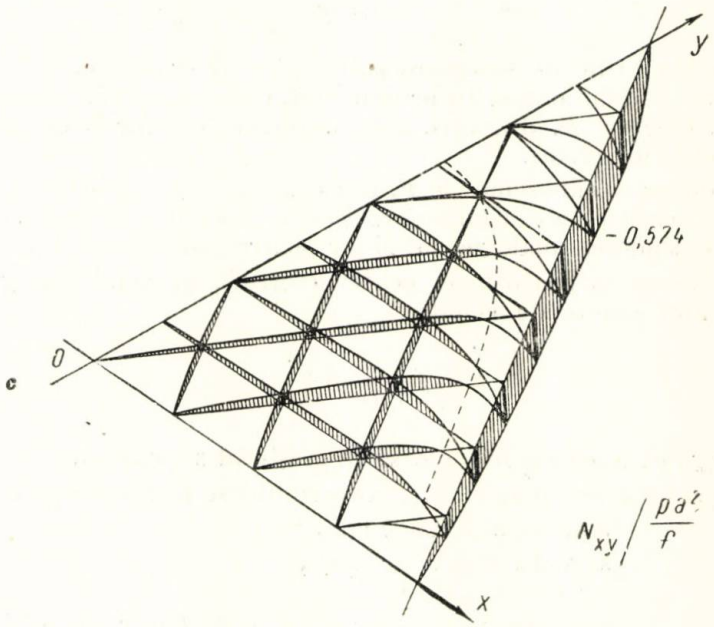


Fig. 10 *c*. — Variaţia eforturilor N_x, N_y şi $N_{xy} = N_{yx}$.

§ 7. COMPARAŢIE CU METODE SIMPLIFICATE DE CALCUL

7.1. TEORIA DE MEMBRANĂ

Se ştie că, în ipoteza de membrană (cînd momentele şi forţele tăietoare sînt presupuse mici astfel încît pot fi neglijate în ecuaţiile de echilibru), problema poate fi redusă la scrierea a două ecuaţii diferenţiale de bază în raport cu aceleaşi necunoscute F şi w. Păstrînd ipoteza suplimentară de placă pleoştită, cele două ecuaţii cu derivate parţiale se scriu după

cum urmează :

$$t\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2s\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} + r\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -Z, \tag{7.1}$$

$$t\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2s\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + r\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{1}{E\delta}\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right), \tag{7.2}$$

în care

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \tag{7.3}$$

Dacă condiţiile de rezemare sînt static determinate, rezolvarea se face succesiv în două etape. În primul rînd, din ecuaţia (7.1) se determină funcţia de eforturi F, din care apoi se deduc eforturile de membrană conform relaţiilor (2.4*a*).

Mai departe, cunoscînd pe F, din ecuaţia (7.2) se deduc săgeţile w. Forma identică a operatorilor diferenţiali ai necunoscutelor (7.1) şi (7.2) constituie extinderea analogiei lui Mohr pentru membrane [1].

Rezolvarea se poate face, pentru eforturi, în cazul mai general al paraboloidului *eliptic* de ecuaţie

$$z = f\left(\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{b^2}\right), \tag{7.4}$$

în care originea axelor a fost aleasă la creştetul suprafeţei,

b reprezintă semidiagonala mare a rombului din proiecţie orizontală,

a — a doua semidiagonală,

f — săgeata totală a plăcii,

$f\frac{a^2}{d^2}$ — distanţa dintre creştet şi colţurile ridicate (măsurată pe axa Oz).

Pentru încărcarea uniform distribuită $Z = p = \text{const.}$ şi ecuaţia suprafeţei mediane (7.4), ecuaţia (6.1) devine

$$\frac{2f}{b^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{2f}{d^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -p, \tag{7.5}$$

cu soluţia elementară

$$F(x, y) = \frac{pa^2 b^2 d^2}{4f(d^2 - a^2)}\left(-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right). \tag{7.6}$$

Din (7.6) se deduce prin derivări de două ori :

$$\left.\begin{aligned} N_x &= +\frac{pa^2d^2}{2f(d^2-a^2)}, \\ N_y &= -\frac{pb^2d^2}{2f(d^2-a^2)}, \\ N_{xy} &= N_{yx} \equiv 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

ceea ce arată că *eforturile de membrană sînt constante.*

Pe contur, de exemplu în lungul laturii

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

funcţia de eforturi are o variaţie liniară

$$F=-\frac{pab^2d^2x}{2f(d^2-a^2)},$$

fiind nulă în vîrful ascuţit $(0, b)$ şi luînd valoarea maximă

$$F=-\frac{pa^2b^2d^2}{2f(d^2-a^2)}$$

la celălalt vîrf $(a, 0)$.

Pe contur, efortul normal N_n este nul, iar al doilea efort normal dirijat în lungul laturii, respectiv efortul de lunecare iau valorile constante :

$$N_t=-\frac{pd^2(b^2-a^2)}{2f(d^2-a^2)}, \qquad N_{nt}=\frac{pabd^2}{2f(d^2-a^2)}.$$

Cazul paraboloidului de rotaţie pe contur rombic cu unghiul la vîrf $\alpha = 30°$ se obţine din datele precedente, luînd $b = d = a\sqrt{3}$. În acest caz, ecuaţia suprafeţei (7.4) se reduce la (1.1), iar celelalte relaţii devin :

ecuaţia cu derivate parţiale pe care o satisface funcţia de eforturi

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}=-\frac{3pa^2}{2f}, \tag{7.8}$$

soluţia pentru funcţia de eforturi

$$F(x,y)=\frac{3}{8}\frac{pa^2}{f}(y^2-3x^2-3a^2), \tag{7.9}$$

expresiile eforturilor

$$N_x=+0{,}75\frac{pa^2}{f}; \quad N_y=-2{,}25\frac{pa^2}{f}; \quad N_{xy}=N_{yx}\equiv 0. \tag{7.10}$$

Pe contur rămîn eforturile

$$N_t = -\frac{3}{2}\frac{pa^2}{f}, \quad N_{nt} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{pa^2}{f}. \tag{7.11}$$

Compararea relaţiilor (7.10) cu valorile corespunzătoare înscrise în tabela 5 arată diferenţe importante.

În primul rînd, în teoria de membrană nu este satisfăcută condiţia de contur $N_t = 0$, ceea ce atrage diferenţe sensibile de valori în această zonă între valorile eforturilor determinate prin teoria încovoierii şi teoria de membrană.

Eforturile rezultate din aplicarea teoriei încovoierii sînt mai mici, în schimb apar eforturi de lunecare de valori reduse.

Pentru calcularea deformaţiilor şi momentelor vom pleca de la ecuaţia (7.2), care în cazul particular considerat se scrie

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{3a^2}{2E\delta f}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{(2)} F. \tag{7.12}$$

Integrînd o dată simbolic în raport cu operatorul lui Laplace, rezultă

$$w = -\frac{3a^2}{2E\delta f}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + \omega,$$

în care ω reprezintă o funcţie armonică arbitrară.

Ţinînd seama şi de (7.8), relaţia precedentă se scrie

$$w = \frac{9}{4}\frac{pa^4}{E\delta f^2} + \omega.$$

Termenul constant din expresia precedentă poate fi regăsit şi din ecuaţia (2.1) dacă se anulează rigiditatea la încovoiere a plăcii ($K \to 0$).

$$w^{(0)} = \frac{9}{4}\frac{pa^4}{E\delta f^2} \tag{7.13}$$

constituie o soluţie particulară a ecuaţiei (7.12). Ţinînd seama de substituţia (4.1), se obţine

$$W^{(0)} = \frac{K}{E\delta f^2}k^4 = \frac{k^4\delta^2}{12(1-\mu^2)f^2} = \gamma_k^{-1},$$

valoare semnalată în § 5 ca valoare iniţială pentru calculul prin iteraţie în teoria încovoierii a săgeţilor transformate.

Valorile numerice ale lui W trecute în tabela 3 arată că pe toată suprafaţa cupolei, cu excepţia zonei marginale, săgeţile urmează un regim de membrană.

Condiţia de rezemare $w = 0$ nu poate fi realizată însă numai prin ipoteza de membrană, şi de aceea sînt de aşteptat perturbaţii marginale.

În figura 9 *a* și *b* a fost reprezentată, cu linie întreruptă, variația săgeților de membrană $w^{(0)}$.

Se mai observă că, ducînd valoarea (7.13) în ecuația (2.2), se regăsește ecuația (7.8).

7.2. EFECTUL DE CONTUR SIMPLU

Se știe că, în cazul plăcilor subțiri cu dublă curbură de tip eliptic, perturbațiile marginale pot fi evaluate cu o aproximație satisfăcătoare prin teoria efectului de contur simplu.

Raportîndu-ne la un sistem de axe *On*, *Ot* (originea pe contur), acest efect poate fi exprimat prin ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}^4\overline{w}}{\mathrm{d}n^4} + \frac{E\delta t^2}{K}\overline{w} = 0,$$

sau încă

$$\frac{\mathrm{d}^4\overline{w}}{\mathrm{d}n^4} + \frac{4\gamma^4}{9a^4}\overline{w} = 0.$$

Soluția pentru $\overline{w}$ trebuie să satisfacă condițiile marginale [1]

$$w^{(0)} + \overline{w} = 0 \text{ și } M_n = -K\frac{\mathrm{d}^2\overline{w}}{\mathrm{d}n^2} = 0.$$

Trecînd peste calculele intermediare, se obțin

$$\overline{w} = -\frac{9pa^4}{4E\delta f^2}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma n}{a\sqrt{3}}}\cos\frac{\gamma n}{a\sqrt{3}},$$

$$M_n = +\frac{3pa^2}{2\gamma^2}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma n}{a\sqrt{3}}}\sin\frac{\gamma n}{a\sqrt{3}},$$

$$Q_n = \frac{\sqrt{3}pa}{2\gamma}\mathrm{e}^{-\frac{\gamma n}{a\sqrt{3}}}\left(\cos\frac{\gamma n}{a\sqrt{3}} - \sin\frac{\gamma n}{a\sqrt{3}}\right),$$

$$\overline{N}_t = +\frac{3}{2}\frac{pa^2}{f}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\gamma n}{a\sqrt{3}}}\cos\frac{\gamma n}{a\sqrt{3}}.$$

Săgețile și eforturile normale vor fi suprapuse peste soluția de membrană, obținîndu-se pe această cale

$$w = \frac{9}{4}\frac{pa^4}{E\delta f^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\gamma n}{a\sqrt{3}}}\cos\frac{\gamma n}{a\sqrt{3}}\right),$$

$$N_t = -\frac{3}{2}\frac{pa^2}{f}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\gamma n}{a\sqrt{3}}}\cos\frac{\gamma n}{a\sqrt{3}}\right).$$

Se observă că, în felul acesta, și condiția marginală $N_t = 0$ este satisfăcută.

Un calcul numeric arată că, pentru săgeți și eforturi, diferențele dintre rezultatele teoriei încovoierii și ale teoriei efectului de contur simplu nu depășesc 20%; pentru momente comparația nu poate fi făcută, din cauza rețelei de puncte insuficient de densă [7], decît pentru nodurile vecine conturului și dacă numărul k de intervale este cel puțin 4.

§ 8. CONCLUZII

În lucrare s-a studiat starea de eforturi și de deformații într-o placă curbă subțire avînd forma unui paraboloid de rotație, acoperind în plan un contur rombic rezultat din alăturarea a două triunghiuri echilaterale.

Determinarea stării de eforturi și de deformații s-a făcut aplicînd teoria încovoierii, în ipoteza de placă curbă subțire pleoștită, și metoda diferențelor finite cu rețele triunghiulare.

Problema revine la integrarea numerică a unei ecuații cu derivate parțiale de ordinul al patrulea pentru săgeți și apoi a unei ecuații de tip Poisson pentru funcția de eforturi.

Dacă diagonala mică a rombului este împărțită în $2k$ intervale, iar încărcarea exterioară și rezemarea sînt simetrice în raport cu ambele axe de coordonate, problema se reduce la rezolvarea succesivă a două sisteme de ecuații cu cîte k^2 necunoscute, după care eforturile și momentele se deduc fără dificultate.

Eforturile normale dirijate după diagonala mică ($2a$) sînt de întindere și au valori relativ mici; eforturile normale dirijate după diagonala mare ($2\sqrt{3}\,a$) sînt de compresiune și au valori mai mari.

Săgețile sînt aproape constante în zona centrală a plăcii și practic concordă cu valorile furnizate de teoria de membrană. Momentele încovoietoare și de răsucire produc în zona marginală a plăcii eforturi unitare de întindere, de același ordin de mărime cu acelea produse de eforturile normale.

Determinarea momentelor încovoietoare maxime poate fi făcută prin calculul numeric; dacă rețeaua adoptată este densă ($k \geqslant 8$), obținerea rădăcinilor este posibilă doar cu ajutorul mașinilor de calcul electronice.

Problema a fost tratată anterior în literatura de specialitate doar în teoria de membrană de G. Ceradini [2] și M. Soare [8], care au dat o soluție numerică și au semnalat soluția analitică (7.6). Ulterior aceasta a fost regăsită de P. Csonka [4]. M. Krstić [6 *a* și *b*] a studiat aceeași problemă în coordonate carteziene oblice, căutînd soluția sub forma unei serii trigonometrice. Diferențele obținute la diagrama de variație a eforturilor de lunecare pe contur între rezultatele lui M. Krstić și ale noastre sînt datorite, probabil, considerării de către primul a unui număr insuficient de termeni ai dezvoltărilor în serie.

Primită la redacție la 12 ianuarie 1965.

BIBLIOGRAFIE

1. A. A. Beleş, M. Soare, *Paraboloidul eliptic şi hiperbolic în construcţii.* Edit. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1964.
2. G. Ceradini, *Sul calcolo delle tensioni di membrana in volte sottili a pianta triangolare o composta dalla triangolare.* Il Cemento, **58**, *8*, 15—18 (1959); **58**, *9*, 3—12 (1959).
3. P. Csonka, *Die Verformung und nachträgliche Verstärkung einer kuppelartigen Schale in Ungarn.* Die Bautechnik, *35*, 69 (1958).
4. P. Csonka, *Shell Curved in Two Directions Constructed over a Rhombus Plan-Form.* Acta Tehnica Academiae Scientiarum Hungaricae, **48**, *3—4*, 401—409 (1964).
5. А. А. Гвоздев, *Устойчивость тонких оболочек.* Бетон и Железобетон, *10*, 441—445 (1961).
6 *a*. M. Krstić, *Doppelt gekrümmte Schale über rhombischem Grundriss.* Bulletin de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts, Classe des Sciences techniques, **XXIX**, *5*, 7—9 (1962).
6 *b*. — *Placă subţire cu dublă curbură pe contur rombic* (în l. sîrbă). GLAS CCLVIII de l'Académie Serbe des Sciences et des Arts, Classe des Sciences techniques, *6*, 35—48 (1964).
7. M. Soare, *Contribuţii la teoria încovoierii paraboloidului eliptic.* Autoreferatul lucrării de disertaţie. Institutul de construcţii Bucureşti, 1963.
8. — *Application des équations aux différences finies au calcul des coques.* Eyrolles, Paris, 1962.
9. *Instrucţiuni pentru proiectarea acoperişurilor şi planşeelor din plăci curbe subţiri de beton armat* (trad. din l. rusă). Edit. tehnică, Bucureşti, 1963.

* * *

MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

FLAMBAJUL LATERAL AL GRINZILOR PENDULARE CONTINUE SUB SARCINI MOBILE

de VICTOR DROBOTĂ
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

539.4

În lucrare se stabilesc relaţiile pentru calculul sarcinii critice de flambaj în cîteva cazuri practice limită la grinzile continue susţinute pe reazeme care permit rotirea grinzii în orice direcţie, aşezate la distanţe egale între ele. Grinzile sînt încărcate pe unul din intervalele de la capete cu un convoi de sarcini mobile.

Se tratează atît cazul general cînd pe intervalul de capăt al axei grinzii este situat un convoi din n sarcini de valori diferite, cît şi cîteva cazuri particulare cel mai frecvent întîlnite în practică.

Într-un articol publicat [1] s-a studiat flambajul lateral al grinzilor pendulare continue sub sarcini concentrate. Pentru acest caz, poziţia sarcinilor pe grindă s-a considerat fixă, şi anume pe mijlocul deschiderii pe care erau aplicate.

În aplicaţiile practice în care sînt folosite asemenea grinzi, de obicei sarcinile se întîlnesc sub formă de convoaie de forţe care parcurg grinda de la un capăt la celălalt al ei (grinzi rulante, trenuri suspendate etc.).

În acest articol se va indica modul de rezolvare al problemei şi se vor stabili formulele de calcul care dau sarcina critică de flambaj, funcţie de valoarea sarcinilor convoiului şi de poziţia acestuia pe grindă, pentru cîteva cazuri particulare de grinzi şi încărcări întîlnite în cadrul aplicaţiilor practice.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 19 Nr. 4 P. 919–932 BUCUREŞTI 1965

a. GRINDA PE DOUA REAZEME

Unul dintre cazurile-limită interesant din punct de vedere practic (vezi tabela 1, articolul menţionat) este cel al grinzii pendulare simplu rezemate pe două reazeme asupra căreia acţionează un convoi de sarcini mobile $F_1, F_2, \ldots, F_n$ (fig. 1).

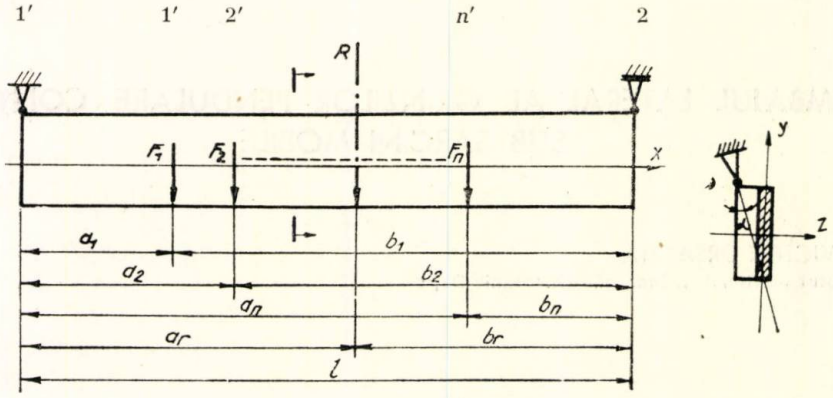


Fig. 1

Pentru rezolvarea acestei probleme se vor păstra aceleaşi ipoteze de calcul enumerate şi susţinute în lucrarea amintită, şi anume :

— grinda se consideră de rigiditate transversală mică ;

— susţinerea grinzii se face pe reazeme care permit orice rotire a grinzii în jurul punctului de fixare ;

— punctele de rezemare a grinzii sînt situate la distanţa h de punctele de aplicaţie ale sarcinilor convoiului ;

— toate punctele de fixare a grinzii şi cele de aplicare a sarcinilor sînt situate pe axa principală de inerţie a grinzii, iniţial în plan vertical ;

— efectul greutăţii proprii se consideră neglijabil ;

— se neglijează de asemenea efectul răsucirii grinzii care este foarte mic în comparaţie cu încovoierea laterală a acesteia.

În vederea stabilirii sarcinii critice se va aplica metoda energetică. Această metodă exprimă egalitatea dintre lucrul mecanic de deformaţie al forţelor interioare şi cel al forţelor exterioare.

Pentru a scrie această egalitate sînt necesare valorile reacţiunilor, expresiile momentelor încovoietoare în raport cu axa Oy pe diverse porţiuni de grindă şi a derivatelor acestora în raport cu forţele $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$.

Pentru cazul tratat, valorile reacţiunilor V_1 şi V_2 pe cele două reazeme sînt date de expresiile

$$V_1 = \frac{\Sigma . F_n b_n}{l}; \quad V_2 = \frac{\Sigma . F_n a_n}{l}.$$

Expresiile momentelor proiectate pe axa Oy și a derivatelor parțiale în raport cu forțele $F_1, F_2, \ldots, F_n$ pe diverse porțiuni de grindă sînt date de ecuațiile

$$M_{11'} = V_1 x\alpha, \qquad \frac{\partial M_{11'}}{\partial F_1} = \frac{b_1}{l} x\alpha,$$

$$M_{1'2'} = [V_1 x - F_1(x - a_1)]\alpha, \qquad \frac{\partial M_{1'2'}}{\partial F_1} = \left[\frac{b_1}{l} x - (x - a_1)\right]\alpha,$$

$$M_{2'3'} = [V_1 x - F_1(x - a_1) - F_2(x - a_2)]\alpha, \qquad \frac{\partial M_{2'3'}}{\partial F_1} = \left[\frac{b_1}{l} x - (x - a_1)\right]\alpha,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$M_{n'-1,n'} = [V_1 x - \Sigma F_{n-1}(x - a_{n-1})]\alpha, \qquad \frac{\partial M_{n'-1,n'}}{\partial F_1} = \left[\frac{b_1}{l} x - (x - a_1)\right]\alpha,$$

$$M_{n',2} = V_2 x\alpha, \qquad \frac{\partial M_{n',2}}{\partial F_1} = \frac{a_1}{l} x\alpha.$$

$$\frac{\partial M_{11'}}{\partial F_2} = \frac{b_2}{l} x\alpha, \qquad \frac{\partial M_{11'}}{\partial F_{n-1}} = \frac{b_{n-1}}{l} x\alpha,$$

$$\frac{\partial M_{1'2'}}{\partial F_2} = \frac{b_2}{l} x\alpha, \qquad \frac{\partial M_{1'2'}}{\partial F_{n-1}} = \frac{b_{n-1}}{l} x\alpha,$$

$$\frac{\partial M_{2'3'}}{\partial F_2} = \left[\frac{b_2}{l} x - (x - a_2)\right]\alpha, \qquad \frac{\partial M_{2'3'}}{\partial F_{n-1}} = \frac{b_{n-1}}{l} x\alpha,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\partial M_{n'-1,n'}}{\partial F_2} = \left[\frac{b_2}{l} x - (x - a_2)\right]\alpha, \qquad \frac{\partial M_{n'-1,n'}}{\partial F_{n-1}} = \left[\frac{b_{n-1}}{l} x - (x - a_{n-1})\right]\alpha,$$

$$\frac{\partial M_{n',2}}{\partial F_2} = \frac{a_2}{l} x\alpha. \qquad \frac{\partial M_{n',2}}{\partial F_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{l} x\alpha.$$

$$\frac{\partial M_{11'}}{\partial F_n} = \frac{b_n}{l} x\alpha,$$

$$\frac{\partial M_{1'2'}}{\partial F_n} = \frac{b_n}{l} x\alpha,$$

$$\frac{\partial M_{2'3'}}{\partial F_n} = \frac{b_n}{l} x\alpha,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial M_{n'-1,n'}}{\partial F_n} = \frac{b_n}{l} x\alpha,$$

$$\frac{\partial M_{n',2}}{\partial F_n} = \frac{a_n}{l} x\alpha,$$

în care

x este distanța de la reazemul (1) ales ca origine la o secțiune oarecare a grinzii,

a_n — distanța de la reazemul (1) ales ca origine pînă în dreptul forței F_n,

b_n — distanța de la reazemul (2) pînă în dreptul forței F_n,

α — unghiul de rotire al secțiunii grinzii față de verticală pentru poziția deformată a acesteia după pierderea stabilității,

l — deschiderea grinzii.

Expresia lucrului mecanic de deformație al forțelor interioare l_i este

$$L_i = \frac{\alpha^2}{2EI_y}\left[\int_0^{a_1}(V_1 x)^2\,dx + \sum_2^n \int_{a_{n-1}}^{a_n}[V_1 x - \Sigma F_{n-1}(x - a_{n-1})]^2\,dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^{b_n}(V_2 x)^2\,dx\right]. \tag{1}$$

Expresia lucrului mecanic al forțelor exterioare L_e este dat de expresia

$$L_e = \frac{\alpha^2}{EI_y}\left\{F_1\left[\left[\int_0^{a_1} V_1 \frac{b_1}{l} x^2\,dx + \sum_2^n \int_{a_{n-1}}^{a_n}[V_1 x - \Sigma F_{n-1}(x - a_{n-1})]\left[\frac{b_1}{l} x - \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. - (x - a_1)\right]dx + \int_0^{b_2} V_2 \frac{a_1}{l} x^2\,dx\right]\right] + \ldots + F_n\left[\left[\int_0^{a_1} V_1 \frac{b_n}{l} x^2\,dx + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \sum_2^n \int_{a_{n-1}}^{a_n}[V_1 x - \Sigma F_{n-1}(x - a_{n-1})]\left[\frac{b_n}{l} x\right]dx + \int_0^{b_n} V_2 \frac{a_n}{l} x^2\,dx\right]\right] - \frac{h}{2}\alpha^2 \Sigma F_n. \tag{2}$$

Pentru găsirea valorii sarcinii critice de flambaj se înlocuiesc valorile forțelor $F_1, F_2, \ldots, F_n$ funcție de valoarea rezultantei R, iar valorile distanțelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ și $b_1, b_2, \ldots, b_n$ se înlocuiesc funcție de poziția variabilă a rezultantei față de reazemul (1) ales drept origine a_r. Din egalitatea celor două lucruri mecanice rezultă o relație $R = f(a_r)$, care este de fapt relația ce dă valoarea sarcinii critice a convoiului de rezultantă R pentru o anumită poziție a lui pe grindă a_r.

În cele ce urmează se va trata cazul cel mai des întîlnit în aplicațiile practice, și anume acela cînd convoiul de forțe este alcătuit din două forțe F_1 și F_2, avînd între ele distanța c ca în figura 2.

Ținînd seama de relațiile generale scrise mai înainte, expresiile reacțiunilor, momentelor încovoietoare și derivatele lor, în raport cu F_1 și F_2 devin.

Reacțiunile sînt

$$V_1 = \frac{F_1 b_1 + F_2 b_2}{l}, \quad V_2 = \frac{F_1 a_1 + F_2 a_2}{l}.$$

Momentele încovoietoare pe direcţia axei Oy pentru diverse porţiuni ale ginzii sînt :

$$M_{11'} = V_1 x\alpha = \frac{F_1 b_1 + F_2 b_2}{l} x\alpha,$$

în care x variază la de 0 la a_1,

$$M_{1'2'} = [V_1 x - F_1(x - a_1)]x\alpha = \left[\frac{F_1 b_1 + F_2 b_2}{l} x - F_1(x - a_1)\right] x\alpha,$$

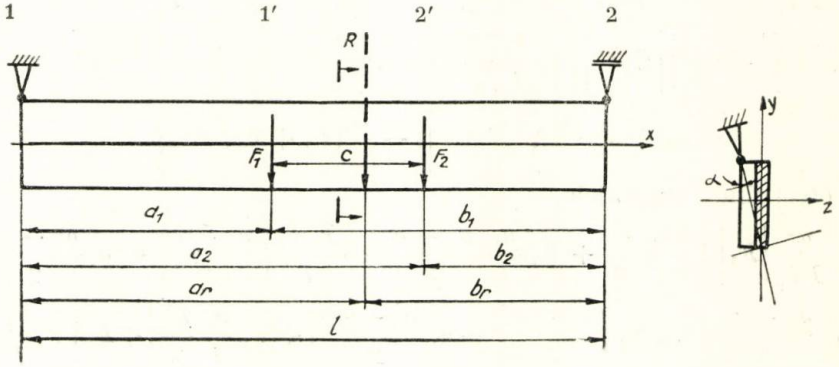


Fig. 2

în care x variază de la a_1 la a_2 ;

$$M_{2'2} = V_2 x\alpha = \frac{F_1 a_1 + F_2 a_2}{l} x\alpha,$$

în care x variază de la 0 la b_2.

Derivatele momentelor încovoietoare în raport cu forţele F_1 şi F_2 sînt

$$\frac{\partial M_{11'}}{\partial F_1} = \frac{b_1}{l} x\alpha, \quad \frac{\partial M_{1'2'}}{\partial F_1} = \left[\frac{b_1}{l} x - (x - a_1)\right]\alpha, \quad \frac{\partial M_{2'2}}{\partial F_1} = \frac{a_1}{l} x\alpha,$$

$$\frac{\partial M_{1'2'}}{\partial F_2} = \frac{b_2}{l} x\alpha, \quad \frac{\partial M_{1'2'}}{\partial F_2} = \frac{b_2}{l} x\alpha, \quad \frac{\partial M_{2'2}}{\partial F_2} = \frac{a_2}{l} x\alpha.$$

Cu acestea expresiile lucrului mecanic de deformaţie al forţelor interioare şi cel al forţelor exterioare se pot scrie astfel :

$$L_i = \frac{\alpha^2}{2EI_y}\left[V_1^2 \int_0^{a_1} x^2\,dx + \int_{a_1}^{a_2} [V_1 x - F_1(x - a_1)]^2 dx + V_2^2 \int_0^{b_2} x^2 dx\right].$$

Efectuînd integralele, se obţine

$$L_i = \frac{\alpha^2}{2EI_y}\left\{V_1^2 \frac{a_1^3}{3} + V_1^2 \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} + F_1^2 \frac{(a_2 - a_1)^3}{3} - \right.$$

$$\left. - 2V_1 F_1 \left[\frac{a_2^3 - a_1^3}{3} - \frac{a_1}{2}(a_2^2 - a_1^2)\right] + V_2^2 \frac{b_2^3}{3}\right\},$$

expresie care se mai poate scrie

$$L_i = \frac{\alpha^2}{2EI_y}\left[V_1^2\frac{a_2^3}{3} + V_2^2\frac{b_2^3}{3} - \frac{2F_1V_1}{6}(2a_2^3 + a_1^3 - 3a_1a_2^2) + \frac{F_1^2}{3}(a_2 - a_1)^3\right]. \tag{3}$$

Lucrul mecanic al forțelor exterioare este

$$L_e = \frac{\alpha^2}{EI_y}\left\{F_1\left[\left[V_1\frac{b_1}{l}\int_0^{a_1}x^2\,dx + \int_{a_1}^{a_2}[V_1x - F_1(x-a_1)]\left[\frac{b_1}{l}x - (x-a_1)\right]dx + \right.\right.\right.$$

$$+ V_2\frac{a_1}{l}\left.\left.\int_0^{b_2}x^2\,dx\right]\right] + F_2\left[\left[V_1\frac{b_2}{l}\int_0^{a_2}x^2\,dx + \int_{a_1}^{a_2}[V_1x - F_1(x-a_1)]\frac{b_2}{l}x\,dx + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + V_2\frac{a_2}{l}\int_0^{b_2}x^2\,dx\right]\right] - \frac{h}{2}(F_1 + F_2)EI_y\right\}$$

sau, efectuînd integralele,

$$L_e = \frac{\alpha^2}{EI_y}\left\{F_1\left[V_1\frac{b_1}{l}\frac{a_1^3}{3} + V_1\frac{b_1}{l}\frac{a_2^3 - a_1^3}{3} - \frac{F_1b_1}{l}\left(\frac{a_2^3 - a_1^3}{3} - a_1\frac{a_2^2 - a_1^2}{2}\right) + \right.\right.$$

$$+ F_1\left(\frac{a_2 - a_1}{3}\right)^3 - V_1\left(\frac{a_2^3 - a_1^3}{3} - a_1\frac{a_2^2 - a_1^2}{2}\right) + V_2\frac{a_1}{l}\frac{b_2^3}{3}\left.\right] + F_2\left[V_1\frac{b_2}{l}\frac{a_1^3}{3} + \right.$$

$$\left.\left. + V_1\frac{b_2}{l}\frac{a_2^3 - a_1^3}{3} + V_2\frac{a_2}{l}\frac{b_2^3}{3} - \frac{F_1b_2}{l}\left(\frac{a_2^3 - a_1^3}{3} - a_1\frac{a_2^2 - a_1^2}{2}\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{h}{2}EI_y(F_1 + F_2)\right\},$$

care se mai poate scrie

$$L_e = \frac{\alpha^2}{EI_y}\left\{V_1\frac{a_2^3}{3l}(F_1b_1 + F_2b_2) - \frac{F_1}{6l}(2a_2^3 + a_1^3 - 3a_1a_2^2)(F_1b_1 + F_2b_2) - \right.$$

$$- V_1(2a_2^3 + a_1^3 - 3a_1a_2^2) + \frac{F_1}{3}(a_2 - a_1)^3 + \frac{V_2b_2^3}{3l}(F_1a_1 + F_2a_2) -$$

$$\left. - \frac{h}{2}EI_y(F_1 + F_2)\right\}. \tag{4}$$

Egalînd cele două expresii ale lucrului mecanic (3) și (4), se obține

$$\frac{\alpha^2}{2EI_y}\left[V_1^2\frac{a_2^3}{3} + V_2^2\frac{b_2^3}{3} - \frac{2V_1F_1}{6}(2a_2^3 + a_1^3 - 3a_1a_2^2) + \frac{F_1^2}{3}(a_2 - a_1)^3\right] =$$

$$= \frac{\alpha^2}{EI_y}\left[\left[(F_1b_1 + F_2b_2)\left[\frac{V_1a_2^3}{3l} - \frac{F_1}{6l}(2a_2^3 + a_1^3 - 3a_1a_2^2)\right] - \right.\right.$$

$$- \frac{F_1V_1}{6}(2a_2^3 + a_1^3 - 3a_1a_2^2) + \frac{F_1^2}{3}(a_2 - a_1)^3 + \frac{V_2b_2^3}{3l}(F_1a_1 + F_2a_2) -$$

$$\left.\left. - \frac{h}{2}EI_y(F_1 + F_2)\right]\right], \tag{5}$$

dar, deoarece $\frac{F_1 b_1 + F_2 b_2}{l} = V_1$ și $\frac{F_1 a_1 + F_2 a_2}{l} = V_2$, egalitatea de mai sus (5) devine

$$\frac{1}{2}\left[V_1^2 \frac{a_2^3}{3} + V_2^2 \frac{b_2^3}{3} - \frac{2F_1 V_1}{6}(2a_2^3 + a_1^3 - 3a_1 a_2^2) + \frac{F_1^2}{3}(a_2 - a_1)^3 = \frac{V_1^2 a_2^3}{3} - \right.$$

$$- \frac{F_1 V_1}{6}(2a_2^3 + a_1^3 - 3a_1 a_2^2) - \frac{F_1 V_1}{6}(2a_2^3 + a_1^3 - 3a_1 a_2^2) + \frac{F_1^2}{3}(a_2 - a_1)^3 +$$

$$+ \frac{V_2^2 b_2^3}{3} - \frac{h}{2} EI_y (F_1 + F_2).$$

Trecînd totul în membrul I, cu excepția ultimului termen din membrul II, și reducînd termenii asemenea, se obține relația

$$- \frac{V_1^2 a_2^3}{6} - \frac{V_2^2 b_2^3}{6} + \frac{V_1 F_1}{6}(2a_2^3 + a_1^3 - 3a_1 a_2^2) - \frac{F_1^2}{6}(a_2 - a_1)^3 =$$

$$= - \frac{h}{2} EI_y (F_1 + F_2)$$

sau

$$F_1 V_1 (2a_2^3 + a_1^3 - 3a_1 a_2^2) - V_1^2 a_2^3 - V_2^2 b_2^3 - F_1^2 (a_2 - a_1)^3 = \\ = - 3hEI_y (F_1 + F_2). \tag{6}$$

Se înlocuiesc în această egalitate V_1, V_2, F_1, F_2, a_1, a_2, b_1, b_2, și combinațiile lor cu valorile corespunzătoare, funcție de mărimea rezultantei R, de poziția ei pe grindă a_r și distanța c dintre cele două forțe ale convoiului.

Se notează raportul $\frac{F_2}{F_1} = K$.

Ținînd seama de acestea, se pot scrie următoarele relații:

$$F_1 + F_2 = R, F_1 = \frac{R}{1+K}, F_2 = R\frac{K}{1+K}, V_1 = \frac{Rb_r}{L}, V_2 = \frac{Ra_r}{L}, F_1 a_1 +$$

$$+ F_2 a_2 = Ra_r, F_1 b_1 + F_2 b_2 = Rb_r, a_1 = a_r - c\frac{K}{1+K}, a_2 = a_r +$$

$$+ \frac{c}{1+K}, b_1 = l - \left(a_r - c\frac{K}{1+K}\right), b_2 = l - \left(a_r + \frac{c}{1+K}\right), a_2 - a_1 = c,$$

$$b_r = l - a_r, 2a_2^3 + a_1^3 - 3a_1 a_2^2 = 3a_r c^2 + \frac{c^3}{1+K}(2 - K^3 + 3K) =$$

$$= 3a_r c^2 + c^3 \frac{2-K}{1+K} = c^2\left(3a_r + c\frac{2-K}{1+K}\right).$$

Cu acestea egalitatea (6) devine

$$\frac{R^2}{1+K}\,\frac{l-a_r}{l}\,c^2\left(3a_r+c\,\frac{2-K}{1+K}\right)-\frac{R^2\,(l-a_r)^2}{l^2}\left(a_r+\frac{c}{1+K}\right)^3-$$

$$-\frac{R^2a_r^2}{l^2}\left[l-\left(a_r+\frac{c}{1+K}\right)\right]^3-\frac{R^2}{(1+K)^2}\,c^3=-3h\,EI_y\,R,$$

care se mai poate scrie

$$R\left\{\frac{l\,(l-a_r)}{1+K}\,c^2\left[3a_r+c\,\frac{2-K}{1+K}\right]-(l-a_r)^2\left(a_r+\frac{c}{1+K}\right)^3-\right.$$

$$\left.-a_r^2\left[l-\left(a_r+\frac{c}{1+K}\right)\right]^3-\frac{c^3\,l^2}{(1+K)^2}\right\}=-3hl^2\,EI_y,$$

de unde rezultă valoarea sarcinii critice

$$R=\frac{N}{n};$$

unde $N=3hl^2EI_y$

$$n=-\frac{c^2l\,(l-a_r)}{1+K}\left(3a_r+c\,\frac{2-K}{1+K}\right)+(l-a_r)^2\left(a_r+\frac{c}{1+K}\right)^3+ \tag{7}$$

$$+a_r^2\left[l-\left(a_r+\frac{c}{1+K}\right)\right]^3+\frac{c^3l}{(1+K)^2}.$$

Pentru stabilirea poziţiei convoiului pe grindă pentru care sarcina critică are valoarea minimă, trebuie să anulăm derivata funcţiei $R=f(a_1)$. Această derivată se anulează atunci cînd se anulează derivata numitorului

$$n'=2\,(l-a_r)\left(a_r+\frac{c}{1+K}\right)^3+3\,(l-a_r)^2\left(a_r+\frac{c}{1+K}\right)^2+2a_r\left(l-a_r-\frac{c}{1+K}\right)^3-$$

$$-3a_r^2\left(l-a_r-\frac{c}{1+K}\right)^2-3\,\frac{l\,(l-a_r)}{1+K}\,c^2+\frac{c^2l}{1+K}\left(3a_r+c\,\frac{2-K}{1+K}\right),$$

care se mai poate scrie

$$n'=(l-a_r)\left(a_r+\frac{c}{1+K}\right)^2(3l-c-5a_r)+a_r\left(l-a_r-\frac{c}{2}\right)^2(2l-c-5a_r)+$$

$$+\frac{c^2l}{1+K}\left(-3l+6a_r+c\,\frac{2-K}{1+K}\right).$$

Această relaţie se anulează cînd K are valorile -1, $+1$ şi 0, pentru $a_r=\frac{l}{2}$.

Pentru valoarea lui $K = 1$, care prezintă cel mai mare interes practic, sarcina critică este dată de relaţia

$$R = \frac{3hl^2EI_y}{\frac{l^2}{32}(l+c)^3 + \frac{l^2}{32}(l-c)^3 + \frac{c^3l^2}{4} - \frac{c^2l^2(3l+c)}{8}} =$$

$$= \frac{48hl^2EI_y}{l^5 - 3c^2l^3 + 2c^3l^2}.$$

Deci, pentru $K = 1$, valoarea minimă a sarcinii critice este dată de relaţia

$$R = \frac{48hEI_y}{l^3 - 3c^2l + 2c^3}. \tag{8}$$

În cele ce urmează s-au calculat cîteva valori ale sarcinii critic pentru diverse distanţe c dintre sarcini.

C	0	$\frac{l}{4}$	$\frac{l}{2}$	$\frac{5l}{8}$	$\frac{3l}{4}$	$\frac{7l}{8}$	l
R	$48\frac{EI_yh}{l^3}$	$57\frac{EI_yh}{l^3}$	$96\frac{EI_yh}{l^3}$	$152\frac{EI_yh}{l^3}$	$307\frac{EI_yh}{l^3}$	$945\frac{EI_yh}{l^3}$	∞

În figura 3 este reprezentată grafic variaţia sarcinii critice cu distanţa dintre sarcini.

b. GRINDA PE PATRU REAZEME

Un alt caz-limită de studiat îl constituie grinda continuă suspendată pendular pe patru reazeme echidistante, încărcată cu un convoi de două sarcini mobile F_1 şi F_2, situate la distanţa c una de alta (fig. 4). Menţinînd aceleaşi ipoteze de calcul ca şi pentru cazul studiat mai înainte şi aplicînd aceeaşi metodă, se obţine pentru sarcina critică valoarea

$$R = \frac{N}{n}, \tag{9}$$

unde

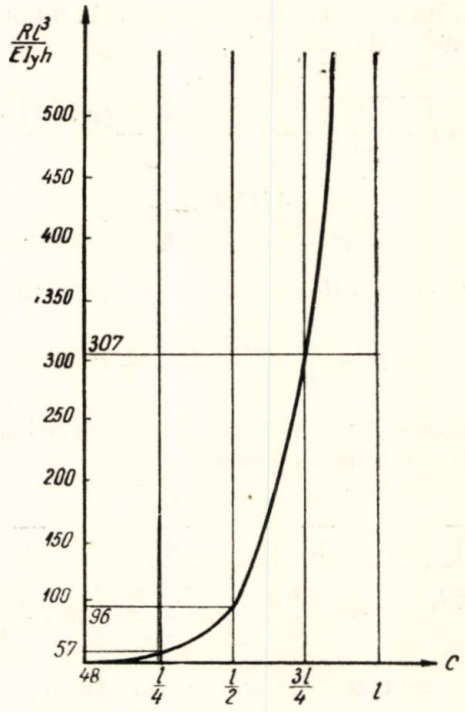
$$N = 3hl^2EI_y,$$

iar

$$n = (l-a_r)^2\left(a_r + \frac{c}{1+K}\right)^3 + a_r^2\left(l - a_r - \frac{c}{1+K}\right)^3 -$$

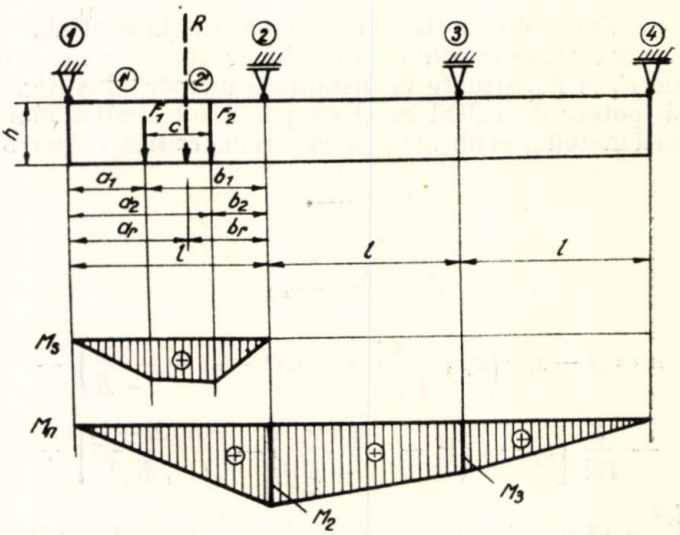
$$- \frac{2}{15l}\left[a_r^3 - a_r\left(l^2 - \frac{3Kc^2}{(1+K)^2}\right) - \frac{c^3K(K-1)}{(1+K)^3}\right]^2 +$$

$$+ \frac{lc^2}{(1+K)^2}[3a_r^2(1+K) - a_r[3l(1+K) - c(2-K)] - cl(1-K)].$$



$\frac{Rl^3}{EI_y h}$
500
450
400
350
307
300
250
200
150
100
96
57
48
$\frac{l}{4}$
$\frac{l}{2}$
$\frac{3l}{4}$
l
c

Fig. 3



R
1
2
3
4
1'
2'
F_1
F_2
c
h
a_1
b_1
a_2
b_2
a_r
b_r
l
l
l
M_s
M_n
M_2
M_3

Fig. 4

Practic interesează pentru ce poziţie a convoiului pe grindă valoarea sarcinii critice este minimă. Pentru aceasta egalăm derivata funcţiei n în raport cu a_r cu zero :

$$n' = -2(l-a_r)\left(a_r+\frac{c}{1+K}\right)^3+3(l-a_r)^2\left(a_r+\frac{c}{1+K}\right)^2+2a_r\left(l-a_r-\frac{c}{1+K}\right)^3-$$

$$-3a_r^2\left(l-a_r-\frac{c}{1+K}\right)^2-\frac{4}{15\,l}\left[a_r^3-a_r\left(l^2-\frac{3Kc^2}{(1+K)^2}\right)-\frac{c^3K(K-1)}{(1+K)^3}\right]\times$$

$$\times\left[3a_r^2-\left(l^2-\frac{3Kc^2}{(1+K)^2}\right)\right]+\frac{lc^2}{(1+K)^2}\,[6a_r(1+K)-3l(1+K)+c(2-K)].$$

Pentru cazul cel mai des întîlnit, în care $F_1 = F_2$, respectiv $K = 1$, derivata funcţiei n este

$$n' = (l-a_r)\left(a_r+\frac{c}{2}\right)^2(-5a_r-c+3l)+a_r\left(l-a_r-\frac{c}{2}\right)^2(-5a_r-c+2l)-$$

$$-\frac{4a_r}{15\,l}\left[3a_r^4-4a_r^2\left(l^2-\frac{3c^2}{4}\right)+\left(l^2-\frac{3\,c^2}{4}\right)^2\right]+\frac{lc^2}{4}\,(12\,a_r-6l+c).$$

Găsirea rădăcinilor ecuaţiei $n' = 0$ se va face pentru cîteva valori particulare ale distanţei c dintre cele două forţe egale. Pentru cazul $c = 0$ se obţine pentru n' expresia

$$n' = a_r(l-a_r)\times$$

$$\times\left[a_r(-5a_r+3l)-(l-a_r)(5a_r-2l)-\frac{4}{15\,l}(3a_r^3+3a_r^2l-a_rl^2-l^3)\right]=0.$$

Dezvoltînd parantezele şi reducînd termenii asemenea, se obţine ecuaţia de mai jos, a cărei necunoscută este a_r :

$$n' = -\frac{2}{15}\,a_r(l-a_r)(6a_r^3+6a_r^2l+28\,a_rl^2-17l^3)=0.$$

Rădăcinile reale valabile pe intervalul de variaţie al rezultantei R, care în cazul de faţă este cuprins între valorile 0 şi l, sînt următoarele :

$$a_r = 0,\quad a_r = l,\quad a_r = 0{,}518\,l.$$

Dintre aceste valori, aceea pentru care se obţine valoarea minimă a sarcinii critice este $a_r = 0{,}518\,l$.

Pentru cazul $c = \dfrac{l}{2}$, expresia lui n' este următoarea :

$$n' = (l-a_r)\left(a_r+\frac{l}{4}\right)^2\left(3l-5a_r-\frac{l}{2}\right)+a_r\left(l-a_r-\frac{l}{4}\right)^2\left(2l-5a_r-\frac{l}{2}\right)-$$

$$-\frac{4\,a_r}{15\,l}\left[3a_r^4-4a_r^2\left(l^2-\frac{3\,l^2}{16}\right)+\left(l^2-\frac{3\,l^2}{16}\right)^2\right]+\frac{l^3}{16}\left(12a_r-6l+\frac{l}{2}\right).$$

Reducînd termenii asemenea din paranteze, se obține expresia

$$n' = \frac{5}{2}(l-a_r)\left(a_r+\frac{l}{2}\right)^2(l-2a_r)+\frac{a_r}{2}\left(\frac{3l}{4}-a_r\right)^2(3l-10a_r)-$$

$$-\frac{4a_r}{15\,l}\left[3a_r^4-\frac{13}{4}a_r^2l^2+\frac{13^2}{16^2}l^4\right]+\frac{l^3}{16}\left(12\,a_r-\frac{11}{2}l\right).$$

Unica soluție reală a ecuației $n' = 0$ în acest caz, cuprinsă între valorile $a_r = 0{,}25\,l$ și $a_r = 0{,}75\,l$ pe care le poate lua poziția rezultantei R pe grindă, se găsește prin încercări și este $a_r = 0{,}494\,l$.

Pentru cazul $c = l$, expresia lui n' devine

$$n' = (l-a_r)\left(a_r+\frac{l}{2}\right)^2(-5a_r-l+3l)+a_r\left(l-a_r-\frac{l}{2}\right)^2(-5a_r-$$

$$-l+2l)-\frac{4a_r}{15\,l}\left[3a_r^4-4a_r^2\left(l^2-\frac{3l^2}{4}\right)+\left(l^2-\frac{3l^2}{4}\right)^2\right]+\frac{l^3}{4}(12a_r-6l+l).$$

Reducînd termenii asemenea din paranteze, rezultă

$$n' = (l-a_r)\left(a_r+\frac{l}{2}\right)^2(2l-5a_r)+$$

$$+a_r\left(\frac{l}{2}-a_r\right)^2(l-5a_r)-$$

$$-\frac{4a_r}{15\,l}\left[3a_r^4-a_r^2l^2+\frac{l^4}{16}\right]+$$

$$+\frac{l^3}{4}(12a_r-5l).$$

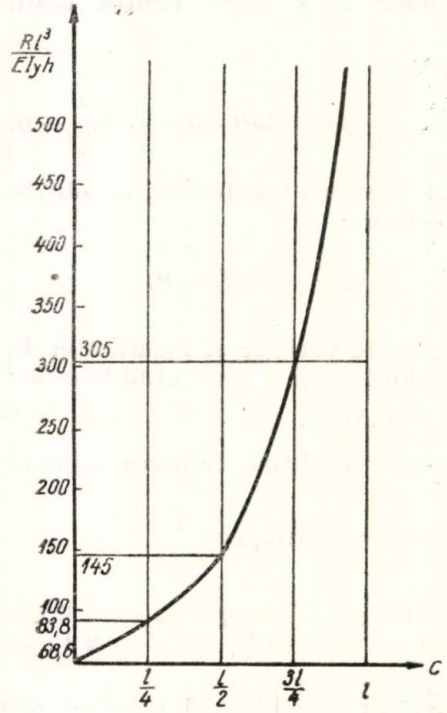


Fig. 5

Singura soluție reală a ecuației $n' = 0$ pentru acest caz, de altfel și unica poziție a convoiului pe grindă este pentru $a_r = \frac{l}{2}$. Sintetizînd aceste rezultate, valorile lui a_r pentru care se obține sarcina critică de flambaj pentru cazul $K = 1$ ($F_1 = F_2$) sînt următoarele:

c	0	$\frac{l}{2}$	l
a_r	$0{,}518\,l$	$0{,}494\,l$	$0{,}5\,l$

În concluzie, pentru cazul cel mai frecvent întîlnit practic, cînd valorile F_1 şi F_2 ale sarcinilor ce alcătuiesc convoiul sînt egale între ele, se poate spune că valoarea sarcinii critice se obţine atunci cînd rezultanta convoiului calcă pe mijlocul deschiderii grinzii $a_r = \frac{l}{2}$.

În acest caz, expresia lui n devine

$$n = \left(\frac{l}{2}\right)^2\left(\frac{l}{2}+\frac{c}{2}\right)^3 + \frac{l^2}{4}\left(\frac{l}{2}-\frac{c}{2}\right)^3 - \frac{2}{15l}\left[\frac{l^3}{8} - \frac{l}{2}\left(l^2 - \frac{3c^2}{4}\right)\right]^2 +$$

$$+ \frac{lc^2}{4}\left[\frac{6}{4}l^2 - \frac{l}{2}(6l - c)\right].$$

Dezvoltînd parantezele şi reducînd termenii asemenea, se obţine

$$n = \frac{l}{160}(7l^4 - 24\,l^2c^2 + 20\,lc^3 - 3c^4),$$

iar valoarea sarcinii critice devine

$$R = \frac{480\ hlEI_v}{7l^4 - 24l^2c^2 + 20lc^3 - 3c^4}. \qquad (10)$$

În cele ce urmează se vor calcula cîteva valori ale sarcinii critice R pentru diverse distanţe c dintre forţele ce alcătuiesc convoiul:

c	0	$\frac{l}{4}$	$\frac{l}{2}$	$3\frac{l}{4}$	l
R	$68{,}57\frac{EI_vh}{l^3}$	$83{,}8\frac{EI_vh}{l^3}$	$145\frac{EI_vh}{l^3}$	$305\frac{EI_vh}{l^3}$	∞

În figura 5 este reprezentată grafic variaţia sarcinii critice R cu distanţa c dintre forţele ce alcătuiesc convoiul.

CONCLUZII

Din studierea cazului cînd pe grindă calcă un convoi de sarcini alcătuit din două forţe concentrate situate la distanţa c între ele, se pot trage următoarele concluzii:

1. Valoarea sarcinii critice este funcţie de distanţa c dintre cele două forţe. Cu cît aceasta este mai mare şi valoarea sarcinii critice este

mai mare, tinzînd către infinit cînd valoarea acestei distanţe tinde către valoarea deschiderii dintre reazeme.

2. Poziţia convoiului de sarcini pe grindă pentru care se obţine cea mai mică valoare a sarcinii critice este determinată de poziţia rezultantei acestor sarcini pe grindă, care se determină din formulele (7) şi (9) pentru fiecare caz de încărcare în parte.

3. Pentru cazul cînd cele două forţe ale convoiului sînt egale între ele, sarcina critică se obţine atunci cînd rezultanta convoiului este situată pe mijlocul grinzii şi are valorile date de expresiile (8) şi (10).

Primită la redacţie la 2 februarie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. PETRE A., DROBOTĂ V., *Flambajul lateral al grinzilor continue pendulare*, Studii şi cercetări de mecanică aplicată, *4*, **16** (1964).

PUNCTELE CARACTERISTICE ALE ACCELERAŢIILOR COMPUSE SUPERIOARE [1])

de CHR. PELECUDI
Centrul de mecanica solidului al Academiei R. S. România.

531.1

Acceleraţiile compuse se definesc prin diferenţa vectorială a acceleraţiilor simple cu acceleraţia normală din rotaţia faţă de punctul caracteristic, care este cunoscută din studiul acceleraţiilor inferioare.

În felul acesta, ecuaţiile acceleraţiilor se aduc la forma ecuaţiilor de viteze pentru care se pot utiliza metodele simple de calcule clasice. Lucrarea cuprinde în continuare poziţionarea relativă a punctelor caracteristice în funcţie de centrele instantanee ale acceleraţiilor compuse superioare, precum şi localizarea lor în mecanismele plane cu cuple inferioare şi superioare.

1. În lanţurile cinematice, punctele carateristice Ki, cîte unul de fiecare corp, sînt utilizate pentru determinarea acceleraţiilor compuse [1] — [5]. Pe de altă parte, acceleraţiile compuse prezintă avantajul că metodele lor de determinare sînt simple, asemănătoare cu cele ale vitezelor. Termenii suplimentari ai ecuaţiilor vectoriale de acceleraţii sînt înglobaţi la acceleraţiile diferitelor puncte şi, totodată, ajută la determinarea poziţiilor reciproce ale punctelor caracteristice [1]—[5]. Studiul acestor puncte conduce la rezolvări interesante pentru diferite situaţii ale sistemelor materiale plane, în care corpurile sînt legate prin cuple inferioare — de rotaţie sau de translaţie — sau prin cuple superioare, formînd lanţuri cinematice deschise sau închise.

În strînsă legătură cu aceste puncte se află centrele instantanee H_{jk} ale acceleraţiilor compuse relative între două corpuri oarecare ale lanţului cinematic. De poziţiile acestora, care pot corespunde sau nu cu centrele instantanee ale acceleraţiilor simple sau a vitezelor, sînt legate de simplificări în calculele acceleraţiilor compuse superioare.

[1]) Publicată în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **10**, *4* (1965) (în lb. engleză).

Pentru aceasta se va examina determinarea reciprocă a punctelor caracteristice K_i şi a centrelor instantanee H_{jk} pentru diferite situaţii ale sistemelor materiale plane.

2. Acceleraţiile compuse ale unui corp se definesc, în raport cu punctul caracteristic K legat de corpul respectiv, prin relaţiile

$$\widetilde{a}_A^{(n)} = \bar{a}_A^{(n)} + A_n(\omega)\overline{KA} = \bar{a}_K^{(n)} + B_n(\omega)\,\overline{KA}\,i \tag{1}$$

$$\widetilde{\widetilde{a}}_A^{(n)} = \bar{a}_A^{(n)} + [A_n(\omega) - C_n(\omega)\,i]\,\overline{KA} = \bar{a}_K^{(n)} + \omega^{(n)}\,\overline{KA}\,i, \tag{2}$$

în care mărimile scalare A_n, B_n, C_n, corespunzătoare ordinului n al acceleraţiilor superioare, sînt legate prin relaţiile de recurenţă [1]—[5].

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \dot{A}_n + \omega B_n, \\ B_{n+1} &= \dot{B}_n - \omega A_n, \\ C_{n+1} &= \dot{C}_n - \omega A_n, \\ B_n &= C_n + \omega^{(n)} \end{aligned} \tag{3}$$

cu

$$\begin{aligned} A_0 &= 0\,, & A_1 &= \omega^2\,, & A_2 &= 3\omega\,\dot{\omega}', \\ B_0 &= \omega\,, & B_1 &= \dot{\omega}\,, & B_2 &= \ddot{\omega} - \omega^3, \\ C_0 &= 0\,, & C_1 &= 0\,, & C_2 &= -\,\omega^3. \end{aligned} \tag{4}$$

Mărimile A_n, B_n, C_n sînt funcţii numai de viteza unghiulară ω şi de primele sale $(n-1)$, n, $(n-2)$ derivate în raport cu timpul. În această bază, din ecuaţiile de definiţie ale acceleraţiilor compuse se observă că termenii suplimentari, constituiţi cu mărimile A_n şi C_n, care se adaugă acceleraţiilor simple pentru a forma acceleraţiile compuse, sînt cunoscuţi dacă s-au determinat în prealabil acceleraţiile de ordine inferioară $< n$.

Relaţia dintre acceleraţiile compuse superioare de cele două speţe (a şi b) este

$$\widetilde{a}_A^{(n)} = \widetilde{\widetilde{a}}_A^{(n)} + C_n(\omega)\,\overline{KA}\,i, \tag{5}$$

care se reduce, în cazul punctului caracteristic K, la

$$\widetilde{a}_K^{(n)} = \widetilde{\widetilde{a}}_K^{(n)} = \bar{a}_K^{(n)}. \tag{6}$$

Totodată, cele două speţe de acceleraţii compuse se confundă pentru acceleraţiile de primul ordin, deoarece $C_1 = 0$.

Sistemul de acceleraţii compuse superioare este definit astfel pentru un anumit punct caracteristic K. Două sisteme de acceleraţii compuse ale aceluiaşi corp, definite pentru două puncte caracteristice diferite K' şi K'', diferă între ele prin vectorul

$$\widetilde{T} = \widetilde{a}_A''^{(n)} - \widetilde{a}_A'^{(n)} = -\,A_n(\omega)\,\overline{K'K''}, \tag{7}$$

$$\widetilde{\widetilde{T}} = \widetilde{\widetilde{a}}_A''^{(n)} - \widetilde{\widetilde{a}}_A'^{(n)} = -\,[A_n(\omega) - C_n(\omega)\,i]\,\overline{K'K''}\,.$$

3. Relația de compunere a accelerațiilor

$$\bar{a}_B^{(n)} = \bar{a}_A^{(n)} + \bar{a}_{BA}^{(n)n} + \bar{a}_{BA}^{(n)t} \tag{8}$$

cu

$$\bar{a}_{BA}^{(n)n} = -A_n(\omega)\,\overline{AB},$$

$$\bar{a}_{BA}^{(n)t} = B_n(\omega)\,\overline{AB}\,i$$

se modifică, devenind

$$\tilde{a}_B^{(n)} = \tilde{a}_A^{(n)} + \tilde{a}_{BA}^{(n)}, \tag{9}$$

cu

$$\tilde{a}_{BA}^{(n)} = \Omega^{(n)}\,\overline{AB}\,i, \qquad \Omega^{(n)} = B_n$$

sau

$$\tilde{\tilde{a}}_B^{(n)} = \tilde{\tilde{a}}_A^{(n)} + \tilde{\tilde{a}}_{BA}^{(n)}, \tag{10}$$

cu

$$\tilde{\tilde{a}}_{BA}^{(n)} = \omega^{(n)}\,\overline{AB}\,i.$$

4. Centrul instantaneu H al accelerațiilor compuse superioare, $\tilde{a}_H^{(n)} = 0$ sau $\tilde{\tilde{a}}_H^{(n)} = 0$, este legat cu punctul caracteristic K prin vectorul accelerației reduse

$$\overline{HK} = \frac{\bar{a}_H^{(n)}}{A_n(\omega)} = \frac{\bar{a}_K^{(n)}}{B_n(\omega)\,i}, \tag{11}$$

astfel că între accelerațiile punctelor H și K avem relația

$$A_n\,\bar{a}_K^{(n)} = B_n\,\bar{a}_H^{(n)}\,i. \tag{12}$$

De asemenea, pentru accelerațiile compuse din speța a doua obținem

$$\overline{HK} = \frac{\bar{a}_H^{(n)}}{A_n(\omega) - C_n(\omega)\,i} = \frac{\bar{a}_K^{(n)}}{\omega^{(n)}\,i} \tag{13}$$

și deci

$$[A_n(\omega) - C_n(\omega)\,i]\,\bar{a}_K^{(n)} = \omega^{(n)}\,\bar{a}_H^{(n)}\,i \tag{14}$$

sau

$$A_n(\omega)\,\bar{a}_K^{(n)} = [C_n(\omega)\,\bar{a}_K^{(n)} + \omega^{(n)}\,\bar{a}_H^{(n)}]\,i.$$

5. Pentru ca pozițiile relative ale punctelor K și H să fie determinate anterior calculului accelerațiilor de ordinul (n), trebuie ca centrul instantaneu H al accelerațiilor compuse de ordinul (n) să corespundă cu centrul instantaneu al accelerațiilor simple de ordinul (m) inferior sau egal ordinului (n). În acest fel, $\bar{a}_H^{(n)}$ se exprimă prin derivatele inferioare.

Într-adevăr, vectorul de poziţie $\bar{r} = \overline{CH}$ în planul mobil se determină pentru această situaţie din condiţia

$$\bar{a}_H^{(m)} = \bar{a}_C^{(m)} - A_m(\omega)\,\overline{CH} + B_m(\omega)\,\overline{CH}\,i = 0,$$

adică

$$\bar{a}_C^{(m)} = [A_m(\omega) - B_m(\omega)\,i]\,[\bar{R}_H - \bar{R}_C], \tag{15}$$

în care

$$\bar{r} = \overline{CH} = \bar{R}_H - R_C\,,$$

iar $\bar{R}_C$ şi $\bar{R}_H$ sînt vectorii de poziţie ai punctelor C şi H faţă de o origine fixă. Prin derivare în raport cu timpul de $(n-m)$ ori se obţine

$$\bar{a}_C^{(n)} = \sum_{p=0}^{n-m} C_{n-m}^{p}\,[A_m(\omega) - B_m(\omega)\,i]^{(n-m-p)} \times [\bar{R}_H - \bar{R}_C]^{(p)}, \tag{16}$$

în care derivata absolută în raport cu timpul a vectorului $\bar{V} = A_m(\omega) - B_m(\omega)i$ trebuie considerată în raport cu derivata sa relativă

$$\frac{\mathrm{d}\bar{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \omega \bar{V}\,i, \tag{17}$$

ceea ce asigură că

$$A_n(\omega) - B_n(\omega)\,i = [A_m(\omega) - B_m(\omega)\,i]^{(n-m)}.$$

Fie că se consideră că la un moment dat C coincide cu H, fie că se înlocuieşte $\bar{a}_C^{(n)}$ în funcţie de $\bar{a}_H^{(n)}$, primul termen al sumei dispare şi însumarea rămîne între limitele $p = 1$ şi $p = n - m$, astfel că $\bar{a}_H^{(n)}$ se exprimă numai prin derivatele inferioare ordinului n:

$$\bar{a}_H^{(n)} = \sum_{p=1}^{n-m} C_{n-m}^{p}\,[A_m(\omega) - B_m(\omega)\,i]^{(n-m-p)} \times [\bar{u}_H^{(p)} - \bar{v}_H^{(p)}], \tag{18}$$

în care $\bar{u}_H^{(k)}$ reprezintă viteza de schimbare de ordinul (k), iar $\bar{v}_H^{(k)}$ reprezintă viteza de deplasare de ordinul (k) a punctului $H\,(\equiv C)$.

6. Trei cazuri particulare sînt interesante. Mai întîi se presupune coincidenţa centrului H al acceleraţiilor compuse superioare şi centrul acceleraţiilor superioare simple de acelaşi ordin $m = n$ şi deci

$$\bar{a}_H^{(n)} = 0\,, \qquad H \equiv K. \tag{19}$$

Următorul caz prevede că centrul H al acceleraţiilor compuse de ordinul n corespunde cu centrul instantaneu al acceleraţiilor simple de ordinul imediat inferior $m = n - 1$, ceea ce conduce la

$$\bar{a}_H^{(n-1)} = 0,\ \bar{a}_H^{(n)} = [A_{n-1}(\omega) - B_{n-1}(\omega)\,i]\,[\bar{u}_H - \bar{v}_H]. \tag{20}$$

Ultimul caz se referă la corespondența dintre centrul H cu centrul instantaneu I al vitezelor $m = 0$ și avem

$$\bar{a}_H^{(0)} = \bar{v}_H = 0,$$
$$\bar{a}_H^{(n)} = -i \sum_{p=1}^{n} C_n^p \, \omega^{(n-p)} . [\bar{u}_H^{(p)} - \bar{v}_H^{(p)}], \tag{21}$$

ceea ce arată că accelerația superioară de ordinul (n) a centrului $H \equiv I$ depinde de accelerațiile sale cuprinse între ordinele (1) și $(n-2)$ și de vitezele de schimbare cuprinse între ordinele (0) și $(n-1)$.

Ultimele două cazuri se reduc pentru accelerațiile de ordinul întîi la relația cunoscută

$$\bar{a}_H = -i \, \omega \, \bar{u}_H . \tag{22}$$

Viteza de deplasare de ordinul (k) a centrului H reprezintă accelerația sa de ordinul $(k-1)$ și poate fi calculată din aproape în aproape cu formula anterioară (21).

Pentru viteza de schimbare de ordinul (k) se derivează succesiv vectorul de poziție al punctului instantaneu $H \equiv I$, adică

$$\bar{v}_H^{(k)} = \frac{d^{(k)} \bar{R}_H}{dt^{(k)}}, \tag{23}$$

$$\bar{R}_H = \bar{R}_I = \bar{R}_C + \frac{\bar{v}_C}{\omega} i = \bar{R}_C + \frac{d\bar{R}_C}{d\theta} i, \tag{24}$$

așa că în particular $(k = 1)$ avem

$$\bar{u}_H = \bar{u}_I = i \omega \bar{d}, \tag{25}$$
$$i\bar{d} = \frac{d\bar{R}_I}{d\theta} = \frac{d\bar{R}_C}{d\theta} + \frac{d^2\bar{R}_C}{d\theta^2} i.$$

7. Relația de compunere a accelerațiilor în mișcarea relativă a două corpuri, în care C_1 și C_2 sînt puncte confundate în același punct geometric C, este

$$\bar{a}_{C_2}^{(n)} = \bar{a}_{C_1}^{(n)} + \bar{a}_{C_{21}}^{c(n)} + \bar{a}_{C_{21}}^{r(n)}, \tag{26}$$

în care $\bar{a}_{C_{21}}^{r(n)}$ este accelerația relativă, iar $\bar{a}_{C_{21}}^{c(n)}$ este accelerația complementară cunoscută prin accelerațiile relative de ordine inferioare $< n$:

$$\bar{a}_{C_{21}}^{c(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} D_n^{(k)} (\omega) \, \bar{a}_{C_{21}}^{r(k)}, \tag{27}$$

în care mărimile complexe $D_n^{(k)}(\omega)$ sînt legate prin relațiile de recurență

$$D_{n+1}^{(k)} = \dot{D}_n^{(k)} + \omega D_n^{(k)} i + D_n^{(k-1)} \tag{28}$$

cu

$$D_n^{(-1)}(\omega) = -[A_n(\omega) - B_n(\omega)\, i]\,; \quad D_n^{(n)}(\omega) \equiv 1,$$

iar $D_1^{(0)} = 2\omega i$ este coeficientul corespunzător accelerației Coriolis și $\omega = \omega_1$ este viteza unghiulară a corpului a cărui mișcare este considerată de transport.

8. Legătura dintre accelerațiile relative superioare dintre două puncte diferite este

$$\bar{a}_{C_{21}}^{r(n)} = \bar{a}_{D_{21}}^{r(n)} + \bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{r(n)n} + \bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{r(n)t}, \tag{29}$$

în care

$$\begin{aligned} \bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{r(n)n} &= -A_n^r(\omega_{21})\,\overline{DC}, \\ \bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{r(n)t} &= B_n^r(\omega_{21})\,\overline{DC}\, i, \\ \omega_{21}^{(k)} &= \omega_2^{(k)} - \omega_1^{(k)}. \end{aligned} \tag{30}$$

În mod asemănător pentru accelerația complementară există relația

$$\bar{a}_{C_{21}}^{c(n)} = \bar{a}_{D_{21}}^{c(n)} + \bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{c(n)n} + \bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{c(n)t}, \tag{31}$$

în care

$$\begin{aligned} \bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{c(n)n} &= -[A_n(\omega_2) - A_n(\omega_1) - A_n^r(\omega_{21})]\,\overline{DC}, \\ \bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{c(n)t} &= [B_n(\omega_2) - B_n(\omega_1) - B_n^r(\omega_{21})]\,DC\, i = \\ &= [C_n(\omega_2) - C_n(\omega_1) - C_n^r(\omega_{21})]\,\overline{DC}\, i, \end{aligned} \tag{32}$$

ceea ce verifică faptul că accelerația complementară depinde numai de accelerațiile de ordine inferioare $< n$.

Totodată însă există și dezvoltările

$$\begin{aligned} \bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{c(n)n*} &= \sum_{k=0}^{n-1} D_n^{(k)}(\omega_1)\, \bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{r(k)n} = -A_n^c(\omega_{21})\,\overline{DC}, \\ \bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{c(n)t*} &= \sum_{k=0}^{n-1} D_n^{(k)}(\omega_1)\, \bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{r(k)t} = B_n^c(\omega_{21})\,\overline{DC}\, i, \end{aligned} \tag{33}$$

în care mărimile complexe $A_n^c(\omega_{21})$ și $B_n^c(\omega_{21})$ sînt determinate prin

$$\begin{aligned} A_n^c(\omega_{21}) &= \sum_{k=0}^{n-1} D_n^{(k)}(\omega_1)\, A_n^r(\omega_{21}), \\ B_n^c(\omega_{21}) &= \sum_{k=0}^{n-1} D_n^{(k)}(\omega_1)\, B_n^r(\omega_{21}). \end{aligned} \tag{34}$$

Vectorii complecși $\bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{c(n)n*}$ și $\bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{c(n)t*}$ au deci direcții diferite de $\overline{DC}$ și $\overline{DC}\, i$, dar avem

$$\bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{c(n)n} + \bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{c(n)t} = \bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{c(n)n*} + \bar{a}_{C_{21}D_{21}}^{c(n)t*}, \tag{35}$$

adică

$$A_n(\omega_2) - A_n(\omega_1) = A_n^r(\omega_{21}) + \text{Re}\,[A_n^c(\omega_{21})] + \text{Im}\,[B_n^c(\omega_{21})],$$
$$B_n(\omega_2) - B_n(\omega_1) = B_n^r(\omega_{21}) + \text{Re}\,[B_n^c(\omega_{21})] - \text{Im}\,[A_n^c(\omega_{21})],$$

în care Re și Im reprezintă partea reală și imaginară.

9. Între accelerațiile compuse superioare ale punctelor celor două corpuri există relația

$$\tilde{a}_{C_2}^{(n)} = \tilde{a}_{C_1}^{(n)} + \tilde{a}_{C_{21}}^{(n)}, \tag{36}$$

în care accelerațiile compuse superioare urmează aceeași definiție anterioară:

$$\tilde{a}_{C_2}^{(n)} = \bar{a}_{C_2}^{(n)} + A_n(\omega_2)\,\overline{K_2C} = \bar{a}_{K_2}^{(n)} + B_n(\omega_2)\,\overline{K_2C}\,i, \tag{37}$$
$$\tilde{a}_{C_1}^{(n)} = \bar{a}_{C_1}^{(n)} + A_n(\omega_1)\,\overline{K_1C} = \bar{a}_{K_1}^{(n)} + B_n(\omega_1)\,\overline{K_1C}\,i,$$

iar accelerația compusă relativă se explicitează față de centrul instantaneu relativ $H_{12} = H_{21} = H$ prin

$$\tilde{a}_{C_{21}}^{(n)} = \Omega^{(n)}(\omega_{21})\,\overline{HC}\,i. \tag{38}$$

10. Relațiile accelerațiilor compuse superioare au forma de mai sus numai dacă punctele caracteristice K_1 și K_2 și centrul instantaneu relativ H sînt legate prin relația

$$A_n(\omega_2)\,\overline{CK_2} = A_n(\omega_1)\,\overline{CK_1} + \bar{a}_{C_{21}}^{c(n)} + \bar{a}_{C_{21}}^{r(n)} - \tilde{a}_{C_{21}}^{(n)}, \tag{39}$$

care pentru $C \equiv H$ devine

$$A_n(\omega_2)\,\overline{HK_2} = A_n(\omega_1)\,\overline{HK_1} + \bar{a}_{H_{21}}^{c(n)} + \bar{a}_{H_{21}}^{r(n)}. \tag{40}$$

Prin dezvoltarea termenilor $\bar{a}_{C_{21}}^{c(n)}$ și $\bar{a}_{C_{21}}^{r(n)}$ în funcție de $\bar{a}_{H_{21}}^{c(n)}$ și $\bar{a}_{H_{21}}^{r(n)}$ în relația (39) se găsește relația

$$A_n(\omega_2)\,\overline{HK_2} = A_n(\omega_1)\,\overline{HK_1} + \bar{a}_{H_{21}}^{c(n)} + \bar{a}_{H_{21}}^{r(n)} +$$
$$+ [B_n(\omega_2) - B_n(\omega_1) - \Omega^{(n)}(\omega_{21})]\,\overline{HC}\,i,$$

care, pentru a fi independentă de punctul arbitrar C, impune condiția

$$\Omega^{(n)}(\omega_{21}) = B_n(\omega_2) - B_n(\omega_1) = \Omega^{(n)}(\omega_2) - \Omega^{(n)}(\omega_1) \tag{41}$$

și astfel relația este adusă din nou la forma (40).

Urmează de aici că s-a considerat:

$$\tilde{a}_{C_{21}}^{(n)} = \bar{a}_{C_{21}H_{21}}^{c(n)t} + \bar{a}_{C_{21}H_{21}}^{r(n)t} = [B_n(\omega_2) - B_n(\omega_1)]\,\overline{HC}\,i = \Omega_{21}^{(n)}\,\overline{HC}\,i \tag{42}$$

și deci

$$A_n(\omega_2)\,\overline{CK_2} = A_n(\omega_1)\,\overline{CK_1} + \bar{a}_{H_{21}}^{c(n)} + \bar{a}_{H_{21}}^{r(n)} + [\bar{a}_{C_{21}H_{21}}^{c(n)n} + \bar{a}_{C_{21}H_{21}}^{r(n)n}], \tag{43}$$

cu

$$[\bar{a}_{C_{21}H_{21}}^{c(n)n} + \bar{a}_{C_{21}H_{21}}^{r(n)n}] = -[A_n(\omega_2) - A_n(\omega_1)]\,\overline{HC}.$$

11. Pentru acceleraţiile compuse de speţa a doua, condiţia anterioară se verifică pe relaţia asemănătoare

$$[A_n(\omega_2) - C_n(\omega_2)\,i]\,\overline{CK_2} = [A_n(\omega_1) - C_n(\omega_1)\,i]\,\overline{CK_1} + \\ + \bar{a}^{c(n)}_{C_{21}} + \bar{a}^{r(n)}_{C_{21}} - \tilde{\bar{a}}^{(n)}_{C_{21}}, \tag{44}$$

pentru că

$$\omega^{(n)}_{21} = \omega^{(n)}_2 - \omega^{(n)}_1, \tag{45}$$

şi avem totodată

$$\tilde{\bar{a}}^{(n)}_{C_{21}} = \omega^{(n)}_{21}\,\overline{HC}\,i = \bar{a}^{c(n)t}_{C_{21}H_{21}} + \bar{a}^{r(n)t}_{C_{21}H_{21}} - [C_n(\omega_2) - C_n(\omega_1)]\,\overline{HC}\,i \tag{46}$$

şi respectiv

$$[A_n(\omega_2) - C_n(\omega_2)\,i]\,\overline{CK_2} = [A_n(\omega_1) - C_n(\omega_1)\,i]\,\overline{CK_1} + \\ + \bar{a}^{c(n)}_{H_{21}} + \bar{a}^{r(n)}_{H_{21}} + [\bar{a}^{c(n)n}_{C_{21}H_{21}} + \bar{a}^{r(n)n}_{C_{21}H_{21}}] + [C_n(\omega_2) - C_n(\omega_1)]\,\overline{HC}\,i. \tag{47}$$

12. Între acceleraţiile compuse superioare relative există relaţia

$$\tilde{a}^{(n)}_{C_{21}} + C_n(\omega_2)\,\overline{CK_2}\,i = \tilde{\tilde{a}}^{(n)}_{C_{21}} + C_n(\omega_1)\,\overline{CK_1}\,i. \tag{48}$$

Dacă centrele instantanee relative $\tilde{H}$ şi $\tilde{\tilde{H}}$ diferă pentru cele două speţe, dar se păstrează aceleaşi puncte caracteristice K_1 şi K_2, se găseşte

$$C_n(\omega_2)\,\overbrace{\tilde{\tilde{H}}\tilde{K}_2} = C_n(\omega_1)\,\overbrace{\tilde{\tilde{H}}\tilde{K}_1} + \Omega^{(n)}_{21}\,\tilde{\tilde{H}}\tilde{H} \tag{49}$$

sau

$$C_n(\omega_2)\,\overbrace{H\tilde{K}_2} = C_n(\omega_1)\,\overbrace{H\tilde{K}_1} + \omega^{(n)}_{21}\,\tilde{\tilde{H}}\tilde{H},$$

ceea ce poziţionează relativ cele două centre prin determinarea vectorului $\tilde{\tilde{H}}\tilde{H}$. Dacă, în plus, centrele sînt confundate, $\tilde{H} \equiv \tilde{\tilde{H}}$, trebuie să se îndeplinească relaţia

$$C_n(\omega_2)\,\overline{HK_2} = C_n(\omega_1)\,\overline{HK_1}, \tag{50}$$

în care caz punctele caracteristice K_1 şi K_2 şi centrul H sînt identice pentru cele două speţe de acceleraţii.

13. Relaţiile de legătură dintre vectorii punctelor K_1, K_2 şi H exprimă de altfel faptul că pentru centrul relativ H acceleraţiile compuse superioare ale punctelor confundate în el sînt egale :

$$\tilde{\bar{a}}^{(n)}_{H_2} = \tilde{a}^{(n)}_{H_1}; \qquad \tilde{a}^{(n)}_{H_{21}} = 0, \tag{51}$$

deşi acceleraţiile superioare simple sînt diferite, $\bar{a}^{(n)}_{H_2} \neq \bar{a}^{(n)}_{H_1}$.

Dacă în acelaşi punct H sînt confundate centrele instantanee ale acceleraţiilor compuse din mişcarea absolută a fiecărui corp, ceea ce este posibil prin alegerea convenabilă a punctelor H, K_1 şi K_2, atunci

$$\tilde{a}^{(n)}_{H_2} = \tilde{a}^{(n)}_{H_1} = 0 \tag{52}$$

și deci

$$\overline{HK}_2 = \frac{\bar{a}^{(n)}_{H_2}}{A_n(\omega_2)}, \qquad \overline{HK}_1 = \frac{\bar{a}^{(n)}_{H_1}}{A_n(\omega_1)}, \tag{53}$$

în care vectorii $\overline{HK}_1$ și $\overline{HK}_2$ vor reprezenta accelerațiile reduse ale punctelor H_1 și H_2 față de corpurile respective.

14. Urmărindu-se ca și în mișcarea relativă a două corpuri poziția reciprocă a punctelor K_1, K_2 și H să se determine numai prin utilizarea accelerațiilor inferioare ordinului (n), trebuie de asemenea ca centrul relativ H al accelerațiilor compuse de ordinul n să corespundă cu centrul instantaneu relativ al accelerațiilor simple de ordinul m inferior sau egal ordinului n. Pentru mișcarea relativă, relația (15) devine

$$\overline{R}_{H_{21}} = \overline{R}_{C_{21}} + \frac{\bar{a}^{r(m)}_{C_{21}}}{A^r_m(\omega_{21}) - B^r_m(\omega_{21})\, i}, \tag{54}$$

obținîndu-se, asemănător cu (18), relația

$$\bar{a}^{r(n)}_{H_{21}} = \sum_{p=1}^{n-m} C^p_{n-m} [A^r_m(\omega_{21}) - B^r_m(\omega_{21})\, i]^{(n-m-p)} \times [\bar{u}^{(p)}_{H_{21}} - \bar{v}^{(p)}_{H_{21}}], \tag{55}$$

prin care accelerația relativă simplă de ordinul (n) a centrului H se exprimă numai prin derivatele inferioare.

15. Deoarece vectorii de poziție ai punctelor K_1, K_2 și $H = H_{21} = H_{12}$ sînt legați numai printr-o ecuație vectorială (40), doi dintre ei pot fi aleși în mod arbitrar. În această situație este util ca centrele unice H ale accelerațiilor compuse să corespundă cu centrele unice I ale vitezelor, deoarece acestea sînt ușor de localizat în lanțurile cinematice. Rămîne la alegere poziția unui singur punct caracteristic K_1, celălalt K_2 fiind determinat prin ecuațiile menționate.

16. Astfel, cuplele cinematice inferioare corespund cu centrele permanente de rotație. Pentru cupla de rotație la care centrul $H \equiv P$ este la distanță finită, avem

$$\bar{a}^{(k)}_{P_1} = \bar{a}^{(k)}_{P_2}, \tag{56}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}^{(k)}_{P_1} &= \tilde{a}^{(k)}_{P_2}, \quad & \tilde{a}^{(k)}_{C_{21}} &= \Omega^{(k)}_{21}\, \overline{PC}\, i, \\ \tilde{\tilde{a}}^{(k)}_{P_1} &= \tilde{\tilde{a}}^{(k)}_{P_2}, \quad & \tilde{\tilde{a}}^{(k)}_{C_{21}} &= \omega^{(k)}_{21}\, \overline{PC}\, i \end{aligned} \tag{57}$$

și respectiv

$$\begin{aligned} A_n(\omega_2)\, \overline{PK}_2 &= A_n(\omega_1)\, \overline{PK}_1 \\ [A_n(\omega_2) - C_n(\omega_1)\, i]\, \overline{PK}_2 &= [A_n(\omega_1) - C_n(\omega_1)\, i]\, \overline{PK}_1. \end{aligned} \tag{58}$$

Pentru cupla de translație la care centrul $H \equiv P \neq C$ este aruncat la infinit, avem

$$\omega_1^{(k)} = \omega_2^{(k)} = \omega^{(k)}, \tag{59}$$

$$\Omega_1^{(k)} = \Omega_2^{(k)} = \Omega^{(k)} = B_k(\omega).$$

Deoarece și $\bar{a}_{H_{21}}^{r(k)} = \bar{a}_{H_{21}}^{c(k)} = 0$, în relația (43) rămîne :

— accelerația complementară de ordinul (n) este independentă de poziția punctului C la distanță finită și are două componente : una normală și alta paralelă cu direcția translației relative,

$$\bar{a}_{21}^{c(n)} = \bar{a}_{21}^{c(n)n} + \bar{a}_{21}^{c(n)t}; \tag{60}$$

— accelerația relativă de ordinul (n) este independentă de punctul C arbitrar și are o singură componentă în direcția translației relative,

$$\bar{a}_{21}^{r(n)} = \bar{a}_{21}^{r(n)t}, \quad \bar{a}_{21}^{r(n)n} = 0, \tag{61}$$

pentru care

$$\bar{a}_{21}^{r(n)t} = \lim_{\substack{\omega_{21}^{(k)} \to 0 \\ H \to \infty}} B_n^r(\omega_{21}) \overline{HC}\, i, \tag{62}$$

$$\bar{a}_{21}^{r(n)n} = \lim_{\substack{\omega_{21}^{(k)} \to 0 \\ H \to \infty}} A_n^r(\omega_{21}) \overline{HC} = 0.$$

Deoarece accelerația relativă compusă de ordinul (n), independentă de punctul C, este conformă relației (42), de forma

$$\tilde{a}_{21}^{(n)} = \bar{a}_{21}^{c(n)t} + \bar{a}_{21}^{r(n)t}, \tag{63}$$

adică

$$\tilde{a}_{21}^{(n)} = \lim_{\substack{\omega_{21}^{(k)} \to 0 \\ H \to \infty}} [B_n(\omega_2) - B_n(\omega_1)] \overline{HC}\, i = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\,[D_n^{(k)}(\omega)]\, \bar{a}_{21}^{r(k)t},$$

rezultă din (43), relația

$$A_n(\omega) \overline{K_1 K_2} = \bar{a}_{21}^{c(n)n},$$

cu

$$\bar{a}_{21}^{c(n)n} = \lim_{\substack{\omega_{21}^{(k)} \to 0 \\ H \to \infty}} [A_n(\omega_2) - A_n(\omega_1)] \overline{HC} = i \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Im}[D_n^{(k)}(\omega)]\, \bar{a}_{21}^{r(k)t}. \tag{64}$$

Pentru accelerația compusă de ordinul (n) și de speța a doua, relația (63) este schimbată prin

$$\tilde{\tilde{a}}_{21}^{(n)} = \bar{a}_{21}^{r(n)t}. \tag{65}$$

Într-adevăr, prin înlocuirea coeficientului $B_n^r(\omega_{21})$ în funcție de coeficienții de ordin imediat inferior și ținînd seama de definiția $\widetilde{\widetilde{a}}_{21}^{(k)}$, avem

$$\bar{a}_{21}^{r(n)t} = \lim_{\substack{\omega_{21}^{(k)}\to 0 \\ H\to 8}} B_n^r(\omega_{21})\,\overline{HC}\,i = \lim_{\substack{\omega_{21}^{(k)}\to 0 \\ H\to\infty}} [\dot{B}_{n-1}^r(\omega_{21}) - \omega_{21} A_{n-1}(\omega_{21})]\,\overline{HC}\,i =$$

$$= \lim_{\substack{\omega_{21}^{(k)}\to 0 \\ H\to\infty}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial B_{n-1}^r(\omega_{21})}{\partial \omega_{21}^{(k)}} \cdot \omega_{21}^{(k+1)}\right] \overline{HC}\,i =$$

$$= \lim_{\substack{\omega_{21}^{(k)}\to 0 \\ H\to\infty}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\partial B_{n-1}^r(\omega_{21})}{\partial \omega_{21}^{(k)}} \cdot \widetilde{\widetilde{a}}_{21}^{(k+1)} = \widetilde{\widetilde{a}}_{21}^{(n)},$$

deoarece există numai termenul $\dfrac{\partial B_{n-1}^r(\omega_{21})}{\partial \omega_{21}^{(n-1)}} = 1$, ceilalți fiind nuli dacă $\omega_{21}^{(k)} = 0$.

Din (46)—(47) rezultă, în conformitate cu (65), că

$$\bar{a}_{21}^{c(n)t} = \lim_{\substack{w_{21}^{(k)}\to 0 \\ H\to\infty}} [C_n(\omega_2) - C_n(\omega_1)]\,\overline{HC}\,\mathrm{i} \tag{66}$$

și deci

$$[A_n(\omega) - C_n(\omega)\,\mathrm{i}]\,\overline{K_1K_2} = \bar{a}_{21}^{c(n)}, \tag{67}$$

cu

$$\bar{a}_{21}^{c(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} D_n^{(k)}(\omega)\,\bar{a}_{21}^{r(k)t}.$$

Urmează din relațiile (58), (64) și (67) că numai pentru accelerația compusă de speța întîi punctele caracteristice K_1, K_2 și centrul permanent $H \equiv P\ (P_\infty)$ sînt coliniare.

17. La cuplele superioare la care contactul între corpuri se face prin două curbe materializate care se rostogolesc una pe cealaltă cu sau fără alunecare, poziția centrului instantaneu al vitezelor depinde de forma curbelor și de legile de mișcare ale corpurilor. Pentru analizarea mișcării relative a celor două corpuri se consideră axele mobile $A_1x_1y_1$, $B_2x_2y_2$, solidare fiecare cu cîte un corp în mișcare și axele fixe OXY. Profilele corpurilor sînt date, în sistemele de axe respective, sub formă parametrică :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\lambda), & x_2 &= x_2(\mu), \\ y_1 &= y_1(\lambda), & y_2 &= y_2(\mu), \end{aligned} \tag{68}$$

iar legile de mișcare indică deplasările originilor $A_1(x_1y_1)$ și $B_2(x_2y_2)$ și rotațiile corpurilor mobile θ_1 și θ_2 în raport cu timpul față de sistemul fix de axe:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1(t), & X_2 &= X_2(t), \\ Y_1 &= Y_1(t), & Y_2 &= Y_2(t), \\ \theta_1 &= \theta_1(t), & \theta_2 &= \theta_2(t). \end{aligned} \tag{69}$$

Coordonatele unui punct C, după primul sau al doilea profil, în sistemul de axe fixe sînt

$$\begin{aligned} X_{1C} &= X_1 + x_1\cos\theta_1 - y_1\sin\theta_1 = X_{1C}(\lambda, t), \\ Y_{1C} &= Y_1 + x_1\sin\theta_1 + y_1\cos\theta_1 = Y_{1C}(\lambda, t), \\ X_{2C} &= X_2 + x_2\cos\theta_2 - y_2\sin\theta_2 = X_{2C}(\mu, t), \\ Y_{2C} &= Y_2 + x_2\sin\theta_2 + y_2\cos\theta_2 = Y_{2C}(\mu, t) \end{aligned} \tag{70}$$

și depind atît de parametrii λ sau μ, care generează curba respectivă cît și de timpul t, care indică mobilitatea profilului respectiv.

Dar punctul C este comun pentru cele două curbe

$$X_{1C} = X_{2C} = X_C, \qquad Y_{1C} = Y_{2C} = Y_C, \tag{71}$$

adică pentru punctul de contact C al momentul t avem

$$\lambda_C = \lambda(t), \qquad \mu_C = \mu(t)$$

sau

$$\begin{aligned} x_1(\lambda) &= (X_2 - X_1)\cos\theta_1 + (Y_2 - Y_1)\sin\theta_1 + \\ &+ x_2\cos(\theta_2 - \theta_1) - y_2\sin(\theta_2 - \theta_1) = x_1(\mu, t), \\ y_1(\lambda) &= -(X_2 - X_1)\sin\theta_1 + (Y_2 - Y_1)\cos\theta_1 + \\ &+ x_2\sin(\theta_2 - \theta_1) + y_2\cos(\theta_2 - \theta_1) = Y_1(\mu, t). \end{aligned}$$

De asemenea, viteza relativă a punctului C este tangenta comună la cele două profile. Această viteză se poate exprima prin

$$\vec{V}_{C_{21}} = \vec{V}_{C_2} - \vec{V}_{C_1} = \vec{V}_{B_2} - \vec{V}_{A_1} + \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{BC} - \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AC}, \tag{72}$$

avînd componentele pe axele fixe

$$V_{CX} = V_{BX} - V_{AX} - \omega_2[x_2\sin\theta_2 + y_2\cos\theta_2] + \omega_1[x_1\sin\theta_1 + y_1\cos\theta_1],$$

$$V_{CY} = V_{BY} - V_{AY} + \omega_2[x_2\cos\theta_2 - y_2\sin\theta_2] - \omega_1[x_1\cos\theta_1 - y_1\sin\theta_1].$$

Parametrii directori ai tangentelor la profile sînt

$$\begin{aligned} dX_{1C} &= \frac{\partial X_{1C}}{\partial \lambda} d\lambda = dx_1 \cos\theta_1 - dy_1 \sin\theta_1 \\ dY_{1C} &= \frac{\partial Y_{1C}}{\partial \lambda} d\lambda = dx_1 \sin\theta_1 + dy_1 \cos\theta_1 \\ dX_{2C} &= \frac{\partial X_{2C}}{\partial \mu} d\mu = dx_2 \cos\theta_2 - dy_2 \sin\theta_2 \\ dY_{2C} &= \frac{\partial Y_{2C}}{\partial \mu} d\mu = dx_2 \sin\theta_2 + dy_2 \cos\theta_2. \end{aligned} \tag{73}$$

Condiția de tangență comună se exprimă prin egalitățile

$$\frac{V_{CX}}{V_{CY}} = \frac{\partial X_{1C}/\partial\lambda}{\partial Y_{1C}/\partial\lambda} = \frac{\partial X_{2C}/\partial\mu}{\partial Y_{2C}/\partial\mu}, \tag{74}$$

ultima fiind îndeplinită pentru condiția suficientă $\lambda_C = \lambda(t)$ și $\mu_C = \mu(t)$, reieșită în conformitate cu (71).

Condiția de tangență exprimată în axele $A_1x_1y_1$ sau $B_2x_2y_2$ este

$$\frac{V_{Cx_1}}{V_{Cy_1}} = \frac{\partial_{x_1}/\partial\lambda}{\partial_{y_1}/\partial\lambda}, \quad \frac{V_{Cx_2}}{V_{Cy_2}} = \frac{\partial_{x_2}/\partial\mu}{\partial_{y_2}/\partial\mu},$$

unde

$$\begin{aligned} V_{Cx_1} &= V_{CX}\cos\theta_1 + V_{CY}\sin\theta_1 \\ V_{Cy_1} &= -V_{CX}\sin\theta_1 + V_{CY}\cos\theta_1 \\ V_{Cx_2} &= V_{CX}\cos\theta_2 + V_{CY}\sin\theta_2 \\ V_{Cy_2} &= -V_{CX}\sin\theta_2 + V_{CY}\cos\theta_2. \end{aligned}$$

Deoarece există 13 variabile (x_1, y_1, x_2, y_2, X_1, Y_1, θ_1, X_2, Y_2, θ_2, μ, λ, t) din cele 13 ecuații posibile (68), (69), (71) și (74) trebuie impuse numai 12 ecuații, ceea ce permite astfel determinarea unei relații între doi parametri, ca, de exemplu, în analiză legea de mișcare $\theta_2 = \theta_2(t)$ sau în sinteză profilul unui corp $f(x_1, y_1) = 0$.

Mișcările elementelor fiind determinate, la cupla de rostogolire cu alunecare poziția centrului instantaneu al vitezelor $I_{21} = I_{12}$ se calculează asemănător cu (54), din

$$\bar{R}_I = \bar{R}_C + \frac{\bar{V}_{C_{21}}}{\omega_{21}} \mathrm{i} \tag{75}$$

sau

$$\bar{R}_I = \frac{\omega_2 \bar{R}_B - \omega_1 \bar{R}_A}{\omega_2 - \omega_1} + \frac{\bar{V}_{B_2} - \bar{V}_{A_1}}{\omega_2 - \omega_1} \mathrm{i}. \tag{76}$$

Centrul instantaneu I se găsește, desigur, pe normala comună la profile în punctul C de contact, la distanța care depinde de raportul dintre viteza liniară și viteza unghiulară $\overline{V}_{C_{21}} = \omega_{21}\,\overline{IC}\,i$, adică

$$\overline{R}_I - \overline{R}_C = \overline{CI} = \frac{\overline{V}_{C_2} - \overline{V}_{C_1}}{\omega_2 - \omega_1}\,\mathrm{i}. \tag{77}$$

La cupla de rostogolire fără alunecare (cupla centroidă), $\overline{V}_{C_{21}} = 0$ și deci $I \equiv C$, adică

$$\overline{R}_I = \overline{R}_C = X_C + Y_C\,\mathrm{i}. \tag{78}$$

Centrul instantaneu corespunde, desigur, cu punctul de contact C.

În condiția că $H \equiv I$, prin derivări succesive (23) și (24) ale vectorului de poziție $\overline{R}_H = \overline{R}_I$ se obțin vitezele de deplasare superioare ale centrului instantaneu. Cu ajutorul relației (55) avem accelerația relativă de ordinul (n) a centrului $H_{21} = H_{12}$, iar legătura dintre punctele K_1, K_2 și H se face prin relația generală (40).

Pentru accelerațiile de primul ordin, asemănător cu (22) și (25) avem relațiile cunoscute

$$\begin{gathered}\overline{a}_{I_{21}} = -\,\mathrm{i}\,\omega_{21}\,\overline{u}_I = \omega_{21}^2\,\overline{d}_{21}, \\ \overline{u}_I = \mathrm{i}\,\omega_{21}\,\overline{d}_{21}.\end{gathered} \tag{79}$$

Valoarea d_{21} este dată de formula Euler-Savary. Astfel, în legătură cu forma centroidelor avem

$$\begin{gathered}\mathrm{i}\,\overline{d}_{21} = \frac{\mathrm{d}\,\overline{R}_I}{\mathrm{d}\,\theta_{21}} = \frac{\mathrm{d}\overline{s}}{\mathrm{d}\,\theta_{21}}, \\ \frac{1}{d_{21}} = \left|\frac{1}{\rho_2} \pm \frac{1}{\rho_1}\right|,\end{gathered} \tag{80}$$

în care semnul plus corespunde contactului dublu convex și semnul minus contactului convex-concav, iar ρ_1 și ρ_2 sînt razele de curbură ale centroidelor în punctul de contact C.

După forma profilelor cuplei de rostogolire cu alunecare, avem

$$\begin{gathered}\mathrm{i}\,\overline{d}_{21} = \frac{\mathrm{d}\,(\overline{R}_C + \overline{CI})}{\mathrm{d}\,\theta_{21}} = \frac{\overline{ds}^*/\sin\alpha}{\mathrm{d}\,\theta_{21}}, \\ \frac{1}{d_{21}} = \left|\sin\alpha\left(\frac{1}{r_2 + CI} \pm \frac{1}{r_1 - CI}\right)\right|,\end{gathered} \tag{81}$$

în care r_1 și r_2 sînt razele de curbură ale profilelor cuplei, iar α este unghiul făcut de raza IC cu tangenta la centroide în I (direcția vitezei de schimbare $\overline{u}$).

18. Încercarea de a avea același punct caracteristic $K_1 \equiv K_2$ pentru cele două corpuri transformă relația (40) în

$$[A_n(\omega_2) - A_n(\omega_1)]\,\overline{HK} = \bar{a}^{c(n)}_{H_{21}} + \bar{a}^{r(n)}_{H_{21}} = \bar{a}^{(n)}_{H_2} - \bar{a}^{(n)}_{H_1}, \qquad (82)$$

care însă cere:

— fie să se cunoască accelerațiile de ordinul (n) a două puncte confundate în centrul oarecare H, echivalînd cu cunoașterea tuturor accelerațiilor relative și complementare;

— fie ca centrul H să se confunde cu centrul instantaneu relativ J al accelerațiilor de ordinul n, ceea ce ar echivala cu $\bar{a}^{r(n)}_{H_{21}} = \bar{a}^{r(n)}_{J_{21}} = 0$.

În ambele situații este necesar să se cunoască distribuția accelerațiilor de ordinul (n).

În sfîrșit, pentru confundarea centrului H cu centrul permanent de accelerații rezultă $H \equiv K$.

Primită la redacție la 14 aprilie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Chr. Pelecudi, *Metoda accelerațiilor compuse în lanțurile cinematice plane.* St. cerc. mec. apl., *2* (1965).
2. — *Accelerațiile superioare compuse în lanțurile cinematice plane.* St. cerc. mec. apl., *3* (1965).
3. D. Mangeron, *Asupra unor proprietăți ale accelerațiilor reduse de ordin oarecare.* Bul. Inst. politehnic Iași, **III**, *1—2* (1957).
4. D. Mangeron, C. Drăgan, V. Svijevschi, *O nouă metodă de studiu interesînd teoria mecanismelor și a mașinilor.* St. cerc. mec. apl., *1* (1957).
5. Chr. Pelecudi, *Sistematizarea analizei grafice a lanțurilor cinematice simple plane.* St. cerc. mec. apl., *2* (1964).

MECANISME DE COMANDĂ LOGICĂ CU ELEMENTE RIGIDE ŞI ELASTICE

de I. SZÉKELY, T. MUREŞAN[1]) şi AI. LELUŢIU
Institutul politehnic Cluj

531 : 539.3

În lucrarea de faţă se prezintă cîteva mecanisme originale cu elemente rigide şi elastice cu funcţionare de tip discontinuu mai perfecţionate decît cele tratate în [1]. Se introduc noţiuni noi, cum ar fi : buton mecanic, releu mecanic, ceea ce face posibilă studierea funcţionării logice a mecanismelor prezentate cu acelaşi aparat algebric care se foloseşte la studiul schemelor de comandă cu contacte şi relee sau al circuitelor cu tuburi electronice [2], [3].

Se întîlnesc cazuri în practică cînd pentru rezolvarea unor probleme de comandă logică a maşinilor automate se pot recomanda mecanisme cu elemente rigide şi elastice cu funcţionare discontinuă. Pentru a scoate la iveală trăsăturile comune ale mecanismelor de comandă logică formate din bare rigide şi elastice şi a mecanismelor similare electronice sau electromagnetice, în cele ce urmează se precizează cîteva noţiuni şi se arată felul în care mecanismele cu bare rigide şi elastice realizează diferite funcţii logice.

ELEMENT BIPOZIŢIONAL. Se numeşte element bipoziţional al unui ansamblu un element care poate avea numai două stări stabile distincte, astfel ca perioada de tranziţie de la o stare la alta să poată fi neglijată din punct de vedere funcţional. În cazul mecanismelor cu elemente rigide şi elastice, avem de-a face cu stări de mişcare periodică ale elementului bipoziţional, incluzînd în noţiunea de mişcare şi repausul (mişcare de viteză nulă). Se ataşează elementului bipoziţional o variabilă binară $x \in \{0, 1\}$, precizînd corespondenţa dintre stările elementului bipoziţional şi valorile variabilei binare. Se spune că elementul bipoziţional ia valoarea ξ dacă se află în starea de mişcare corespunzătoare valorii ξ a variabilei binare ataşate.

BUTON MECANIC. În cele ce urmează se vor lua în considerare elementele bipoziţionale cu două poziţii fixe.

Se numeşte element normal „1" un element bipoziţional care în poziţie neacţionată ia valoarea 1 (fig. 1 *a* şi *b*) şi element normal „0" un element care în poziţie neacţionată ia valoarea „0" (fig. 1 *c* şi *d*).

Un buton mecanic conţine în acelaşi timp un element normal 1 şi unul normal „0" (fig. 2 *a* şi *b*). Ataşăm

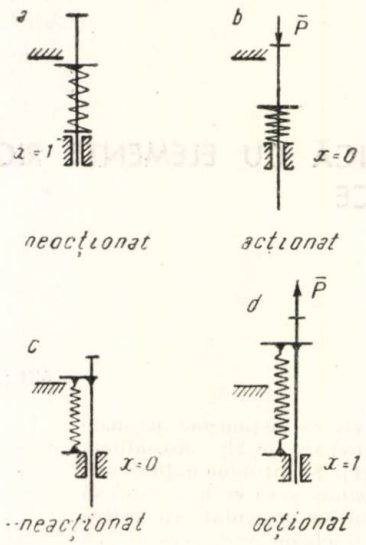


Fig. 1

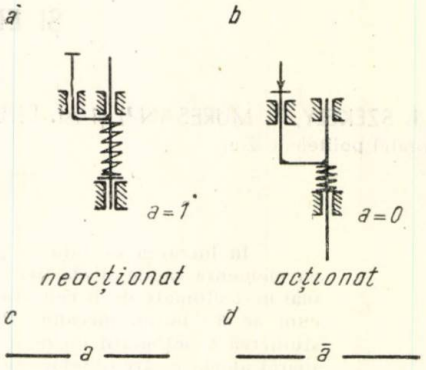


Fig. 2

elementului normal 1 al unui buton mecanic A variabila a, iar elementului normal „0" variabila $\bar{a}$. Reprezentarea structurală a elementelor normal 1 şi normal „0" ale unui buton mecanic A este dată în figurile 2 *c* şi *d*.

Ataşînd variabila binară x elementului bipoziţional prin intermediul căruia acţionăm asupra butonului mecanic (fig. 2 *a* şi *b*) (pe care-l mai numim intrarea butonului), se observă că elementele de variabilă a, respectiv $\bar{a}$ (pe care le mai numim ieşirile butonului) realizează funcţia identică respectiv negaţia. Prin urmare, butonul mecanic poate funcţiona ca repetor ($a = x$) sau ca inversor ($\bar{a} = \bar{x}$), după cum ne referim la o ieşire sau la alta.

REALIZAREA FUNCŢIILOR BINARE DE DOUĂ VARIABILE. Pentru a putea realiza funcţii binare de două variabile, e necesar ca mecanismul cu bare să conţină două elemente bipoziţionale independente şi cel puţin un element bipoziţional condus, numit elementul executor (şi aici ne vom referi la elemente cu două poziţii fixe). Cu alte cuvinte, un astfel de mecanism are două intrări independente şi una sau două ieşiri. În figura 3 este reprezentat un mecanism cu două intrări α şi β şi o ieşire $f(\alpha, \beta)$, care în acelaşi timp constituie intrarea butonului Φ cu ieşirile φ şi $\bar{\varphi}$. Prin urmare, acest mecanism se poate interpreta ca avînd două intrări α şi β şi două ieşiri φ şi $\bar{\varphi}$. Pentru $\alpha = 1$, $\beta = 1$, avem $f(1,1)=1$ (fig. 3 *a*). Dacă cel

puţin una dintre variabilele α sau β ia valoarea „0", atunci şi $f(\alpha, \beta)$ ia valoarea „0" (fig. 3 *b*), adică $f(0, 1) = 0$, $f(1,0) = 0$ şi $f(0, 0) = 0$. Rezultă că $f(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \beta$, adică variabila f realizează conjuncţia.

Se consideră cazul cînd intrările α şi β sînt acţionate corespunzător de ieşirile butoanelor A şi B (de intrări x, respectiv y) (fig. 4). Pentru toate posibilităţile de legare a intrărilor α şi β cu ieşirile butoanelor A şi B, ieşirile φ şi $\overline{\varphi}$ pot realiza următoarele funcţii de intrările x şi y ale butoanelor A şi B [3]:

1) dacă $\alpha = a$ şi $\beta = b$, avem

$$\varphi(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta) = f(a, b) = f(x, y) = x \cdot y,$$

$$\overline{\varphi}(\alpha, \beta) = \overline{x} \cdot \overline{y} = x \perp y;$$

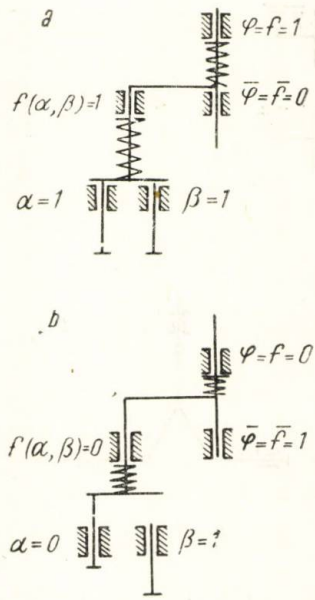


Fig. 3

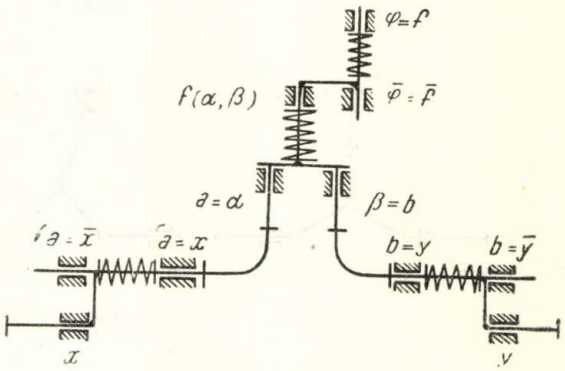


Fig. 4

2) dacă $\alpha = \overline{a}$ şi $\beta = b$, avem

$$\varphi(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta) = f(\overline{a}, b) = f(\overline{x} \cdot y) = \overline{x} \cdot y = y - x,$$

$$\overline{\varphi}(\alpha, \beta) = \overline{\overline{x} \cdot y} = y \to x;$$

3) dacă $\alpha = a$ şi $\beta = \overline{b}$, obţinem

$$\varphi(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta) = f(a, \overline{b}) = f(x, \overline{y}) = x \cdot \overline{y} = x - y,$$

$$\overline{\varphi}(\alpha, \beta) = \overline{x \cdot \overline{y}} = x \to y;$$

4) dacă $\alpha = \overline{a}$ şi $\beta = \overline{b}$, rezultă

$$\varphi(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta) = f(\overline{a}, \overline{b}) = f(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{x} \cdot \overline{y} = x \top y,$$

$$\overline{\varphi}(\alpha, \beta) = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = x \vee y.$$

Reprezentarea structurală a funcţiilor $x \cdot \overline{y} = x - y$, $\overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = x \vee y$ este dată în figurile 5 *a* şi *b*. În mod similar se reprezintă şi celelalte funcţii.

Disjuncţia poate fi realizată şi de mecanismul din figura 6. În acest caz, $g(\alpha, \beta) = \alpha \vee \beta$. Procedînd ca şi în cazul precedent, adică folosind toate posibilităţile de legare a intrărilor α şi β al mecanismului din figura 6 cu ieşirile butoanelor A şi B, ieşirile φ şi $\overline{\varphi}$ pot realiza toate celelalte funcţii

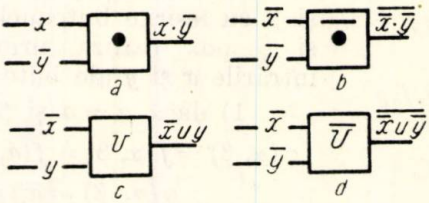


Fig. 5

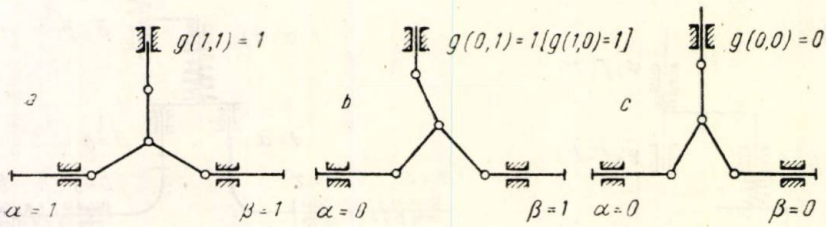


Fig. 6

binare. Reprezentarea structurală a două din ele $\overline{x} \vee y = x \to y$ şi $\overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = x \cdot y$ este dată în figurile 5 *c* şi 5 *d*.

REALIZAREA CONJUNCŢIEI, DISJUNCŢIEI ŞI FUNCŢIILOR LUI SHEFFER DE MAI MULTE VARIABILE. Funcţii de n variabile se pot realiza cu un singur mecanism numai dacă acesta conţine n intrări şi cel puţin o ieşire ($n \geqslant 2$). Generalizînd mecanismul din figura 3 montîndu-i n intrări α_1, α_2, ..., α_n şi două ieşiri φ şi $\overline{\varphi}$, se obţine mecanismul din figura 7. În această figură se observă că pentru $\alpha_i = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) avem $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$. Dacă cel puţin una din intrări $\alpha_k = 0$, avem şi $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$. Rezultă că mecanismul realizează conjuncţia de mai multe variabile [3]:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i = \begin{cases} 1 \text{ pentru } \alpha_i = 1 \ (i = 1, \ldots, n), \\ 0 \text{ în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Deoarece intrările α_i sînt acţionate corespunzător de ieşirile a_i sau $\overline{a}_i$ ale butoanelor A_i de intrări x_i, ieşirile φ şi $\overline{\varphi}$ ale mecanismului din figura 7 pot realiza toate funcţiile binare de intrări $x_1, \ldots, x_n$ ale butoanelor $A_1, \ldots, A_n$ care iau o singură dată valoarea „1" sau care iau o singură dată valoarea „0".

Mai jos se dau doar cîteva cazuri și anume :

1) dacă $\alpha_i = a_i$, avem

$$\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(a_1, \ldots, a_n) =$$

$$= f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 . x_2 . \ldots . x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i ,$$

$$\overline{\varphi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \overline{x_1 . x_2 . \ldots . x_n} = x_1 \perp x_2 \perp \ldots \perp x_n = \mathop{\perp}_{i=1}^{n} x_i ;$$

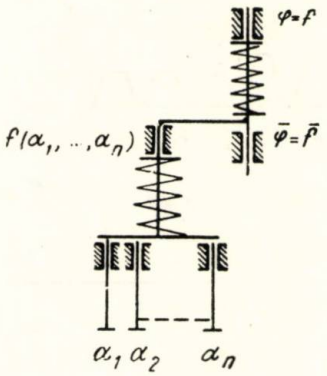


Fig. 7

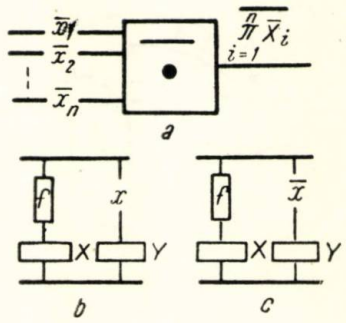


Fig. 8

2) dacă $\alpha_i = \bar{a}_i$, obținem

$$\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) =$$

$$= \bar{x}_1 . \bar{x}_2 . \ldots . \bar{x}_n = x_1 \top x_2 \top \ldots \top x_n = \mathop{\top}_{i=1}^{n} x_i ,$$

$$\overline{\varphi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \overline{\bar{x}_1 . \bar{x}_2 . \ldots . \bar{x}_n} = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n = \bigvee_{i=1}^{n} x_i .$$

În figura 8 *a* este dată reprezentarea structurală a funcției

$$\bigvee_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} \bar{x}_i = \bar{x}_1 . \bar{x}_2 . \ldots . \bar{x}_n .$$

RELEU MECANIC BIPOZIȚIONAL. Se numește releu mecanic bipozițional un mecanism în componența căruia intră următoarele elemente :

1) un element (conducător) în stare de permanentă mișcare periodică,

2) un element (condus) bipozițional acționat de elementul conducător numit element executor,

3) un element bipozițional independent de elementul conducător ale cărui stări determină stările elementului executor, numit comanda releului.

Din punctul de vedere al funcţionării logice, elementul executor este acţionat de elementul comandă al releului, dar starea lui cinematică şi dinamică este determinată de legea de mişcare a elementului conducător. Deci un releu mecanic poate fi privit şi ca un amplificator de forţă.

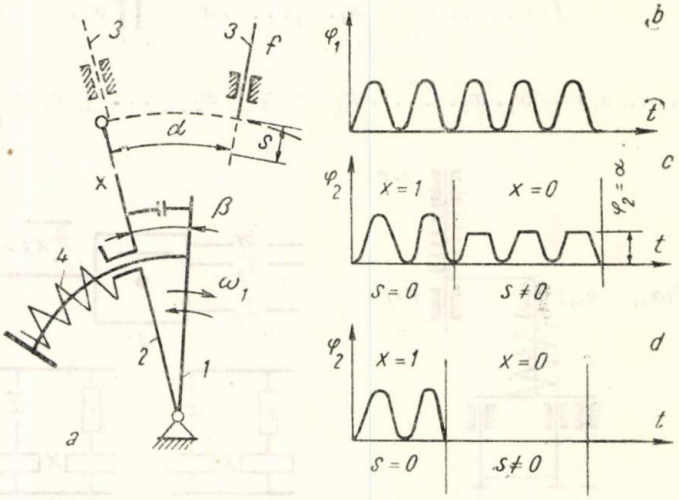


Fig. 9

Cum cele mai multe mişcări periodice întîlnite sînt cele de oscilaţie circulară, oscilaţie rectilinie sau de rotaţie ne vom opri asupra releelor

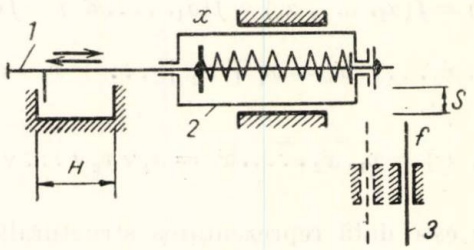


Fig. 10

mecanice bipoziţionale ale căror elemente conducătoare execută una dintre mişcările amintite.

Fie mecanismul din figura 9*a* [1] al cărui element conducător (1) execută o mişcare oscilatorie circulară între două limite bine determinate (în figură aceste limite nu sînt arătate). Caracterul variaţiei deplasării unghiulare $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ este dat în figura 9*b*. Cînd tija *3* ocupă poziţia corespunzătoare lui $s = 0$, elementul *2* execută aceeaşi mişcare oscilatorie $\varphi_2(t) = \varphi_1(t) + \beta$ (unde β este unghiul minim posibil dintre elementele *1* şi *2*) cele două elemente formînd un corp rigid. Dacă tija *3* ocupă o

poziţie $s \neq 0$ în poziţia $\varphi_2(t) = \alpha$ (unde α este unghiul dintre direcţia tijei şi poziţia iniţială a elementului *2*), elementul *2* este oprit de tija *3*, dar elementul *1* continuă să se rotească, comprimînd arcul *4*. Caracterul variaţiei deplasării unghiulare $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ în cele două cazuri ($s = 0$ şi

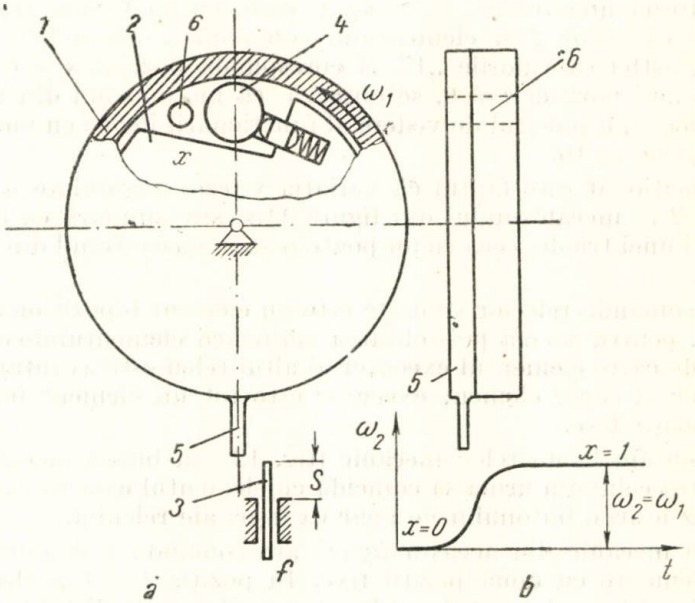


Fig. 11

$s \neq 0$) pentru $\beta = 0$ este dat în figura 9 *c*. Trebuie precizat că diagramele $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ şi $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ nu reprezintă legile de mişcare ale elementelor *1*, respectiv *2*, ci simbolizează numai caracterul mişcării, delimitînd perioadele cînd elementele *1* şi *2* oscilează împreună sau separat. Caracterul variaţiei $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ corespunzător cazului particular $\alpha = 0$ (poziţia punctată a tijei *3* din figura 9*a* este reprezentată în figura 9*d*).

Ataşăm elementului *2* (fig. 9*a*) o variabilă binară x, care să ia valoarea $x = 1$ cînd elementul *2* se află în starea de mişcare corespunzătoare lui $s = 0$ şi valoarea $x = 0$ în cazul cînd $s \neq 0$. Cum valorile variabilei f ataşate tijei *3* sînt stabilite în acelaşi mod ($f = 1$ pentru $s = 0$ şi $f = 0$ pentru $s \neq 0$), rezultă că $x = f$. Aceeaşi funcţie $x = f$ poate fi realizată şi de mecanismul din figura 10, al cărui element conducător *1* execută o mişcare oscilatorie de du-te-vino, avînd cursa H. Caracterul variaţiei spaţiului parcurs de elementul *2* $h_2 = h_2(t)$ este identic cu $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ (reprezentat în fig. 9). Ataşarea variabilelor binare se face ca mai sus.

Să studiem în continuare mecanismul din figura 11, al cărui element conducător *1* execută o mişcare de rotaţie în sens antiorar cu viteza unghiulară constantă ω_1. Pentru poziţia tijei *3* corespunzătoare lui $s = 0$, mişcarea se transmite arborelui principal *2* prin intermediul bilei *4*. Dacă

$s \neq 0$, atunci tija *3* opreşte şaiba *5*, care se roteşte împreună cu arborele *2*. În momentul opririi şaibei, bolţul 6 scoate bila *4* din golul în formă de pană, oprind astfel arborele *2*, cu toate că elementul conducător *1* continuă să se rotească. Rezultă deci că cele două stări (de mişcare sau de repaus) ale arborelui *2* sînt determinate de cele două poziţii ale tijei *3*. Caracterul variaţiei vitezei unghiulare $\omega_2 = \omega_2(t)$ este dat în figura 11*b*. Ataşînd elementului executor *2* şi elementului comandă *3* variabilele binare x, respectiv f, astfel ca valorile „1" să corespundă poziţiei $s = 0$ a tijei *3*, iar valorile „0" poziţiei $s \neq 0$, se observă că mecanismul din figura 11*a* este echivalent din punctul de vedere al funcţionării logice cu mecanismele din figurile 9*a* şi 10.

De menţionat este faptul că variaţia vitezei unghiulare $\omega_2 = \omega_2(t)$ a arborelui *2* al mecanismului din figura 11*a* este similară cu caracteristica grilei al unei triode, ceea ce nu poate realiza mecanismul din figura 9*a* dat în [1].

Cum comanda releelor studiate este un element bipoziţional cu două poziţii fixe, pentru a crea posibilitatea acţionării elementului-comandă al unui releu de către elementul executor al altui releu este avantajoasă folosirea releelor al căror element executor este tot un element bipoziţional cu două poziţii fixe.

Să montăm la un releu mecanic (fig. 12) un buton mecanic în aşa fel ca intrarea celui din urmă să coincidă cu elementul executor al releului. În acest caz ieşirile butonului ne apar ca ieşiri ale releului.

Releul mecanic din această figură are comanda f şi ieşirile x, respectiv $\bar{x}$ elemente cu două poziţii fixe. În poziţia $f = 1$ a elementului-comandă (fig. 12*a*), elementul conducător oscilează pe distanţa H, arcul *3* fiind solicitat pulsatoriu la întindere. Elementul *2* are poziţia fixă limitată de tija *4* şi de ghidajul elementului x, determinînd astfel poziţiile ieşirilor $x = 1$, respectiv $\bar{x} = 0$. În momentul cînd elementul comandă ocupă poziţia $f = 0$, tija *4* permite arcului *3* ca prin destindere să deplaseze elementul *2* spre stînga. În această perioadă de tranziţie, tija *5* comprimă arcul *6* (fig. 12*b*). Cînd elementul *2* ajunge în poziţia extremă, limitată de ghidajul elementului X, arcul *6* se destinde (fig. 12*c*) şi tija *5* blochează elementul *2*, menţinîndu-i poziţia fixă pînă ce comanda se schimbă. Deci, neglijînd perioada de tranziţie (fig. 12*b*), în poziţia $f = 0$ a elementului comandă, ieşirile releului sînt în poziţiile fixe $X = 0$ şi $X = 1$. Elementul motor oscilează şi în acest caz pe aceeaşi distanţă H, arcul *3* fiind solicitat pulsatoriu la compresiune.

Reprezentarea structurală a acţionării elementului comandă al releului y de una dintre ieşirile releului x de comandă f este dată în figurile 8*b* şi *c*.

FUNCŢIONAREA IDEALĂ A SCHEMELOR CU BUTOANE ŞI RELEE MECANICE. Din descrierea releului reprezentat în figura 12 reiese că, la darea unei comenzi $f = \xi$ unde $\xi \in \{1\}$, abia după un timp Δt, presupus constant, suficient de mic şi determinabil, ieşirile releului iau valorile

$x = \xi$ şi $\overline{x} = \overline{\xi}$. Notînd cu indicele N variabila ataşată unui element bipoziţional la timpul N şi cu indicele $N + 1$ aceeaşi variabilă la timpul imediat următor (diferit de primul cu Δt), putem scrie [2]:

$$x_{N+1} = f_N,$$

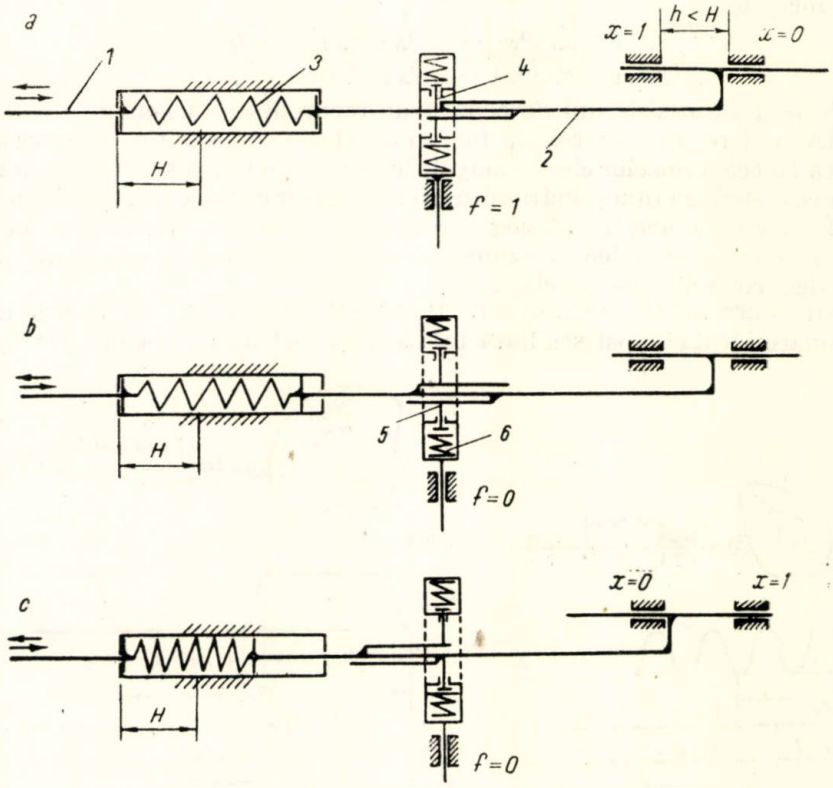


Fig. 12

relaţia pe care o numim ecuaţia caracteristică a releului.

Într-o schemă compusă din butoanele $A, \ldots, B$ şi releele $x, \ldots, y$ de comenzi $f, \ldots, g$, poziţiile elementelor comandă la timpul N depind în general de poziţiile ieşirilor butoanelor şi releelor la timpul N. Deci avem relaţiile

$$f_N = f_N(a_N, \ldots, b_N, x_N, \ldots, y_N)$$
$$\vdots$$
$$g_N = g_N(a_N, \ldots, b_N, x_N, \ldots, y_N).$$

Ţinînd seama de ecuaţiile caracteristice ale releelor

$$X_{N+1} = f_N$$
$$\vdots$$
$$y_{N+1} = g_N,$$

avem relaţiile

$$x_{N+1} = f_N(a_N, \ldots, b_N, x_N, \ldots, y_N),$$
$$y_{N+1} = g_N(a_N, \ldots, b_N, x_N, \ldots, y_N),$$

pe care le numim sistemul de ecuaţii de recurenţă al schemei.

De aici rezultă că releele mecanice ideale au ecuaţia caracteristică identică cu cea a releelor electromagnetice şi funcţionarea schemelor cu relee mecanice e analogă funcţionării ideale a schemelor cu relee electromagnetice.

În virtutea acestei analogii, rezolvarea analizei, sintezei şi simplificării schemelor cu relee mecanice nu ridică probleme teoretice noi, aparatul algebric rămînînd acelaşi.

DISPOZITIVE DE MEMORARE CU RELEE MECANICE. Releele a căror funcţionare ideală a fost studiată mai sus au fost de tipul celui din figura

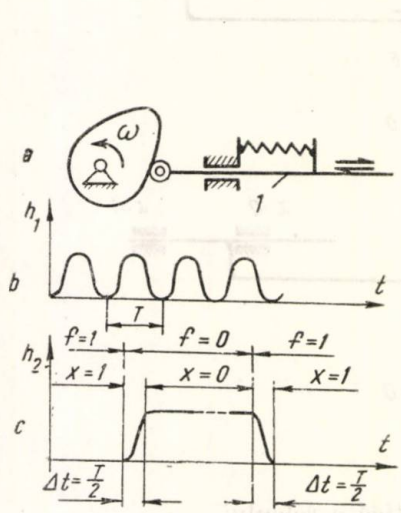


Fig. 13

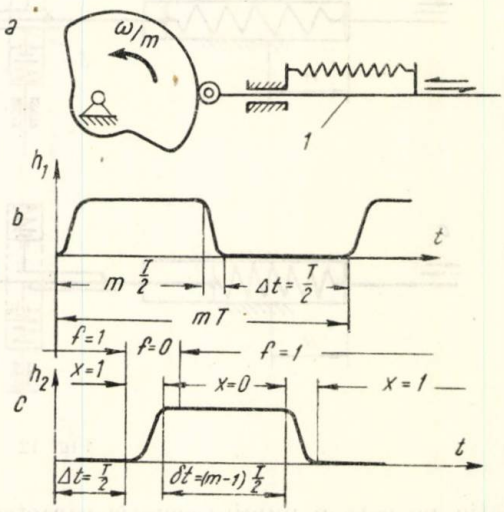


Fig. 14

12, avînd elementul conducător *1* acţionat ca în figura 13*a*. Cama, rotindu-se cu viteza unghiulară constantă ω, determină o variaţie a spaţiului parcurs de elementul *1* de tipul celei din figura 13*b*. Cînd comanda releului ia valoarea $f = \xi$, după un timp $\Delta T = \frac{T}{2}$ $\left(\text{unde } T = \frac{2\pi}{\omega}\right)$ ieşirea x ia valoarea $x = \xi$, pe care o păstrează numai atîta timp cît valoarea comenzii nu se schimbă figura 13*c* (vezi şi fig. 12). Acţionînd elementul conducător al releului din figura 13 ca în figura 14*a*, cama, rotindu-se cu

viteza unghiulară $\frac{\omega}{m}$ (unde m este un număr întreg), determină o variaţie a spaţiului parcurs de elementul *1* de tipul celei din figura 14*b*. În acest caz, dacă elementul-comandă trece din poziţia $f = 1$ în poziţia $f = 0$, după un timp $\Delta t = \frac{T}{2}$ ieşirea x trece în poziţia $x = 0$, pe care şi-o păstrează un timp $\delta t = (m - 1)\frac{T}{2}$, chiar dacă valoarea comenzii se schimbă (fig. 14*c*). Analog releul memorează şi comanda $f = 1$, comportîndu-se ca un dispozitiv static de memorare.

Menţionăm că, în cazul funcţionării reale, valabilitatea celor prezentate anterior e condiţionată de rezolvarea unor probleme de natură constructivă şi de sincronizare a comenzilor.

Primită la redacţie la 11 noiembrie 1964; o nouă versiune la 19 februarie 1965.

BIBLIOGRAFIE

1. В. Н. Юрухин, *Механизмы логического управления машин автоматов.* Труды семинара по Т. М. М., том XXII, вып. 87, 1961.
2. Gr. C. Moisil, *Teoria algebrică a mecanismelor automate.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1959.
3. — *Circuite cu tranzistori, vol. 1.* Edit. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1961.

ALEGEREA REȚELEI STRUCTURALE OPTIME LA ELABORAREA CINEMATICII CUTIILOR DE VITEZE CU MAI MULT DE DOUĂ AXE

de SANDU IOAN
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

531.1

Studiul de față aduce contribuția sa la teoria rețelelor structurale, evidențiind unele aspecte noi ale ei și stabilind criteriile după care se poate alege, la elaborarea cinematicii cutiilor de viteze cu mai mult de două axe, rețeaua structurală optimă.

Astfel, în lucrare se propune o metodă grafoanalitică de sinteză potrivit căreia o asemenea rețea trebuie să satisfacă două criterii care au fost denumite : criteriul funcțional și criteriul de rezistență. Prin faptul că problemele sînt tratate pentru cazul general al unei cutii de viteze cu k axe și k grupe de turații, noua metodă are aplicabilitate eficace în orice caz concret de proiectare.

După cum este cunoscut, la mașinile-unelte, lanțul cinematic principal, prin faptul că face parte din grupa lanțurilor cinematice generatoare tehnologice, trebuie să realizeze la capătul de ieșire o gamă de viteze de așchiere.

Aceasta se obține cu un mecanism aflat în interiorul lanțului, care modifică semnalul de intrare — turația — furnizat de motorul electric ce-l antrenează, într-un număr de turații distincte, indiferent dacă mișcarea de așchiere trebuie să aibă loc pe traiectorii circulare sau rectilinii și indiferent de modul de acționare mecanic sau hidraulic (lucrarea nu se referă la lanțurile cinematice electrice, acestea constituind un caz separat al modului de realizare a vitezelor de așchiere).

În prezent, în construcția mașinilor-unelte, cea mai largă răspîndire a acestor mecanisme au căpătat-o variatorii discontinui de turații cu roți dințate, denumiți cutii de viteze, care, prin intermediul angrenajelor, furnizează la ieșire turații distincte, ale căror valori se obțin ordonat într-o serie geometrică și al căror număr este dat de produsul grupelor de turații dintre axe.

Prin urmare, putem scrie

$$q = p_k \cdot p_{k-1} \cdots p_2 \cdot p_1, \tag{1}$$

unde

q — reprezintă numărul de turaţii distincte în serie geometrică cu raţia φ obţinute la axul de ieşire cu o cutie de viteze avînd k axe (se consideră primul ax ca ax zero),

$p_1, \ldots, p_k$ — numerele de turaţii ale grupelor de turaţii care se obţin, respectiv, între axul de rang precedent şi axul avînd acelaşi rang cu al grupei de turaţii respective,

k — numărul de axe ale cutiei de viteze, deci şi numărul de termeni p_i (unde $1 \leqslant i \leqslant k$) din ecuaţia (1).

Expresia (1) am denumit-o *ecuaţia cinematică* a cutiei de viteze. Pentru aceleaşi valori q şi $p_1, \ldots, p_k$, se obţin un număr de ecuaţii cinematice egal cu $k!$ cu condiţia ca $p_1 \neq p_2 \neq \ldots \neq p_k$.

La elaborarea cinematicii cutiilor de viteze, de un real folos sînt reprezentările grafice denumite reţeaua structurală şi diagrama turaţiilor. Datorită multiplelor ecuaţii cinematice ce se pot scrie pentru una şi aceeaşi valoare q, există întotdeauna un număr important de reţele structurale. Explicaţia este firească dacă avem în vedere că numai pentru o singură ecuaţie cinematică raţiile turaţiilor din aceeaşi grupă, fie p_i — care în lucrările [1], [2] sau [3] se notează convenţional sub formă de indici, prezentîndu-se şi modul lor de formare, — pot căpăta valori diferite. În acest fel, o ecuaţie cinematică cu indici devine ceea ce se denumeşte ecuaţia structurală a reţelei şi deci vor exista atîtea reţele cîte ecuaţii structurale se pot forma. Fiecare reţea conduce la o soluţie constructivă specifică, lucru care impune selecţionarea acelora care oferă condiţii avantajoase în execuţia şi exploatarea cutiilor de viteze proiectate. Elementele caracteristice ale unui asemenea mecanism sînt q, φ şi raportul de reglare, adică raportul între turaţiile maximă şi minimă obţinute la ultimul ax, şi ele se stabilesc de la început în funcţie de destinaţia maşinii-unelte în procesul de producţie.

Ca urmare, putem scrie ecuaţiile cinematice posibile prin alegerea convenabilă a valorilor $p_1, \ldots, p_k$ (frecvent cifrele 2 şi 3 reprezentînd blocuri baladoare cu cîte două, respectiv trei roţi dinţate), astfel încît numărul grupelor să fie egal cu numărul de axe ales, iar produsul valorilor lor să satisfacă valoarea q. Folosind apoi indicii, deducem ecuaţiile structurale şi, implicit, reţelele lor.

Pentru analiza acestui număr mare de reţele în vederea găsirii unei variante optime, literatura de specialitate face precizări foarte utile, însă insuficiente pentru ca în ansamblul lor să constituie o metodă de analiză completă şi sigură. Totodată, lipsindu-le sistematizarea, ca şi caracterul general de aplicare, ele conduc analiza cu destulă greutate. În acest sens, prin studiul de faţă propunem o metodă grafoanalitică potrivit căreia reţeaua structurală optimă este aceea care satisface două criterii, pe care le-am denumit : criteriul funcţional şi criteriul de rezistenţă.

CRITERIUL FUNCȚIONAL

Să presupunem că am stabilit o ecuație cinematică, spre exemplu cea scrisă sub forma (1). Atunci una din ecuațiile structurale va fi

$$q_1 = [p_k]_{1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_{k-1}} \times \cdots \times [p_i]_{1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots p_{i-1}} \times \cdots \times [p_2]_{1 \cdot p_1} \times [p_1]_1. \quad (2)$$

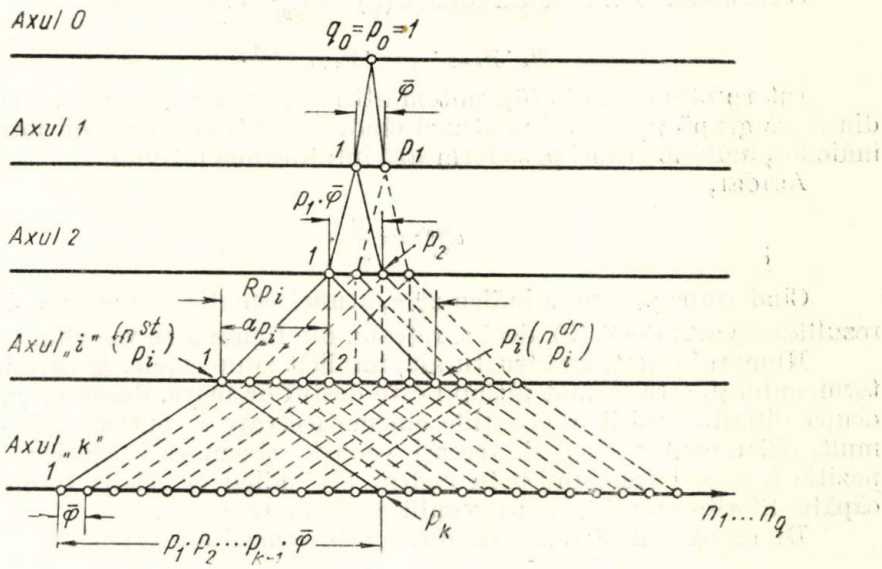


Fig. 1

Reprezentarea grafică a acesteia (fig. 1) constituie una din numărul mare de rețele care se pot obține.

Se observă că numărul turațiilor la fiecare ax este egal cu produsul grupelor de turații pînă la el, lucru afirmat la începutul lucrării și destul de evident în reprezentarea de față.

Totodată, se constată că indicii din ecuația (2), în expresiile cărora substituim cifrei 1 valoarea φ — rația turațiilor la axul de ieșire —, reprezintă, în notația convențională logaritmică, rațiile turațiilor din fiecare grupă de turații.

Dacă notăm indicele termenului general p_i

$$1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{i-1} = \alpha_{p_i}, \quad (3)$$

atunci, fără a mai utiliza indicii, ecuația (2) devine

$$q = p_k \cdot p_{k-1} \cdot \ldots \cdot p_i \cdot \alpha_{p_i}, \quad (4)$$

de unde

$$\alpha_{p_i} = \frac{q}{p_k \cdot p_{k-1} \cdots p_{i+1} \cdot p_i}. \quad (5)$$

Rezultă că $\alpha_{p_i} \cdot \overline{\varphi}$, convenţional, sau $\varphi^{\alpha_{p_i}}$ real, reprezintă raţia turaţiilor din grupa p_i (vezi fig. 1).

Din regula de formare potrivit căreia valoarea indicelui unei grupe rezultă din produsul valorilor diferitelor grupe de turaţii, desprindem o concluzie importantă în sensul că niciodată în acest produs nu vom găsi valoarea grupei al cărei indice se formează.

Ca urmare, deducem din relaţia (5) că $\alpha_{p_i}^{\max}$ există cînd

$$p_k \cdot p_{k-1} \cdot \ldots \cdot p_{i+1} = 1. \tag{6}$$

Interpretînd relaţia (6), putem afirma că raţia maximă a turaţiilor din orice grupă p_i se obţine atunci cînd, respectînd regula de formare a indicilor, indicele grupei p_i se formează întotdeauna ultimul.

Aşadar,

$$\alpha_{p_i}^{\max} = \frac{q}{p_i}. \tag{7}$$

Cînd grupa p_i are ca indice $\alpha_{p_i}^{\max}$, atunci ecuaţia structurală din care rezultă este alta decît (2), deci şi reţeaua din figura 1 se va schimba.

Numărul ecuaţiilor structurale, implicit şi de reţele, la care indicele termenului p_i este format ultimul este destul de mare, deoarece p_i poate ocupa diferite poziţii în ecuaţiile cinematice care le putem scrie şi, mai mult, chiar pentru una şi aceeaşi ecuaţie cinematică (deci pentru o poziţie fixă a termenului p_i în cadrul ei) indicii celorlalţi termeni pot căpăta diferite valori în baza regulii de formare a lor.

De aceea considerăm una din aceste ecuaţii structurale

$$q_1 = [p_k]_{1 \cdot p_1 \cdot p_2} \times \ldots \times [p_i]_{\alpha_{p_i}^{\max} = 1 \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_{i-1} \cdot p_{i+1} \ldots p_{k-1} \cdot p_k} \times \ldots \times$$
$$\times [p_2]_{1 \cdot p_1} \times [p_1]_1. \tag{8}$$

Pentru ea obţinem grafic (fig. 2) reţeaua corespunzătoare.

Din figura 1 se deduce simplu valoarea intervalului între prima şi ultima turaţie din grupa p_i:

$$R_{p_i} = \varphi^{\alpha_{p_i}(p_i - 1)}. \tag{9}$$

Observăm că valoarea sa maximă, se obţine pentru $\alpha_{p_i}^{\max}$, încît putem scrie

$$R_{p_i}^{\max} = \varphi^{\alpha_{p_i}^{\max}(p_i - 1)}. \tag{10}$$

Deoarece în relaţia (10) apare $\alpha_{p_i}^{\max}$, înseamnă că întotdeauna intervalul maxim la o grupă de turaţii se obţine atunci cînd indicele ei se formează ultimul.

Dacă ţinem seama de (7), atunci relaţia (10) capătă următoarea expresie definitivă:

$$R_{p_i}^{\max} = \varphi^{\frac{q}{p_i}(p_i - 1)}. \tag{11}$$

Sub această formă, observăm că $R_{p_i}^{\max}$ depinde de φ și q — valori care, fiind date, rămîn constante și aceleași în tot stadiul de elaborare a cinematicii unei cutii de viteze — și de p_i, care este variabil ($1 \leqslant i \leqslant k$).

Ca urmare, $R_{p_i}^{\max}$ variază între

$$R_{p_i}^{\max\min} \leqslant R_{p_i}^{\max} \leqslant R_{p_i}^{\max\max}. \tag{12}$$

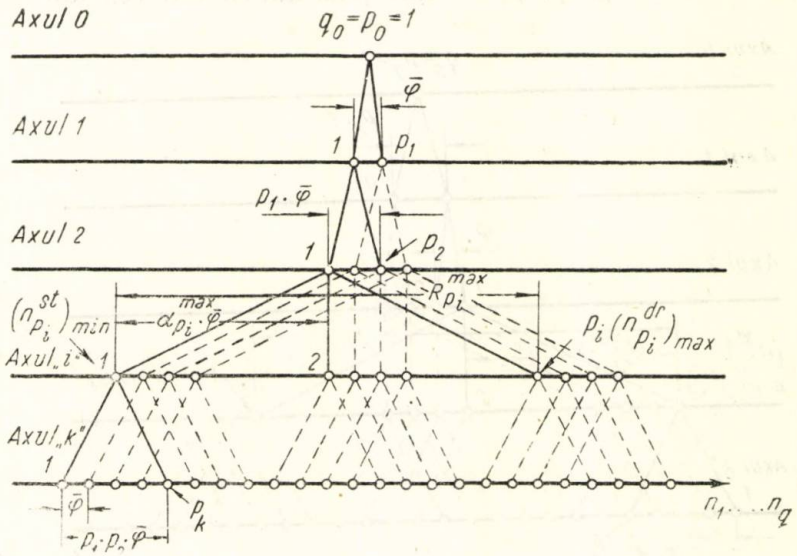


Fig. 2

Vom face ipoteza că între termenii ecuației cinematice (1) putem găsi un termen p_j și altul p_h, ca fiind, respectiv, cel mai mare și cel mai mic număr între celelalte care reprezintă restul de termeni p_i. Adică

$$\left.\begin{aligned} &p_j > p_i \text{ pentru orice } 1 \leqslant i \leqslant j-1 \text{ și } j+1 \leqslant i \leqslant k, \\ &p_h < p_i \text{ pentru orice } 1 \leqslant i \leqslant h-1 \text{ și } h+1 \leqslant i \leqslant k. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Pentru cazul particular $p_i = p_j$, relația (11) devine

$$R_{p_j}^{\max} = \varphi^{\frac{q}{p_j}(p_j-1)}. \tag{14}$$

Acest interval rămîne constant pentru toate ecuațiile structurale posibile la care indicele grupei p_j se formează ultimul, deoarece q, φ și p_j nu se schimbă.

Fie una dintre ele :

$$q_1 = [p_k]_{1 \cdot p_2 \cdot p_1} \times \ldots \times [p_j]_{\alpha_{p_j}^{\max} = 1 \cdot p_2 \cdot p_1 \ldots p_{j-1} \cdot p_{j+1} \ldots p_{k-1} \cdot p_k} \times \ldots \times [p_2]_1 \times [p_1]_{1 \cdot p_2}, \tag{15}$$

avînd rețeaua reprezentată în figura 3.

Vom demonstra că, folosind la elaborarea cinematicii unei cutii de viteze cu mai mult de două axe aceiaşi termeni p_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ stabiliţi iniţial să satisfacă prin produsul lor o valoare q dată, $R_{p_j}^{\max}$ reprezintă $R_{p_i}^{\max\max}$, adică este cel mai mare între intervalele maxime ale celorlalte grupe de turaţii.

Pentru demonstraţie, considerăm toate reţelele la care ultimul indice se formează la grupa p_i oarecare (una din ele este cea din figura 2),

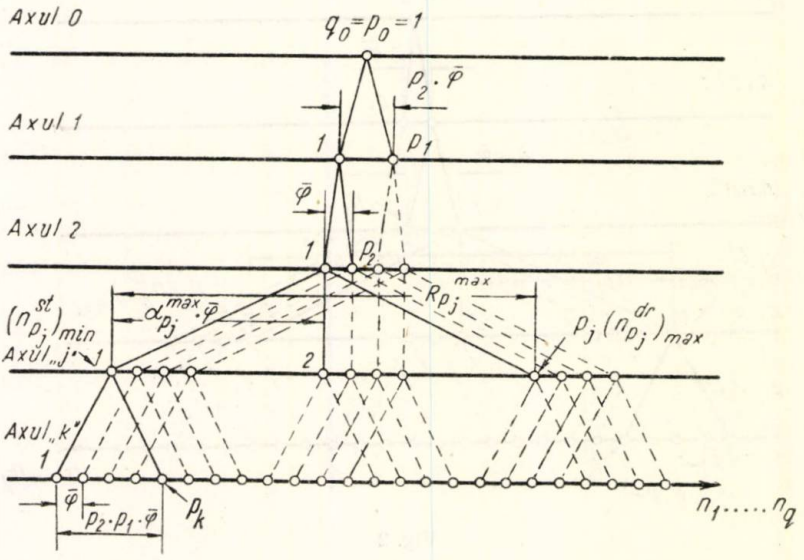


Fig. 3

unde i poate lua orice valoare cuprinsă între $1 \leqslant i \leqslant j-1$ şi $j+1 \leqslant i \leqslant k$. Intervalul unei asemenea grupe este dat de relaţia (11).

Avem deci de demonstrat

$$R_{p_j}^{\max} > R_{p_i}^{\max}, \tag{16}$$

adică

$$\varphi^{\frac{q}{p_j}(p_j-1)} > \varphi^{\frac{q}{p_i}(p_i-1)} \tag{17}$$

pentru orice $1 \leqslant i \leqslant j-1$ şi $j+1 \leqslant i \leqslant k$.

După efectuarea unor operaţii simple, inegalitatea de demonstrat (17) devine

$$p_j > p_i. \tag{18}$$

Or, inegalitatea (18) este evidentă, conform condiţiilor (13).

Putem deci scrie

$$R_{p_i}^{\max\max} \equiv R_{p_j}^{\max} \quad \text{pentru } i = j. \tag{19}$$

Analog raționamentului folosit, pentru cealaltă condiție (13) și în virtutea inegalității (19) deducem

$$R_{p_i}^{\max\min} \equiv R_{p_h}^{\max} \quad \text{pentru } i = h. \tag{20}$$

Cu aceste concluzii, relația (12) capătă următoarea formă:

$$R_{p_h}^{\max} \leqslant R_{p_i}^{\max} \leqslant R_{p_j}^{\max}, \tag{21}$$

sau, înlocuind,

$$\varphi^{\frac{q}{p_h}(p_h-1)} \leqslant R_{p_i}^{\max} \leqslant \varphi^{\frac{q}{p_j}(p_j-1)} \tag{22}$$

pentru orice $1 \leqslant i \leqslant k$.

În urma demonstrațiilor și concluziilor prezentate, putem rezuma următoarele:

1) fiind dați q și φ, între termenii $p_1, \ldots, p_k$, care se stabilesc inițial să satisfacă prin produsul lor valoarea q dată, se pot găsi oricînd un termen p_j și altul p_h ca fiind cel mai mare, respectiv cel mai mic număr între celelalte care reprezintă restul de termeni p_i;

2) pentru fiecare grupă de turații p_i ($1 \leqslant i \leqslant k$) există un interval între turațiile sale extreme, care variază în funcție de valoarea indicelui său, pentru q și φ dați. Valoarea sa maximă se obține cînd indicele se formează ultimul;

3) intervalele maxime $[R_{p_i}^{\max}]$ ale grupelor sînt variabile între două limite, ca urmare a faptului că termenul p_i ia toate valorile pentru $1 \leqslant i \leqslant k$;

4) indiferent de ordinea produsului termenilor p_i din ecuațiile cinematice și indiferent dacă pentru una și aceeași ecuație cinematică indicii termenilor p_i, mai puțin p_j, respectiv p_h, se schimbă, căpătînd diferite valori ce rezultă în baza regulii de formare a lor, intervalu] maxim maximorum ($R_{p_i}^{\max\max}$) se obține la grupa cu cel mai mare număr de turații (p_j), iar intervalul maxim minimorum ($R_{p_i}^{\max\min}$) se obține la cea cu cel mai mic număr de turații (p_h), dar acestea numai atunci cînd, respectînd regula de formare a indicilor, indicii acestor grupe se formează întotdeauna ultimii;

5) aceste intervale au valori unice și aceleași pentru toate ecuațiile cinematice și structurale posibile, scrise însă cu aceiași termeni $p_1, \ldots, p_k$ și pentru aceleași valori q și φ date;

6) de asemenea valoarea lor nu depinde de locul ocupat de termenii p_j, respectiv p_h într-o ecuație cinematică sau structurală.

Intervalul dintre turațiile extreme ale unei grupe de turații p_i, nu este altul decît raportul dintre turațiile-limită ale grupei, din dreapta și stînga turației axului de rang precedent din care provin (fig. 1).

Acest raport l-am denumit raport de reglare al grupei.

Deci

$$R_{p_i} = \frac{n_{p_i}^{dr}}{n_{p_i}^{st}}. \tag{23}$$

Atunci raportul de reglare maxim al grupei p_i (fig. 2) va fi

$$R_{p_i}^{\max} = \frac{[n_{p_i}^{dr}]_{\max}}{[n_{p_i}^{st}]_{\min}} = \varphi^{\frac{q}{p_i}(p_i-1)} \tag{24}$$

pentru orice $1 \leqslant i \leqslant k$.

În cazul particular $i = j$, vom regăsi (fig. 3) raportul de reglare maxim maximorum al unei grupe de turaţii :

$$R_{p_j}^{\max} = \frac{[n_{p_j}^{dr}]_{\max}}{[n_{p_j}^{st}]_{\min}} = \varphi^{\frac{q}{p_j}(p_j-1)}. \tag{25}$$

Din observaţiile făcute asupra funcţionării angrenajelor cutiilor de viteze pentru maşinile-unelte, s-a ajuns la concluzia că între două axe rapoartele de transmitere care satisfac în mare măsură problema randamentului şi a uzurii trebuie să fie maxim 2/1, respectiv 1/4.

Ca urmare, raportul maxim de reglare între turaţiile-limită în dreapta şi în stînga ale unui ax oarecare ce fac parte din grupa de turaţii de acelaşi rang cu axul şi care se obţine dintr-o singură turaţie a axului de rang precedent este condiţionat de valorile de mai sus, astfel că putem scrie

$$R_{cv}^{\max} = 8. \tag{26}$$

Criteriul funcţional constă în respectarea relaţiei (26) de către cel mai mare raport de reglare al unei grupe de turaţii. Cum acesta este $R_{p_j}^{\max}$ şi ţinînd seama de relaţia (21), putem afirma că toate reţelele posibile, obţinute cu aceiaşi termeni $p_1, \ldots, p_k$ stabiliţi iniţial, verifică criteriul funcţional atunci cînd pentru q şi φ daţi avem

$$R_{p_j}^{\max} \leqslant R_{cv}^{\max} \tag{27}$$

sau, utilizînd relaţiile (25) şi (26), obţinem condiţia necesară şi suficientă ca ele să satisfacă acest criteriu :

$$\varphi^{\frac{q}{p_j}(p_j-1)} \leqslant 8. \tag{28}$$

Precizăm că primele reţele care se vor supune verificării criteriului funcţional vor fi reţelele la care ultimul indice se formează la grupa p_j.

Dacă ele îl satisfac, atunci, în baza relaţiei (21), verificarea celorlalte devine inutilă şi astfel toate reţelele posibile îndeplinesc condiţia cerută de acest criteriu.

Nesatisfacerea inegalităţii (28) conduce la excluderea din analiza cinematicii unei cutii de viteze a reţelelor care conţin $R_{p_j}^{\max}$. Facem însă observaţia că în acest caz ele pot fi totuşi admise mai departe în analiză, numai dacă, alegîndu-se o altă raţie φ mai mică, se satisface condiţia de mai sus. În situaţia în care nici această soluţie nu dă rezultat sau poate

nu ne convine, urmează să se verifice criteriul funcțional la restul de rețele. Atunci fiecare din rețelele rămase vor satisface acest criteriu dacă

$$R_{p_i}^{\max} \leqslant R_{cv}^{\max}, \tag{29}$$

adică

$$\varphi^{\frac{q}{p_i}(p_i-1)} \leqslant 8, \tag{30}$$

unde i ia toate valorile între $1 \leqslant i \leqslant j-1$ și $j+1 \leqslant i \leqslant k$.

Rețelele structurale care satisfac prin prisma inegalității (28) sau, atunci cînd este cazul, a inegalității (30) criteriul funcțional pot fi supuse mai departe verificării de satisfacere a criteriului următor.

CRITERIUL DE REZISTENȚĂ

La proiectarea cutiilor de viteze, o problemă importantă care apare o constituie dimensionarea axelor. Calculul de rezistență care se efectuează în acest sens prezintă însă unele aspecte mai deosebite, specifice mecanismelor de variație a turației.

Astfel, particularitățile lui sînt generate în mod inevitabil de condițiile cinematice impuse, potrivit cărora într-o cutie de viteze cu mai mult de două axe numai primul are de obicei o singură turație, în rest la fiecare ax existînd un număr de turații egal cu produsul grupelor pînă la axul espectiv, conform ecuației cinematice.

Să analizăm în continuare ce importanță prezintă acest aspect pentru dimensionarea lor.

În acest scop considerăm aceeași cutie de viteze a cărei ecuație cinematică este (1). Excluzînd axul zero, la oricare altul — de exemplu cel de rang i — se obțin un număr de turații egal cu produsul

$$q_i = p_i \cdot p_{i-1} \cdots p_2 \cdot p_1, \tag{31}$$

produs care, prin particularizarea lui i cu valori cuprinse în intervalul $1 \leqslant i \leqslant k$, reprezintă, pentru fiecare ax al cutiei, numărul de turații corespunzătoare rangului său.

Deoarece va rezulta $q_i \neq 1$, fiecare va avea o turație maximă și alta minimă, din care rezultă un raport de reglare total ce poate fi mai mare sau mai mic după cum cele două limite vor fi mai depărtate, respectiv mai apropiate.

Remarcăm justețea celor afirmate privind figura 4, în care s-a reprezentat rețeaua ecuației structurale :

$$q_1 = [p_k]_{1 \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_{k-1}} \times \ldots \times [p_i]_{1 \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_{i-1}} \times \ldots \times [p_2]_{1 \cdot p_1} \times [p_1]_1. \tag{32}$$

Astfel, la axul de rang i, turațiile limită $n_i^{\max}$ și $n_i^{\min}$ se găsesc în rețea la o anumită depărtare, care poate fi constantă sau variabilă, mai mare sau mai mică de la o rețea la alta funcție de valorile indicilor (α_{p_i}) termenilor din ecuațiile structurale.

În acest scop am denumit raport total de reglare al turaţiilor axului de un rang oarecare, fie în general i, raportul

$$R_{t_i} = \frac{n_i^{\max}}{n_i^{\min}} = \varphi^{\beta_i}, \tag{33}$$

dat în reţea de depărtarea dintre cele două turaţii.

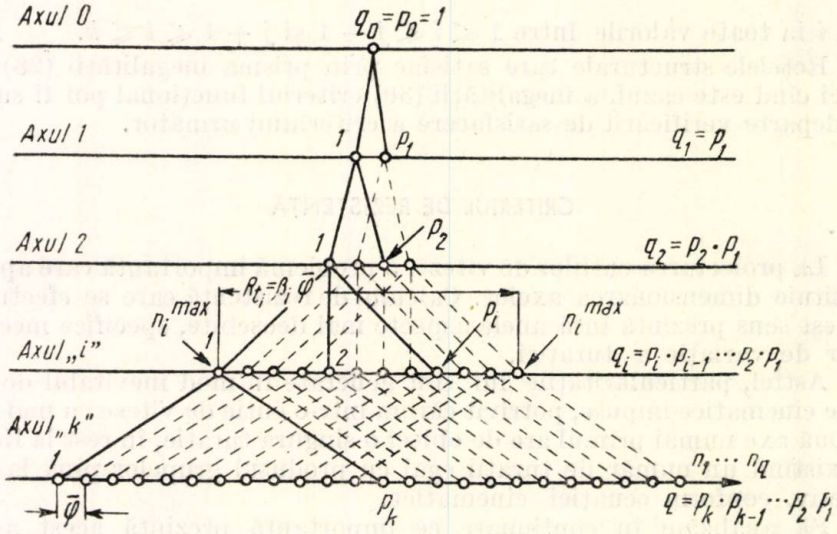


Fig. 4

Solicitările principale la care este supus în timpul funcţionării în sarcină fiecare ax din cutia de viteze au ca efect apariţia unor momente statice, de încovoiere (M_i) şi torsiune (M_t), şi dinamice (M_d), ca urmare a proceselor tranzitorii.

Momentele M_t şi M_d, fiind de aceeaşi natură, permit cumularea lor sub forma momentului rezultant transmis (M_{tT}).

$$M_{tT} = M_t + M_d. \tag{34}$$

Totodată, ştiind că în general M_i apare din efectul M_{tT}, deoarece transmiterea mişcării se face prin intermediul angrenajelor, putem afirma că dimensionarea axului [1]) depinde aproape exclusiv de valoarea momentului M_{tT}.

Expresia sa capătă o nouă formă prin înlocuirea în (34) a relaţiilor cunoscute

$$M_{tT} = 975 \frac{N}{n} + \frac{\pi}{30} J \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}, \tag{35}$$

[1]) În cazul axelor cutiilor de viteze, după stabilirea prin calcul a dimensiunilor lor care este o operaţie preliminară, se fac unele verificări în ceea ce priveşte rezistenţa mecanică, rigiditatea şi rezistenţa la uzură a suprafeţelor de frecare, precum şi rezistenţa la vibraţii, astfel încît, în ansamblu, calculul să fie cît mai complet şi mai precis.

în care

N reprezintă puterea transmisă de ax, în kW,

n — turația axului, în rot/min,

J — suma momentelor de inerție ale maselor în mișcare de rotație montate pe ax, în kgfms^2.

Trebuie să precizăm că în general J are valori foarte reduse ca urmare a dimensiunilor relativ mici ale maselor.

La rîndul său, după cum se poate observa și din (35), M_{tT} este influențat direct de turația n a axului. Astfel, să presupunem că ea are o valoare n' mai mare (funcționarea la turații mai ridicate este specifică axelor din prima parte a cutiei de viteze), dată de relația

$$n' = n \cdot \varphi^x, \tag{36}$$

unde $x > 1$, $\varphi > 1$.

Atunci momentul rezultant transmis va fi M'_{tT} și, conform relației (34), putem scrie

$$M'_{tT} = M'_t + M'_d \tag{37}$$

sau, ținînd seama de (35) și (36),

$$M'_{tT} = 975 \frac{N}{n} \cdot \varphi^{-x} + \frac{\pi}{30} \frac{dn}{dt} \varphi^x \cdot J'. \tag{38}$$

Din relația (38) se observă că această creștere a turației are un efect antagonist : scăderea momentului de torsiune (δM_t) și creșterea momentului dinamic (ΔM_d), ale căror expresii sînt

$$\left.\begin{aligned} \delta M_t &= 975 \frac{N}{n} \cdot \frac{\varphi^x - 1}{\varphi^x}, \\ \Delta M_d &= \frac{\pi}{30} \cdot \frac{dn}{dt} J \left[\frac{J'}{J} \cdot \varphi^x - 1 \right]. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

În același timp, pentru aceeași putere dată, dimensiunile precedente ale organelor (roți etc.) se reduc și astfel $J' < J$ (și așa fiind extrem de mic).

Ca urmare, pentru valorile — uzual folosite în construcția cutiilor de viteze — ale turațiilor ridicate și puterilor s-a constatat că scăderea δM_t este superioară creșterii ΔM_d.

În consecință, scriind că $|\delta M_t| > \Delta M_d$, adică $M_t - M'_t > M'_d - M_d$, se obține

$$M'_{tT} < M_{tT}, \tag{40}$$

adică momentul rezultant scade cu cît turația axului crește.

Așadar, dacă el se rotește numai cu o turație (vezi axul zero, fig. 4), momentul său rezultant va avea practic o singură valoare, cu atît mai mică cu cît turația sa este mai ridicată.

Dacă însă are mai multe turații, atunci el va avea de transmis momente rezultante diferite, cuprinse între două limite.

Pentru axul oarecare de rang i (vezi fig. 4), acestea au următoarele expresii, conform celor arătate:

$$\left.\begin{aligned} M_{tT_i}^{\max} &= 975\,\frac{N_i}{n_i^{\min}} + \frac{\pi}{30}\cdot J_i\,\frac{\mathrm{d}(n_i^{\min})}{\mathrm{d}t}, \\ M_{tT_i}^{\min} &= 975\,\frac{N_i}{n_i^{\max}} + \frac{\pi}{30}\,J_i\,\frac{\mathrm{d}(n_i^{\max})}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

În consecință, el va fi dimensionat pentru momentul $M_{tT_i}^{\max}$ indiferent dacă în exploatarea cutiei de viteze axul principal funcționează des la turații ce provin din turațiile mai apropiate de $n_i^{\max}$ ale axului de rang i.

De aici rezultă o supradimensionare a lui, și ea va fi cu atît mai pronunțată, cu cît turațiile-limită ale lui vor fi mai depărtate sau, altfel spus, cu cît raportul său total de reglare va fi mai mare.

Acest inconvenient nu poate fi înlăturat definitiv, ci parțial, în sensul că se vor adopta numai acele rețele la care pe fiecare ax (mai puțin primul și ultimul) se obțin rapoarte totale de reglare minime [2]) ($\beta_i = \beta_i^{\min}$).

Criteriul de rezistență constă în aceea că din fiecare grup de rețele obținut pentru fiecare ecuație cinematică, scrisă cu aceiași termeni $p_1, \ldots$ $\ldots, p_k$ stabiliți inițial, se vor alege numai acelea care posedă *simultan* la toate axele intermediare cele mai mici rapoarte totale de reglare dintre rapoartele corespunzătoare ale celorlalte rețele din grupul considerat.

În continuare vom vedea ce particularitate grafică imprimă acest criteriu rețelelor care-l satisfac. Pentru ușurința demonstrației presupunem o cutie de viteze cu care obținem la axul de ieșire q turații în serie geometrică cu rația φ, avînd 3 axe (excludem axul zero), deci 3 grupe de turații: p_1, p_2 și p_3, respectiv în axele 0 și I, I și II, II și III.

Ca urmare rezultă ecuația cinematică

$$q = p_3 \times p_2 \times p_1. \tag{42}$$

Cu ajutorul ei scrim una din ecuațiile structurale posibile:

$$q_1 = [p_3]_{1\cdot p_1\cdot p_2} \times [p_2]_{1\cdot p_1} \times [p_1]_1, \tag{43}$$

a cărei rețea s-a reprezentat în figura 5.

Observăm că rapoartele totale de reglare pe axele intermediare (I și II) sînt

$$\left.\begin{aligned} R'_{t_{\mathrm{I}}} &= \varphi^{1\cdot(p_1-1)} \\ R'_{t_{\mathrm{II}}} &= \varphi^{1\cdot p_1(p_2-1)+1\cdot(p_1-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

[2]) La ultimul ax, unde se obține q turații în serie geometrică cu rația φ, raportul său total de reglare este raportul de reglare al cutiei de viteze, dat de relația, $R_q = \varphi^{q-1}$, deci constant pentru q și φ date. Ca urmare, el nu poate fi modificat în scopul obținerii și pe acest ax a unui raport total de reglare minim.

O altă ecuație structurală pe care o putem forma este

$$q_1 = [p_3]_1 \times [p_2]_{1 \cdot p_3 \cdot p_1} \times [p_1]_{1 \cdot p_3}. \tag{45}$$

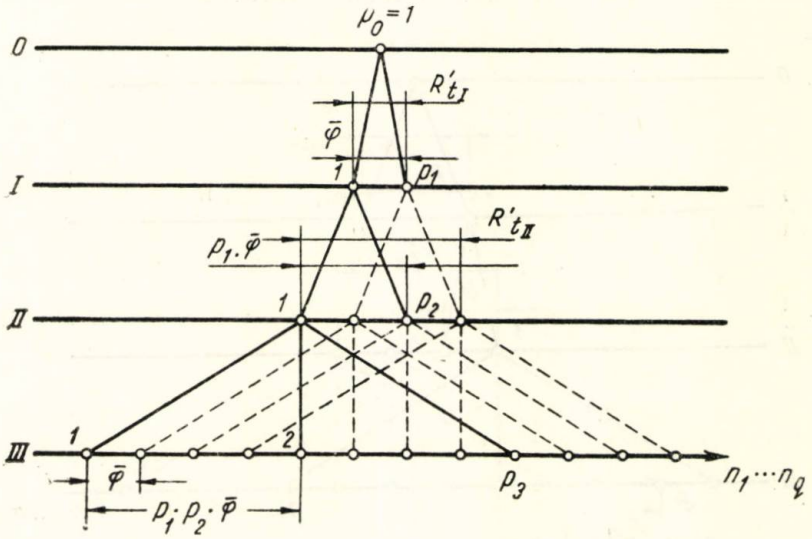


Fig. 5

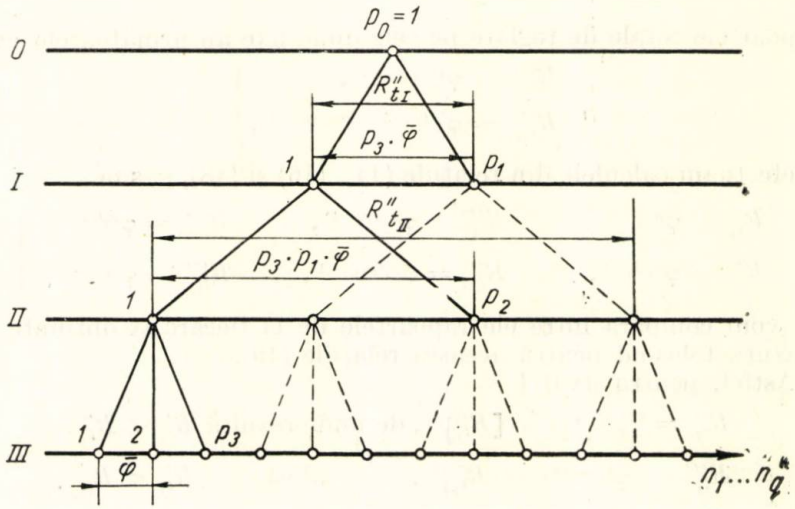


Fig. 6

Analog scriem rapoartele totale de reglare privind rețeaua ei corespunzătoare (fig. 6).

$$\left.\begin{aligned} R''_{t_I} &= \varphi^{1 \cdot p_3 (p_1 - 1)}, \\ R''_{t_{II}} &= \varphi^{1 \cdot p_3 \cdot p_1 (p_2 - 1) + 1 \cdot p_3 (p_1 - 1).} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

În fine, o a treia ecuație structurală a cărei rețea s-a reprezentat în figura 7 este

$$q_1 = [p_3]_{1\cdot p_2\cdot p_1} \times [p_2]_1 \times [p_1]_{1\cdot p_2}, \tag{47}$$

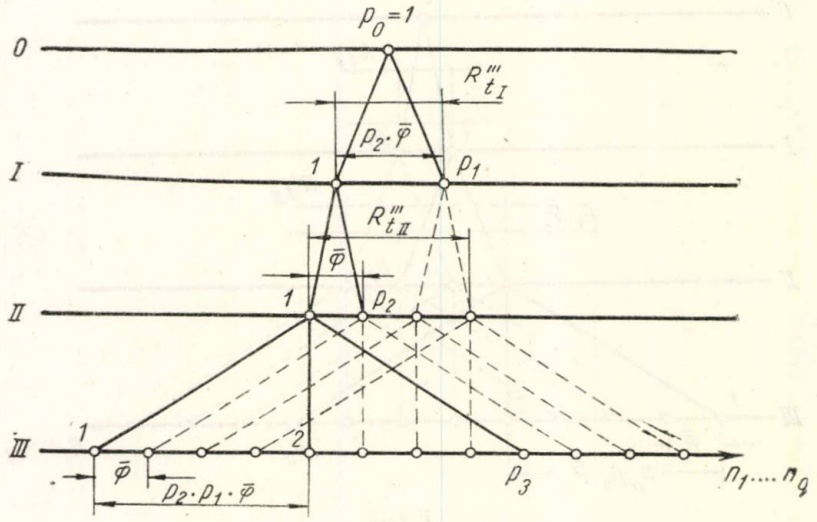


Fig. 7

iar rapoartele totale de reglare pe cele două axe au următoarele expresii:

$$\left.\begin{aligned} R'''_{t_I} &= \varphi^{1\cdot p_2(p_1-1)}, \\ R'''_{t_{II}} &= \varphi^{1\cdot(p_2-1)+1\cdot p_2(p_1-1)}. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Dacă efectuăm calculele din relațiile (44), (46) și (48), găsim

$$\left.\begin{aligned} R'_{t_I} &= \varphi^{p_1-1}, & R''_{t_I} &= \varphi^{p_3(p_1-1)}, & R'''_{t_I} &= \varphi^{p_2(p_1-1)}, \\ R'_{t_{II}} &= \varphi^{p_1p_2-1}, & R''_{t_{II}} &= \varphi^{p_3(p_1p_2-1)}, & R'''_{t_{II}} &= \varphi^{p_1p_2-1}. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Acum vom compara între ele rapoartele de la fiecare ax obținute în cele trei cazuri, folosind pentru aceasta relațiile (49).

Astfel, pentru axul I

$$\left.\begin{aligned} R''_{t_I} &= [\varphi^{p_1-1}]^{p_3} = [R'_{t_I}]^{p_3}, \text{ de unde rezultă } R'_{t_I} < R''_{t_I}, \\ R'''_{t_I} &= [\varphi^{p_1-1}]^{p_2} = [R'_{t_I}]^{p_2}, \qquad \text{adică} \qquad R'_{t_I} < R'''_{t_I}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Dacă $p_2 > p_3$, atunci $R'''_{t_I} > R''_{t_I}$ și, prin urmare,

$$R'_{t_I} < R''_{t_I} < R'''_{t_I}. \tag{51}$$

Dacă $p_2 < p_3$, atunci $R'''_{t_I} < R''_{t_I}$, adică

$$R'_{t_I} < R'''_{t_I} < R''_{t_I}. \tag{52}$$

Deducem că, oricare ar fi p_1, p_2 și p_3, modul de formare a indicilor din ecuația (43) conduce la o rețea structurală care pe axul I are cel mai mic raport total de reglare, adică

$$R_{t_I}^{\min} = R'_{t_I}. \tag{53}$$

Dacă trecem la axul II, putem scrie

$$\begin{aligned} R''_{t_{II}} &= [\varphi^{p_1 p_2 - 1}]^{p_3} = [R'_{t_{II}}]^{p_3}, && \text{adică } R'_{t_{II}} < R''_{t_{II}}, \\ R'''_{t_{II}} &= \varphi^{p_1 p_2 - 1}, && \text{deci } R'''_{t_{II}} = R'_{t_{II}}. \end{aligned} \tag{54}$$

Prin urmare, pentru axul II, cel mai mic raport total de reglare va fi

$$R_{t_{II}}^{\min} = R'_{t_{II}} = R'''_{t_{II}}. \tag{55}$$

Cum însă $R'''_{t_I} \neq R_{t_I}^{\min}$ conform (53), rezultă că rețeaua cu cele mai mici rapoarte totale de reglare pe axele intermediare este cea construită pentru ecuația stucturală (43), deoarece ea posedă simultan $R_{t_I}^{\min}$ și $R_{t_{II}}^{\min}$.

Trebuie să arătăm că pentru simplificarea demonstrației nu s-au reprezentat și celelalte rețele ale ecuației cinematice (42), adică

$$[p_3]_{1 \cdot p_1} \times [p_2]_{1 \cdot p_1 \cdot p_3} \times [p_1]_1, \quad [p_3]_{1 \cdot p_2} \times [p_2]_1 \times [p_1]_{1 \cdot p_2 \cdot p_3},$$

$$[p_3]_1 \times [p_2]_{1 \cdot p_3} \times [p_1]_{1 \cdot p_3 \cdot p_2},$$

deoarece, dacă se efectuează calcule similare celor prezentate, ajungem la aceeași concluzie de mai sus, potrivit căreia $R_{t_I}^{\min}$ și $R_{t_{II}}^{\min}$ se găsesc simultan la rețeaua amintită.

Prin urmare, din grupul de rețele obținut pentru ecuația cinematică (42), singura rețea care satisface criteriul de rezistență este cea a ecuației structurale (43).

La o astfel de rețea, turațiile fiecărui ax intermediar sînt foarte apropiate între ele și, în consecință, ea capătă un aspect grafic specific (fig. 5), motiv pentru care am denumit-o *rețea structurală întrețesută*.

Dacă se observă modul cum s-au format indicii în ecuația sa (43), se constată că ei sînt crescători în ordinea formării lor de la dreapta la stînga.

Desprindem concluzia importantă potrivit căreia rețelele întrețesute ale ecuațiilor structurale la care indicii sînt crescători în ordinea formării lor de la dreapta la stînga sînt rețelele care satisfac optim criteriul de rezistență. La aceeași constatare ajungeam dacă demonstrația s-ar fi făcut pentru cazul cînd cutia de viteze ar fi avut k axe și k grupe de turații.

În baza concluziei de mai sus observăm că există numai o singură rețea care satisface criteriul de rezistență pentru o singură ecuație cinematică și, prin urmare, vom obține atîtea rețele optime din acest punct de vedere cîte ecuații cinematice putem scrie, adică $k!$ cu condiția ca $p_1 \neq p_2 \neq \ldots \neq p_k$.

Dacă o parte din termenii p_i sînt egali între ei, numărul ecuaţiilor cinematice, deci şi al reţelelor întreţesute, se restrînge.

Pentru exemplul folosit obţinem 3 ! reţele întreţesute ($p_1 \neq p_2 \neq p_3$) ale următoarelor ecuaţii structurale :

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= [p_3]_{1\cdot p_1\cdot p_2} \times [p_2]_{1\cdot p_1} \times [p_1]_1 \\ q_1 &= [p_3]_{1\cdot p_2\cdot p_1} \times [p_1]_{1\cdot p_2} \times [p_2]_1 \\ q_1 &= [p_2]_{1\cdot p_3\cdot p_1} \times [p_1]_{1\cdot p_3} \times [p_3]_1 \\ q_1 &= [p_2]_{1\cdot p_1\cdot p_3} \times [p_3]_{1\cdot p_1} \times [p_1]_1 \\ q_1 &= [p_1]_{1\cdot p_2\cdot p_3} \times [p_3]_{1\cdot p_2} \times [p_2]_1 \\ q_1 &= [p_1]_{1\cdot p_3\cdot p_2} \times [p_2]_{1\cdot p_3} \times [p_3]_1 \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Relaţiile (56) permit să se înţeleagă că fiecare din grupele de turaţii p_1, p_2 şi p_3 se obţin pe rînd între axele 0 şi I, I şi II, II şi III ale cutiei de viteze studiate.

Pentru fiecare din ecuaţiile (56), reţeaua întreţesută corespunzătoare va avea un $R_{t_I}^{\min}$ şi un $R_{t_{II}}^{\min}$ proprii, deci în total vor exista 3 ! raporte totale de reglare minime pentru fiecare ax intermediar, dintre care unele pot fi egale şi altele diferite între ele.

În consecinţă, ele vor fi cuprinse între $R_{t_I}^{\min\,\min}$ şi $R_{t_I}^{\min\,\max}$, respectiv $R_{t_{II}}^{\min\,\min}$ şi $R_{t_{II}}^{\min\,\max}$.

Ca să găsim expresiile acestor limite, vom scrie toate rapoartele ce rezultă din ecuaţiile (56).

$$\left.\begin{aligned} [R_{t_I}^{\min}]_1 &= \varphi^{p_1-1} & [R_{t_{II}}^{\min}]_1 &= \varphi^{p_1p_2-1}, \\ [R_{t_I}^{\min}]_2 &= \varphi^{p_2-1}, & [R_{t_{II}}^{\min}]_2 &= \varphi^{p_2p_1-1} = [R_{t_{II}}^{\min}]_1, \\ [R_{t_I}^{\min}]_3 &= \varphi^{p_3-1}, & [R_{t_{II}}^{\min}]_3 &= \varphi^{p_3p_1-1}, \\ [R_{t_I}^{\min}]_4 &= \varphi^{p_1-1} = [R_{t_I}^{\min}]_1, & [R_{t_{II}}^{\min}]_4 &= \varphi^{p_1p_3-1} = [R_{t_{II}}^{\min}]_3, \\ [R_{t_I}^{\min}]_5 &= \varphi^{p_2-1} = [R_{t_I}^{\min}]_2, & [R_{t_{II}}^{\min}]_5 &= \varphi^{p_2p_3-1}, \\ [R_{t_I}^{\min}]_6 &= \varphi^{p_3-1} = [R_{t_I}^{\min}]_3, & [R_{t_{II}}^{\min}]_6 &= \varphi^{p_3p_2-1} = [R_{t_{II}}^{\min}]_5. \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

Observăm că pentru a avea

$$[R_{t_I}^{\min}]_1 < [R_{t_I}^{\min}]_2 < [R_{t_I}^{\min}]_3 \qquad (58)$$

trebuie ca

$$\varphi^{p_1-1} < \varphi^{p_2-1} < \varphi^{p_3-1}, \qquad (59)$$

adică

$$p_1 < p_2 < p_3, \qquad (60)$$

iar pentru

$$[R_{t_{II}}^{\min}]_1 < [R_{t_{II}}^{\min}]_3 < [R_{t_{II}}^{\min}]_5 \qquad (61)$$

este necesar să existe

$$\varphi^{p_1 p_2 - 1} < \varphi^{p_1 p_3 - 1} < \varphi^{p_2 p_3 - 1}, \tag{62}$$

adică

$$p_1 < p_2 < p_3. \tag{63}$$

În acest fel putem scrie

$$\left.\begin{aligned} R_{t_I}^{\min\,\min} &= \varphi^{p_1 - 1} = [R_{t_I}^{\min}]_1, & R_{t_{II}}^{\min\,\min} &= \varphi^{p_1 p_2 - 1} = [R_{t_{II}}^{\min}]_1 \\ R_{t_I}^{\min\,\max} &= \varphi^{p_3 - 1} = [R_{t_I}^{\min}]_3 = [R_{t_i}^{\min}]_6, & R_{t_{II}}^{\min\,\max} &= \varphi^{p_2 p_3 - 1} = [R_{t_{II}}^{\min}]_5 = [R_{t_{II}}^{\min}]_6 \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

dar numai atunci cînd $p_1 < p_2 < p_3$, conform (60) și (63).

Presupunînd îndeplinită această condiție, atunci rețeaua care conține simultan $R_{t_I}^{\min\,\min}$ și $R_{t_{II}}^{\min\,\min}$ este a ecuației

$$q_1 = [p_3]_{1 \cdot p_1 \cdot p_2} \times [p_2]_{1 \cdot p_1} \times [p_1]_1, \tag{65}$$

iar cea avînd $R_{t_I}^{\min\,\max}$ și $R_{t_{II}}^{\min\,\max}$ este a ecuației

$$q_1 = [p_1]_{1 \cdot p_3 \cdot p_2} \times [p_2]_{1 \cdot p_3} \times [p_3]_1. \tag{66}$$

Rețeaua structurală cea mai bună dintre cele întrețesute, pe care am denumit-o *rețea ideal întrețesută* (*R. I. Î.*), va fi cea care posedă simultan $R_{t_I}^{\min\,\min}$ și $R_{t_{II}}^{\min\,\min}$. Observăm că ecuația ei (65) are la bază ecuația cinematică în care termenii scriși de la dreapta la stînga (adică de la axul I la axul III) sînt crescători.

Dimpotrivă, rețeaua cea mai puțin bună dintre aceleași rețele întrețesute, pe care am denumit-o *rețea simplu întrețesută* (*R. S. Î.*), va fi cea cu $R_{t_I}^{\min\,\max}$ și $R_{t_{II}}^{\min\,\max}$, a cărei ecuație (66) se formează cu ecuația cinematică în care termenii sînt descrescători de la dreapta la stînga.

Dacă extindem aceste concluzii pentru cazul general al unei cutii de viteze cu k axe și k grupe de turații, ale căror valori sînt $p_1, p_2, \ldots$ $\ldots, p_h, p_{h+1}, \ldots, p_{j-1}, p_j, \ldots, p_{k-1}, p_k$, atunci putem afirma următoarele:

— *rețeaua ideal întrețesută* se obține întotdeauna cînd ecuația sa structurală se formează din ecuația cinematică ai cărei termeni și indici sînt crescători de la dreapta la stînga;

— *rețeaua simplu întrețesută* se obține întotdeauna cînd ecuația sa structurală se formează din ecuația cinematică la care termenii sînt descrescători, iar indicii crescători de la dreapta la stînga.

În consecință, ecuațiile lor sînt

$$q_1 = [p_j]_{1 \cdot p_h \ldots p_{j-1}} \times \ldots \times [p_h]_1 \text{ pentru } R.\,I.\,Î., \tag{67}$$

$$q_1 = [p_h]_{1 \cdot p_j \ldots p_{h+1}} \times \ldots \times [p_j]_1 \text{ pentru } R.\,S.\,Î. \tag{68}$$

unde $p_h < p_{h+1} < \ldots < p_i < \ldots < p_{j-1} < p_j$.

ALEGEREA REȚELEI STRUCTURALE OPTIME

Am denumit rețea structurală optimă rețeaua care satisface simultan condițiile cerute de cele două criterii propuse.

În virtutea celor arătate, metoda grafoanalitică, potrivit căreia procedăm la alegerea unei asemenea rețele absolut necesară în studiul inițial al elaborării cinematicii unei cutii de viteze cu mai mult de două axe, constă în următoarele :

1. Fiind dați q și φ, stabilim termenii p_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$, astfel ca $q = \prod_{i=1}^{k} p_i$.

2. Scriem apoi ecuațiile structurale posibile ale rețelelor întreținute și le reprezentăm grafic.

3. Acum, știind că ele satisfac criteriul de rezistență, verificăm dacă fac același lucru și pentru criteriul funcțional. Pentru aceasta este suficient dacă *R. I. Î.* îl satisface, întrucît din ecuația ei (67) se observă că ultimul indice se formează la grupa p_j. Ca urmare, dacă inegalitatea (28) este îndeplinită, toate rețelele întreținute sînt optime. În această situație, din punctul de vedere al celor două criterii ne putem fixa asupra celei mai bune (*R. I. Î.*).

Însă, de obicei se impun și anumite condiții (constructiv, de execuție, funcționale, de exploatare etc.) de care trebuie să ținem seama chiar din acest studiu inițial al elaborării cinematicii cutiei de viteze. De aceea ne vom stabili la rețeaua care le îndeplinește cel mai corespunzător.

4. În caz contrar, cînd inegalitatea (28) nu e îndeplinită, se verifică criteriul funcțional la restul rețelelor întreținute. Una sau mai multe dintre ele devin optime dacă este satisfăcută inegalitatea (30).

În situația cînd și aici rezultă mai multe rețele optime analog ca mai sus, se alege cea care în plus oferă și avantaje de ordin constructiv.

5. Dacă, totuși, nici una dintre rețelele întreținute nu verifică criteriul funcțional, atunci se operează la *R.I.Î.* sau la alta (tot întreținută) diferite modificări, cum ar fi :

a) micșorarea rației φ a turațiilor la axul de ieșire (numai cînd există această posibilitate) ;

b) alegerea unei valori $q' > q$ și suprapunerea unui număr de $(q' - q)$ turații fie la axul de ieșire, fie la unele axe intermediare, în scopul satisfacerii inegalităților (28) sau (30) de noile rapoarte de reglare maxime. Această metodă se aplică și în cazul cînd q este număr prim.

6. În caz extrem cînd nici una dintre aceste soluții nu dau satisfacție, recurgem la schimbarea valorilor termenilor p_i (bineînțeles dacă este posibil), ducînd, evident, la micșorarea sau la mărirea numărului lor precedent cu m unități (deci și al axelor), astfel încît să fie îndeplinită condiția $q = \prod_{i=1}^{k \mp m} p'_i$, după care aplicăm din nou metoda propusă.

7. După ce s-a stabilit rețeaua structurală optimă, în baza ei elaborăm una sau mai multe dintre variantele diagramei turațiilor, cu ajutorul cărora putem calcula mai departe rapoartele de transmitere și numerele de dinți ale roților din cutia de viteze ce se proiectează.

Primită la redacție la 2 noiembrie 1964; o nouă versiune la 22 februarie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. E. Botez, *Cinematica mașinilor-unelte*. Edit. tehnică, București, 1961.
2. N. S. Acerkan, *Calculul și construcția mașinilor-unelte* (trad. din lb. rusă). Edit. tehnică, București, 1955.
3. I. Diaconescu și alții, *Mașini-unelte*. Vol. I, Edit. transp. și telecom., București, 1959.
4. R. Germar, *Die Getriebe für Normdrehzahlen*. Berlin, Julius Springer, 1932.

EXTINDEREA MIŞCĂRILOR CONICE LA MIŞCĂRI CVASICONICE[1])

de E. CARAFOLI

Institutul de mecanica fluidelor „Traian Vuia"
al Academiei R.S.România

Acest articol tratează aripile cu borduri de atac curbate. Autorul extinde scurgerile conice şi scurgerile conice de ordin superior la aşa-numitele scurgeri cvasiconice şi calculează presiunea pe suprafaţa unor astfel de aripi.

1. POTENŢIALUL MIŞCĂRILOR CONICE DE ORDIN SUPERIOR

Să considerăm o aripă delta avînd unghiul α faţă de curentul supersonic de viteză U_∞, la infinit. Aripa este raportată la sistemul trirectangular $Ox_1x_2x_3$ (fig. 1). Într-o secţiune oarecare $x_1 = \text{const.}$, de exemplu $x_1 = 1$, vom defini un plan Oyz, unde coordonatele y şi z sînt date de relaţiile următoare :

$$y = \frac{x_2}{x_1}, \quad z = \frac{x_3}{x_1}, \quad r^2 = y^2 + z^2, \tag{1}$$

aceleaşi ca pentru secţiunea $x_1 = 1$.

Să considerăm un alt plan $O\eta\delta$ (fig. 2), definit de următoarea transformare geometrică, analogă celei a lui Busemann,

$$\eta = \frac{y}{1 - B^2z^2}, \quad \delta = \frac{z\sqrt{1 - B^2r^2}}{1 - B^2z^2}. \tag{2}$$

[1]) Publicată în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **10**, *3* (1965) (în lb. engleză).

În acest plan, componentele vitezei axiale de perturbație u_0, v_0, w_0 sînt funcții armonice de η și ζ și le putem asocia cu funcțiile armonice conjugate u_0', v_0', w_0', astfel că expresiile

$$\mathcal{U}_0 = u_0 + iu_0', \quad \mathcal{V}_0 = v_0 + iv_0', \quad \mathcal{W}_0 = w_0 + iw_0', \tag{3}$$

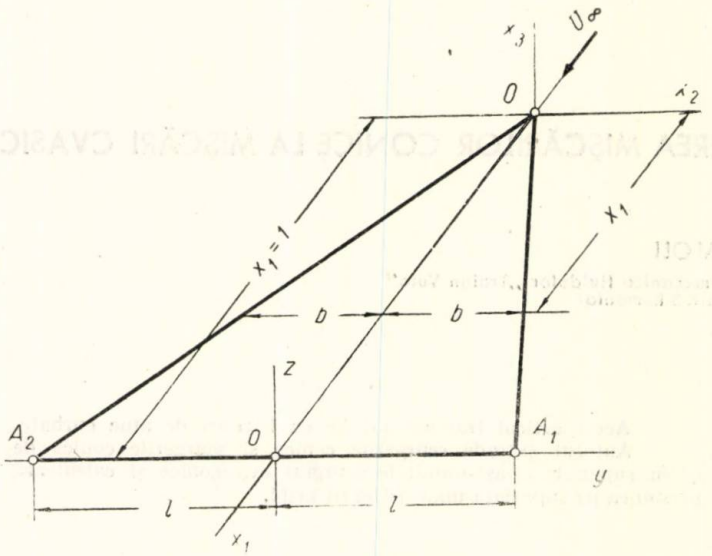


Fig. 1

sînt funcții analitice de variabila complexă

$$x = \eta + i\zeta. \tag{4}$$

Fiind date vitezele u_0 și v_0, *potențialul conic* pentru punctele de pe aripă ($z = 0$) va fi dat de relația

$$\frac{1}{x_1}\,\Phi_1 = u_0 + \eta v_0 = \mathrm{Re}\ (\mathcal{U}_0 + x\mathcal{V}_0). \tag{5}$$

Aplicînd ecuația de compatibilitate

$$\mathrm{d}\mathcal{U}_0 = -\,x\mathrm{d}\mathcal{V}_0 = \frac{ix}{\sqrt{1 - B^2x^2}}\,\mathrm{d}\mathcal{W}_0, \tag{6}$$

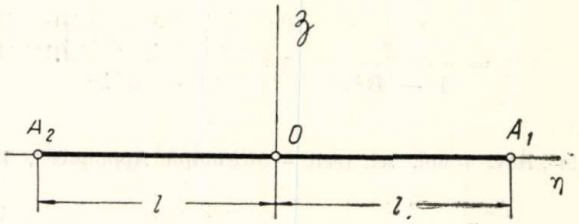


Fig. 2

se poate înlocui $\mathcal{U}_0$ sau $\mathcal{V}_0$ din expresia (5) şi găsi respectiv

$$\frac{1}{x_1}\Phi_1 = \operatorname{Re} x\int \mathcal{U}_0\, \mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{Re}\int \mathcal{V}_0\, \mathrm{d}x. \tag{7}$$

În mod analog, pentru mişcările conice de ordin superior se va găsi respectiv

$$\frac{2}{x_1^2}\Phi_2 = \operatorname{Re}\, x^2\int \mathcal{U}_1\, \mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \operatorname{Re}\, 2\int \mathcal{V}_1\, \mathrm{d}x \tag{8 a}$$

$$\frac{n}{x_1^n}\Phi_n = \operatorname{Re}\, x^n\int \mathcal{U}_{n-1}\, \mathrm{d}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \operatorname{Re}\, n\int \mathcal{V}_{n-1}\, \mathrm{d}x, \tag{8 b}$$

unde $\mathcal{U}_{n-1}$ şi $\mathcal{V}_{n-1}$ sînt funcţiile vitezei axiale şi laterale, definite de expresiile

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = \operatorname{Re}\, \mathcal{U}_{n-1}, \quad \frac{v}{x_1^{n-1}} = \operatorname{Re}\, \mathcal{V}_{n-1}, \tag{9}$$

care au fost stabilite în funcţie de x (şi de l) în lucrările noastre anterioare [1].

Să luăm acum cîteva exemple simple

a. Pentru aripa delta cu borduri subsonice, vitezele axiale de perturbaţie $\mathcal{U}_0$ şi $\mathcal{U}_1$ sînt definite de expresiile următoare:

$$\mathcal{U}_0 = \frac{\alpha U_\infty}{E(k)}\cdot\frac{l^2}{\sqrt{l^2-x^2}}, \quad \mathcal{U}_1 = \frac{A_{20}+A_{22}\,x^2}{\sqrt{l^2-x^2}}, \tag{10 a}$$

$$A_{20} = -\frac{2l^2}{\pi}\cdot\frac{w_{10}\cdot\pi\,(1-B^2l^2)+w_{01}\cdot[E(k)-B^2l^2K(k)]}{(1-2\,B^2l^2)\,E(k)+B^2l^2\,K(k),}, \tag{10 b}$$

$$A_{22} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{w_{10}\cdot\pi\,(1-B^2l^2)+2w_{01}\cdot B^2l^2\,[E(k)-K(k)]}{(1-2B^2l^2)\,E(k)+B^2l^2\,K(k),}, \tag{10 c}$$

$$B = \sqrt{M_\infty^2-1},\ k = \sqrt{1-B^2l^2},\ w = w_{10}x_1 + w_{01}x_2, \tag{10 d}$$

unde w_{01} şi w_{10} sînt coeficienţii vitezei verticale, iar $K(k)$ şi $E(k)$ sînt integralele eliptice de speţa întîia şi a doua, avînd modulul k dat de (10 d).

Vom obţine, aplicînd formulele (7) şi (8 a), respectiv

$$\frac{1}{x_1}\Phi_1 = \frac{\alpha U_\infty}{E(k)}\operatorname{Re}\sqrt{l^2-x^2}, \tag{11 a}$$

$$\frac{1}{x_1^2}\Phi_2 = -\operatorname{Re}\frac{1}{2l^2}\left[A_{20}\sqrt{l^2-x^2}+\left(\frac{A_{20}}{l}+2A_{22}l\right)x^2\tanh^{-1}\frac{l}{\sqrt{l^2-x^2}}\right]. \tag{11 b}$$

b. De asemenea, pentru o aripă delta cu incidența antisimetrică constantă (pe o parte $+\alpha$, pe cealaltă parte $-\alpha$), vom avea în mod analog

$$\mathcal{U}_0 = \frac{2\alpha U_\infty l}{\pi} \cdot \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad \frac{1}{x_1}\Phi_1 = \mathrm{Re}\frac{2\alpha U_\infty}{\pi} x \ln \frac{l + \sqrt{l^2 - x^2}}{2lx}. \tag{12}$$

c. Dacă aripa delta are borduri supersonice, vom scrie succesiv

$$\mathcal{U}_0 = \frac{2\alpha U_\infty}{\pi} \frac{l}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}} \cos^{-1} \sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2(l^2 - x^2)}}, \tag{13 a}$$

$$\frac{1}{x_1}\Phi_1 = \mathrm{Re}\frac{2\alpha U_\infty}{\pi} \frac{l}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}} \left[\cos^{-1}\sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2(l^2 - x^2)}} - \frac{x}{l}\cos^{-1}\sqrt{\frac{l^2(1 - B^2 x^2)}{l^2 - x^2}}\right]. \tag{13 b}$$

Putem multiplica exemplele și pentru mișcările conice de ordin superior; am ales numai cîteva exemple pentru a defini mai tîrziu *potențialul cvasiconic.*

REMARCĂ. În cazul aripii de grosime simetrică, cu borduri subsonice sau supersonice, vom putea scrie, în loc de (13 b),

$$\frac{1}{x_1}\Phi_1 = \mathrm{Re}\frac{2\alpha U_\infty}{\pi} \frac{l}{\sqrt{1 - B^2 l^2}} \left[\cosh^{-1}\sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2(l^2 - x^2)}} - \frac{x}{l}\cosh^{-1}\sqrt{\frac{l^2(1 - B^2 x^2)}{l^2 - x^2}}\right]. \tag{14}$$

2. EXEMPLE DE APLICAȚIE A POTENȚIALULUI CONIC

Putem rezolva anumite probleme prin aplicarea potențialului conic; în acest sens vom da un exemplu simplu. Să revenim la expresia (11 *a*) și să remarcăm că aceasta este similară cu potențialul unei plăci plane de lărgime $2b$ într-un curent vertical normal pe placă. Singura deosebire este că planul $x = \eta + i\zeta$, definit mai sus (8), este diferit de cel real Oyz, în care coordonatele sînt y și z.

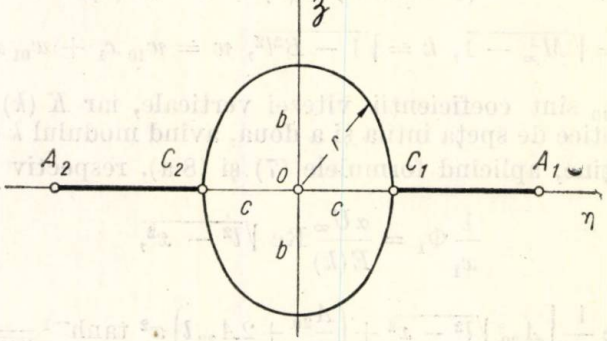


Fig. 3

Să considerăm acum urma în planul x_1 a unui sistem aripă-fuzelaj conic (fig. 3). Potenţialul care reprezintă mişcarea conică în jurul acestui sistem este uşor de stabilit.

Într-adevăr, din ecuaţia de compatibilitate (2), făcînd ipoteza că Bc este mică, vom putea scrie în vecinătatea cercului

$$\mathrm{d}\,(v_0 + \mathrm{i}v_0') = \frac{-\,\mathrm{id}\,(w_0 + \mathrm{i}w_0')}{\sqrt{1 - B^2x^2}} \approx \mathrm{d}\,(-\mathrm{i}w_0 + w_0'), \tag{15}$$

de unde deducem

$$v_0' = -\,w_0. \tag{16}$$

Rezultă, prin urmare, pentru punctele din jurul cercului

$$\mathcal{O}_0 = v_0 - \mathrm{i}w_0 = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}, \tag{17}$$

unde F reprezintă potenţialul unei mişcări datorite unui curent vertical. Prin urmare, partea imaginară din F este nulă pe aripă şi pe fuzelaj; putem deci să-i aplicăm orice transformare conformă.

Să considerăm mai departe că în planul fizic fuzelajul conic este circular şi că cercul de rază c devine aproape exact o elipsă în planul $x = \eta + \mathrm{i}\zeta$, pentru care jumătate din baza mică este egală cu c, iar jumătate din baza mare este, aplicînd (2),

$$b = \frac{c}{\sqrt{1 - B^2c^2}}. \tag{18}$$

Utilizînd apoi transformarea

$$X = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4q^2}}{2} + \frac{2a^2}{x + \sqrt{x^2 + 4q^2}}, \tag{19}$$

unde

$$2a^2 = c^2\,\frac{1 + \sqrt{1 - B^2c^2}}{1 - B^2c^2}, \quad 2q^2 = c^2\,\frac{B^2c^2}{1 - B^2c^2}, \tag{20}$$

obţinem planul X. În acest plan, urma sistemului aripă-fuzelaj conic devine o linie dreaptă de lungime $2L$, unde

$$L = \frac{l + \sqrt{l^2 + 4q^2}}{2} + \frac{2a^2}{l + \sqrt{l^2 + 4q^2}}. \tag{21}$$

Punînd mai departe potenţialul Φ_1 (11 a) sub forma

$$\Phi_1 = \mathrm{Re}\; A_0\, x_1 \sqrt{L^2 - X^2} = \mathrm{Re}\; A_0 \sqrt{x_1^2\, L^2 - x_1^2\, X^2}; \tag{22}$$

şi derivînd în funcţie de x_1, vom găsi viteza axială de perturbaţie :

$$U_0 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} = \mathrm{Re}\ A_0 \frac{L^2 - X \dfrac{\partial (x_1 X)}{\partial x_1}}{\sqrt{L^2 - X^2}}. \tag{23}$$

Observînd acum că putem scrie

$$\mathrm{Re}\left(X \frac{\partial (x_1 X)}{\partial x_1} \right) = \mathrm{Re}\left[\frac{2 q^2 X}{\sqrt{x^2 + 4 q^2}} + \frac{4 a^2 X}{x + \sqrt{x^2 + 4 q^2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(1 - \frac{2 q^2}{x^2 + 4q^2 + x\sqrt{x^2 + 4q^2}} \right) \right] \approx \frac{2 a^2 X}{x \left(1 + \frac{q^2}{x^2} \right)} \times \tag{24}$$

$$\times \left[1 + \frac{q^2}{a^2} \frac{x^2 + q^2}{x^2 + 2 q^2} - \frac{q^2}{x^2 + 3 q^2} \right] = \frac{2 a^2 X f(x)}{x \left(1 + \frac{q^2}{x^2} \right)},$$

în care $f(x)$ reprezintă expresia din ultima paranteză dreaptă, viteza axială de perturbaţie (23) devine

$$U_0 = \mathrm{Re}\ A_0 \frac{L^2 - 2 a^2 \dfrac{X}{x} \cdot \dfrac{f(x)}{1 + \dfrac{q^2}{x^2}}}{\sqrt{L^2 - X^2}}, \tag{25}$$

în care X va fi înlocuit prin expresia sa din (19), iar L prin cea din (21). Constanta A_0 va fi determinată în condiţiile sistemului aripă-fuzelaj.

Dacă considerăm că Bc este foarte mic,

$$B^2 c^2 \ll 1, \tag{26}$$

atunci

$$q^2 \approx 0, \quad a^2 \approx c^2. \tag{27}$$

Prin urmare, elipsa devine aproximativ un cerc şi vom putea pune

$$X = x + \frac{c^2}{x}, \quad L = l + \frac{c^2}{l}. \tag{28}$$

În cele din urmă, în locul lui (25), obţinem

$$\mathcal{U}_0 = A_0 \frac{L^2 - 2 c^2 \dfrac{X}{x}}{\sqrt{L^2 - X^2}} = a_0 \frac{1 + \dfrac{c^4}{l^4} - 2 \dfrac{c^4}{l^4} \cdot \dfrac{l^2}{x^2}}{\sqrt{(x^2 - l^2)\left(1 - \dfrac{c^4}{l^4} \cdot \dfrac{l^2}{x^2} \right)}}; \tag{29}$$

astfel am regăsit soluţia stabilită anterior pe altă cale [2].

3. MIŞCĂRI CVASICONICE

În mişcările conice, bordurile de atac sînt linii drepte prin ipoteză, iar variaţia lui b, care reprezintă jumătate din anvergura aripii într-o secţiune oarecare x_1, este liniară :

$$b = lx_1, \quad l = \text{const.} \tag{30}$$

Dacă bordurile de atac sînt curbe, atunci l este variabil în funcţie de x_1, iar b va avea o expresie neliniară în funcţie de x_1 (fig. 4) :

$$l = l(x_1), \quad b = x_1 l(x_1), \quad b = b(x_1). \tag{31}$$

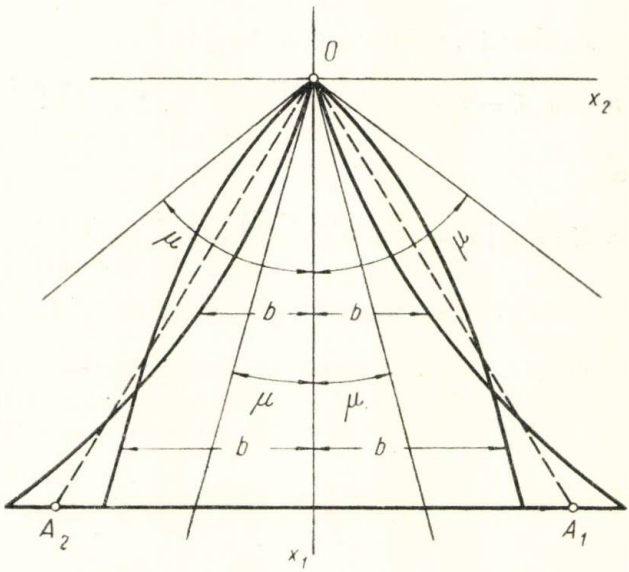


Fig. 4

a. Să presupunem că b variază uşor în jurul unei linii drepte ; în acest caz, introducînd în (11 a), vom obţine o expresie puţin diferită de potenţialul conic, şi pentru acest motiv îl vom denumi *potenţial cvasiconic*,

$$\Phi_1^* = \frac{\alpha U_\infty}{E(k)} \operatorname{Re} \sqrt{x_1^2 l^2 - x_1^2 x^2} = \frac{\alpha U_\infty}{E(k)} \operatorname{Re} \sqrt{b^2 - x_1^2 x^2}. \tag{32}$$

Prin analogie cu metoda utilizată în mişcarea laterală a carenelor alungite, vom proceda în acelaşi mod, derivînd expresia de mai sus în funcţie de x_1, obţinînd astfel *viteza axială cvasiconică* :

$$u^* = \frac{\partial \Phi_1^*}{\partial x_1} = \frac{\alpha U_\infty}{E(k)} \operatorname{Re} \frac{l}{\sqrt{l^2 - x^2}} \left[\frac{db}{dx_1} - \frac{x_1}{E(k)} \frac{dE}{dx_1} \frac{l^2 - x^2}{l} \right], \tag{33}$$

unde

$$\frac{dE}{dx_1} = \frac{dE}{dk} \frac{dk}{dx_1} = \frac{(K(k) - E(k)) B^2 l}{1 - B^2 l^2} \frac{dl}{dx_1}, \quad (k = \sqrt{1 - B^2 l^2}). \tag{34}$$

Cînd b atinge valoarea sa maximă, primul termen din paranteză se anulează ; în acest fel bordul încetează să fie bord de atac şi devine bord de fugă, ceea ce corespunde de altfel cu teoria bordului de fugă în sensul concepţiei lui Jukowski.

Să considerăm că înălţimea aripii nu depăşeşte valoarea lui x_1, care corespunde cu b maximum şi cu bordul de fugă limită.

b. Să ne referim acum la aripa delta cu fuzelaj conic, pentru care am stabilit mai sus potenţialul conic în planul X (22) şi de asemenea expresia generală a vitezei. Dacă secţiunea fuzelajului variază după o lege oarecare

$$c = c\,(x_1), \tag{35}$$

atunci vom scrie succesiv, ţinînd seama de (28),

$$b = x_1 L = x_1\left(l + \frac{[c\,(x_1)]^2}{l}\right), \quad \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x_1} = L + \frac{x_1}{l}\frac{\mathrm{d}c^2}{\mathrm{d}x_1} \tag{36}$$

şi de asemenea,

$$x_1 X = x_1\left(x + \frac{c^2}{x}\right), \quad \frac{\partial\,(x_1 X)}{\partial x_1} = \frac{2\,c^2}{x} + \frac{x_1}{x}\frac{\mathrm{d}c^2}{\mathrm{d}x_1}. \tag{37}$$

Introducînd în (22), obţinem viteza axială de perturbaţie u^*, derivînd în funcţie de x_1.

c. Să considerăm acum o aripă de grosime simetrică cu bordurile curbe. Ţinînd seama de variaţia lui l şi b (31), vom pune mai întîi potenţialul cvasiconic sub o formă convenabilă, plecînd de la forma (14),

$$\Phi_1^* = \mathrm{Re}\,\frac{2\alpha U_\infty}{\pi}\left\{\frac{b}{\sqrt{1 - B^2 l^2}}\cos\mathrm{h}^{-1}\sqrt{\frac{1 - B^2 x^2}{B^2\,(l^2 - x^2)}} - \right.$$
$$\left. - \frac{x_1\,x}{\sqrt{1 - B^2\,l^2}}\cos\mathrm{h}^{-1}\sqrt{\frac{l^2\,(1 - B^2\,x^2)}{l^2 - x^2}}\right\}. \tag{38}$$

Derivînd în raport cu x_1, vom găsi viteza axială de perturbaţie

$$U^* = \mathrm{Re}\,\frac{2\,\alpha\,U_\infty}{\pi}\cdot\frac{l}{\sqrt{1 - B^2\,l^2}}\cos\mathrm{h}^{-1}\sqrt{\frac{1 - B^2\,x^2}{B^2(l^2 - x^2)}} +$$
$$+ \mathrm{Re}\,\frac{2\,\alpha\,U_\infty}{\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - B^2\,l^2}}\left[\cos\mathrm{h}^{-1}\sqrt{\frac{1 - B^2\,x^2}{B^2(l^2 - x^2)}} - \right.\right. \tag{39 a}$$
$$\left.\left. - B^2\,l\,x\cos\mathrm{h}^{-1}\sqrt{\frac{l^2\,(1 - B^2\,x^2)}{l^2 - x^2}} - \sqrt{1 - B^2\,x^2}\right]\right\}\frac{x_1}{1 - B^2\,l^2}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x_1},$$

$$x_1\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x_1} - l, \tag{39 b}$$

care se reduc la (13 a) dacă l este constant.

Pe de altă parte, vom remarca că expresia (39 a) se aplică pînă la $\frac{db}{dx_1} = 0$, după care acest termen continuă să fie nul, deoarece bordul de atac devine bord de fugă şi cel de-al doilea termen din (39 b) se reduce la $-l$.

Formulele de mai sus sînt valabile şi în cazul bordurilor supersonice. În acest caz însă este bine să scriem expresia de mai sus făcînd înlocuirea

$$\frac{\cos h^{-1} \beta}{\sqrt{1 - B^2 l^2}} = \frac{\cos^{-1} \beta}{\sqrt{B^2 l^2 - 1}}, \tag{40}$$

care este valabilă în acelaşi timp şi pentru aripa subţire cu borduri supersonice.

Se pot multiplica exemplele, aplicînd potenţialul cvasiconic şi la alte sisteme, cum ar fi aripa cruciformă etc.

4. CONCLUZIE

Expunerea de mai sus se referă la o serie de probleme din mişcările *conice* şi *cvasiconice*, cu aplicaţii la formele actuale ale aripilor de avion sau ale sistemului aripă-fuzelaj, care sînt utilizate în construcţiile aeronautice. Pentru simplificare, prezentarea a fost succintă, mărginindu-se numai la o expunere de metodă şi de indicaţii, fără să se dezvolte toate aplicaţiile în cazul mişcărilor conice sau cvasiconice de ordin superior. În lucrările viitoare vom face o analiză mai aprofundată şi vom generaliza aplicaţiile pe o scară mai mare.

Primită la redacţie la 20 februarie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *High-Speed Aerodynamics*. Edit. tehnică, Bucureşti, 1956.
2. E. Carafoli, Dan Mateescu, *Ecoulement supersonique autour du système portant aile-fuselage conique*. Rev. Méc. Appl., IV, 3 (1959).

SCURGEREA SUPERSONICĂ ÎN JURUL ARIPII DELTA SUBȚIRI ÎN DERIVĂ

de E. CARAFOLI și SILVIA RĂDULESCU

Institutul de mecanica fluidelor „Traian Vuia"
al Academiei R.S.România

533

Se studiază influența derivei asupra caracteristicilor aerodinamice ale aripii delta subțiri în cazul scurgerilor conice de ordin superior.

Aplicînd metoda reziduurilor, se calculează coeficienții aerodinamici pentru aripa cu ambele borduri subsonice. Pentru aripa cu un bord subsonic și altul supersonic, ca și pentru cea cu ambele borduri supersonice, se dau numai coeficienții de ruliu și de girație, deoarece micile valori ale derivei au un efect neglijabil asupra coeficienților de portanță, rezistență și tangaj.

1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

În cele ce urmează vom considera o aripă delta subțire, de înălțime h și bază $2b$, raportată la un sistem de axe $o\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$. Fie

$$Z = Z(\xi_1, \xi_2) \tag{1}$$

cota suprafeței aripii. Presupunem că Z este funcție pară de ξ_2, deci suprafața este simetrică în raport cu planul $o\xi_1\ \xi_3$, așa cum se întîmplă în realitate.

Considerăm că aripa este în derivă, deci axa sa $o\xi_1$ face un unghi δ cu axa ox_1, care este dirijată după direcția vitezei U_∞ a curentului supersonic neperturbat (fig.).

Pentru a stabili influența deviației δ asupra caracteristicilor aerodinamice ale aripii sînt necesare expresiile vitezelor verticale de perturbație pe aripă în raport cu sistemul de axe $ox_1x_2x_3$. Ținînd seama că sistemul de axe $o\xi_1\ \xi_2$ este rotit cu un unghi δ față de sistemul ox_1x_2, rezultă că

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 19 Nr. 4 P. 991–1007 București 1965

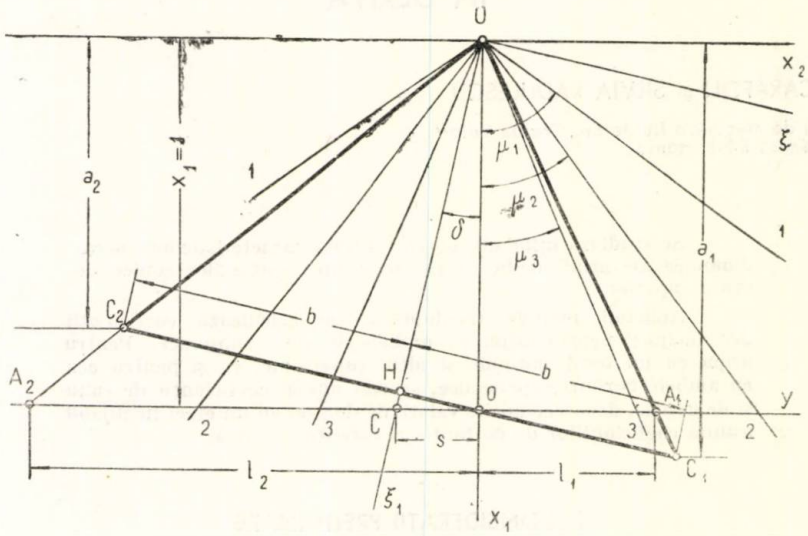
într-un punct $P(\xi_1, \xi_2)$ deviaţia τ a suprafeţei aripii în raport cu axa ox_1 este

$$\tau = \frac{\partial Z}{\partial x_1} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial Z}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1} = \tau' \cos \delta + \tau'' \sin \delta, \tag{2}$$

unde

$$\tau' = \frac{\partial Z}{\partial \xi_1}, \quad \tau'' = \frac{\partial Z}{\partial \xi_2} \tag{3}$$

sînt deviaţiile suprafeţei aripii în acelaşi punct pentru $\delta = 0$.



Deci deviaţia totală τ în noua poziţie a aripii depinde atît de deviaţia longitudinală τ', cît şi de cea transversală τ'', considerate faţă de sistemul $o\xi_1\ \xi_2$.

Viteza verticală totală w va fi dată de

$$w = \tau\, U_\infty = w' \cos \delta + w'' \sin \delta. \tag{4}$$

Înlocuind mai departe ξ_1 şi ξ_2 prin valorile respective în funcţie de x_1 şi x_2, obţinem pentru aripa componentă de ordinul n şi pentru aripa complexă drept condiţii la limită expresiile următoare [1]:

$$w_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} w_{n-k-1,\,k}\, y^k, \tag{5 a}$$

$$w = \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} w_{n-k-1,\,k}\ y^k = \sum_{n=1}^{N} x_1^{n-1}\, w_{n-1}. \tag{5 b}$$

Considerăm planul fizic oyz normal pe axa ox_1 la distanța $x_1 = 1$. Intersecțiile axei oy cu laturile OC_1 și OC_2 ne vor da l_1 și l_2, pentru care putem scrie

$$l_1 = \frac{b - \sin\delta}{\cos\delta + b\,\mathrm{tg}\,\delta}, \quad l_2 = \frac{b + \sin\delta}{\cos\delta - b\,\mathrm{tg}\,\delta}. \tag{6}$$

Înălțimea și suprafața aripii sînt date de

$$h = \cos\delta, \quad S = b\cos\delta. \tag{7}$$

În continuare ne vom referi la un plan $x = \eta + i\zeta$, obținut din planul fizic prin aplicarea unei transformări geometrice similare cu cea a lui Busemann:

$$\eta = \frac{y}{1 - B^2 z^2}, \quad \zeta = \frac{z\sqrt{1 - B^2 r^2}}{1 - B^2 z^2}, \tag{8}$$

unde

$$r^2 = y^2 + z^2, \quad y = \frac{x_2}{x_1}, \quad z = \frac{x_3}{x_1}. \tag{9}$$

Acest plan are proprietatea de a reproduce la aceeași scară urma aripii din planul fizic. Componentele vitezei de perturbație, cea verticală w și cea axială u, sînt părțile reale ale unor funcții analitice

$$\frac{w}{x_1^{n-1}} = w_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} w_{n-k-1,\,k}\, y^k = \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{n-1} w_{n-k-1,\,k}\, x^k = \mathrm{Re}\ W_{n-1}, \tag{10a}$$

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = u_{n-1} = \mathrm{Re}\ U_{n-1}. \tag{10b}$$

II. POZIȚIA LATURILOR ARIPII FAȚĂ DE CONUL MACH

1. Cînd unghiul conului Mach este μ_1 (fig.), ambele borduri de atac ale aripii sînt subsonice. Expresia generală a funcției U_{n-1} corespunzătoare vitezei axiale (10 b) pentru aripa în derivă, în cazul cînd aceasta are o muchie OC, este

$$U_{n-1} = \sum_{q=0}^{n} \frac{A_{nq} x^q}{\sqrt{(l_1 - x)(l_2 + x)}} + \sum_{q=0}^{n-1} G_{nq}\, x^q\, \mathrm{ch}^{-1} \sqrt{\frac{(l_1 + s)(l_2 + x)}{(l_1 + l_2)(s + x)}}, \tag{11}$$

coeficienții G_{nq} fiind nuli cînd muchia OC nu există.

2. Cînd unghiul conului este μ_2, bordul OA_1 este subsonic, iar OA_2 este supersonic. Expresia funcției U_{n-1} pentru aripa în derivă cu muchia

OC este

$$U_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} A_{nq}\, x^q \sqrt{\frac{1+Bx}{B(l_1-x)}} + \\ + \sum_{q=0}^{n-1} H_{nq}\, x^q \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\frac{(l_1+l_2)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(l_2+x)}} + \\ + \sum_{q=0}^{n-1} G_{nq}\, x^q \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\frac{(l_1+s)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(s+x)}}, \tag{12}$$

unde de asemenea coeficienții G_{nq} sînt nuli cînd muchia OC nu există.

3. Cînd unghiul conului Mach este μ_3, ambele borduri de atac ale aripii sînt supersonice. Expresia funcției U_{n-1} corespunzătoare vitezei axiale de perturbație pentru aripa în derivă cu muchia OC este

$$U_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} K_{nq}\, x^q \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\frac{(1+Bl_1)(1-Bx)}{2B(l_1-x)}} + \\ + \sum_{q=0}^{n-1} H_{nq}\, x^q \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1+Bx)}{2B(l_2+x)}} + \\ + \sum_{q=0}^{n-1} G_{nq}\, x^q \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{\frac{(1+Bs)(1+Bx)}{2B(s+x)}} + \\ + \sum_{q=0}^{n-2} D_{nq}\, x^q \sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2}}. \tag{13}$$

Dacă muchia OC nu există, coeficienții G_{nq} dispar.

III. CONSIDERAȚII ASUPRA FORMULELOR COEFICIENȚILOR AERODINAMICI

1. *Coeficientul de portanță* este dat de

$$C_l^{(n)} = \frac{4}{(n+1)\,SU_\infty} \int_{-l_2}^{l_1} \frac{u_{n-1}}{(1-y\operatorname{tg}\delta)^{n+1}}\,\mathrm{d}y. \tag{14}$$

Aplicînd metoda reziduurilor [1]), obținem

$$C_l^{(n)} = \frac{2}{(n+1)\,SU_\infty} \operatorname{Re} \oint_\gamma \frac{U_{n-1}}{(1-x\operatorname{tg}\delta)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \\ = (-1)^n \operatorname{Im} \frac{4\pi(\operatorname{ctg}\delta)^{n+1}}{(n+1)!\,SU_\infty} \left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(U_{n-1})\right]_{x=\operatorname{ctg}\delta}, \tag{15}$$

[1]) E. Carafoli, *Aplicarea metodei reziduurilor la calculul caracteristicilor aerodinamice ale aripilor triunghiulare în curent supersonic*, București, 1963 (nepublicată).

unde γ este un cerc cu centrul în punctul $x = \operatorname{ctg} \delta$, în interiorul căruia funcția $\dfrac{U_{n-1}}{(1 - x \operatorname{tg} \delta)^{n+1}}$ nu mai are alte puncte singulare.

Coeficientul de portanță al aripii complexe va fi

$$C_l = \sum_{n=1}^{n} C_l^{(n)}. \tag{16}$$

2. *Coeficientul rezistenței de undă.* În cazul aripii complexe, pentru calculul coeficientului rezistenței de undă C_d vor trebui calculați coeficienții $C_{dm}^{(n)}$ care se referă la aripa de ordinul n, datorită vitezei verticale corespunzătoare aripii de ordinul m. În mod similar, problema se reduce la aflarea unui reziduu în punctul $x = \operatorname{ctg} \delta$:

$$C_{dm}^{(n)} = (-1)^{m+n} \operatorname{Im} \frac{4\pi (\operatorname{ctg} \delta)^{m+n}}{(m+n)!\, SU_\infty^2} \left[\frac{\mathrm{d}^{m+n-1}}{\mathrm{d}x^{m+n-1}} (U_{n-1}\, W_{m-1}) \right]_{x=\operatorname{ctg}\delta}, \tag{17 a}$$

$$C_d = \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} C_{dm}^{(n)}. \tag{17 b}$$

Pentru o singură aripă izolată de ordinul n, vom pune $m = n$.

Menționăm că atunci cînd aripa are o muchie nu mai este indicat să se aplice metoda reziduurilor, deoarece expresia funcției analitice a cărei parte reală pe aripă este w_{n-1} devine foarte complicată. Pentru acest caz vom da direct formula coeficientului :

$$C_{dm}^{(n)} = -\frac{4}{(m+n)\, SU_\infty^2} \int_{-l_2}^{l_1} \frac{u_{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,\,k} y^k \right)}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)^{m+n}} \mathrm{d}y. \tag{18}$$

3. *Coeficienții de sucțiune.* După cum se știe, efectul forțelor de sucțiune apare numai la bordurile subsonice și, în cazul derivei, este complet : forță de propulsie, forță laterală și moment de girație.

Observăm că avem (fig.)

$$a_1 = h \cos \delta + b \sin \delta, \quad a_2 = h \cos \delta - b \sin \delta. \tag{19}$$

Coeficientul forței de propulsie va fi dat pentru bordul de atac OC_1 și, respectiv, pentru bordul de atac OC_2 de formulele

$$\sigma_{1m}^{(n)} = -\frac{2\pi \sqrt{1 - B^2 l_1^2}}{(m+n)\, l_1 (l_1 + l_2)\, SU_\infty^2} \left[\left(\sum_{k=0}^{m} A_{mk}\, l_1^k \right) \left(\sum_{q=0}^{n} A_{nq}\, l_1^q \right) \right] a_1^{m+n}, \tag{20 a}$$

$$\sigma_{2m}^{(n)} = -\frac{2\pi \sqrt{1 - B^2 l_2^2}}{(m+n)\, l_2 (l_1 + l_2)\, SU_\infty^2} \left[\left(\sum_{k=0}^{m} A_{mk} (-l_2)^k \right) \left(\sum_{q=0}^{n} A_{nq} (-l_2)^q \right) \right] a_2^{m+n}, \tag{20 b}$$

iar pentru aripa complexă

$$\sigma_1 = \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \sigma_{1m}^{(n)}, \quad \sigma_2 = \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \sigma_{2m}^{(n)}. \tag{21}$$

Coeficienţii fiecărei aripi izolate se obţin pentru $m = n$.

Coeficienţii τ ai forţei laterale de sucţiune se deduc din coeficienţii (20), aplicînd formulele

$$\tau_{1m}^{(n)} = -\frac{1}{l_1}\sigma_{1m}^{(n)}, \quad \tau_{2m}^{(n)} = \frac{1}{l_2}\sigma_{2m}^{(n)} \tag{22 a}$$

$$\tau_m^{(n)} = -\frac{1}{l_1}\sigma_{1m}^{(n)} + \frac{1}{l_2}\sigma_{2m}^{(n)}. \tag{22 b}$$

Coeficienţii momentului de giraţie vor fi daţi pentru bordul de atac OC_1 şi, respectiv, pentru bordul de atac OC_2 de formulele

$$\gamma_{1m}^{(n)} = -\frac{m+n}{m+n+1}\frac{(1+l_1^2)\,a_1}{hl_1}\sigma_{1m}^{(n)} \tag{23 a}$$

$$\gamma_{2m}^{(n)} = \frac{m+n}{m+n+1}\frac{(1+l_2^2)\,a_2}{hl_2}\sigma_{2m}^{(n)}. \tag{23 b}$$

Pentru aripa complexă coeficientul total este

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \tag{24}$$

unde avem

$$\gamma_1 = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\gamma_{1m}^{(n)}, \quad \gamma_2 = \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\gamma_{2m}^{(n)}. \tag{25}$$

4. *Coeficientul momentului de ruliu.* Luînd drept lungime de referinţă înălţimea h a aripii delta ($h = \cos\delta$), coeficientul momentului de ruliu va fi dat pentru aripa izolată şi, respectiv, pentru aripa complexă de formulele

$$\mu_1^{(n)} = (-1)^{n+1}\,\mathrm{Im}\,\frac{4\pi(\operatorname{ctg}\delta)^{n+2}}{(n+2)!\;hSU_\infty}\left[\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(x\,U_{n-1})\right]_{x=\operatorname{ctg}\delta} \tag{26 a}$$

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{N}\mu_1^{(n)}. \tag{26 b}$$

5. *Coeficientul momentului de tangaj.* Pentru aripa izolată de ordinul n, precum şi pentru aripa complexă, coeficientul momentului de tangaj este dat de

$$\mu_2^{(n)} = (-1)^n\,\mathrm{Im}\,\frac{4\pi(\operatorname{ctg}\delta)^{n+2}}{(n+2)!\,h\,SU_\infty}\left[\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}(U_{n-1})\right]_{x=\operatorname{ctg}\delta} \tag{27 a}$$

$$\mu_2 = \sum_{n=1}^{N}\mu_2^{(n)}. \tag{27 b}$$

6. *Coeficientul momentului de girație.* Coeficienții $\mu_{3m}^{(n)}$ care se referă la aripa de ordinul n datorită vitezei verticale corespunzătoare aripii de ordinul m și coeficientul total μ_3 vor fi dați de formulele

$$\mu_{3m}^{(n)} = (-1)^{m+n} \operatorname{Im} \frac{4\pi (\operatorname{ctg} \delta)^{m+n+1}}{(m+n+1)!\, h\, SU_\infty^2} \left[\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}x^{m+n}} (xU_{n-1}\ W_{m-1}) \right]_{x=\operatorname{ctg}\delta} \tag{28 a}$$

$$\mu_3 = \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \mu_{3m}^{(n)}. \tag{28 b}$$

Remarcăm aici, ca și la calculul coeficientului rezistenței de undă, că nu mai este indicat să calculăm prin metoda reziduurilor în cazul cînd aripa are muchie, deoarece w_{n-1}, avînd expresii diferite de o parte și de alta a muchiei, este partea reală a unei funcții analitice foarte complicate. De aceea vom da direct formula acestui coeficient:

$$\mu_{3m}^{(n)} = \frac{4}{(m+n+1)\, SU_\infty^2} \int_{-l_2}^{l_1} \frac{u_{n-1} \left(\sum_{k=0}^{m-1} w_{m-k-1,\,k}\, y^{k+1} \right)}{(1 - y \operatorname{tg} \delta)^{m+n+1}} \mathrm{d}y. \tag{29}$$

IV. CARACTERISTICILE AERODINAMICE ALE ARIPII SUBȚIRI CU AMBELE BORDURI SUBSONICE

Ținînd seama de expresia vitezei axiale de perturbație (11), în cele ce urmează vom da formulele generale de calcul a coeficienților aerodinamici, explicitînd valorile pentru $n = 1, 2$ în cazul aripii fără muchie.

Astfel am obținut:

1. *Coeficientul de portanță:*

$$C_l^{(n)} = (-1)^n \frac{4\pi}{(n+1)!\, SU_\infty} \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n} (n-p)!\, A_{nq}\, C_n^p\, C_q^{n-p} (\operatorname{ctg} \delta)^q F_1^{(p)}, \tag{30}$$

unde am pus

$$C_m^n = \frac{m(m-1) \ldots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \tag{31}$$

și

$$F_1^{(p)} = (-1)^p\, 2^{-2p}\, p! \sum_{r=0}^{p} C_{2r}^r\, C_{2(p-r)}^{p-r} (1 - l_1 \operatorname{tg} \delta)^{-p+r-\frac{1}{2}} (1 + l_2 \operatorname{tg} \delta)^{-r-\frac{1}{2}}. \tag{32}$$

Expresiile constantelor A_{nq} au fost calculate anterior [2]) și pentru $n = 1$ și $n = 2$ sînt reproduse în anexă.

[2]) Cornel Berbente, *Determinarea constantelor vitezei axiale de perturbație în cazul aripii triunghiulare nesimetrice cu bordurile de atac subsonice în curent supersonic*, București, 1960 (nepublicată).

Pentru $n = 1$ şi, respectiv, $n = 2$ obţinem

$$C_l^{(1)} = -\frac{2\pi}{SU_\infty}\,[A_{10}\,F_1^{(1)} + A_{11}\,\operatorname{ctg}\delta\,(F_1^{(0)} + F_1^{(1)})], \tag{33 a}$$

$$C_l^{(2)} = \frac{2\pi}{3\,SU_\infty}\,[A_{20}\,F_1^{(2)} + A_{21}\operatorname{ctg}\delta\,(2F_1^{(1)} + F_1^{(2)}) + A_{22}\operatorname{ctg}^2\delta\,(2F_1^{(0)} + 4\,F_1^{(1)} + F_1^{(2)})]. \tag{33 b}$$

2. *Coeficientul rezistenţei de undă* :

$$C_{dm}^{(n)} = (-1)^{m+n}\,\frac{4\pi}{(m+n)!\,SU_\infty^2}\times \tag{34}$$

$$\times \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{p=0}^{m+n-1}\sum_{q=0}^{n}(m+n-p-1)!\,A_{nq}\,w_{m-k-1,\,k}\,C_{m+n-1}^{p}\,C_{k+q}^{m+n-p-1}(\operatorname{ctg}\delta)^{k+q}F_1^{(p)}.$$

Pentru aripile izolate de ordinul 1 şi, respectiv, 2 avem

$$C_{d_1}^{(1)} = -\frac{w_{00}}{U_\infty}\,C_l^{(1)}, \tag{35 a}$$

$$C_{d_2}^{(2)} = \frac{\pi}{6\,SU_\infty^2}\,\{A_{20}\,w_{10}F_1^{(3)} + (A_{20}\,w_{01} + A_{21}\,w_{10})\,\operatorname{ctg}\delta\,[3F_1^{(2)} + F_1^{(3)}] + (A_{21}\,w_{01} + A_{22}\,w_{10})\,\operatorname{ctg}^2\delta\,[6\,F_1^{(1)} + 6F_1^{(2)} + F_1^{(3)}] + A_{22}w_{01}\,\operatorname{ctg}^3\delta\,[6\,F_1^{(0)} + 18\,F_1^{(1)} + 9F_1^{(2)} + F_1^{(3)}]\}. \tag{35 b}$$

Coeficienţii $C_{dm}^{(n)}$ care se referă la aripa de ordinul n, datorită vitezei verticale corespunzătoare aripii de ordinul m, vor fi pentru aripa complexă de ordinul 2

$$C_{d_1}^{(2)} = -\frac{w_{00}}{U_\infty}\,C_l^{(2)}, \tag{36 a}$$

$$C_{d_2}^{(1)} = -\frac{2\pi}{3\,SU_\infty^2}\,\{A_{10}\,w_{10}\,F_1^{(2)} + (A_{11}w_{10} + A_{10}w_{01})\,\operatorname{ctg}\delta\,[2F_1^{(1)} + F_1^{(2)}] + A_{11}w_{01}\,\operatorname{ctg}^2\delta\cdot[2F_1^{(0)} + 4\,F_1^{(1)} + F_1^{(2)}]\}. \tag{36 b}$$

3. *Coeficienţii forţelor şi momentelor de sucţiune* : Pentru bordul de atac OC_1, coeficienţii forţei de propulsie sînt

$$\sigma_{11}^{(1)} = -\frac{\pi a_1^2\sqrt{1 - B^2l_1^2}}{l_1\,(l_1 + l_2)\,SU_\infty^2}\,(A_{10} + A_{11}\,l_1)^2, \tag{37 a}$$

$$\sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{12}^{(1)} = -\frac{2\pi a_1^3\sqrt{1 - B^2l_1^2}}{3l_1\,(l_1 + l_2)\,SU_\infty^2}\,(A_{10} + A_{11}\,l_1)\,(A_{20} + A_{21}l_1 + A_{22}l_1^2), \tag{37 b}$$

$$\sigma_{12}^{(2)} = -\frac{\pi a_1^4\sqrt{1 - B^2l_1^2}}{2l_1\,(l_1 + l_2)\,SU_\infty^2}\,(A_{20} + A_{21}l_1 + A_{22}l_1^2)^2, \tag{37 c}$$

iar pentru bordul de atac OC_2 sînt

$$\sigma_{22}^{(2)} = -\frac{\pi a_2^4 \sqrt{1-B^2 l_2^2}}{2 l_2 (l_1 + l_2)\, SU_\infty^2} (A_{20} - A_{21} l_2 + A_{22} l_2^2)^2, \tag{38a}$$

$$\sigma_{21}^{(1)} = -\frac{\pi a_2^2 \sqrt{1-B^2 l_2^2}}{l_2 (l_1 + l_2)\, SU_\infty^2} (A_{10} - A_{11} l_2)^2, \tag{38b}$$

$$\sigma_{21}^{(2)} = \sigma_{22}^{(1)} = -\frac{2\pi a_2^3 \sqrt{1-B^2 l_2^2}}{3 l_2 (l_1 + l_2)\, SU_\infty^2} (A_{10} - A_{11} l_2)\,(A_{20} - A_{21} l_2 + A_{22} l_2^2). \tag{38c}$$

Mai departe, pentru aripa complexă obținem σ_1 și σ_2, însumînd coeficienții de mai sus conform formulelor (21).

Cunoscînd coeficienții forței de propulsie, obținem imediat coeficienții forței laterale de sucțiune și, respectiv, coeficienții momentului de girație prin aplicarea formulelor (22) și (23).

4. *Coeficientul momentului de ruliu* :

$$\mu_1^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{4\pi}{(n+2)!\, h\, SU_\infty} \sum_{p=0}^{n+1} \sum_{q=0}^{n} (n-p+1)! \times \times A_{nq} C_{n+1}^{p} C_{q+1}^{p+q-n} (\operatorname{ctg} \delta)^{q+1} F_1^{(p)}. \tag{39}$$

Pentru $n = 1$, respectiv $n = 2$, avem

$$\mu_1^{(1)} = \frac{2\pi \operatorname{ctg} \delta}{3\, h\, SU_\infty} \{A_{10} [2F_1^{(1)} + F_1^{(2)}] + A_{11} \operatorname{ctg} \delta \cdot [2F_1^{(0)} + 4F_1^{(1)} + F_1^{(2)}]\}, \tag{40a}$$

$$\mu_1^{(2)} = -\frac{\pi \operatorname{ctg} \delta}{6\, h\, SU_\infty} \{A_{20} [3F_1^{(2)} + F_1^{(3)}] + A_{21} \operatorname{ctg} \delta \cdot [6F_1^{(1)} + 6F_1^{(2)} + F_1^{(3)}] + + A_{22} \operatorname{ctg}^2 \delta \cdot [6F_1^{(0)} + 18F_1^{(1)} + 9F_1^{(2)} + F_1^{(3)}]\}. \tag{40b}$$

5. *Coeficientul momentului de tangaj* :

$$\mu_2^{(n)} = (-1)^n \frac{4\pi}{(n+2)!\, h\, SU_\infty} \sum_{p=0}^{n+1} \sum_{q=0}^{n} (n-p+1)!\, A_{nq} C_{n+1}^{p} C_q^{n-p+1} (\operatorname{ctg} \delta)^q F_1^{(p)}. \tag{41}$$

Pentru $n = 1$, respectiv $n = 2$, avem

$$\mu_2^{(1)} = -\frac{2\pi}{3\, h\, SU_\infty} \{A_{10} F_1^{(2)} + A_{11} \operatorname{ctg} \delta [2F_1^{(1)} + F_1^{(2)}]\}, \tag{42a}$$

$$\mu_2^{(2)} = \frac{\pi}{6\, h\, SU_\infty} \{A_{20} F_1^{(3)} + A_{21} \operatorname{ctg} \delta [3F_1^{(2)} + F_1^{(3)}] + + A_{22} \operatorname{ctg}^2 \delta [6F_1^{(1)} + 6F_1^{(2)} + F_1^{(3)}]\}. \tag{42b}$$

6. *Coeficientul momentului de giraţie*:

$$\mu_{3m}^{(n)} = (-1)^{m+n} \frac{4\pi}{(m+n+1)!\, h\, SU_\infty^2} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{p=0}^{m+n} \sum_{q=0}^{n} (m+n-p)!\, A_{nq}\, w_{m-k-1,k}\, C_{m+n}^{p}\, C_{k+q+1}^{m+n-p} (\operatorname{ctg}\delta)^{k+q+1} F_1^{(r)}. \quad (43)$$

Pentru aripile izolate de ordinul 1, respectiv 2, avem

$$\mu_{31}^{(1)} = \frac{2\pi w_{00} \operatorname{ctg}\delta}{3\, h\, SU_\infty^2} \{A_{10}[2F_1^{(1)} + F_1^{(2)}] + A_{11} \operatorname{ctg}\delta . [2F_1^{(0)} + 4F_1^{(1)} + F_1^{(2)}]\}, \quad (44\,a)$$

$$\mu_{32}^{(2)} = \frac{\pi \operatorname{ctg}\delta}{30\, h\, SU_\infty^2} \{A_{20} w_{10} [4F_1^{(3)} + F_1^{(4)}] +$$

$$+ \tfrac{1}{8}(A_{20} w_{01} + A_{21} w_{10}) \operatorname{ctg}\delta [12F_1^{(2)} + 8F_1^{(3)} + F_1^{(4)}] +$$

$$+ (A_{21} w_{01} + A_{22} w_{10}) \operatorname{ctg}^2\delta [24F_1^{(1)} + 36F_1^{(2)} + 12F_1^{(3)} + F_1^{(4)}] + \quad (44\,b)$$

$$+ A_{22} w_{01} \operatorname{ctg}^3\delta [24F_1^{(0)} + 96F_1^{(1)} + 72F_1^{(2)} + 16F_1^{(3)} + F_1^{(4)}]\}.$$

Coeficienţii $\mu_{3m}^{(n)}$ care se referă la aripa de ordinul n, datorită vitezei verticale corespunzătoare aripii de ordinul m, vor fi pentru aripa complexă de ordinul 2

$$\mu_{32}^{(1)} = -\frac{\pi \operatorname{ctg}\delta}{6\, h\, SU_\infty^2} \{A_{10} w_{10} [3F_1^{(2)} + F_1^{(3)}] +$$

$$+ (A_{10} w_{01} + A_{11} w_{10}) \operatorname{ctg}\delta [6F_1^{(1)} + 6F_1^{(2)} + F_1^{(3)}] +$$

$$+ A_{11} w_{01} \operatorname{ctg}^2\delta [6F_1^{(0)} + 18F_1^{(1)} + 9F_1^{(2)} + F_1^{(3)}]\}, \quad (45\,a)$$

$$\mu_{31}^{(2)} = -\frac{\pi w_{00} \operatorname{ctg}\delta}{6\, h\, SU_\infty^2} \{A_{20} [3F_1^{(2)} + F_1^{(3)}] +$$

$$+ A_{21} \operatorname{ctg}\delta [6F_1^{(1)} + 6F_1^{(2)} + F_1^{(3)}] +$$

$$+ A_{22} \operatorname{ctg}^2\delta [6F_1^{(0)} + 18F_1^{(1)} + 9F_1^{(2)} + F_1^{(3)}]\}. \quad (45\,b)$$

Observaţie. Dacă examinăm formulele coeficienţilor aerodinamici, constatăm că efectul derivei se manifestă astfel: în expresia coeficienţilor de portanţă, rezistenţă şi tangaj intervin numai puteri pare ale lui $\operatorname{tg}\delta$, iar în coeficienţii de ruliu şi giraţie numai puteri impare. Cum în general δ este mic, putem lua $\operatorname{tg}\delta \approx \delta$ şi putem neglija puterile lui δ începînd cu δ^2. În consecinţă, micile valori ale derivei au un efect neglijabil asupra coeficienţilor C_l, C_d, μ_2, cu atît mai mult cu cît aceşti coeficienţi au valori mari în poziţia iniţială. Influenţa derivei se manifestă numai în coeficienţii de ruliu şi giraţie, care sînt nuli în poziţia iniţială şi cresc proporţional cu δ.

Într-adevăr, coeficienții de ruliu, care au fost dați mai sus în formule complete cînd δ este mic, sînt

$$\mu_1^{(1)} = \frac{2\pi w_{00} b (1 + bB)}{U_\infty [(1 + bB)^2 E(k) - 2bBK(k)]} \cdot \delta, \tag{46 a}$$

$$\mu_1^{(2)} = -\frac{\pi w_{10} \delta}{2bU_\infty (e_{01} e_{12} e_{23} - e_{03} e_{12} e_{21})} [2(1 - b^2) e_{12} e_{23} + b^2 e_{03}(2e_{21} - e_{22}) - b^2 e_{23}(2e_{01} - e_{02}) - 3b^2 e_{03} e_{12}], \tag{46 b}$$

iar coeficienții de girație pentru aripile izolate sînt

$$\mu_{31}^{(1)} = \frac{2\pi w_{00}^2 b (1 + bB) \delta}{U_\infty^2 [(1 + bB)^2 E(k) - 2bBK(k)]}, \tag{47 a}$$

$$\mu_{32}^{(2)} = \frac{\pi w_{10}^2 \delta}{10 bU_\infty^2 (e_{01} e_{12} e_{23} - e_{03} e_{12} e_{21})} \{-4(2 - 3b^2) e_{12} e_{23} - 4b^2 [e_{12} e_{23} + e_{03}(2e_{21} - e_{22}) - e_{23}(2e_{01} - e_{02})] + 3b^2 (4 - b^2) e_{03} e_{12} + 3b^4 e_{03} e_{12}\}, \tag{47 b}$$

unde

$$k = \frac{1 - bB}{1 + bB} \tag{48}$$

și

$$e_{01} = \frac{B^2}{1 - b^2 B^2} [2K(k) + (1 + bB) E(k)], \tag{49 a}$$

$$e_{11} = \frac{2B^2 (1 + b^2)}{(1 + bB)(1 - bB)^2} [K(k) - E(k)], \tag{49 b}$$

$$e_{21} = -\frac{1}{1 - b^2 B^2} [2bBK(k) - (1 + bB) E(k)], \tag{49 c}$$

$$e_{02} = \frac{1}{1 + bB} \left[\frac{4B(1 + b^2)(5bB - b^2 B^2 - 3)}{b^3 (1 - bB)^2} K(k) + \frac{2(1 + b^2)(3 - 6b^2 B^2 + b^4 B^4)}{b^4 (1 - bB)^2} E(k) \right], \tag{49 d}$$

$$e_{12} = -\frac{2}{1 + bB} \left[\frac{2B(2 - 3bB + b^2 B^2)}{b(1 - bB)^2} K(k) - \frac{(1 + bB)(2 - b^2 B^2)}{b^2 (1 - bB)} E(k) \right], \tag{49 e}$$

$$e_{22} = \frac{4B^2(1+b^2)}{(1+bB)(1-bB)^2}[K(k) - E(k)], \tag{49 f}$$

$$e_{03} = 4b^2, \tag{49 g}$$

$$e_{13} = 8b^2(1+b^2), \tag{49 h}$$

$$e_{23} = 8b^4. \tag{49 i}$$

Avînd în vedere că în realitate unghiul de derivă este mic, consideraţiile de mai sus ne îndreptăţesc să calculăm în continuare numai coeficienţii momentelor de ruliu şi giraţie şi efectul sucţiunii pentru bordul subsonic al aripii în derivă cu un bord subsonic şi unul supersonic.

V. ARIPA SUBŢIRE CU UN BORD SUBSONIC ŞI ALTUL SUPERSONIC

Ţinînd seama de expresia vitezei axiale de perturbaţie (12), vom da formulele generale de calcul al efectului sucţiunii pentru bordul subsonic, precum şi al coeficienţilor momentelor de ruliu şi de giraţie.

1. *Coeficienţii forţelor şi momentelor de sucţiune.* La bordul de atac subsonic apar forţele de sucţiune. Coeficienţii forţei de propulsie sînt

$$\sigma_{11}^{(1)} = -\frac{\pi a_1^2(1+Bl_1)\sqrt{1-B^2l_1^2}}{l_1 bBU_\infty^2 \cos\delta} A_{10}^2, \tag{50 a}$$

$$\sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{12}^{(1)} = -\frac{2\pi a_1^3(1+Bl_1)\sqrt{1-B^2l_1^2}}{3l_1 bBU_\infty^2 \cos\delta} A_{10}(A_{20}+A_{21}l_1), \tag{50 b}$$

$$\sigma_{12}^{(2)} = -\frac{\pi a_1^4(1+Bl_1)\sqrt{1-B^2l_1^2}}{2l_1 bBU_\infty^2 \cos\delta}(A_{20}+A_{21}l_1)^2. \tag{50 c}$$

Însumînd aceşti coeficienţi, obţinem coeficientul total al forţei de propulsie σ_1.

Cunoscînd coeficienţii forţei de propulsie, coeficienţii forţei laterale de sucţiune se deduc imediat prin aplicarea formulelor (22).

Coeficienţii momentelor de giraţie datoriţi sucţiunii sînt

$$\gamma_{1m}^{(n)} = -\frac{m+n}{m+n+1}\frac{a_1(1+l_1^2)}{hl_1}\sigma_{1m}^{(n)}. \tag{51}$$

Coeficientul total al momentului de giraţie datorit sucţiunii va fi dat de suma coeficienţilor $\gamma_{1m}^{(n)}$.

2. *Coeficientul momentului de ruliu:*

$$\mu_1^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{4\pi}{(n+2)!\,hSU_\infty} \times$$

$$\times\left\{\sum_{p=0}^{n+1}\sum_{q=0}^{n-1}(n-p+1)!\,A_{nq}C_{n+1}^{p}C_{q+1}^{p+q-n}(\operatorname{ctg}\delta)^{q+2}F_2^{(p)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=0}^{n+1}\sum_{q=0}^{n-1}(n-p+1)!\,H_{nq}C_{n+1}^{p}C_{q+1}^{p+q-n}(\operatorname{ctg}\delta)^{q+1}F_3^{(p)}\right\}, \tag{52}$$

unde

$$F_2^{(p)} = (-1)^{p-1}\, 2^{-2p}\, p\,!\, \sum_{q=0}^{p} (2q-1)^{-1}\, B^{q-\frac{1}{2}}\, C_{2q}^{q}\, C_{2p-2q}^{p-q} \times$$

$$\times\, (1 - l_1 \operatorname{tg}\delta)^{-p+q-\frac{1}{2}}\, (B + \operatorname{tg}\delta)^{-q+\frac{1}{2}}, \tag{53}$$

$$F_3^{(p)} = (-1)^{p}\, (p-1)\,!\, \sqrt{(l_1+l_2)\,(Bl_2-1)} \sum_{q=0}^{p-1} \sum_{r=0}^{q} 2^{-2p+2r+1}\, B^{p-q-1}\, C_{2q-2r}^{q-r} \times$$

$$\times\, C_{2p-2q-2}^{p-q-1}\, (1 - l_1 \operatorname{tg}\delta)^{-q+r-\frac{1}{2}}\, (1 + l_2 \operatorname{tg}\delta)^{-r-1}\, (B + \operatorname{tg}\delta)^{-p+q+\frac{1}{2}}. \tag{54}$$

Expresiile constantelor A_{nq} și H_{nq} se găsesc în lucrarea [2]. Pentru $n = 1$, respectiv 2, obținem

$$\mu_1^{(1)} = \frac{2\pi \operatorname{ctg}\delta}{3h\, S\, U_\infty} \{A_{10} \operatorname{ctg}\delta\, [2F_2^{(1)} + F_2^{(2)}] + H_{10}\, [2F_3^{(1)} + F_3^{(2)}]\}, \tag{55 a}$$

$$\mu_1^{(2)} = -\frac{\pi \operatorname{ctg}\delta}{6h\, S\, U_\infty} \{A_{20} \operatorname{ctg}\delta\, [3F_2^{(2)} + F_2^{(3)}] + A_{21} (\operatorname{ctg}\delta)^2\, [6F_2^{(1)} +$$

$$+ 6F_2^{(2)} + F_2^{(3)}] + H_{20}\, [3F_3^{(2)} + F_3^{(3)}] + H_{21} \operatorname{ctg}\delta\, [6F_3^{(1)} + 6F_3^{(2)} + F_3^{(3)}]\}. \tag{55 b}$$

3. *Coeficientul momentului de girație*:

$$\mu_{3m}^{(n)} = (-1)^{m+n}\, \frac{4\pi}{(m+n+1)\,!\, h\, S\, U_\infty^2} \times$$

$$\times \left[\sum_{p=0}^{m+n} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{m-1} (m+n-p)\,!\; A_{nq}\, w_{m-r-1,\,r}\, C_{m+n}^{p}\, C_{q+r+1}^{m+n-p}\, (\operatorname{ctg}\delta)^{q+r+2}\, F_2^{(p)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=0}^{m+n} \sum_{q=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{m-1} (m+n-p)\,!\; H_{nq}\, w_{m-r-1,\,r}\, C_{m+n}^{p}\, C_{l+r+1}^{n+n-p}\, (\operatorname{ctg}\delta)^{q+r+1}\, F_3^{(p)} \right]. \tag{56}$$

Pentru aripile izolate de ordinul 1, respectiv 2, avem

$$\mu_{31}^{(1)} = \frac{2\pi\, w_{00} \operatorname{ctg}\delta}{3h\, S\, U_\infty^2} \{A_{10} \operatorname{ctg}\delta\, [2F_2^{(1)} + F_2^{(2)}] + H_{10}\, [2F_3^{(1)} + F_3^{(2)}]\}, \tag{57 a}$$

$$\mu_{32}^{(2)} = \frac{\pi \operatorname{ctg}\delta}{30h\, S\, U_\infty^2} \{A_{20}\, w_{10} \operatorname{ctg}\delta\, [4F_2^{(3)} + F_2^{(4)}] + (A_{21}\, w_{10} + A_{20}\, w_{01}) \times$$

$$\times (\operatorname{ctg}\delta)^2\, [12F_2^{(2)} + 8F_2^{(3)} + F_2^{(4)}] + A_{21}\, w_{01} (\operatorname{ctg}\delta)^3\, [24\, F_2^{(1)} + 36F_2^{(2)} +$$

$$+ 12F_2^{(3)} + F_2^{(4)}] + H_{20}\, w_{10}\, [4F_3^{(3)} + F_3^{(4)}] +$$

$$+ (H_{20}\, w_{01} + H_{21}\, w_{10}) \operatorname{ctg}\delta\, [12F_3^{(2)} + 8F_3^{(3)} + F_3^{(4)}] +$$

$$+ H_{21}\, w_{01}\, (\operatorname{ctg}\delta)^2\, [24F_3^{(1)} + 36F_3^{(2)} + 12F_3^{(3)} + F_3^{(4)}]\}. \tag{57 b}$$

Coeficienţii $\mu_{3m}^{(n)}$ care se referă la aripa de ordinul n, datorită vitezei verticale corespunzătoare aripii de ordinul m, vor fi pentru aripa complexă de ordinul 2

$$\mu_{31}^{(2)} = -\frac{\pi w_{00} \operatorname{ctg} \delta}{6h S U_\infty^2} \{A_{20} \operatorname{ctg} \delta \, [3F_2^{(2)} + F_2^{(3)}] +$$

$$+ A_{21} \operatorname{ctg}^2 \delta \, [6F_2^{(1)} + 6F_2^{(2)} + F_2^{(3)}] + H_{20} \, [3F_3^{(2)} + F_3^{(3)}] +$$

$$+ H_{21} \operatorname{ctg} \delta \, [6F_3^{(1)} + 6F_3^{(2)} + F_3^{(3)}]\}, \tag{58 a}$$

$$\mu_{32}^{(1)} = -\frac{\pi \operatorname{ctg} \delta}{6h S U_\infty^2} \{A_{10} w_{10} \operatorname{ctg} \delta \, [3F_2^{(2)} + F_2^{(3)}] +$$

$$+ A_{10} w_{01} \operatorname{ctg}^2 \delta \, [6F_2^{(1)} + 6F_2^{(2)} + F_2^{(3)}] + H_{10} w_{10} \, [3F_3^{(2)} + F_3^{(3)}] +$$

$$+ H_{10} w_{01} \operatorname{ctg} \delta \, [6F_3^{(1)} + 6F_3^{(2)} + F_3^{(3)}]\}. \tag{58 b}$$

VI. ARIPA SUBŢIRE CU AMBELE BORDURI SUPERSONICE

Avînd în vedere că expresia vitezei axiale de perturbaţie este (13), în cele ce urmează vom da formulele generale de calcul al coeficienţilor momentelor de ruliu şi de giraţie în cazul aripii fără muchie.

1. *Coeficientul momentului de ruliu* :

$$\mu_1^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{4\pi}{(n+2)! \, h S U_\infty} \times$$

$$\times \Bigg\{ \sum_{p=0}^{n+1} \sum_{q=0}^{n-1} (n-p+1)! \; K_{nq} C_{n+1}^{p} C_{q+1}^{p+q-n} \; (\operatorname{ctg} \delta)^{q+1} F_4^{(p)} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{n+1} \sum_{q=0}^{n-1} (n-p+1)! \; H_{nq} C_{n+1}^{p} C_{q+1}^{p+q-n} (\operatorname{ctg} \delta)^{q+1} F_5^{(p)} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{n+1} \sum_{q=0}^{n-2} (n-p+1)! \; D_{nq} C_{n+1}^{p} C_{q+1}^{p+q-n} (\operatorname{ctg} \delta)^{q+3} F_6^{(p)} \Bigg\}, \tag{59}$$

unde

$$F_4^{(p)} = (-1)^p (p-1)! \sqrt{B^2 l_1^2 - 1} \sum_{r=0}^{p-1} 2^{-r-1} B^{2r} C_{2r}^{r} (1 -$$

$$- l_1 \operatorname{tg} \delta)^{-p+r} (B^2 - \operatorname{tg}^2 \delta)^{-r-\frac{1}{2}}, \tag{60}$$

$$F_5^{(p)} = (-1)^p (p-1)! \sqrt{B^2 l_2^2 - 1} \sum_{r=0}^{p-1} 2^{-r-1} B^{2r} C_{2r}^{r} (1 +$$

$$+ l_2 \operatorname{tg} \delta)^{-p+r} (B^2 - \operatorname{tg}^2 \delta)^{-r-\frac{1}{2}}, \tag{61}$$

$$F_6^{(p)} = (-1)^p 2^{-p+1} B^{2p-1} (p-1)! \; C_{2p-2}^{p-1} (B^2 - \operatorname{tg}^2 \delta)^{-p+\frac{1}{2}}. \tag{62}$$

Expresiile constantelor K_{nq}, H_{nq} și D_{nq} pentru $n = 1$ și $n = 2$ se găsesc în lucrarea [2].

Pentru $n = 1$, respectiv $n = 2$, obținem

$$\mu_1^{(1)} = \frac{2\pi \operatorname{ctg} \delta}{3h\ SU_\infty} [K_{10}(2F_4^{(1)} + F_4^{(2)}) + H_{10}(2F_5^{(1)} + F_5^{(2)})], \tag{63 a}$$

$$\mu_1^{(2)} = -\frac{\pi \operatorname{ctg} \delta}{6h\ SU_\infty} [K_{20}(3F_4^{(2)} + F_4^{(3)}) + K_{21} \operatorname{ctg} \delta (6F_4^{(1)} + 6F_4^{(2)} + F_4^{(3)}) + H_{20}(3F_5^{(2)} + F_5^{(3)}) + H_{21} \operatorname{ctg} \delta (6F_5^{(1)} + 6F_5^{(2)} + F_5^{(3)}) + D_{20} \operatorname{ctg}^2 \delta (3F_6^{(2)} + F_6^{(3)})]. \tag{63 b}$$

2. *Coeficientul momentului de giratie*:

$$\mu_{3m}^{(n)} = (-1)^{m+n} \frac{4\pi}{(m+n+1)!\ h\ SU_\infty^2} \times$$

$$\times \left[\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{p=0}^{m+n} \sum_{q=0}^{n-1} (m+n-p)!\ K_{nq}\, w_{m-k-1,k}\, C_{m+n}^{p}\, C_{k+q+1}^{m+n-p} (\operatorname{ctg} \delta)^{k+q+1} F_4^{(p)} + \right. \tag{64}$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{p=0}^{m+n} \sum_{q=0}^{n-1} (m+n-p)!\ H_{nq}\, w_{m-k-1,k}\, C_{m+n}^{p}\, C_{k+q+1}^{m+n-p} (\operatorname{ctg} \delta)^{k+q+1} F_5^{(p)} +$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{p=0}^{m+n} \sum_{q=0}^{n-2} (m+n-p)!\ D_{nq}\, w_{m-k-1,k}\, C_{m+n}^{p}\, C_{k+q+1}^{m+n-p} (\operatorname{ctg} \delta)^{k+q+3} F_6^{(p)} \right].$$

Pentru aripile izolate de ordinul 1, respectiv 2, avem

$$\mu_{31}^{(1)} = \frac{2\pi\ w_{00} \operatorname{ctg} \delta}{3h\ SU_\infty^2} [K_{10}(2F_4^{(1)} + F_4^{(2)}) + H_{10}(2F_5^{(1)} + F_5^{(2)})], \tag{65 a}$$

$$\mu_{32}^{(2)} = \frac{\pi \operatorname{ctg} \delta}{30h\ SU_\infty^2} [K_{20} w_{10} (4F_4^{(3)} + F_4^{(4)}) +$$

$$+ (K_{20} w_{01} + K_{21} w_{10}) \operatorname{ctg} \delta (12F_4^{(2)} + 8F_4^{(3)} + F_4^{(4)}) +$$

$$+ K_{21} w_{01} \operatorname{ctg}^2 \delta (24F_4^{(1)} + 36F_4^{(2)} + 12F_4^{(3)} + F_4^{(4)}) +$$

$$+ H_{20} w_{10} (4F_5^{(3)} + F_5^{(4)}) + \tag{65 b}$$

$$+ (H_{20} w_{01} + H_{21} w_{10}) \operatorname{ctg} \delta (12F_5^{(2)} + 8F_5^{(3)} + F_5^{(4)}) +$$

$$+ H_{21} w_{01} \operatorname{ctg}^2 \delta (24F_5^{(1)} + 36F_5^{(2)} + 12F_5^{(3)} + F_5^{(4)}) +$$

$$+ D_{20} w_{10} \operatorname{ctg}^2 \delta (4F_6^{(3)} + F_6^{(4)}) + D_{20} w_{01} \operatorname{ctg}^3 \delta (12F_6^{(2)} +$$

$$+ 8F_6^{(3)} + F_6^{(4)})].$$

Coeficienții $\mu_{3m}^{(n)}$ care se referă la aripa de ordinul n, datorită vitezei verticale corespunzătoare aripii de ordinul m, vor fi pentru aripa complexă de ordinul 2

$$\mu_{31}^{(2)} = -\frac{\pi\, w_{00}\ \mathrm{ctg}\ \delta}{6h\ SU_\infty^2}\,[K_{20}\,(3F_4^{(2)} + F_4^{(3)}) +$$
$$+ K_{21}\ \mathrm{ctg}\ \delta\ (6F_4^{(1)} + 6F_4^{(2)} + F_4^{(3)}) +$$
$$+ H_{20}\ (3F_5^{(2)} + F_5^{(3)}) + \qquad (66\ a)$$
$$+ H_{21}\ \mathrm{ctg}\ \delta\,(6F_5^{(1)} + 6F_5^{(2)} + F_5^{(3)}) +$$
$$+ D_{20}\ \mathrm{ctg}^2\ \delta\,(3F_6^{(2)} + F_6^{(3)})],$$

$$\mu_{32}^{(1)} = -\frac{\pi\ \mathrm{ctg}\ \delta}{6h\ SU_\infty^2}\,[K_{10}\,w_{10}\ (3F_4^{(2)} + F_4^{(3)}) +$$
$$+ K_{10}\,w_{01}\ \mathrm{ctg}\ \delta\,(6F_4^{(1)} + 6F_4^{(2)} + F_4^{(3)}) + \qquad (66\ b)$$
$$+ H_{10}\,w_{10}\ (3F_5^{(2)} + F_5^{(3)}) +$$
$$+ H_{10}\,w_{01}\ \mathrm{ctg}\ \delta\,(6F_5^{(1)} + 6F_5^{(2)} + F_5^{(3)})].$$

ANEXĂ

Pentru $n = 1$:

$$A_{10} = -\frac{w_{00}\,l_1\,l_2\sqrt{(1 + Bl_1)\ (1 + Bl_2)}}{(1 + Bl_1)\ (1 + Bl_2)\ E(k) - B\,(l_1 + l_2)\ K(k)},$$

$$A_{11} = \frac{l_1 - l_2}{2l_1\,l_2}\,A_{10},$$

unde

$$k = \sqrt{\frac{(1 - Bl_1)\ (1 - Bl_2)}{(1 + Bl_1)\ (1 + Bl_2)}}.$$

Pentru $n = 2$:

$$A_{20} = \frac{w_{10}\,(a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22}) + 2w_{01}\,(a_{11}\,a_{23} - a_{13}\,a_{21})}{a_{01}\,(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{02}\,(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{03}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})},$$

$$A_{21} = \frac{w_{10}\,(a_{02}a_{23} - a_{03}a_{22}) + 2w_{01}\,(a_{01}a_{23} - a_{03}a_{21})}{a_{01}\,(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{02}\,(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{03}\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})},$$

$$A_{22} = \frac{w_{10}\,(a_{02}a_{13} - a_{03}a_{12}) + 2w_{01}\,(a_{01}a_{13} - a_{03}a_{11})}{a_{01}\,(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{02}\,(a_{11}\,a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{03}\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})},$$

unde

$$a_{01} = -\frac{1}{\sqrt{(1 + Bl_1)\,(1 + Bl_2)}}\,\frac{B^2}{(1 - Bl_1)\,(1 - Bl_2)}\,\{[B\,(l_1 + l_2) - 2]\,K(k) - (1 - B^2 l_1 l_2)\,E(k)\},$$

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{(1 + Bl_1)\ (1 + Bl_2)}}\,\frac{B^2\,(l_2 - l_1)}{(1 - Bl_1)\ (1 - Bl_2)}\,(K(k) - E(k)),$$

$$a_{21} = -\frac{1}{\sqrt{(1+Bl_1)(1+Bl_2)}} \frac{1}{(1-Bl_1)(1-Bl_2)} [B(l_1+l_2-2Bl_1l_2)K(k)-(1-B^2l_1l_2)E(k)],$$

$$a_{02} = \frac{1}{\sqrt{(1+Bl_1)(1+Bl_2)}} \left\{ \left[\frac{2B}{l_2^2(1-Bl_2)} - \frac{2B}{l_1^2(1-Bl_1)} - \frac{B(l_2^2-l_1^2)}{l_1^2 l_2^2} \right] K(k) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{l_2-l_1}{l_1^2 l_2^2}(1+Bl_1)(1+Bl_2) - \frac{2(1+Bl_1)}{l_2^2(l_1+l_2)(1-Bl_2)} + \frac{2(1+Bl_2)}{l_1^2(l_1+l_2)(1-Bl_1)} \right] E(k) \right\},$$

$$a_{12} = -\frac{2}{\sqrt{(1+Bl_1)(1+Bl_2)}} \left\{ \left[\frac{B(l_1+l_2)}{l_1 l_2} + \frac{B}{l_1(1-Bl_1)} + \frac{B}{l_2(1-Bl_2)} \right] K(k) - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{(1+Bl_1)(1+Bl_2)}{l_1 l_2} + \frac{1+Bl_1}{l_2(l_1+l_2)(1-Bl_2)} + \frac{1+Bl_2}{l_1(l_1+l_2)(1-Bl_1)} \right] E(k) \right\},$$

$$a_{22} = \frac{2}{\sqrt{(1+Bl_1)(1+Bl_2)}} \frac{B^2(l_2-l_1)}{(1-Bl_1)(1-Bl_2)} (K(k)-E(k)),$$

$$a_{03} = 3l_1^2 + 3l_2^2 - 2l_1 l_2,$$

$$a_{13} = 4l_1 l_2 (l_2 - l_1),$$

$$a_{23} = 8l_1^2 l_2^2.$$

Primită la redacție la 28 aprilie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Elie Carafoli, *Aerodinamica vitezelor mari*. Edit. Acad. R.P.R., București, 1957.
2. E. Carafoli, Ș. Săndulescu, *Caractéristiques aérodynamiques des ailerons ayant un mouvement oscillatoire harmonique en régime supersonique*. Revue de mécanique appliquée, **4**, 2 (1959).

PROGRESE RECENTE ÎN DINAMICA ZBORULUI
II. UNELE PROBLEME ACTUALE ALE TEORIEI STABILITĂŢII ŞI MANIABILITĂŢII AVIOANELOR[1])

de T. HACKER
Institutul de mecanica fluidelor „Traian Vuia" al Academiei R.S.România

Se trec în revistă unele probleme actuale şi metode de lucru din domeniul stabilităţii şi maniabilităţii avioanelor, legate de necesitatea considerării efectului comenzii (executate de pilot sau de o instalaţie automată).

INTRODUCERE ŞI UNELE CHESTIUNI GENERALE

În [1] au fost enumerate o seamă de probleme, rezultate, aspecte din domeniul teoriei stabilităţii şi maniabilităţii avionului, legate de noile cerinţe de exploatare şi de îmbunătăţirea considerabilă a unor performanţe (mărirea gamei de viteze şi altitudini). În continuare, în cele ce urmează vor fi schiţate unele probleme (multe dintre ele încă deschise) privind stabilitatea avionului ca obiect comandat.

Necesitatea considerării comenzilor în problemele de stabilitate a zborului a început să fie întrevăzută cu mulţi ani în urmă. Astfel, încă în 1938, V. S. Vedrov, în introducere la cartea sa *Stabilitatea dinamică a avionului*, scria: „Totuşi, la studierea teoriei stabilităţii dinamice îţi sare brusc în ochi un fapt interesant: o teorie atît de bine elaborată şi clară se aplică extrem de puţin în practica constructivă. La începutul

[1]) Din referatul prezentat la Conferinţa tehnică-ştiinţifică a ofiţerilor Comandamentului de apărare antiaeriană a teritoriului. Bucureşti, 3–5 XII, 1962 Publicată şi în „Rev. roum. sci.-tech. Mécanique Appliquée", **8**, *2* (1963) (în l. rusă).

perioadei de după război [2]), concluziile acestei teorii au influenţat într-o largă măsură formele generale ale avionului, totuşi în prezent ea nu este folosită aproape de loc în practică.

Prin ce se explică acest fenomen ciudat? După părerea noastră el este provocat în mare măsură de faptul că dezvoltarea teoriei stabilităţii dinamice a mers îndeosebi pe linia teoriei abstracte a stabilităţii, care nu ţine seama de natura fizică a cauzelor perturbatoare şi de acţiunea lor asupra avionului şi echipajului. Din această cauză, în momentul de faţă nu sîntem în stare totdeauna să răspundem la problema fundamentală : cum trebuie să fie un avion bun şi cum trebuie să fie caracteristicile de bază ale stabilităţii...

... Înseamnă oare aceasta că în prezent stabilitatea dinamică a avionului nu are nici o valoare practică? Hotărît nu. Această teorie, şi numai ea, constitue baza rezolvării problemelor de maniabilitate; apoi, numai cu ajutorul ei se rezolvă problemele de stabilitate a avionului cu autopilot, jucînd în prezent un rol important. În general, cîmpul de aplicare a teoriei stabilităţii dinamice este aproape nelimitat şi ea constituie principala bază în studierea problemelor de dinamica avionului " [2] p. 14—15.

Din acest lung citat rezultă că procesul de înnoire a teoriei stabilităţii zborului, care a ajuns într-o fază hotărîtoare numai în ultimii ani, a început încă în ajunul celui de-al doilea război mondial. Dezvoltarea ulterioară a acestei teorii a confirmat în întregime aserţiunile lui V. S. Vedrov. De aceea la examinarea stadiului actual al acestei discipline trebuie să se aibă în vedere trei aspecte de importanţă principială :

1. Necesitatea includerii, într-un fel sau altul, a efectului comenzilor în consideraţiile legate de calităţile de zbor, în general, şi de stabilitate, în particular.

2. Necesitatea construirii unor noi modele matematice care să ţină seama de consideraţiile ce au devenit esenţiale în dinamica zborului.

3. Utilizarea unei tehnici de calcul noi şi necesitatea trecerii la folosirea maşinilor de calcul şi în acest domeniu.

Simultan cu adaptarea teoriei la cerinţele tehnicii moderne devin inevitabile utilizarea unor noţiuni noi şi reformularea altora, existente în teoria clasică [3]).

Astfel, prima noţiune care necesită o precizare (şi lărgire a conţinutului) este însăşi noţiunea de stabilitate a avionului.

În teoria clasică, noţiunea de stabilitate dinamică (stabilitate a zborului) se foloseşte pentru desemnarea unei proprietăţi, destul de particulare, a avionului, care se referă la menţinerea fără intervenţia organelor de comandă a anumitor regimuri de zbor (a mişcării rectilinii uniforme, de obicei numai în regimul de croazieră) în două cazuri speciale : cu comenzile blocate şi cu comenzile libere în ipoteza unor perturbaţii

[2]) Se înţelege, este vorba despre primul război mondial.

[3]) Pentru comoditatea exprimării, în această lucrare se foloseşte termenul convenţional de *teoria clasică*, înţelegînd prin aceasta teoria stabilităţii dinamice a avionului în stadiul antebelic, aproximativ pînă în 1940 sau chiar mai tîrziu, însă care de fapt a fost elaborată în întregime chiar din 1935.

instantanee mici (stabilitatea în mic) [3] p. 113. Pentru obținerea unor informații calitative asupra stabilității zborului pentru avioanele utilizate în perioada corespunzătoare, această definiție a noțiunii de stabilitate a fost, în general, satisfăcătoare și corespundea stadiului în care se găsea teoria.

Din acest motiv nu s-au dat definiții mai largi, deși asemenea definiții au fost formulate demult în teoria matematică a stabilității mișcării [4]) sau în alte discipline, și formularea lor în perioada corespunzătoare nu prezenta nici un fel de dificultate. În prezent situația s-a schimbat, domeniul de aplicare a definiției de mai sus a devenit prea îngust atît din punctul de vedere al cerințelor tehnicii moderne, cît și în privința posibilităților teoretice existente. Astfel, în numeroase cazuri, nu mai este admis a se identifica stabilitatea avionului cu stabilitatea unui regim de zbor particular, așa cum se face în teoria clasică a stabilității dinamice. În prezent, calitatea de zbor a avionului numită stabilitate înseamnă comportarea lui în diferite situații de zbor, stabilitatea diferitelor mișcări de bază care caracterizează tipul corespunzător al avionului pentru diferite condiții de perturbare. Prin urmare, ca o primă observație, proprietatea generală numită stabilitate a avionului variază de la un tip de aparate la altul, și numai practica proiectării are ultimul cuvînt în a decide stabilitatea căror mișcări de bază particulare trebuie să intre în această noțiune de sinteză pentru fiecare aparat de zbor în parte.

În ceea ce privește definițiile stabilității diferitelor forme de mișcare a unui aparat de zbor, ele pot fi obținute prin particularizarea definiției celei mai generale a stabilității mișcării, adică a celei mai sărace în conținut, exprimînd o proprietate care leagă mișcarea dată de mișcările induse de diferite cauze perturbatoare. Pentru determinarea stabilității unei mișcări de bază particulare oarecare trebuie să se precizeze : 1) sistemul dinamic la care se referă mișcarea de bază și caracteristicile lui ; 2) natura, mărimea și durata de acțiune a cauzei perturbatoare ; 3) intervalul de timp pentru care se determină stabilitatea și 4) unele aspecte particulare impuse de caracterul problemei considerate privind relația dintre mișcarea de bază și mișcările perturbate corespunzătoare (unele date cantitative care caracterizează „apropierea" necesară, caracteristicile comportării asimptotice etc.).

---

[4]) Încă în antichitate, Aristotel și Arhimede au propus numeroase scheme privind proprietățile unor sisteme mecanice, care au căpătat mai tîrziu denumirea de stabilitate a echilibrului și stabilitatea mișcării. Este absolut evident că și asupra acestor definiții au influențat modelul fizic adoptat și metodele teoretice utilizate, totuși aplicațiile lor în general depășesc cadrul domeniilor inițiale. Multă vreme s-au folosit în multe domenii ale tehnicii, în particular în domeniul stabilității avionului, scheme, definiții și metode definite în lucrările lui E. I. Routh, care reprezintă o sinteză a cunoștințelor din domeniul stabilității mișcării pînă în 1877 (anul apariției lucrării lui Routh *Tratat de stabilitate a unei stări date a mișcării*). Alte scheme și metode corespunzătoare, de data aceasta riguros fundamentate, care și-au găsit și își mai găsesc încă o largă aplicare în numeroase probleme tehnice, aparțin lui H. Poincaré. Este suficient să amintim aplicarea metodei lui Poincaré în teoria vibrațiilor. Definirea noțiunii de stabilitate care, după părerea autorului, s-a dovedit a fi cea mai adecvată pentru problemele de dinamica zborului, precum și metodele de lucru, foarte fecunde și în același timp riguros fundamentate, sînt legate indiscutabil de numele lui A. M. Leapunov.

De asemenea trebuie să amintim că de obicei aceste definiții se referă nu la mișcările înseși, nu la însuși procesul considerat, ci la modelele matematice corespunzătoare. Altfel utilizarea lor în raționamente, în aplicații etc. practic ar fi imposibilă. Astfel, se vorbește despre stabilitatea unei mișcări ca despre o proprietate a parametrilor cinematici care caracterizează această mișcare [4], p. 215 sau se înlocuiește direct noțiunea de stabilitate a mișcării cu noțiunea de stabilitate a soluțiilor unor ecuații diferențiale, care reprezintă modelul matematic al mișcării reale [5]).

Unele observații în legătură cu problema construirii modelului matematic.

Problema care revine periodic în preocuparea cercetătorilor de dinamica și stabilitatea zborului este alegerea parametrilor esențiali pentru fiecare categorie de probleme în parte.

Aceasta se găsește într-o legătură evidentă cu construirea modelelor matematice adecvate și rămîne deocamdată, pentru categorii întregi de probleme esențialmente noi, una din cele mai importante probleme pentru cercetători.

Pentru a nu mai reveni la aceasta, vom aminti, de exemplu, că, în regimurile de viteză mică sau nulă, pentru avioanele cu decolare și aterizare verticală își pierd sensul unii parametri care se considerau esențiali în cazurile avioanelor obișnuite, cum ar fi : viteza de zbor, unghiul de incidență (pentru mișcarea longitudinală) sau de derapaj (pentru mișcarea laterală etc.), unghiul de incidență pentru vehiculele spațiale și alte aparate care zboară în straturile rarefiate ale atmosferei sau în afara ei ș.a. Problema înlocuirii acestor parametri de bază ai mișcării încă nu a fost rezolvată satisfăcător pentru toate cazurile. Astfel, de exemplu, în studiul comenzii atitudinii sateliților artificiali în spațiu rămîne nerezolvată alegerea variabilelor cinematice dependente, în special în cazul unor unghiuri de deplasare mari [5].

Totuși, problema construirii unor modele convenabile evident nu este epuizată prin găsirea parametrilor principali ai problemei. Acesta este primul pas. Să ne oprim puțin asupra problemei alegerii ipotezelor. Orice descriere dinamică este, inevitabil, o simplificare a problemei și este foarte important a găsi condițiile pentru care simplificarea corespunzătoare este admisibilă. În ultima parte a lucrării se va arăta cum unele cerințe noi legate de utilizarea diferitelor viteze de zbor, de tactica luptei aeriene moderne etc. sînt incompatibile cu utilizarea unor scheme care în trecut erau pe deplin satisfăcătoare. După cum s-a arătat, devine insuficient de efectivă studierea numai a unei singure clase înguste și foarte particulare de mișcări fundamentale (zborul uniform și rectiliniu cu organele de comandă blocate sau libere) ; în unele cazuri, neglijarea efectului giroscopic devine lipsită de sens, iar datorită apariției unor termeni de legătură apreciabili trebuie să se renunțe la studierea izolată a stabilității longitudinale și laterale etc.

O revizuire cu implicații importante a ipotezelor vechi este impusă de necesitatea includerii în considerațiile asupra stabilității zborului a

[5]) Uneori se păstrează termenul de stabilitate a mișcării de bază, însă se are în vedere, evident, o proprietate a soluției ecuațiilor mișcării perturbate.

efectului organelor de comandă (acţionate de pilot sau în mod automat). Considerarea acestui efect (adică renunţarea la schemele teoriei clasice: comandă blocată, comandă liberă) a dus la două modele principale. Unul, întrucîtva de compromis, corespunde schemei mişcărilor parţial controlate [6] şi [7], iar al doilea mai consecvent consideră avionul plus factorul stabilizator ca un sistem dinamic unic. Fiecare dintre aceste două modele are, firește, domeniul său optim de aplicare.

Partea I

UNELE ASPECTE ALE TEORIEI STABILITĂŢII ZBORULUI COMANDAT

1. PRIMUL MODEL. STABILITATEA MIŞCĂRILOR PARŢIAL CONTROLATE

Teoria stabilităţii mişcărilor parţial controlate (parţial reglate sau stabilizate) dă o schemă simplificată a cărei valabilitate este demonstrată riguros pentru o categorie vastă de probleme. Aplicarea ei este indicată în primul rînd în cazul cînd controlul parţial se realizează de către pilot, întrucît teoria dată nu necesită o descriere matematică riguroasă (modelare) a acţiunii regulatoare, care în cazul pilotajului manual nu se poate realiza cu suficientă precizie.

Prima schemă pentru teoria stabilităţii mişcărilor parţial controlate a fost propusă de S. Neumark [7]. Pe baza presupunerii că pilotul acţionează comenzile astfel încît una din variabilele dinamice ale ecuaţiilor mişcării perturbate sau o combinaţie liniară oarecare a lor să fie egală cu zero (sau să-şi păstreze o valoare constantă), ordinul sistemului de ecuaţii liniarizate al mişcării perturbate scade cu o unitate, iar în anumite cazuri mai mult decît cu o unitate.

Schema lui S. Neumark are meritul de a fi prima în această direcţie, însă valabilitatea ei este discutabilă în unele privinţe. Astfel, este foarte greu să se găsească cazurile reale din practica de zbor cărora să le corespundă cu suficientă precizie ipotezele: 1) păstrarea tot timpul a valorii nule sau constante a uneia din perturbaţii; 2) utilizarea în acest scop numai a unui singur organ de comandă (sau numai a profundorului sau numai a manetei de gaze) şi 3) acţiunea organului dat influenţează numai asupra unei ecuaţii a sistemului liniarizat (echivalent presupunerii că efectul comenzii este descris în ecuaţiile sistemului, cu excepţia uneia, de termeni al căror ordin de micime este de cel puţin 2).

Neajunsurile menţionate au fost eliminate în modelul descris mai jos [6].

Să facem la început cîteva observaţii. Începînd încă cu avionul fraţilor Wright, practica de proiectare a renunţat la crearea unor aparate total autostabile (formulă propusă de Cl. Ader şi chiar de O. Lilienthal), încredinţînd pilotului (sau mai tîrziu instalaţiilor de reglare automată) sarcina de a contribui la stabilizarea zborului cu ajutorul organelor de comandă. Pilotul îndeplineşte această sarcină prin mişcări reflexe uşoare şi de cele mai multe ori nu-şi dă seama de existenţa, de exemplu, a unei uşoare instabilităţi spirale laterale sau a unei instabilităţi oscilatorii

longitudinale în etapa fugoidă a mișcării libere. Acțiunea stabilizatoare a pilotului (sau a dispozitivelor de stabilizare artificială) trebuie să se mărginească, în general, doar la eliminarea componentelor relativ lente ale mișcării perturbate, în rest avionul trebuind să fie riguros stabil. Aceasta înseamnă că situația de zbor reală cea mai frecventă va fi următoarea : prin intervenția continuă a comenzilor, pilotul reușește să păstreze în limite admisibile și în cele din urmă să amortizeze o parte din variabilele dinamice ale ecuației mișcării perturbate, celelalte perturbații în acest caz rămînînd mărginite și amortizîndu-se datorită calităților inerente ale avionului. Prin urmare, în cazul stabilității mișcărilor parțial controlate, sistemul dinamic considerat este avionul în condițiile constrîngerii unei părți a componentelor perturbației.

Pentru teoria prezentată se admite ipoteza că forțele și momentele suplimentare care apar datorită intervenției stabilizatoare sînt mici împreună cu variabilele dinamice controlate.

Atunci modelul matematic care corespunde situației descrise va fi următorul.

Se consideră sistemul de ecuații al mișcării perturbate a avionului parțial controlat, scris sub forma

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(t,\ x,\ \xi),$$
$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} = \Xi(t,\ x,\ \xi), \tag{1}$$

cu $X(t, 0, 0) = 0$, $X(t, x, 0) = \overline{X}(t, x)$, unde x și ξ sînt vectori în general de dimensiuni diferite, ale căror componente sînt respectiv variabilele dinamice libere și constrînse, iar X și Ξ vectori de aceleași dimensiuni ca respectiv x și ξ, avînd drept componente funcții în general neliniare de x și ξ și care depind explicit și de variabila independentă.

Se consideră, de asemenea, ecuația vectorială

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \overline{X}(t,\ x), \tag{2}$$

denumită ecuație auxiliară.

Definiția 1. Soluția nulă a ecuației auxiliare (2) este stabilă în raport cu $\xi(t)$ dacă oricărui număr pozitiv ε îi corespund două funcții $\delta_1(\varepsilon)$ și $\delta_2(\varepsilon)$, astfel încît, dacă $|\xi(t)| < \delta_1(\varepsilon)$ pentru $t \geqslant t_0$ și $|x_0| < \delta_2(\varepsilon)$, atunci $|x^*(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ pentru $t > t_0$, unde $x^*(t, t_0, x_0)$ este soluția ecuației

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X[t,\ x,\ \xi(t)],$$

corespunzătoare condiției inițiale $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$.

Definiția 2. Soluția nulă a ecuației auxiliare (2) este asimptotic stabilă în raport cu $\xi(t)$, pentru $\lim_{t\to\infty} \xi(t) = 0$, dacă se îndeplinesc condițiile definiției 1 și, în plus, are loc relația

$$\lim_{t\to\infty} x^*(t, t_0, x_0) = 0.$$

A fost demonstrată următoarea

TEOREMĂ [6]). *Dacă soluția nulă a ecuației auxiliare (2) este uniform asimptotic stabilă, atunci ea este uniform asimptotic stabilă și în raport cu* $\xi(t)$ *dacă* $\lim \xi(t) = 0$.

Dacă pentru $t \to \infty$ $\xi(t)$ nu tinde către zero, atunci stabilitatea asimptotică uniformă a soluției nule a ecuației (2) atrage după sine, în general, stabilitatea neasimptotică în raport cu $\xi(t)$.

Cu ajutorul acestei teorii a fost studiată stabilitatea sistemului dinamic definit anterior (aparatul de zbor în condițiile constrîngerii unei părți a variabilelor dinamice) în diferite cazuri de comandă parțială. Astfel, s-a arătat că stabilitatea longitudinală poate fi asigurată pentru o gamă largă de regimuri de zbor, prin constrîngerea simultană a unghiului de tangaj și a vitezei de zbor sau chiar numai a unghiului de tangaj; în timp ce numai prin comanda vitezei de zbor, chiar dacă aceasta s-ar produce fără întîrziere, nu se poate asigura stabilitatea la zborul în urcare și este îndoielnică posibilitatea stabilizării zborului orizontal. Pentru asigurarea stabilității laterale a fost arătată necesitatea constrîngerii mișcării avionului în jurul axei lui longitudinale.

Teoria permite să se cerceteze stabilitatea mișcărilor de bază parțial controlate atît a celor uniforme, cît și a celor nepermanente.

2. AL DOILEA MODEL. AVION CU AUTOPILOT (STABILIZATOR AUTOMAT) CA SISTEM DINAMIC UNIC. UNELE PROBLEME ALE STABILITĂȚII ZBORULUI CONTROLAT ÎN MOD AUTOMAT

a) *Despre modele neliniare*

Considerarea ansamblului avion plus dispozitiv de comandă și reglare automată ca un sistem dinamic unic, adică considerarea mișcării aparatului de zbor ca un proces comandat, introduce în sfera teoriei stabilității zborului probleme specifice sistemelor de comandă și de reglare automată.

Astfel, în această privință, un aspect deosebit de important și de actual îl constituie insuficiența modelelor liniare. Aceasta implică părăsirea bazei solide a teoriei liniare, cu metode și procedee bine elaborate, cu algoritme elaborate pentru categorii vaste de probleme.

Prima sarcină pentru un cercetător care se ocupă cu construirea unui model neliniar va fi alegerea neliniarităților de care va trebui să se țină seama. În acest caz trebuie să se aibă în vedere, pe de o parte, fidelitatea reproducerii fenomenului, adică faptul ca noul model neliniar să reprezinte un pas esențial față de modelul liniar, iar pe de altă parte ca el să nu ducă, totuși, la dificultăți matematice nerezolvabile. Un model matematic care s-a dovedit a fi deosebit de fecund în aplicații în diferite domenii ale tehnicii reglării automate este modelul propus de

[6]) În ipotezele menționate, demonstrația pe baza teoremei lui Malkin asupra stabilității în cazul perturbațiilor permanente este imediată.

A. I. Lurie [8] şi [9], care conţine o singură funcţie neliniară. Ecuaţiile care corespund acestei scheme pot fi scrise, de exemplu, în felul următor:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bf(\sigma)$$
$$\sigma = C \cdot x, \tag{3}$$

unde componentele vectorului x sînt variabilele dinamice ale obiectului de reglare (ale avionului) şi coordonatele sistemului de reglare (ale autopilotului), A o matrice constantă cunoscută ale cărei elemente depind de parametrii constanţi ai obiectului (de datele constructive ale avionului), de parametrii care caracterizează regimul neperturbat etc., precum şi de caracteristicile autopilotului, B un vector-coloană constant cel puţin cu o componentă diferită de zero, iar C un vector constant care depinde de constantele regulatorului; σ reprezintă, în general, impulsul de comandă total, iar funcţia f, de exemplu, forţa generalizată dezvoltată de servomecanism. Important pentru schema lui Lurie este faptul că funcţia $f(\sigma)$ aparţine unei clase, numită clasa (A), care se caracterizează prin condiţiile

$$f(\sigma) = 0 \quad \text{pentru } |\sigma| \leqslant \sigma_*,$$
$$\sigma f(\sigma) > 0 \quad \text{pentru } |\sigma| > \sigma_*, \tag{4}$$

unde constanta nenegativă σ_* caracterizează domeniul de insensibilitate a regulatorului la variaţiile lui σ. Pentru $|\sigma| > \sigma_*$ funcţia $f(\sigma)$ este continuă ($\sigma = \pm \sigma_*$ vor fi puncte de discontinuitate); uneori se consideră subclasa (A^*), pentru care $\sigma_* = 0$.

În legătură cu sistemele de forma (3), Lurie defineşte aşa-numita *stabilitate absolută*, ca stabilitate a soluţiei pentru orice perturbaţii compatibile cu ecuaţiile mişcării (stabilitatea în mare) şi pentru orice funcţie $f(\sigma)$ din clasa (A) sau subclasa (A^*).

Problema stabilităţii unui asemenea sistem poate fi considerată practic complet rezolvată pentru toate cazurile care corespund valorilor proprii negative sau nule ale matricei A [7]). Acest model poate fi deosebit de util şi în cazul reglării automate a zborului, deoarece în multe cazuri neliniarităţile de care trebuie să se ţină seama pot fi modelate de funcţii care aparţin clasei (A) (sau sublcasei (A^*)).

Evident, aici există un cîmp deschis pentru cercetare: însuşirea acestei scheme în teoria stabilităţii zborului comandat.

Totuşi, în acelaşi timp trebuie să se caute alte modele, s-ar putea spune mai consecvent neliniare, care să cuprindă cazuri cît mai interesante de sisteme stabilizate ce apar în tehnica actuală aviatică şi a rachetelor.

b) *Efectul întîrzierii*

O altă problemă care nu şi-a găsit încă o rezolvare definitivă şi pentru a cărei rezolvare în diferite cazuri concrete, ca şi în domeniul reglării automate a zborului, se recurge încă uneori la metode rudimentare este influenţa întîrzierilor asupra caracteristicilor stabilităţii.

[7]) Este de menţionat că la rezolvarea acestei probleme, formulată de Lurie şi studiată într-o serie de lucrări de A. M. Letov [10] şi [11] şi alţii, o contribuţie esenţială a avut V. M. Popov de la Institutul de energetică al Academiei R.S.România (vezi, de exemplu, [12] şi [13]).

În ceea ce privește modelarea întîrzierii sistemului de reglare, legată de procesul tranzitoriu care are loc în sistem, cercetările au mers la început pe linia evaluării vitezei de funcționare a servomotorului. Modelele corespunzătoare erau, firește, esențialmente neliniare. Folosind asemenea modele cu ajutorul unor metodici derivate din problema lui Lurie, uneori este posibilă găsirea unor soluții satisfăcătoare, de exemplu folosind o schemă [9] și [11] bazată pe ipoteza că sistemul inerent instabil [8]) se stabilizează prin acțiunea unui regulator ideal (și, se înțelege, liniar).

Totuși, uneori, în tendința de a se evita complicațiile legate de studierea problemei neliniare, se recurge la liniarizări, inadmisibile cel puțin din punctul de vedere al rigurozității matematice [9]). Pe de altă parte, în lucrările în care s-a recurs la asemenea liniarizări [15] și [4], p. 412—414, viteza servomotorului (deplasările organului de comandă) intră, ca atare (cu valoarea ei), în expresiile unor coeficienți ai ecuațiilor respective. Însă valoarea acestei viteze nu poate fi determinată decît experimental și, evident, condițiile de experimentare influențează asupra rezultatelor. Acest fapt reduce de asemenea valoarea acestui model. Utilizarea metodicii care corespunde schemei lui Lurie are tocmai avantajul că nu cere determinarea exactă a vitezei servomotorului de care depinde funcția f, impunînd acestei funcții numai apartenența la clasa menționată mai sus (A). Dar această proprietate, în limitele cazurilor practic întîlnite, este independentă de viteza servomotorului [10] p. 35. Mergînd mai departe pe aceeași linie de cercetare a stabilității zborului cu autopilot real, s-a folosit un model care nu consideră sub formă explicită vreuna din caracteristicile procesului tranzitoriu care are loc în interiorul sistemului (a vitezei sevomotorului etc.), înlocuindu-le cu un singur indice cantitativ : întîrzierea pură a sistemului [16] și [14]. În acest caz, termenii ecuațiilor care se referă la coordonatele de comandă corespund nu momentului de timp pentru care au fost scrise variabilele dinamice ale obiectului, ci la niște momente de timp anterioare (diferențele reprezintă întîrzierile pure corespunzătoare). Acestei abordări a problemei îi corespunde modelul matematic al ecuațiilor cu argument întîrz at. Aplicarea acestei metodici are avantajul utilizării unei teorii matematice riguroase, relativ bine elaborate, și răspunzînd direct unor necesități formulate de diferitele ramuri ale științei moderne și de tehnică [10]).

Mai departe vor fi prezentate două procedee diferite de rezolvare a problemei evaluării efectului întîrzierii asupra stabilității zborului, bazate pe modelul ecuațiilor cu argument întîrziat.

Primul procedeu poate fi numit de stabilitate după primă aproximație în raport cu întîrzierea [16]. El constă în stabilirea legăturii dintre

---

[8]) Adică instabil cu regulatorul deconectat.

[9]) Asupra acestui fapt se atrage atenția în [14].

[10]) Aceasta se explică prin aceea că, deși a fost formulată acum peste 230 de ani de către J. Bernoulli (*Meditationes. De chordis vibrantibus...*, Comentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 1728), această problemă a devenit obiectul unor cercetări sistematice abia în ultimii 10—15 ani, sub influența necesităților în primul rînd ale teoriei comenzii și reglării automate. Rezultate semnificative în elaborarea acestei teorii au obținut R. Beliman [17], E. M. Wright [18], N. N. Krasovski [19], A. Halanay [20], [21] și alții.

MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

condiţiile stabilităţii mişcării sistemului dinamic avion-autopilot real (care funcţionează cu întîrziere) şi stabilitatea avionului cu autopilot ideal [11]). Această formulare a problemei este justificată, pe de o parte, prin aceea că corespunde situaţiei reale (stabilitatea cu autopilot real presupune practic stabilitatea soluţiei, corespunzătoare întîrzierii nule), adică ea este o formulare naturală a problemei, iar pe de altă parte prin aceea că o parte a problemei se reduce la cercetarea stabilităţii avionului cu autopilot ideal, mai simplă şi mai larg tratată în literatură. Într-adevăr, arătîndu-se că, şi invers, stabilitatea în cazul întîrzierii nule implică existenţa stabilităţii pentru cazul unei întîrzieri diferite de zero, însă suficient de mici, problema se reduce la : 1) punerea în evidenţă a stabilităţii în cazul întîrzierii nule şi 2) determinarea întîrzierii-limită pentru care stabilitatea se păstrează.

Procedeul indicat are avantajul aplicabilităţii pentru sistemele neautonome şi neliniare, însă precizia evaluării depinde de metoda de lucru aleasă şi chiar de iscusinţa celui care o aplică.

Al doilea mod de abordare a problemei stabilităţii avionului cu autopilot real recurge la tehnica operaţională şi se aplică numai pentru cazul sistemelor autonome liniare. În schimb, precizia evaluării este independentă de metodă şi de calităţile personale ale omului, fiind în dependenţă numai de gradul de aproximare a datelor problemei.

Cîteva cuvinte despre acest din urmă procedeu. Asemănarea formală dintre cvasipolinoamele caracteristice ale sistemelor de ecuaţii liniare ordinare cu argument întîrziat şi polinoamele caracteristice ale sistemelor de ecuaţii diferenţiale ordinare liniare cu coeficienţi constanţi au sugerat ideea să se caute condiţiile necesare şi suficiente de stabilitate asimptotică pentru primele, sub forma unui sistem de inegalităţi care se referă la părţile reale ale tuturor zerourilor cvasipolinomului respectiv. Relativ recent au fost găsite aceste condiţii necesare şi suficiente sub forma

$$\operatorname{Re}(s_i) \leqslant -\varepsilon < 0, \tag{5}$$

unde s_i reprezintă toate zerourile cvasipolinomului respectiv, iar ε un număr pozitiv oricît de mic, şi în acelaşi timp au fost demonstrate şi teoremele corespunzătoare după prima aproximaţie [17]—[19].

Procedeul de lucru constă [22] cap. VIII, în construirea, pe baza unei metodici relativ simple, a domeniului în spaţiul parametrilor sistemului în care sînt satisfăcute simultan toate inegalităţile (5), cu alte cuvinte a domeniului stabilităţii asimptotice. Parametrii se aleg conform cerinţelor problemei practice considerate, însă din punct de vedere teoretic alegerea este arbitrară. Alegînd drept unul din parametri însăşi întîrzierea, putem construi curbele întîrzierilor, admisibile din punctul de vedere al stabilităţii, în funcţie de diferiţi factori. Astfel, diagrama din figura 1 reprezintă curba întîrzierilor admisibile în funcţie de raportul dintre coeficientul adimensional al elementului derivativ al autopilotului $\bar{\varkappa}_2$ (care

[11]) Autopilotul ideal este o ficţiune matematică reprezentată sub forma unui sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare, obţinut din sistemul de ecuaţii cu argument întîrziat al autopilotului real, în care întîrzierile se egalează cu zero.

reacționează la viteza unghiulară de tangaj și care lucrează, prin urmare, ca automat de amortizare) și coeficientul elementului proporțional (de poziție) (care lucrează ca automat de stabilitate statică). Raportul optim apare, evident, în punctul de maxim al curbei. Curba arătată are numai caracter ilustrativ. Calculul a fost efectuat pentru cazul stabilizării unghiulare în planul longitudinal al unui avion cu decolare și aterizare verticală în regimul de zbor la punct fix [14].

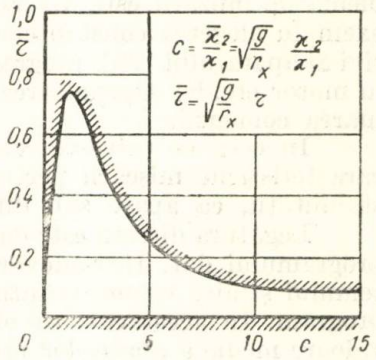


Fig. 1. — Domeniul stabilității asimptotice în planul (c, $\bar{\tau}$). Curba întîrzierilor admisibile în funcție de raportul dintre factorii reglajului derivativ și proporțional (după [14]).

c) *Autopilotarea după program. Comenzi optimale*

În multe cazuri este necesară utilarea autopilotului cu un bloc de programare, pentru furnizarea la intrarea autopilotului a unor semnale care corespund legii de variație dorite a diferitelor coordonate ale aparatului de zbor [14] și [16]. Aceste blocuri de programare sînt utilizate, evident, în primul rînd pe aparatele de zbor fără pilot (de exemplu pentru înclinarea rachetei cu lansare verticală într-un moment stabilit dinainte, sub un unghi optim care să asigure raza de acțiune maximă a zborului, sau pentru alte acțiuni legate de variația regimului, direcției etc.). Unele tipuri de instalații de programare sînt folosite și pe avioanele pilotate în scopul asigurării, la nevoie, a unei precizii mai mari a comenzii decît cea care se poate obține prin comandă manuală (de exemplu pentru evitarea zonei de acțiune a apărării antiaeriene inamice, pentru comanda vitezei în zborul în urcare, pentru asigurarea stabilității la trecerea prin zona vitezei sonice etc.).

Din partea autopilotului echipat cu bloc de programare se cere de obicei în primul rînd asigurarea stabilității zborului de bază uniform inițial, iar pe de altă parte stabilitatea zborului prescris de programul dat, care poate fi sau o altă mișcare uniformă, sau, ceea ce se întîmplă cel mai des, o manevră oarecare (o mișcare neuniformă dată). Programul se dă sub formă de lege de variație a parametrilor cinematici esențiali [10] p. 231—242; [22] p. 370—379. Pînă în prezent, această problemă (teoretică) nu a fost rezolvată în cazul general.

În strînsă legătură cu problema autopilotării după program în vederea efectuării unei mișcări date, se găsește problema comenzilor optimale.

Cîteva cuvinte despre problema optimizării în practica zborului avioanelor și a rachetelor. Reamintim că prin optimizarea în sensul cel mai general se înțelege un mijloc de a atinge valorile extremale (de maximum sau minimum) ale unei mărimi care caracterizează procesul considerat și care în cele ce urmează va fi denumit obiect de optimizare, cu condiția ca celelalte mărimi caracteristice să fie menținute în limite date. Obiectul de optimizare poate fi dintre cele mai diferite: raza de acțiune

sau durata unei evoluţii, unii indici economici, valoarea medie a unor cantităţi ce caracterizează o cerinţă oarecare, ca, de exemplu, media ponderată a suprasarcinii (acceleraţiei), perturbaţiilor vitezei unghiulare de tangaj şi a unghiului de bracaj al profundorului, care caracterizează comportarea aparatului în zborul în atmosferă turbulentă [24] etc. Problema optimizării este diversă şi în privinţa mijloacelor de realizare (de exemplu alegerea constantelor autopilotului sau a parametrilor constructivi ai aparatului [25], programarea corespunzătoare a regimului de ardere în motor etc. [12]). Optimizarea este una din problemele de bază la programarea comenzii.

În ceea ce priveşte relaţiile dintre problema comenzii optimale şi caracteristicile mişcării perturbate a aparatelor de zbor, în particular a stabilităţii, ea apare sub diferite forme.

Legătura directă este dată de calitatea reglării, de precizia executării programului dat. Într-adevăr, diferite perturbaţii exterioare, inerţia sistemului şi alte forme de întîrziere duc la devieri faţă de mişcarea după program. În acest caz, ca obiect de optimizare putem considera sau o valoare medie a abaterilor principalilor parametri cinematici, sau valorile maxime ale abaterilor sau durata procesului tranzitoriu.

Căutarea automată a condiţiilor de stabilitate (cu sisteme autoreglabile) nu ţine totdeauna de domeniul problemelor de optimum, însă de cele mai multe ori ea poate fi inclusă aici prin găsirea unei mărimi caracteristice care depinde de parametrii sistemului a cărei valoare extremală ar asigura îndeplinirea condiţiilor de stabilitate căutate.

Diversitatea şi importanţa problemelor legate de problema optimizării au dus la studierea sistematică a bazelor ei teoretice, deoarece teoremele calculului variaţional clasic nu dau soluţii satisfăcătoare pentru toate cazurile.

Dintre metodele elaborate în ultimul timp şi care lărgesc în mare măsură posibilitatea rezolvării diferitelor probleme de extremum, în particular a problemei comenzii optimale, citǎm metoda programării dinamice a lui Richard Bellman [37]—[39] şi principiul maximului al lui Lev Semenovici Pontreaghin [40]—[45].

Cu ajutorul programării dinamice se pot studia probleme care se referă la procesele comandate, aparţinînd unei clase mai generale decît clasa proceselor descrise cu ajutorul sistemelor de ecuaţii diferenţiale. R. Bellman caracterizează în felul următor noua formulare a problemei: „Aparatul clasic al calculului variaţional, care copiază exact tehnica calculelor cu mărimi finite, se bazează pe reprezentarea extremumului sub formă de punct al spaţiului funcţiilor şi pe caracterizarea acestui punct prin intermediul proprietăţilor lui variaţionale.

Spre deosebire de aceasta, noi vom privi problemele calculului variaţional ca o clasă particulară de procese în trepte cu soluţie de tip continuu. Funcţia care realizează extremumul poate fi privită atunci ca o comportare continuă [37] p. 288—289 (ed. rusă). Sau încă: „În termeni geometrici,

[12]) Referirile la [24]—[36] sînt date pentru a ilustra marea diversitate a problemelor privite prin prisma optimizării şi importanţa care se acordă în ultimii ani acestei categorii de probleme din domeniul dinamicii zborului atît a avionului, cît şi a aparatelor de zbor spaţiale.

formularea clasică este echivalentă cu considerarea curbei extremale drept loc geometric al unor puncte, în timp ce în formularea programării dinamice extremala se reprezintă ca înfăşurătoare a familiei tangentelor sale" [37] p. 16 (ed. rusă).

Pentru rezolvarea problemelor din domeniul comenzii optimale a aparatelor de zbor, metoda elaborată de L. S. Pontreaghin şi şcoala sa are, după părerea autorului, o importanţă practică deosebită.

Expunerea fondului teoriei proceselor optimale, bazată pe teorema lui Pontreaghin, numită de el principiul maximului [42], depăşeşte cadrul acestei lucrări. Pe scurt vor fi expuse avantajele acestei teorii faţă de metodele clasice ale calculului variaţional, indicată în lucrarea [42] cap. I, par. 9.

Teoria bazată pe principiul maximului (elaborată de L. S. Pontreaghin şi şcoala sa), care în cele ce urmează va fi denumită teoria lui Pontreaghin, este adevărată în condiţii mai generale privind domeniul comenzilor decît calculul variaţional clasic. Mai exact, teoria lui Pontreaghin este aplicabilă în orice domeniu considerat al comenzilor, în particular — spre deosebire de teoremele clasice ale calculului variaţional — şi pentru orice mulţime închisă a întregului spaţiu al parametrilor comenzilor. Astfel se arată [42] p. 264 că problema de optim, formulată în teoria lui Pontreaghin, este o generalizare a problemei lui Lagrange, echivalentă cu aceasta din urmă în cazul cînd domeniul comenzilor este o mulţime deschisă a spaţiului vectorial corespunzător; că în acest caz din principiul maximului se pot deduce, de asemenea, toate condiţiile necesare şi suficiente demonstrate în calculul variaţional. Însă, pentru cazul cînd domeniul comenzilor este o mulţime închisă a spaţiului vectorial corespunzător, din condiţiile necesare de atingere de către funcţională a extremului, — condiţia lui Weierstrass — fundamentală în teoria clasică este ineficace. Însă în multe aplicaţii din domeniul comenzii optimale, tocmai studiul cazului mulţimii închise a comenzilor este cel mai interesant, deoarece deseori valorile comenzilor optimale se găsesc pe frontiera domeniului comenzilor. Tocmai pentru acest motiv, de pildă, aceeaşi problemă (în esenţă de tipul lui Mayer) de comandă optimală a mărimii şi direcţiei tracţiunii rachetelor a putut fi rezolvată mai complet şi cu un număr mai mic de ipoteze simplificatoare, care nu decurg din natura fizică a procesului studiat, pe baza principiului maximului [45] decît folosind teoremele clasice ale calculului variaţional, anume condiţia lui Weierstrass [35]. Astfel, ambele lucrări [35] şi [45] ajung la aceeaşi concluzie cu privire la necesitatea aplicării pe porţiuni (bucăţi, arce) de traiectorie numai a tracţiunii maxime sau nule [13]), precum şi cu privire la numărul maxim al acestor segmente, însă soluţia din [35], bazată pe condiţia lui Weierstrass, nu conţine o condiţie fundamentală : trecerea de la un regim de tracţiune la altul, şi prin urmare, ea este incompletă [45] p. 988. Este interesant de remarcat că în ceea ce priveşte programarea optimală a direcţiei tracţiunii, deoarece este vorba

[13]) În [26]— [29], [32] — [34] se consideră de asemenea problemele de acest tip. Problema absenţei porţiunilor cu tracţiune variabilă pe traiectoria optimală, analizată în [35] şi [45], a fost pusă, se pare, pentru prima dată în [32].

aici despre un domeniu al comenzilor evident deschis, rezultatele obținute în lucrările [35] și [45] — una bazată pe teoria clasică, cealaltă pe metoda lui Pontreaghin — coincid perfect.

Așadar, există temeiuri să se presupună că pentru rezolvarea problemelor optimale, întîlnite în domeniul tehnicii aviatice și a rachetelor, este necesară însușirea și a altor metode de lucru în afară de cele derivate din calculul variațional clasic, ceea ce, firește, atrage după sine necesitatea reformulării problemelor respective.

Aceasta oferă cercetătorilor încă un domeniu deschis în sfera problemelor de dinamică și de stabilitate a zborului.

3. UTILIZAREA INSTALAȚIILOR ȘI MAȘINILOR ELECTRONICE DE CALCUL. NOI METODE DE CALCUL

Din toate cele spuse în legătură cu diferitele obiective ale problemelor de sisteme optimale putem trage concluzii asupra complexității problemei. Într-adevăr, din partea autopilotului se cere asigurarea nu numai a stabilității unui regim uniform sau executarea și menținerea unei mișcări neuniforme programate, dar, în unele cazuri, el trebuie să caute și să efectueze comanda necesară și să asigure stabilitatea legii optimale de variație a regimului, necunoscut a priori, care corespunde realizării sarcinii (de exemplu evitarea zonei tirului de artilerie antiaeriană sau, într-un caz mai simplu, autoreglarea după gradientul presiunii etc.). În aceste cazuri și multe altele este comodă și chiar necesară utilizarea într-un anumit sistem automat a unor blocuri de calcul speciale pentru furnizarea semnalelor de intrare necesare [14]).

În felul acesta, atenția teoreticienilor și a constructorilor este îndreptată spre elaborarea algoritmelor și realizarea sintezei sistemului de comenzi adecvat.

Prelucrarea algoritmelor pentru aceste instalații de calcul cere cunoașterea mai exactă a mișcărilor posibile ale obiectului comandat, adică a proprietăților dinamice ale avionului: o formulare matematică mai exactă a problemei și în același timp convenabilă pentru construirea algoritmelor. Prin urmare, includerea acestor „creieri electronici", chiar și a acelora care singuri sintetizează legea de mișcare în fiecare caz dat, nu exclude necesitatea cercetării dinamicii zborului și nu diminuează importanța ei, ci schimbă doar direcția preocupărilor, reclamînd lămurirea și precizarea anumitor aspecte ale fenomenului fizic, precum și a modelului matematic.

Trebuie să amintim și despre o altă formă de utilizare a instalațiilor electronice de calcul, și anume despre înlocuirea mașinilor de calcul manuale și a riglei logaritmice prin calculatoare electronice atît la verificarea rezultatelor teoretice ale cercetării caracteristicilor dinamice ale

---

[14]) În legătură cu problemele sistemelor automate prevăzute cu instalații de calcul, există o literatură destul de vastă (vezi [23] și [46] și literatura indicată în aceste lucrări, în special în [23]).

diferitelor tipuri de avioane, cît şi în practica de proiectare. În special în acest din urmă domeniu există o tendinţă evidentă spre automatizarea muncii de calcul, prin utilizarea integratorilor electronici şi a altor forme de maşini electronice de calcul. Totuşi, uneori, acest proces este frînat de utilizarea ca bază a calculelor amintite a unor procedee care se pretează greu automatizării, procedee descrise în lucrări fundamentale de dinamică, stabilitate şi maniabilitate a avionului. Prin aceasta se explică volumul relativ mare de calcule efectuate încă cu ajutorul maşinilor de calcul manuale sau al riglei de calcul. Aceasta constituie una din principalele cauze pentru care se încearcă să se introducă şi în domeniul dinamicii, stabilităţii şi maniabilităţii aparatelor de zbor o tehnică de calcul nouă, pentru care elaborarea unor algoritme adecvate pentru calculatoarele electronice nu prezintă dificultăţi speciale şi există chiar acumulată o bogată experienţă. O astfel de tehnică de calcul s-au dovedit a fi procedeele împrumutate din teoria sistemelor de reglare automată, şi în primul rînd cele bazate pe metodele calculului operaţional. O altă cauză importantă, de altă natură, pentru care a fost necesară introducerea acestor metode de calcul în problemele de dinamică, stabilitate şi maniabilitate a zborului rezultă din necesitatea unificării aparatului matematic, deoarece, cum s-a mai amintit, avionul cu autopilot se consideră ca un sistem dinamic unic.

La utilizarea acestei tehnici noi de calcul în problemele de dinamică, stabilitate şi maniabilitate a zborului a contribuit faptul că metodele şi procedeele de lucru elaborate pentru necesităţile teoriei comenzii şi reglajului automat au depăşit limitele domeniului îngust pentru care au fost create şi dezvoltate, unele dintre ele căpătînd chiar o existenţă de sine stătătoare.

Astfel, în ultimul timp, unele din metodele şi procedeele dezvoltate pentru nevoile teoriei sistemelor de reglare automată au început să se aplice în problemele de dinamică şi stabilitate a zborului şi pentru cazul aparatelor cu comandă manuală. De exemplu, în [47] avionul se consideră ca obiect al comenzii şi se foloseşte reprezentarea ecuaţiilor mişcării perturbate a avionului pilotat sub formă de scheme-bloc. Această reprezentare a fost utilizată de alţi autori [49] şi [50], evident şi pentru cazul avionului stabilizat în mod automat, adică al avionului ca element al unui sistem de reglare automată.

Cîteva cuvinte despre utilizarea tehnicii operaţionale de calcul. Calculul operaţional dezvoltat pentru rezolvarea unor probleme tehnice [15]) are cu precădere un caracter aplicativ. După cum se ştie, metodele calculului operaţional servesc pentru rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale ordinare liniare, a ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale, a ecuaţiilor în diferenţe, a ecuaţiilor cu argument întîrziat, precum şi a unor tipuri de ecuaţii integrale. Marele avantaj al calculului operaţional constă în aceea că prin transformarea funcţiilor de timp care intră în ecuaţii, efectuată după regulile lui, operaţiilor de derivare şi integrare le vor

[15]) După cum se ştie, primul care a folosit metodele operaţionale (încă în secolul trecut) pentru rezolvarea unor probleme din domeniul electrotehnicii a fost inginerul O. Heaviside.

corespunde operaţii algebrice simple, ecuaţiile iniţiale (diferenţiale, integrale etc.), fiind înlocuite prin ecuaţii algebrice.

Pentru rezolvarea problemelor din domeniul dinamicii şi stabilităţii zborului, cel mai des se folosesc procedee bazate pe transformarea lui Laplace [3], [14], [16], [22], [25], [48]—[50] etc.

Ca exemplu reamintim unele probleme rezolvabile cu ajutorul tehnicii transformării lui Laplace. Una dintre ele este determinarea domeniului de stabilitate în spaţiul parametrilor (de care depind coeficienţii ecuaţiilor mişcării perturbate).

La studierea problemelor liniare, determinarea domeniului de stabilitate se reduce la problema lui Hurwitz : să se găsească condiţiile pentru care rădăcinile unei anumite ecuaţii, numită caracteristică, vor fi pseudonegative [16]).

Considerînd ecuaţiile caracteristice cu membrul întîi polinoame întregi, frontiera domeniului de stabilitate asimptotică se obţine din condiţiile clasice ale lui Routh-Hurwitz.

Din punct de vedere matematic nu există nici o diferenţă în această problemă între tratarea algebrică şi cea operaţională. Rolul calculului operaţional în dezvoltarea metodelor legate de problema lui Hurwitz a constat în aceea că, pe de o parte, el a lărgit aplicabilitatea lor şi dincolo de limitele ecuaţiilor liniare omogene cu coeficienţi constanţi, iar pe de altă parte a mărit posibilitatea analizei influenţei diferiţilor parametri asupra caracteristicilor stabilităţii. În ceea ce priveşte condiţiile algebrice ale lui Hurwitz, ele în general nu corespundeau cerinţelor impuse nici măcar unuia din aceste două considerente.

Într-adevăr, parametrii problemei sînt incluşi în inegalităţile lui Hurwitz într-o formă atît de complicată, încît influenţa lor practic nu poate fi urmărită fără simplificări prealabile substanţiale. Aceste simplificări se făceau în general cu preţul restrîngerii problemei, pe baza unor ipoteze făcute după consideraţii fizice sau matematice, însă care în mod normal ar fi trebuit să fie rezultate particulare, iar nicidecum puncte de plecare pentru analiză.

Pentru uşurarea scoaterii în evidenţă a influenţei diferiţilor parametri asupra stabilităţii sistemului au fost alese unele condiţii auxiliare naturale care de la început excludeau o parte din posibilităţi, uşurînd în felul acesta analiza prin micşorarea numărului de cazuri. Astfel, de exemplu, s-a introdus noţiunea de stabilitate structurală [17]). Din punctul de vedere al acestei noţiuni, existenţa domeniului de stabilitate în spaţiul parametrilor este o proprietate structurală a sistemului, adică o proprietate ce depinde de schema lui structurală. Prin urmare, prima problemă pe care trebuie s-o rezolvăm este aceea a existenţei stabilităţii structurale a sistemului (adică dacă sistemul admite existenţa unui domeniu de stabilitate în spaţiul parametrilor), şi abia după aceea să se treacă propriu-zis

[16]) Cu părţile reale negative.

[17]) Noţiunea a fost definită de I. I. Galperin [51], [52], care a formulat şi problema determinării condiţiilor de stabilitate structurală. Dintre cei care s-au ocupat cu această problemă se pot menţiona M. A. Aizerman şi F. R. Gantmaher [53], [54], S. Lehnigk [55] ş.a.

la determinarea acestui domeniu. Din punct de vedere matematic, punerea în evidenţă a stabilităţii structurale este o problemă din domeniul algebrei, legată de problema lui Hurwitz. Traducînd în limbaj tehnic, rezultatul facilitează alegerea schemei sistemului de reglare a parametrilor constructivi optimali ai obiectului etc. Astfel, de exemplu, în [55] rezultatul matematic obţinut serveşte la rezolvarea unor probleme din domeniul dinamicii zborului. Ca exemplu se consideră problema posibilităţii stabilizării mişcării longitudinale a avionului cu poziţia variabilă a centrului de greutate cu ajutorul unui stabilizor automat cu caracteristici liniare; procedeul este ilustrat pe un exemplu bine cunoscut: analiza mişcării perturbate a avionului cu manşă blocată, folosind ca unicul parametru viteza neperturbată a zborului. Avantajul în acest caz, în comparaţie cu procedeul clasic, constă în simplitatea excepţională a analizei.

O altă direcţie urmată pentru înlesnirea analizei influenţei diferiţilor parametri asupra caracteristicilor stabilităţii (de asemenea în cadrul problemei lui Hurwitz) a constat în găsirea unor condiţii algebrice mai generale [56] şi [58] sau a unor procedee grafoanalitice, bazate pe diferite criterii privind semnul părţii reale a rădăcinilor ecuaţiilor caracteristice [59]—[64]. Aceste procedee prezintă avantajul indiscutabil că pot fi aplicate şi pentru rezolvarea problemei lui Hurwitz pentru unele forme de ecuaţii mai generale (ca, de exemplu, pentru cazul zerourilor cvasipolinoamelor caracteristice care corespund sistemelor cu întîrziere etc.) [59], [14] şi [16].

Pentru aplicaţii inginereşti, metodele grafoanalitice sînt deosebit de interesante. Într-adevăr, cu ajutorul lor, analiza influenţei diferiţilor parametri asupra stabilităţii poate fi făcută într-o formă simplă şi sugestivă, fără a face concesii mari în sensul lipsei rigorii matematice sau al unei simplificări exagerate (ceea ce uneori, de asemenea, echivalează cu o lipsă de rigurozitate).

Aceste metode se bazează, evident, pe anumite criterii care exprimă condiţia ca zerourile funcţiei studiate să fie pseudonegative. Ca informaţie istorică se pot aminti procedeele grafice bazate pe condiţiile lui Routh-Hurwitz, folosite pentru ecuaţiile (netransformate) ale stabilităţii din teoria clasică [2]—[4], de exemplu construirea diagramei frontierelor stabilităţii laterale a avionului sau a diagramelor lui Gates-Zimmerman [65], [66] ş.a.

Dintre procedeele grafice elaborate recent pentru determinarea domeniului în spaţiul parametrilor corespunzător unor caracteristici date ale stabilităţii vor fi amintite aici două, foarte apropiate ca structură: metoda D-divizării spaţiului parametrilor a lui Iu. I. Neimark [61]—[64]; [56] şi [60] şi metoda determinării (x, k) — *plateau*-urilor în acest spaţiu a lui E. Pinney [18]) [59]. Aceste procedee permit să se construiască teoretic domeniul de stabilitate pentru orice număr de parametri. Practic însă, calculele se complică vizibil cînd numărul de parametri este mai mare

[18]) (x, k)-*plateau*-ul lui Pinney este, într-o anumită privinţă, o generalizare a domeniului $D(k, n-k)$ după teoria D-divizării. Într-adevăr, $D(k, n-k)$ nu este altceva decît un $(0, n-k)$-*plateau*.

decît doi şi utilizarea maşinilor electronice de calcul devine inevitabilă. Pentru obţinerea unor date estimative privitor la influenţa parametrilor necesari în practica proiectării, este comod să se folosească grafice pentru cîte doi parametri, reprezentînd secţiuni plane ale domeniului de stabilitate în hiperspaţiul tuturor parametrilor problemei.

Criteriile care asigură caracteristicile necesare ale stabilităţii, utilizate la baza acestor procedee grafice, pot fi, evident, şi criteriile algebrice clasice ale lui Routh-Hurwitz. Însă, în general, este mai comod să se folosească alte criterii, mai uşor adaptabile la specificul calculului operaţional, de tip Nyquist. Aceste criterii se bazează pe teorema variaţiei argumentului [19]). Unele din aceste criterii au fost extinse şi asupra unor tipuri mai generale de ecuaţii, anume asupra ecuaţiilor cu argument întîrziat [71].

În unele cazuri este practic posibil să se construiască frontiera domeniului de stabilitate în spaţiul parametrilor (folosind limbajul geometric) ca imagine în acest spaţiu a axei ordonatelor din planul variabilei lui Laplace sau a unei drepte paralele cu ea, obţinută printr-o transformare definită de ecuaţia caracteristică.

Aceste procedee pot fi considerate drept consecinţe directe ale metodei D-divizării [20]) sau (x, k)-*plateau*-ului, despre care s-a mai amintit. Ele sînt aplicabile şi în cazul ecuaţiilor cu argument întîrziat [69], [72], [73]; [14] şi [16]. Astfel, curba întîrzierilor admisibile în funcţie de raportul dintre secţiunile automatelor de amortizare şi de stabilizare statică (adică între coeficienţii care caracterizează elementele diferenţial şi proporţional al autopilotului), pentru asigurarea stabilizării avionului cu decolare şi aterizare verticală în regimul de zbor la punct fix (fig. 1) a fost obţinută folosindu-se un procedeu de acest tip [14].

Primit la redacţie la 25 octombrie 1964

BIBLIOGRAFIE

1. T. Hacker, *Progrese recente în dinamica zborului. I.*, Stud. cerc. mec. apl., **17**, 5 (1964).
2. В. С. Ведров, *Динамическая устойчивость самолета*. Оборонгиз, Москва—Ленинград, 1938.
3. W. J. Duncan, *The Principles of the Control and Stability of Aircraft*. Cambridge University Press, 1952.
4. И. В. Остославский, *Аэродинамика самолета*. Оборонгиз, Москва, 1957.
5. R. E. Roberson, *Attitude Control in Space — a Look at Current Problems and Status*. Prezentat la al 13-lea Congres internaţional de astronautică, Varna, 1962.
6. T. Hacker, *Stability of Partially Controlled Motions of an Aircraft*. Journal of the Aerospace Sciences, **28**, 1, 15—26, 50 (1961).
7. S. Neumark, *Problems of longitudinal Stability below Minimum Drag Speed, and Theory of Stability Under Constraint*. ARC R & M, No. 2983.

[19]) Din teoria funcţiilor analitice, după Cauchy. Este vorba despre criteriile de stabilitate ale sistemelor de control liniare, bazate pe caracteristicile de frecvenţă, de exemplu despre criteriile lui Nyquist [67], A. V. Mihailov [68], [69] etc. Vezi, de asemenea, şi [60], [70].

[20]) De exemplu, diagramele lui Vişnegradski.

8. А. И. Лурье, В. Н. Постников, *К теории устойчивости регулируемых систем.* Прикладная математика и механика, **8**, *3*, 1944.
9. А. И. Лурье, *Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования.* Гостехиздат, 1951.
10. А. М. Летов, *Устойчивость нелинейных регулируемых систем.* Гостехиздат, Москва, 1955.
11. — *Собственно-неустойчивые регулируемые системы.* Прикладная математика и механика, **14**, *2* (1950).
12. В. М. Попов, *Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования.* Автоматика и телемеханика, **22**, *8*, 961—979 (1961).
13. — *Решение новой задачи устойчивости регулируемых систем.* Автоматика и телемеханика, **24**, *1*,7—26 (1963).
14. T. Hacker, *Problems of Stability of VTOL Aircrafts in Hovering Flight.* Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **7**, *2*, 225—239 (1962).
15. В. А. Котельников, *Продольная устойчивость самолета с автопилотом.* Труды ЛИИ, 1941, вып. 3.
16. T. Hacker, *On the Longitudinal Stability of an Aircraft with Automatic Pilot.* Revue de Mécanique Appliquée, Acad. R.P.R., **7**, *4*, 673—692 (1962).
17. R. Bellman, *On the Existence and Boundedness of Solutions of Nonlinear Differential-Difference Equations.* Annals of Mathematics, **50**, *2*, 347—355 (1949).
18. E. M. Wright, *The Stability of Solutions of Non Linear Difference-Differential Equations.* Proceedings of the Royal Society, Edinburgh, **63**, 18—26 (1950).
19. Н. Н. Красовский, *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* Физматиздат, Москва, 1959.
20. А. Халанай, *Теоремы устойчивости для систем с запаздывающим аргументом.* Revue de Mathématiques pures et appliquées, Acad. R.P.R., **3**, *2*, 207—215 (1958).
21. A. Halanay, *Inegalităţi diferenţiale cu întîrzieri şi o aplicaţie a lor la o problemă din teoria stabilităţii sistemelor cu întîrziere.* Comunicările Academiei R.P.R., **11**, *11*, 1305—1309 (1961).
22. В. А. Боднер, М. С. Козлов, *Стабилизация летательных аппаратов и автопилоты.* Оборонгиз, Москва, 1961.
23. А. А. Фельдбаум, *Вычислительные устройства в автоматических системах*, Физматгиз, 1959.
24. R. Maclean, *The Optimization of an Autopilot for an Airplane Subjected to Random Atmospheric Turbulence.* UTIA Technical Note No. 45, November 1960.
25. I. L. Ashkenas, D. T. McRuer, *Optimization of the Flight-Control, Airframe System.* Journal of the Aerospace Sciences, 27, 3 March, 197—218 (1960).
26. B. Garfinkel, *Minimal Problems in Airplane Performance.* Quarterly of Applied Mathematics, **9**, *2*, 149 (1951).
27. J. V. Breakwell, *The Optimization of Trajectories.* North American Aviation, Inc., Rep. AL—2706, August 1957.
28. A. Miele, *General Variational Theory of the Flight Paths of Rocket-Powered Aircraft, Missiles and Satellite Carriers.* Purdue University, Rep. No. A—58—2, Jan. 1958.
29. — *Generalized Variational Approach to the Optimum Thrust Programming for the Vertical Flight of a Rocket.* Zeitschrift für Flugwissenschaften, **6**, *3*, March, 69 (1958).
30. — *An Extension of the Theory of the Optimum Burning Program for the Level Flight of a Rocket-Powered Aircraft.* Journal of the Aerospace Sciences. **24**, *12* (1957).
31. — *Flight Mechanics and Variational Problems of a Linear Type.* Journal of the Aerospace Sciences, **25**, *9* (1958).
32. A. Miele, J. O. Cappellari, *Topics in Dynamic Programming for Rockets.* Purdue University, Rep. No. A—58—5, 1958, July (Zeitschrift für Flugwissenschaften, **1**, *1* (1959).
33. D. F. Lawden, *Interorbital Transfer of a Rocket.* Journal of the British Interplanetary Society, Annual Report, 321 (1952).
34. Д. Е. Охоцимский, Т. М. Енеев, *Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли.* Успехи физических наук, **63**, 1а, 5 (1957).
35. G. Leitmann, *On a Class of Variational Problems in Rocket Flight.* Journal of the Aerospace Sciences, **26**, *9*, 586—591 (1959).

36. S. Ross, *Composite Trajectories Yielding Maximum Coasting Apogee Velocity*. ARS Journal, **26**, *11* (1959).
37. R. Bellman, *Dynamic Programming and a New Formalism in the Calculus of Variations*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **39**, *9*, 1077—1082 (1953).
38. — *On the Application of Dynamic Programming to the Study of Control Processes*. Proc. Symp. on Nonlinear Control Processes, Brooklyn Polytechnic Inst., 1956.
39. — *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.
40. В. Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Л. С. Понтрягин, *К теории оптимальных процессов*. Доклады Акад. наук СССР, **110**, *1*, 7—10 (1956).
41. — *Теория оптимальных процессов. I. Принцип максимума*. Известия Акад. наук СССР, серия матем., **24**, *1*, 3—42 (1960).
42. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*. Физматгиз, Москва, 1961.
43. Л. И. Розоноэр, *Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. I, II, III*. Автоматика и телемеханика. **20**, *10—12*, 1320—1334, 1441—1458, 1561—1578 (1959).
44. Г. Л. Харатишвили, *Принцип максимума в теории оптимальных процессов с запаздыванием*. Доклады Акад. наук СССР, **136**, *1*, 39—42 (1961).
45. В. К. Исаев, *Принцип максимума Л. С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет*. Автоматика и телемеханика, **22**, *8*, 986—1001 (1961).
46. Ю. Г. Антомонов, *Автоматическое управление с применением вычислительных машин*. Судпромгиз, Ленинград, 1962.
47. В. С. Ведров, В. А. Сурина, Г. Л. Романов, *Самолет как объект регулирования*. Труды МАИ, вып. *74*, Оборонгиз, Москва, 1957.
48. В. Н. Матвеев, *Расчет возмущенного движения самолета*. Оборонгиз, Москва, 1960.
49. F. A. Summerlin, N. Sullivan, *The Application of a Block Diagram to Aircraft Stability Analysis*. The Aeronautical Quarterly **9**, *1* (1958).
50. И. В. Остославский, И. В. Стражева, *О формировании контура управления самолетом*. Труды МАИ, вып. 124, Оборонгиз, Москва, 1960.
51. И. И. Гальперин, *О возможных способах устойчивого регулирования с нулевой неравномерностью*. Известия ВТИ, *6*, (1940).
52. — *Доказательство теорем о входном замещении и о структурной формуле*. Автоматика и телемеханика, **12**, *3* (1951).
53. М. А. Айзерман, *О некоторых структурных условиях устойчивости систем автоматического регулирования*. Автоматика и телемеханика, **9**, *2*, 104—122 (1948).
54. М. А. Айзерман, Ф.Р. Гантмахер, *Условия существования области устойчивости для одноконтурной системы автоматического регулирования*. Прикладная математика и механика, **18**, *1* (1954).
55. S. Lehnigk, *On the Structural Stability of a Certain Class of Linear Motions*. NATO AGARD Report 194, Paris, 1958.
56. Ю. И. Неймарк, *Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределенных)*. Ленинградская краснознаменная военно-воздушная инженерная академия, 1949.
57. Н. Г. Чеботарев, *К проблеме Гурвица для целых трансцендентных функций*. Доклады Акад. наук СССР, **35**, *8* (1942).
58. Н. Г. Чеботарев, Н. Н. Меиман, *Проблема устойчивости Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций*. Труды Математического института им. В. А. Стеклова, **26** (1949).
59. E. Pinney, *Ordinary Difference-Differential Equations*. University of California Press, Berkeley-Los Angeles, 1958. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. Изд. Иностран. лит. Москва, 1961.
60. М. А. Айзерман, *Лекции по теории автоматического регулирования*. Гос. Издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1956.
61. Ю. И. Неймарк, *К задаче распределения корней полиномов*. Доклады Акад. наук СССР, **58**, *3* (1947).

62. Ю. И. Неимарк, *Структура D-разбиения пространства полиномов и диаграммы Вышнеградского и Найквиста.* Доклады Акад. наук СССР, **59**, *5* (1948).
63. — *Структура D-разбиения пространства квазиполиномов и диаграммы Вышнеградского и Найквиста.* Доклады Акад. наук СССР, **59**, *9* (1948).
64. — *О структуре областей устойчивости одноконтурных систем.* Автоматика и телемеханика, **11**, 1 (1950).
65. S. B. Gates, *A Survey of Longitudinal Stability below the Stall, with an Abstract for Designers Use.* ARC R & M, No. 1093, 1929.
66. Ch. H. Zimmermman, *An Analysis of Longitudinal Stability in Power-Off Flight with Charts for Use in Design.* NACA, Report *521*, 1935.
67. H. Nyquist, *Regeneration Theory.* Bell System Techn. Journal, *11* (1932).
68. А. В. Михайлов, *Метод гармонического анализа в теории регулирования.* Автоматика и телемеханика, *3* (1938).
69. — *Теория устойчивости линейных цепей обратной связи с сосредоточенными постоянными.* Журнал технической физики, *1* (1939).
70. J. C. Gille, M. Pélégrin, P. Decaulne, *Théorie et technique des asservissements.* Dunod, Paris, 1958,
71. R. L. Johnson, J. B. Rea, *Importance of Extending Nyquist Servomechanism Analysis to Include Transient Response.* Journal of the Aeronautical Sciences, **18**, *1*, 42 — 49 (1950).
72. Н. Н. Мясников, *Критерий Михайлова и анализ систем с запаздыванием.* Труды Ленинградской краснознаменной военно-воздушной инженерной академии, *36* (1959).
73. — *Теория прямого регулирования по Вышнеградскому и влияние эффекта запаздывания.* Известия Академии наук СССР, Отделение технических наук, *9* (1953).

PERNA DE AER CU CAMERĂ PLINĂ CU RECIRCULAȚIE

de N. N. PATRAULEA
membru corespondent al Academiei R.S.România
NICOLAE POSTELNICU, ELEONORA MALAIU, MARIA GAVRILĂ
Institutul de mecanica fluidelor „Traian Vuia" al Academiei R.S.România

533

Se studiază experimental pierderile de presiune la o scurgere plană într-un cot deschis la partea exterioară, pe o schemă care reproduce parțial zona periferică la o pernă de aer cu cameră plină cu recirculație, în vederea determinării eficienței recuperării de energie prin recirculație.

1. Mai întîi vrem să atragem atenția asupra faptului că este posibil să se realizeze vehicule cu efect de sol *fără pierdere de debit*. Într-adevăr, aceasta se poate vedea imediat, analizînd schema din figura 1, care reprezintă o astfel de platformă în zbor imobil. Aerul suflat în jos de ventilator, în loc să fie eliminat în atmosferă prin secțiunea periferică *3* [1]), este resorbit prin fanta circulară *2* de către același ventilator. Această scurgere interioară se mărginește cu atmosfera înconjurătoare numai pe porțiunea exterioară a cotului (axial simetric) *1*, *2*, unde presiunile se egalează de-a lungul liniei de discontinuitate respective. Presiunea în secțiunea *1* va fi deci foarte apropiată de presiunea atmosferică și este clar că, dacă această secțiune *1* e mică față de secțiunea elicei, atunci, conform legii lui Bernoulli, presiunile vor crește către interiorul platformei, fapt care explică efectul portant [2]).

Din teoria vehiculelor cu efect de sol se știe că, la un vehicul clasic în zbor imobil, o fracțiune din portanță este datorită efectului de sol, însă există și o parte (mai mică în general) care corespunde impulsului

[1]) În care caz, evident, ar trebui să fie prevăzută și o secțiune de admisie a aerului.
[2]) Pentru simplitatea raționamentelor, amintim că forța portantă este egală cu rezultanta presiunilor pe sol.

fluxului ejectat [3]). La vehiculul descris aici, forţa portantă se datoreşte exclusiv efectului solului.

În ceea ce priveşte schema de funcţionare reprezentată pe figura 1, se observă că funcţionarea e la fel de posibilă din punct de vedere teoretic şi în cazul sensului circuitului aerodinamic inversat.

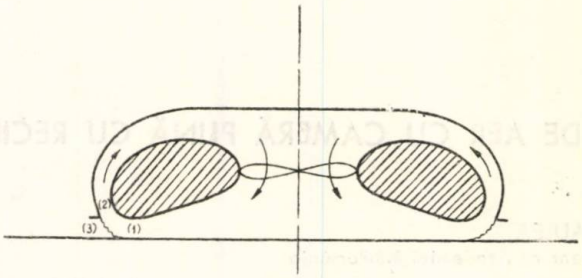


Fig. 1

2. Aşa cum se prezintă funcţionarea, este evident că, în absenţa frecărilor, zborul imobil al vehiculului prezentat aici nu implică teoretic nici un consum de putere.

În cazul real, pierderile principale apar pe porţiunea circuitului cuprins între secţiunile *1* şi *2*. De altfel, celelalte pierderi legate de funcţionarea ventilatorului sînt prezente şi la vehiculul clasic cu „cameră plină", iar frecările cu pereţii circuitului sînt relativ mici dacă secţiunea *2* este urmată de un divergent convenabil care să transforme presiunea dinamică în presiune statică.

Am fost conduşi, aşadar, ca un prim pas, să studiem pierderile care apar între secţiunea *1* şi *2*.

3. Pierderile care survin în această porţiune sînt de două feluri. Pe de o parte, există o recuperare incompletă a presiunii totale din *1*, iar pe de altă parte are loc şi o pierdere de presiune statică în secţiunea *1*, ceea ce face ca portanţa vehiculului să scadă în mod corespunzător. Pierderea de presiune totală se explică în special prin amestecul turbulent de impuls care are loc în vecinătatea liniei de discontinuitate a vitezelor tangenţiale.

4. Cît priveşte depresiunea faţă de presiunea atmosferică care apare în secţiunea *1*, aceasta se explică prin faptul că desprinderea fileurilor de sol sau de peretele vehiculului nu se face chiar în secţiunea *1*, ci scurgerea se continuă, fără desprindere, pe încă o porţiune spre aval, porţiune pe care se manifestă un gradient pozitiv al presiunii (datorită configuraţiei geometrice, evident divergentă). Scurgerea are un caracter instabil, pulsatoriu, ceea ce arată că punctele de desprindere variază în timp. În orice caz, secţiunea „medie" în care are loc desprinderea este mai mare decît secţiunea *1*, ceea ce implică în aceasta din urmă o presiune mai mică decît presiunea atmosferei.

---

[2]) N. N. Patraulea, *Aerodinamica hipersustentaţiei.*

Desigur, sîntem interesați să evităm desprinderea de peretele interior al cotului *1* și *2* pentru a întoarce jetul către fanta de aspirație *2*. Acest lucru se poate face cu un eventual control al stratului-limită pe această porțiune.

Mai greu este însă controlul punctului de desprindere de sol în scopul apropierii acestuia de secțiunea *1*. S-ar putea încerca în acest sens

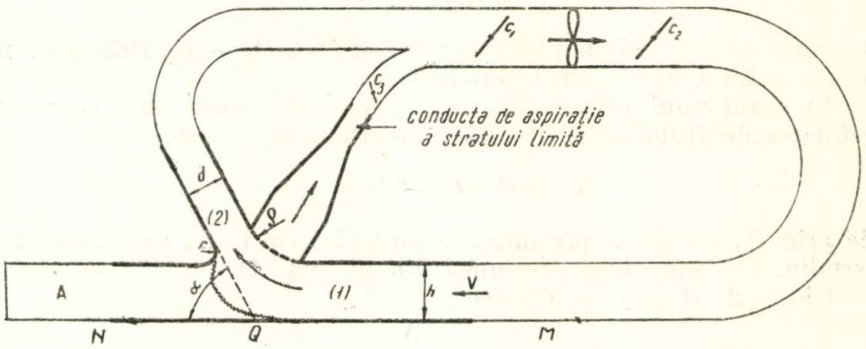


Fig. 2

folosirea unei geometrii convenabile a porțiunii *1* și *2*, ca, de pildă, unghiul de întoarcere α, făcut de axa ajutajului *1* cu aceea a ajutajului *2*. Pare intuitiv că unghiurile mari ar fi favorabile pentru apropierea punctului de desprindere de secțiunea *1*, deoarece scurgerea nedeslipită corespunzătoare s-ar face cu gradient de presiune mai mare, ceea ce transformă scurgerea într-o scurgere cu desprindere.

5. O concluzie definitivă în privința eficienței metodei de recuperare a presiunii totale nu poate fi dată decît de experiențe. În acest scop s-a studiat efectul pe o schemă plană de scurgere, schemă care nu se îndepărtează mult de realitate. Mai precis, se studiază pierderile menționate mai sus care au loc într-un cot plan, spart la partea exterioară, unde mișcarea este delimitată de o linie de discontinuitate a vitezei, linie care separă scurgerea de aerul atmosferic înconjurător (fig. 2).

Pentru asigurarea continuității fluidului în cot, continuitate care ar putea să nu fie respectată datorită unor neetanșeități în restul circuitului aerodinamic, atmosfera este reprezentată printr-o incintă A etanșă față de exterior.

Prin clapeții reglabili C_1, C_2, situați de o parte și de alta a ventilatorului, se poate face ca, în timpul funcționării dispozitivului la regimul stabilit, presiunea în A să fie cît mai apropiată de presiunea atmosferică.

În scopul caracterizării eficienței recuperării de energie și a forței portante care s-ar exercita asupra unui astfel de vehicul, noi am introdus următorul coeficient, pe care l-am denumit de „amplificare" :

$$\varkappa = \frac{P_1 - P_A}{P_1 - P_2}, \tag{5.1}$$

unde prin P_i $(i = 1, 2, A)$ s-au însemnat respectiv presiunile totale în secţiunile 1, 2 şi în incinta A.

Denumirea de coeficient de amplificare rezultă din următoarele consideraţii. În absenţa frecărilor, în restul circuitului aerodinamic puterea necesară care trebuie introdusă pentru învingerea rezistenţelor în cot [4]) este

$$N = Q(P_1 - P_2), \tag{5.2}$$

corespunzător pierderii de presiune totală în cot $P_2 - P_1$. Prin Q s-a notat debitul de fluid în circuitul aerodinamic.

În cazul unui vehicul identic, cu cameră plină, fără contracţie [5]) la refularea debitului de fluid şi fără „recirculare", avem

$$N' = Q\ (P_1 - P_A), \tag{5.3}$$

unde prin P_A s-a notat presiunea atmosferică (în cazul modelului nostru de studiu, P_A reprezintă presiunea din incinta A).

Din (5.2) şi (5.3) se deduce

$$\varkappa = \frac{N}{N'}. \tag{5.4}$$

Este clar că acest raport nu exprimă clar de cîte ori e mai eficientă perna de aer de faţă, cu recirculare, faţă de aceea obişnuită cu cameră plină, deoarece N' este puterea introdusă într-o cameră plină fără contracţie la refulare, ceea ce dezavantajează într-o oarecare măsură soluţia clasică. Pe de altă parte, nu s-au considerat celelalte pierderi în restul circuitului aerodinamic.

În experienţele efectuate, presiunea totală în amonte are o repartiţie destul de uniformă, secţiunea *1* urmînd după un convergent. Totuşi, s-a ţinut seama de repartiţia reală a presiunilor, determinîndu-se media presiunilor totale în funcţie de presiunea totală luată într-un acelaşi punct de referinţă din secţiune.

Presiunile în secţiunea *2* au însă, cum era de aşteptat, o repartiţie care se îndepărtează mai mult de repartiţia uniformă. De aceea pentru a putea determina coeficientul $\varkappa$ va trebui să dăm o generalizare formulei de definiţie (5.1) pentru cazul repartiţiei neuniforme.

Riguros vorbind, pierderile de energie mecanică în cot sînt date de

$$\Delta E = \int_{(1)} \left(p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2\right) v_1 \, \mathrm{d}s - \int_{(2)} \left(p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2\right) v_2 \, \mathrm{d}s. \tag{5.5}$$

Observăm însă că în mod practic nu se poate recupera în circuitul aerodinamic întreaga energie dată de integrala din secţiunea *2*. Pentru ca aceasta să se întîmple ar trebui să se recupereze în mod separat energia

[4]) În formulele care urmează, se presupune, spre simplificare, că avem în toate cazurile o repartiţie uniformă a presiunii totale în fiecare secţiune a cotului.

[5]) Se presupune deci că la periferia vehiculului peretele camerei e paralel cu solul.

fiecărui fileu de aer; or, în realitate, secțiunea *2* se continuă cu un divergent comun pentru toate fileurile.

O generalizare interesantă din punct de vedere practic a formulei (5.1) se poate da prin următorul raționament. Presupunem că, înainte de

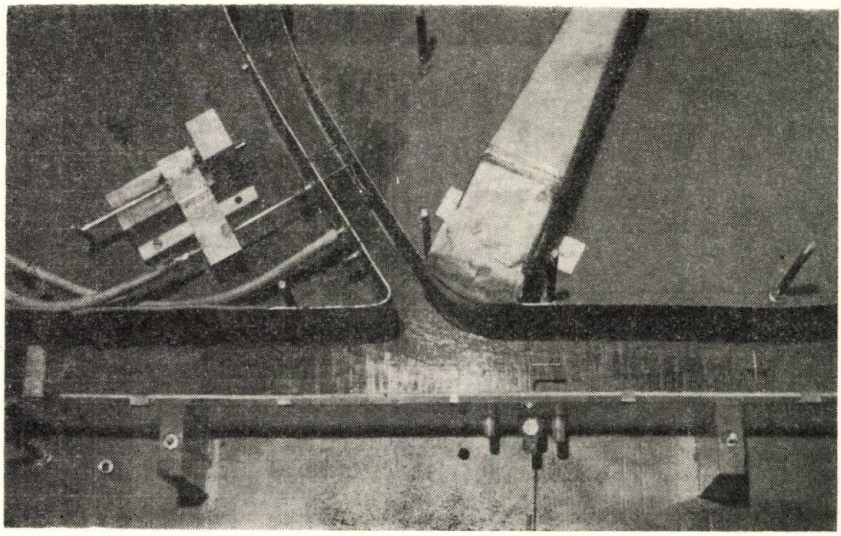


Fig. 3

divergentul următor secțiunii aval *2*, conducta se continuă cu aceeași valoare a secțiunii pînă cînd, datorită frecărilor interne, vitezele în secțiune se uniformizează în secțiunea *2*. Pe toată această porțiune vom neglija frecările cu pereții conductei.

Aplicînd teorema cantității de mișcare la fluidul cuprins între secțiunile *2* și *2'*, avem

$$\int_{(2)} p\,\mathrm{d}s - \int_{(2')} p\,\mathrm{d}s = \int_{(2')} \rho v^2\,\mathrm{d}s - \int_{(2)} \rho v^2\,\mathrm{d}s, \tag{5.6}$$

adică egalizarea vitezelor se face pe această porțiune păstrîndu-se constantă integrala presiunilor totale

$$\int_{(2)} \left(p + \frac{\rho}{2} v^2\right) \mathrm{d}s = \int_{(2')} \left(p + \frac{\rho}{2} v^2\right) \mathrm{d}s = \left(p^* + \frac{\rho}{2} v^{*2}\right) S_2. \tag{5.7}$$

Considerînd că numai această valoare a presiunii totale (din secțiunea 2') este utilizabilă mai departe, sîntem conduși să generalizăm formula (5.1) prin înlocuirea termenilor P_1 și P_2 prin presiunile totale medii în secțiunile respective. În felul acesta s-a procedat la determinarea rezultatelor experimentale privind coeficientul de amplificare $\varkappa$.

În fotografia din figura 3 este prezentat modelul experimental (fără un perete de limitare laterală) al scurgerii plane în cot deschis.

Peretele interior al cotului s-a făcut din pînză de mătase așezată pe un suport de sită metalică pentru a avea posibilitatea să se aspire

stratul-limită şi să se evite astfel o desprindere a fileurilor de aer de pe peretele interior al cotului.

Peretele exterior al ajutajului de aspiraţie *2* s-a prevăzut cu o rotunjire convenabilă la capăt, conform schiţei din figura 2 pentru a asigura o intrare liniştită a aerului.

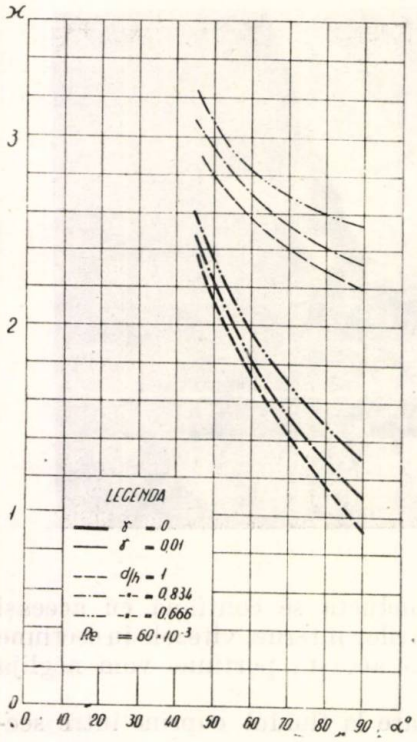


Fig. 4

S-a studiat variaţia coeficientului $\varkappa$ în funcţie de următorii parametri principali:

d/h — raportul dintre secţiunea *2* şi *1* din figura 2,

γ — gradul de aspiraţie al stratului-limită, definit ca raportul dintre viteza normală la suprafaţă a fluxului de aspiraţie şi viteza medie a fluxului total în momentul considerat,

$\mathcal{R}e = \frac{Vh}{\nu}$ —numărul Reynolds,

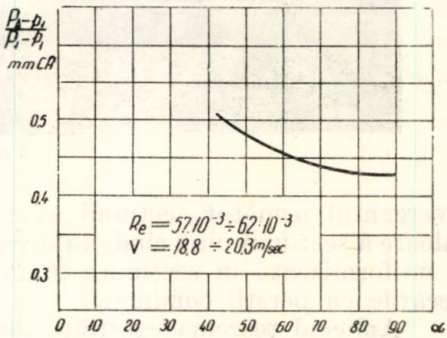


Fig. 5

α — unghiul de rotire totală a direcţiei curentului în cot,

ρ/h — raza de curbură adimensională a cotului, ρ fiind raza de curbură a peretelui interior al cotului,

— gradul de rugozitate al liniei MN care reprezintă solul.

Dat fiind diversitatea mare a parametrilor menţionaţi, ne-am limitat la trei serii de experienţe, şi anume o serie corespunzînd unui $\rho = 200$ mm şi unui $\alpha = 45°$, a doua corespunzînd unui $\rho = 30$ mm şi unui $\alpha = 90°$, iar a treia unui $\rho = 60$ mm şi unui $\alpha = 60°$.

Pentru fiecare serie de experienţe s-au variat sistematic parametrii d/h şi gradul de sucţiune, iar pentru primele două serii de experienţe s-a variat şi numărul Reynolds.

La toate seriile de experienţe, rugozitatea solului a fost menţinută constantă şi a fost aceea a unei foi abrazive nr. HS60, stas 1581—57.

6. Rezultatele obţinute pe cale experimentală sînt prezentate în diagramele din figurile 4—8.

Experiențele au fost executate la numere Reynolds cuprinse între 43×10^{-3} și 76×10^{-3}, lungimea caracteristică fiind deschiderea h a secțiunii *1*. Aceasta corespunde la viteze medii, la intrarea în cot în secțiunea *1*, cuprinse între 13 și 25 mm/s. Gradul de sucțiune aplicat pe curba inte-

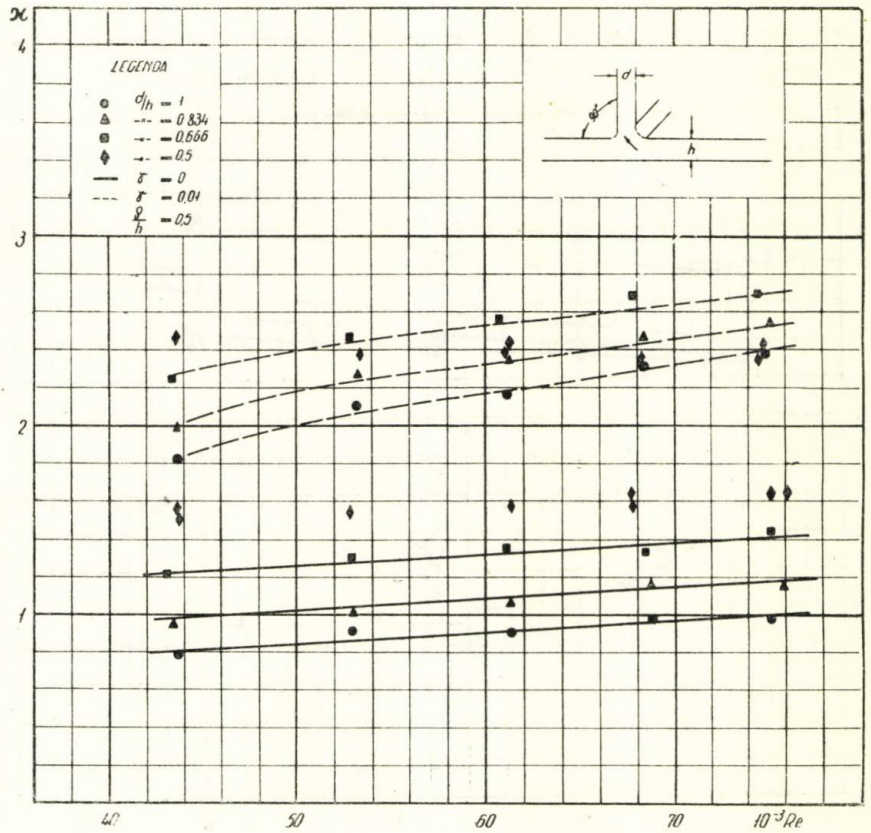


Fig. 6

rioară a cotului a fost variat în limitele $\gamma = 0$ și $\gamma = 0{,}015$. Parametrul de deschidere a secțiunii în avalul cotului a fost cuprins între $d/h = 0{,}5$ și $d/h = 1$.

Au fost efectuate circa 400 de experiențe.

La experiențele fără efectul sucțiunii au rezultat coeficienți de amplificare $\varkappa$ de la 1 la 2,6. Utilizînd un grad de sucțiune $\gamma = 0{,}01$, acest coeficient a crescut, luînd valori cuprinse între $\varkappa = 1{,}8$ și $\varkappa = 3{,}4$.

Rezultatele obținute cu cele trei modele geometrice cercetate pentru $\mathcal{R}e \simeq 60 \times 10^{-3}$, respectiv $V \simeq 20$ m/s sînt prezentate centralizat în diagrama din figura 4. În domeniul experimentat rezultă o creștere a coeficientului de amplificare $\varkappa$ mai accentuată la unghiuri de deschidere α mici și concomitent la raze de curbură ρ/h mari ale cotului.

În diagrama din figura 5 este arătată influenţa unghiului de deschidere α al cotului asupra depresiunii în secţiunea 1.

Se constată că influenţa depresiunii asupra lui $\varkappa$ e mică în raport cu aceea a pierderii de presiune totală. Acestea din urmă scad o dată cu unghiul α.

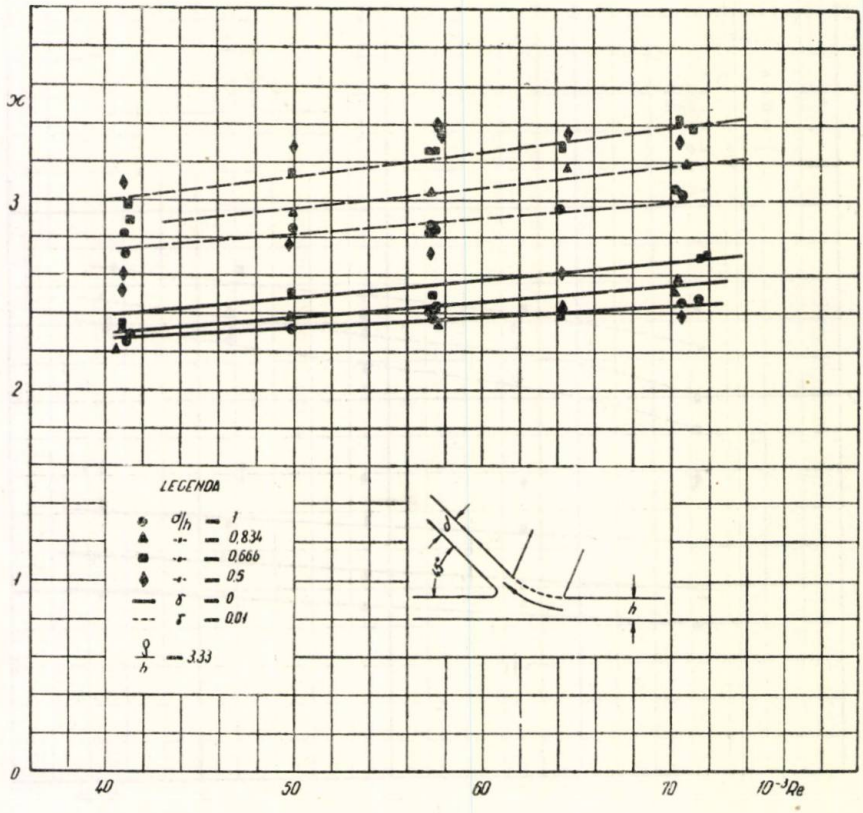


Fig. 7

În diagramele din figurile 6 şi 7 sînt prezentate rezultatele obţinute la unghiuri $\alpha = 90°$, respectiv $\alpha = 45°$ pentru diferite numere Reynolds. Din rezultate se constată o influenţă aproximativ liniară a numărului Reynolds asupra coeficientului de amplificare $\varkappa$, în sensul creşterii coeficientului cu viteza fluidului. Analizînd influenţa parametrului $d/h < 1$, se constată o creştere a coeficientului de amplificare $\varkappa$ simultan cu micşorarea secţiunii în aval, prezentînd un punct de optim pentru $d/h \simeq 0{,}6$, influenţat însă atît de gradul de sucţiune γ, cît şi de unghiul α. Experienţele efectuate cu o instalaţie cu circuit închis au determinat încălzirea aerului în recirculaţie pînă la circa 70°C. Pentru verificarea rezultatelor au fost efectuate şi experienţe la temperaturi mai apropiate de temperatura ambiantă, neputîndu-se constata o influenţă sesizabilă a tempe-

raturii asupra mărimii coeficientului de amplificare $\varkappa$, diferențele înregistrate fiind de ordinul de mărime al erorilor experimentale.

În diagrama din figura 8, ca și în diagramele anterioare, este prezentată influența sucțiunii, aplicată pe curbura interioară, asupra coeficientului de amplificare $\varkappa$ la diferite valori ale parametrului de deschidere d/h.

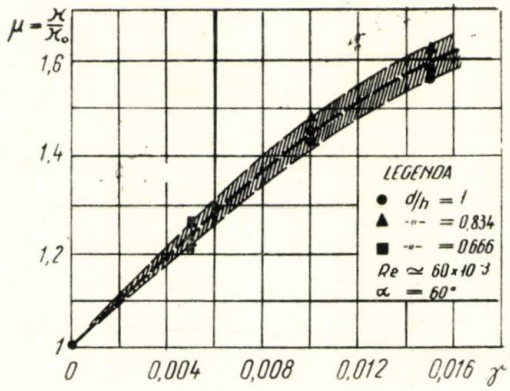


Fig. 8

Pe diagramă este indicat parametrul $\mu = \frac{\varkappa}{\varkappa_0}$, care raportează coeficientul de amplificare $\varkappa$ obținut pentru diferite grade de sucțiune γ la valoarea aceluiași coeficient obținut fără efectul sucțiunii.

Menționăm că experiențele au fost efectuate păstrînd constantă deschiderea $h = 60$ mm în secțiunea *1* amonte de cot și de asemenea raza de curbură $r = 10$ mm a vîrfului de bifurcare între secțiunea de întoarcere *2* și secțiunea liberă *3*. Scurgerea plană a fost limitată lateral de doi pereți la 100 mm distanță unul de altul.

Rezultatele sînt acoperitoare în sensul că în realitate nu există pierderi legate de frecările cu panourile care limitează lateral scurgerea plană în cot.

Presiunile totale utilizate în calculul coeficientului $\varkappa$ reprezintă valori medii, obținute prin integrarea profilului presiunilor totale în secțiunile respective. Explorarea profilului presiunilor a fost efectuată la distanțe egale. În funcție de lățimea secțiunii, profilele presiunilor totale au fost determinate prin măsurători în circa 6—12 puncte (în secțiunea *1* în 12 puncte). Simultan cu măsurarea presiunii într-un punct din secțiunea *2* au fost înregistrate toate celelalte măsurători aerodinamice pentru a se elimina fluctuațiile regimului de funcționare a instalației. În acest sens, toate măsurătorile efectuate simultan au fost adimensionate prin raportare la presiunea dinamică într-un punct de referință, în amonte de cot.

Pentru evitarea erorilor de măsurare, toate prizele de presiune statică și totală au fost executate cu deosebită îngrijire.

Din cercetările experimentale, şi în special din cele preliminare de reglare a instalaţiei, a rezultat că valorile obţinute sînt mult influenţate de formele geometrice ale frontierelor modelului, de calitatea şi de uniformitatea suprafeţelor plane şi curbe, de rugozitatea lor. Mici modificări

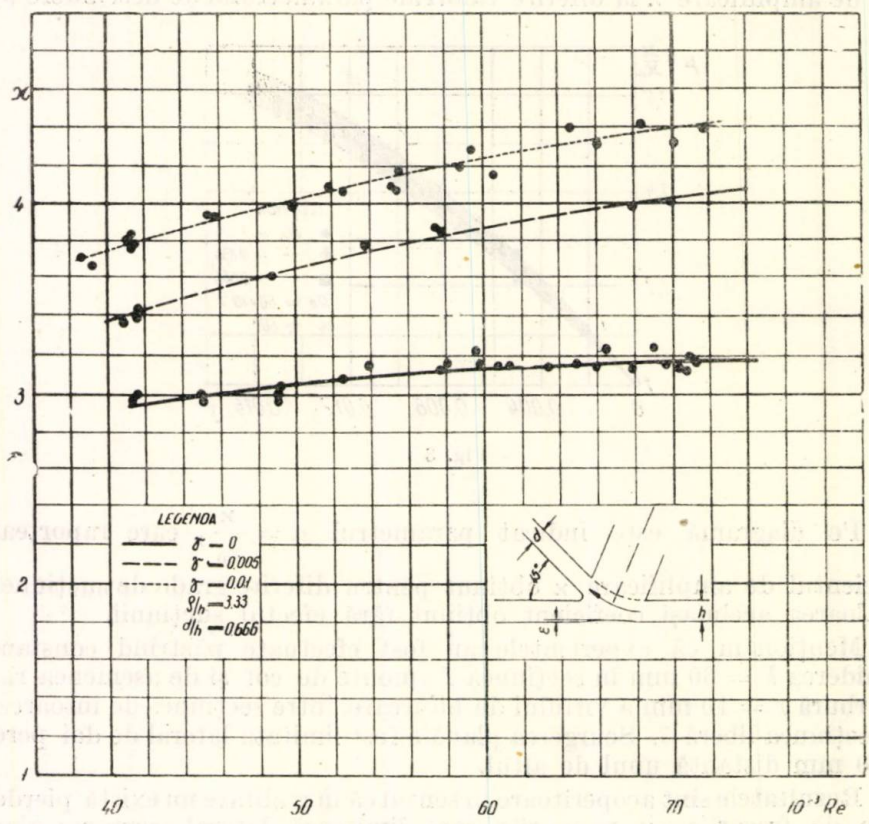


Fig. 9

operate asupra caracteristicilor geometrice sau modificări apărute în cursul experienţelor sub efectul depresiunilor sau din alte motive au determinat deplasarea punctelor de desprindere pe cele două frontiere şi modificarea profilului liniilor de curent şi implicit regimul scurgerii. Considerăm că acestea influenţează cel mai mult asupra gradului de precizie al rezultatelor obţinute şi că ordinul de mărime al erorilor ce pot fi luate în considerare la instalaţia folosită este de circa 6%.

Influenţa modificării caracteristicilor geometrice asupra coeficientului de amplificare $\varkappa$ este exemplificată de rezultatele expuse în diagrama din figura 9, rezultate obţinute pentru experienţe efectuate cu o accentuată denivelare, bombare la circa 2,5 mm a peretelui rugos (care reprezintă

solul la vehiculele cu pernă de aer), sub efectul depresiunii, în regiunea cotului.

Pe de altă parte au fost luate o serie de măsuri pentru a facilita citirea mediei valorilor înregistrate de aparate sub influența fluctuațiilor cauzate de cotul deschis. Măsurătorile astfel efectuate prezintă erori $< \pm 3{,}5\%$, care au fost mediate.

Cifrele obținute arată că se poate aplica metoda la vehicule cu pernă de aer, ducînd la o simțitoare îmbunătățire energetică, după cum a reieșit din rezultatele prezentate aici.

Primită la redacție la 16 martie 1965

GENERALIZAREA UNEI PROBLEME DIN MIŞCAREA APELOR ARTEZIENE

de HORIA I. ENE
Institutul de matematică al Academiei R. S. România

Lucrarea are ca scop să determine influenţa porţiunii impermeabile AN (fig. 1) asupra debitului unei sonde plasate într-un anticlinal, obţinînd în felul acesta o generalizare a problemei rezolvate de A. Houpeurt [1].

Folosind metoda imaginilor, se ajunge la expresia debitului (7). Păstrînd aceleaşi date ca în lucrarea lui A. Houpeurt [1] am trasat graficul de variaţie al debitului funcţie de y_0.

Ne propunem să studiem influenţa porţiunii impermeabile AN (fig. 1) asupra debitului sondei S, plasată într-un mediu poros de forma indicată în figura 1, unde arcul MA este o suprafaţă de alimentare, iar MNA este o suprafaţă impermeabilă.

Vom căuta în felul acesta să generalizăm problema pusă de A. Houpeurt [1] pentru cazul cînd arcul AN este tot o suprafaţă de alimentare. Pentru rezolvarea acestei probleme vom face uz de o serie de transformări conforme cunoscute.

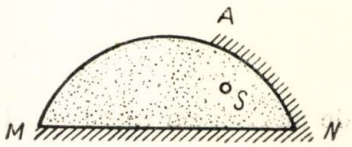


Fig. 1

Prima transformare pe care o vom face va fi o inversiune de pol M şi de putere $4R^2$ (R fiind raza cercului) (fig. 2). În felul acesta punctul M va fi aruncat la infinit, iar domeniul nostru se va transforma într-un unghi de deschidere tot α, cu sonda plasată în interiorul său.

În continuare vom lucra doar în planul (ζ), aşa fel încît toate rezultatele pe care le obţinem vor fi scrise în acest plan. Acest mod de lucru este justificat datorită faptului că uşurează scrierea unor relaţii care se va vedea că au deja o formă suficient de complicată.

ST. CERC. MEC. APL. TOM 19 Nr. 4 P. 1043–1049 BUCUREŞTI 1965

Înainte de a merge mai departe cu seria transformărilor conforme, vom da formulele de legătură între elementele date din planul fizic și cele obținute în planul (ζ), în așa fel încît să putem lucra ulterior fără nici o dificultate în planul acesta transformat.

În planul fizic a cărui origine e la mijlocul lui MN, iar Ox de la M, spre N, cunoaștem poziția sondei S (x_0, y_0), poziția punctului A (x_1, y_1),

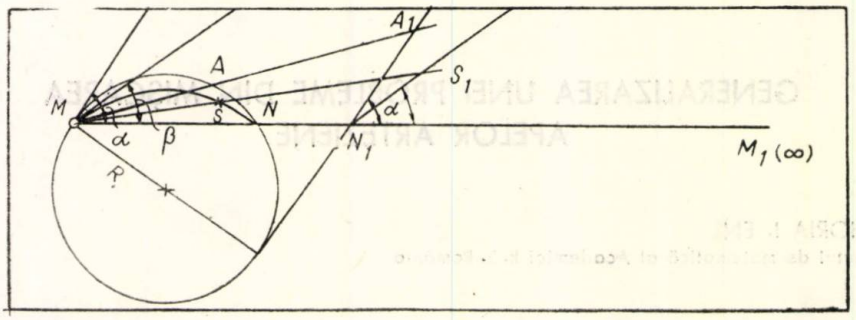


Fig. 2

lungimea segmentului $\overline{MN} = 2c$, raza R a cercului și raza r a sondei.

Vom nota cu :

α — unghiul tangentei la cerc în punctul M cu dreapta $\overline{MN}$,

β — unghiul tangentei la arcul MSN cu dreapta $\overline{MN}$,

D — distanța între punctele M și A,

d — distanța între punctele M și S.

În planul transformării (ζ) cu originea în N_1, vom acorda indicele „1" tuturor mărimilor transformate și vom da legătura lor cu cele din planul fizic.

Se vede că avem

$$d^2 = (x_0 + c)^2 + y_0^2,$$

$$MS_1 = \frac{4R^2}{\sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2}},$$

de unde avem coordonatele punctului S_1 sub forma

$$x(S_1) = \frac{4R^2 (x_0 + c)}{(x_0 + c)^2 + y_0^2} - c,$$

$$y(S_1) = \frac{4R^2 y_0}{(x_0 + c)^2 + y_0^2}.$$

De asemenea putem scrie

$$MN_1 = \frac{2R^2}{c},$$

de unde vedem că

$$x(N_1) = \frac{2R^2}{c} - c.$$

Se poate calcula și

$$d_1^2 = y^2(S_1) + [x(S_1) - x(N_1)]^2 = \frac{4R^4}{c^2} \frac{4y_0^2c^2 + (c^2 - x_0^2 - y_0^2)^2}{[(x_0 + c)^2 + y_0^2]^2}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y(S_1)}{x(S_1) - x(N_1)} = \frac{2cy_0}{c^2 - x_0^2 - y_0^2}.$$

În mod analog se calculează valorile referitoare la punctul A și transformatul său A_1.

$$D^2 = (x_1 + c)^2 + y_1^2,$$

$$MA_1 = \frac{4R^2}{\sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}}$$

$$x(A_1) = \frac{4R^2(x_1 + c)}{(x_1 + c)^2 + y_1^2} - c,$$

$$y(A_1) = \frac{4R^2 y_1}{(x_1 + c)^2 + y_1^2},$$

$$D_1^2 = y^2(A_1) + [x(A_1) - x(N_1)]^2 = \frac{4R^4}{c^2} \frac{4y_1^2c^2 + (c^2 - x_1^2 - y_1^2)^2}{[(x_1 + c)^2 + y_1^2]^2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y(A_1)}{x(A_1) - x(N_1)} = \frac{2cy_1}{c^2 - x_1^2 - y_1^2}.$$

Sonda, care în planul fizic este un cerc de rază r, prin inversiune se va transforma tot într-un cerc, însă de rază a.

Raza cercului transformat va fi dată de relația

$$a = \frac{4R^2}{d^2} r.$$

De acum încolo vom lucra doar în variabila ζ, unde vom considera cunoscute pe D_1, d_1, α și β.

Pentru a putea aplica metoda imaginilor, vom face o serie de reprezentări conforme după cum urmează

$$\omega = \zeta^{\frac{\pi}{\alpha}},$$

$$w = \omega + D_1^{\frac{\pi}{\alpha}},$$

$$Z = w^{1/2}.$$

Cu ajutorul acestor reprezentări am trecut de la unghiul de deschidere α din planul (ζ), succesiv, în semiplanul superior (ω) cu centrul în corespondentul punctului N_1, în semiplanul superior (w) cu centrul în corespondentul punctului A_1 și, în fine, în primul cadran din planul (Z). În felul acesta am obținut transformarea care ne duce de la planul (ζ) la planul (Z) sub forma

$$Z = \sqrt{\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}} + D_1^{\frac{\pi}{\alpha}}}, \tag{1}$$

avînd și următoarea corespondență a punctelor:

$$A_1 (\zeta = D_1 e^{i\alpha}) \quad : \quad A_2 (Z = 0),$$

$$N_1 (\zeta = 0) \quad : \quad N_2 (Z = D_1^{\frac{\pi}{2\alpha}}),$$

$$S_1 (\zeta = d_1 e^{i\beta}) \quad : \quad S_2 \left(Z = \sqrt{d_1^{\frac{\pi}{\alpha}} e^{i\frac{\pi\beta}{\alpha}} + D_1^{\frac{\pi}{\alpha}}}\right).$$

În planul (Z) avem următoarea situație: cadranul I este mediu poros, semiaxa pozitivă OY suprafața de alimentare, iar semiaxa pozitivă OX suprafață impermeabilă.

Aplicăm metoda imaginilor acestei configurații. Dacă în Z_0 avem un izvor negativ, atunci în $\overline{Z}_0$ avem tot un izvor negativ, iar în $-\overline{Z}_0$ și $-Z_0$ vom avea izvoare pozitive.

Nu avem decît să sumăm potențialul complex a patru izvoare și vom obține potențialul complex al mișcării în planul (Z) sub forma

$$F(Z) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{(Z - Z_0)(Z - \overline{Z}_0)}{(Z + Z_0)(Z + \overline{Z}_0)}. \tag{2}$$

Introducînd (1) în (2), vom avea potențialul complex al mișcării în planul (ζ) sub forma

$$f(\zeta) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\left(\sqrt{\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}} + D_1^{\frac{\pi}{\alpha}}} - \sqrt{\zeta_0^{\frac{\pi}{\alpha}} + D_1^{\frac{\pi}{\alpha}}}\right)\left(\sqrt{\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}} + D_1^{\frac{\pi}{\alpha}}} - \sqrt{\overline{\zeta}_0^{\frac{\pi}{\alpha}} + D_1^{\frac{\pi}{\alpha}}}\right)}{\left(\sqrt{\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}} + D_1^{\frac{\pi}{\alpha}}} + \sqrt{\zeta_0^{\frac{\pi}{\alpha}} + D_1^{\frac{\pi}{\alpha}}}\right)\left(\sqrt{\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}} + D_1^{\frac{\pi}{\alpha}}} + \sqrt{\overline{\zeta}_0^{\frac{\pi}{\alpha}} + D_1^{\frac{\pi}{\alpha}}}\right)}. \tag{3}$$

Acest potențial complex se mai poate pune sub forma unei sume de funcții hiperbolice inverse [3] în felul următor:

$$f(\zeta) = -\frac{q}{\pi}\left(\operatorname{argth} \sqrt{\frac{\zeta_0^{\frac{\pi}{\alpha}} + D_1^{\frac{\pi}{\alpha}}}{\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}} + D_1^{\frac{\pi}{\alpha}}}} + \operatorname{argth} \sqrt{\frac{\overline{\zeta}_0^{\frac{\pi}{\alpha}} + D_1^{\frac{\pi}{\alpha}}}{\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}} + D_1^{\frac{\pi}{\alpha}}}}\right). \tag{3'}$$

Pentru calcularea debitului vom face uz de formula (3), care se va dovedi mai ușor de manevrat.

Condiția la limită pe conturul sondei se va scrie [2]

$$\varphi = -kH \qquad \text{pe} \qquad |\zeta - \zeta_0| = a^2, \tag{4}$$

unde k este coeficientul de filtrație, H diferența de nivel între bazinul de alimentare și sondă, iar a este raza sondei.

Vom separa partea reală de partea imaginară în expresia potențialului complex (3) după regula binecunoscută [4].

Pentru aceasta vom nota

$$\sqrt[\alpha]{\zeta^{\pi} + D_1^{\pi}} = A + iB,$$

unde

$$A = \sqrt{\frac{\sqrt{\rho^{2\pi} + D_1^{2\pi} + 2\rho^{\pi} D_1^{\pi} \cos\frac{\pi}{\alpha}\vartheta} + \left(\rho^{\pi}\cos\frac{\pi}{\alpha}\vartheta + D_1^{\pi}\right)}{2}},$$

$$B = \sqrt{\frac{\sqrt{\rho^{2\pi} + D_1^{2\pi} + 2\rho^{\pi} D_1^{\pi} \cos\frac{\pi}{\alpha}\vartheta} - \left(\rho^{\pi}\cos\frac{\pi}{\alpha}\vartheta + D_1^{\pi}\right)}{2}},$$

iar ρ și ϑ sînt variabilele curente în planul ζ:

$$\zeta = \rho\,(\cos\vartheta + i\,\sin\vartheta).$$

De asemenea putem scrie

$$\sqrt[\alpha]{\zeta_0^{\pi} + D_1^{\pi}} = A_0 + iB_0,$$

$$\sqrt[\alpha]{\zeta_0^{\pi} + D_1^{\pi}} = -A_0 + iB_0,$$

unde A_0 și B_0 sînt, respectiv, A și B, în care am înlocuit pe ρ cu d_1 și ϑ cu β. Acum potențialul complex (3) se va scrie sub forma

$$f(\zeta) = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{[(A - A_0) + i(B - B_0)]\;([A + A_0) + i(B - B_0)]}{[(A + A_0) + i(B + B_0)]\;[(A - A_0) + i(B + B_0)]}. \tag{5}$$

Partea reală a lui $f(\zeta)$ se va scrie

$$\varphi = \frac{q}{4\pi}\ln\frac{[(A - A_0)^2 + (B - B_0)^2]\;[(A + A_0)^2 + (B - B_0)^2]}{[(A + A_0)^2 + (B + B_0)^2]\;[(A - A_0)^2 + (B + B_0)^2]}. \tag{6}$$

Pentru a putea pune condiția la limită (4), vom nota cu A_k și B_k expresiile A și B, unde în loc de ρ am pus $d_1 - a$ și în loc de ϑ am pus β,

adică în felul acesta am pus condiția în punctul de pe conturul sondei, de coordonate

$$\rho = d_1 - a, \qquad \vartheta = \beta.$$

Imediat rezultă expresia debitului sub forma

$$q = \frac{4\pi kH}{\ln \dfrac{[(A_k - A_0)^2 + (B_k - B_0)^2]\,[(A_k + A_0)^2 + (B_k - B_0)^2}{[(A_k + A_0)^2 + (B_k + B_0)^2]\,[(A_k - A_0)^2 + (B_k + B_0)^2]}} \tag{7}$$

Această formulă generalizează formula dată de A. Houpeurt [1]. Se observă că în această formulă, dacă ținem seama de expresiile lui A_k, B_k, A_0 și B_0, apare în mod explicit influența noii porțiuni impermeabile considerate și ea depinde de D_1. O serie de calcule elementare ne arată că, dacă facem $D_1 = 0$ și ținem seama de legătura dintre mărimile d_1, α și β ca funcție de x_0, y_0, R și c, vom obține tocmai formula dată de A. Houpeurt [1].

Vom încerca să ilustrăm influența acestui perete impermeabil asupra debitului sondei, trasînd graficul de variație în următorul caz: $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $x_1 = 0$ (adică $\overline{NA} = \dfrac{1}{2}\overline{MN}$) și, de asemenea, $x_0 = 0$ (sonda își modifică poziția doar de-a lungul mediatoarei segmentului $\overline{MN}$).

Vom lua următoarele date:

$$c = 2\,000 \text{ m},$$

$$R = 2\,820 \text{ m},$$

$$r = 0{,}1 \text{ m}.$$

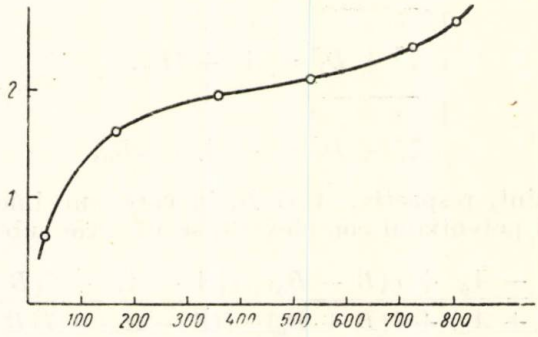


Fig. 3

Vom lua pentru y_0 exact valorile luate de A. Houpeurt [1].

În felul acesta obținem următorul tablou de variație al debitului funcție de y_0:

y_0	34 m	174 m	352 m	536 m	728 m	808 m
q	0,70 kH	1,61 kH	2,01 kH	2,11 kH	2,41 kH	2,60 kH

În porţiunea apropiată de $y_0 = 0$ şi cea apropiată de $y_0 = 820$ m. debitul scade, respectiv creşte printr-un proces de trecere la limită care nu ne este îngăduit, deoarece s-ar modifica condiţiile problemei.

Primită la redacţie la 1 martie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. A. Houpeurt, *Eléments de mécanique des fluides dans les milieux poreux.* Paris, 1957.
2. Şt. I. Gheorghiţă, *Capitole din teoria mişcărilor în medii poroase.* Bucureşti, Edit. tehnică, 1957.
3. B. Nieweglowski, *Cours d'Algèbre.* Paris, 1929.
4. S. Stoilow, *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă.* Vol. I, Bucureşti, 1962.

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

A VII-A SESIUNE ŞTIINŢIFICĂ A INSTITUTULUI POLITEHNIC IAŞI, SECŢIA A III-A, MECANICĂ TEORETICĂ ŞI FIZICĂ 5—7 FEBRUARIE 1965

Între 5 şi 7 februarie 1965 s-a ţinut în localul Institutului politehnic Iaşi sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice, la care au participat şi numeroşi delegaţi din diferite centre universitare sau institute de cercetări din ţară.

Secţia de mecanică teoretică şi fizică şi-a început lucrările în după-amiaza zilei de 5 februarie, prezentîndu-se mai întîi ansamblul lucrărilor de fizică, constituit din zece lucrări. Făcînd parte dintr-o tematică actuală pe plan ştiinţific, ele au fost prezentate şi urmărite cu interes de numeroşi participanţi. Se semnalează unele comunicări: *Consideraţii asupra intensităţii ionometrice a unui fascicul de raze X* de prof. Emil Luca; *Dozarea spectrală a indiului în minereuri* de conf. C. Ruscior, lector Gh. Tacu, asistent M. Moise şi lector C. Ciobanu; *Contribuţii la studiul proprietăţilor radioactive şi a elementelor fertilizante ale unor soluri din podgoria Averești-Huşi* de ing. N. Mereuţă; *Studiul radioactivităţii unor minereuri şi roci* de prof. N. Calinicenco etc.

Lucrările secţiei au fost dominate de numeroasele şi valoroasele lucrări de mecanică teoretică şi teoria mecanismelor. S-au prezentat 36 de lucrări, dintre care mai mult de 3/4 au avut subiecte din tematica iniţiată de colectivul Institutului politehnic Iaşi de sub conducerea prof. dr. D. Mangeron. Se menţionează următoarele lucrări:

— *Asupra dinamicii sistemelor pendulare n-uple* de prof. Gh. Ciobanu, care, prezentată sub formă generală, se poate extinde la studiul mişcărilor sistemelor cu masă variabilă şi are particularizări în problemele oscilatorii ale acestor sisteme.

— *Utilizarea numerelor complexe la studiul mişcării sub acţiunea forţelor newtoniene* şi *Mişcarea forţată a oscilatorului liniar amortizat supus la perturbaţii modelate în amplitudine* de lector A. Brayer, care se încadrează în folosirea sistematică a puternicelor mijloace de investigaţie ştiinţifică cu ajutorul numerelor complexe, cuaternionilor etc.

— *Asupra formei funcţiei disipative în cazul micilor oscilaţii ale sistemelor formate din solide rigide* de conf. N. Irimiciuc, ale cărei rezultate

reflectă aspecte generale legate de problema micilor oscilații și cuprind rezultatele particulare cunoscute.

— *Ecuațiile Tenov-Mangeron pentru mecanica corpurilor cu masă variabilă* de conf. N. Irimiciuc cuprinde noi ecuații cu proprietăți generale în acest domeniu.

— *Mecanisme plane articulate cu grad de mobilitate total M_3 mai mare ca unu* de prof. decan N. Manolescu, în care autorul, pe lîngă că expune legea de formare a acestor mecanisme și prezintă numeroase scheme structurale, introduce noi caracteristici ale structurii mecanismelor.

— *Formularea problemei generale a sintezei cuplelor cinematice* de prof. dr. Radu Voinea, membru corespondent al Academiei R. S. România, care cuprinde rezultate generale, incluzînd atît cazurile obișnuite, cît și cazurile singulare, care modifică aspectele și determinările structurale și cinematice ale mecanismelor.

— *Analogia accelerație-viteză* de ing. Chr. Pelecudi, șef de sector științific la Institutul de mecanică aplicată al Academiei R. S. România, care cuprinde modificarea vectorilor acceleraţii pentru realizarea proprietăților distribuțiilor de viteze, ceea ce permite aplicarea simplă a diferitelor metode de calcul. Totodată s-a expus legătura cu metoda acceleraţiilor reduse.

— *Generalizarea legii fundamentale a angrenării* de conf. D. Maroș, care se ocupă de angrenarea spațială, folosind geometria riglatelor.

— *Analiza armonică a grupelor structurale binare* de conf. R. C. Bogdan, director-adjunct științific la Institutul de mecanică aplicată, care prezintă dezvoltările generale ale parametrilor cinematici în serii armonice complexe cu aplicații în analiza și sinteza unitară a grupelor structurale.

— *Asupra unor noi forme ale principiilor variaționale ale mecanicii analitice* de prof. dr. D. Mangeron, care întregește seria lucrărilor colectivelor de la Iași pentru o nouă formă a mecanicii analitice.

— *Mecanisme de comandă logică cu elemente rigide și elastice* de conf. I. Székely, care cuprinde relee mecanice în cadrul schematizării binare cu aplicații în diverse aparataje mecanice.

— *Metodă pentru determinarea efectelor dinamice ale acceleraţiilor de ordinul al doilea* de conf. A. Orănescu, în care, pe baze experimentale și cu mijloace sensibile de măsurare, se cercetează rolul acceleraţiilor de ordin superior.

— *Extinderea ecuațiilor de echilibru ale firelor perfect flexibile și inextresibile în cazul unor sarcini ce se exprimă printr-o funcție cu discontinuități de speța întîi* de conf. W. Kecs, care este realizată pe baza teoriei distribuțiilor.

— *Asupra folosirii metodei aproximative poligonale în cazul unor sisteme neliniare* de prof. Gh. Silaș și lector L. Brîndeu, problemă reieșită din schematizarea fenomenului de batere a piloților prin vibropercuție, care expune rezultate mai rapide decît prin eventuala programare a calculelor respective.

Mai multe lucrări prezentate de prof. dr. D. Mangeron au fost consacrate studiului influențelor acceleraţiilor de ordin superior, utilizării

operatorilor matriciali, a acceleraţiilor reduse etc., care reprezintă contribuţii importante în studiul mişcărilor solidelor rigide şi au constituit cercetări continuate în străinătate pe baza conceptelor iniţiate de colectivele din Iaşi.

În încheierea lucrărilor secţiei de mecanică teoretică şi fizică au vorbit prof. dr. D. Mangeron, prof. dr. R. Voinea, membru corespondent al Academiei R. S. România, prof. dr. N. Calinicenco, conf. R. C. Bogdan, prof. N. I. Manolescu etc., care au subliniat nivelul ridicat al comunicărilor, diversitatea problemelor şi continuitatea în munca tematică.

Dezbaterile asupra lucrărilor prezentate s-au desfăşurat în spirit critic constructiv, fiind foarte active şi ridicînd calitatea sesiunii. Discuţiile şi completările făcute asupra metodelor şi rezultatelor diferiţilor cercetători au indicat direcţiile cele mai bune de atacare ştiinţifică a problemelor. S-a remarcat astfel participarea activă la discuţii a prof. dr. D. Mangeron, prof. dr. R. Voinea, membru corespondent al Academiei R.S.R., prof. N. I. Manolescu, conf. R. C. Bogdan, Chr. Pelecudi, conf. I. Székely, prof. D. Maroş şi conf. C. Drăgan. Un merit deosebit revine prof. dr. D. Mangeron, care a condus lucrările ştiinţifice ale secţiei.

Sesiunea s-a bucurat de o excelentă organizare.

Chr. Pelecudi

RECENZII

V. V. BOLOTIN, *The Dynamic Stability of Elastic Systems* (Stabilitatea dinamică a sistemelor elastice). Holden-Day Inc., San Francisco — Londra — Amsterdam, 1964, XII + + 452 p.

Interesul cercetătorilor în domeniul stabilităţii elastice a sistemelor elastice a crescut din ce în ce mai mult în ultimii ani, atît din punct de vedere matematic, cît şi din punct de vedere practic. Există un număr mare de articole de specialitate în această direcţie, lucrările de sinteză fiind însă foarte puţine.

Aceste lucrări se înglobează matematic în teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale, domeniu în care în ţara noastră s-au obţinut rezultate remarcabile [1]). Lucrarea lui V. V. Bolotin se încadrează în această categorie de cercetări, fiind bazată pe utilizarea judicioasă a proprietăţilor ecuaţiilor de tip Mathieu-Hille.

Prima ediţie a acestei lucrări a apărut în limba rusă în 1956 [2]). În 1960 a apărut o ediţie în limba germană, care cuprindea unele completări mai ales de natură bibliografică, ţinînd seama de studiile apărute între timp. Ediţia engleză a lucrării a fost redactată ţinînd seama în special de ediţia germană, cuprinzînd astfel completările menţionate.

Lucrarea lui V. V. Bolotin constituie la ora actuală cea mai completă monografie în această direcţie, scrisă într-o formă deosebit de clară şi sistematică; ea poate fi utilizată cu succes atît de cercetătorii din domeniul mecanicii solidelor deformabile, cît şi de matematicienii care se ocupă de studiul calitativ al ecuaţiilor diferenţiale.

P. P. Teodorescu

C. F. KOLLBRUNNER şi S. MILOSAVLJEVIĆ, *Neuer Beitrag zur Berechnung von au Außendruck beanspruchten kreiszylindrischen Rohren. Freiverlegtes Rohr und einbetoniertes Rohr* (Noi contribuţii la calculul ţevilor cilindrice supuse la presiune exterioară. Ţeava liberă şi ţeava înglobată în beton), ed. a 2-a, mult dezvoltată şi completată a caietului nr. 19 din MFKS, „Mitteilungen über Forschung und Konstruktion im Stahlbau-

[1]) La conferinţa de „Vibraţii neliniare" de la Berlin (1964), ţara noastră a prezentat cele mai multe referate generale şi comunicări.

[2]) Recenzată în „Studii şi cercetări de mecanică aplicată", Acad. R.S. România, VIII, *4*, 1312 (1957).

MFKS" (Comunicări asupra cercetărilor și execuției în construcțiile metalice), caietul nr. 31, Verlag Leemann, Zürich. 1965, 110 p. + 2 diagrame.

Problema calculului țevilor cilindrice circulare este importantă în multe domenii ale practicii inginerești. A doua ediție a prezentei lucrări este mult dezvoltată față de prima (apărută în 1956), cuprinzînd completări foarte utile pentru calculul practic.

Cartea este împărțită în două părți, fiecare avînd cîte șase paragrafe; prima parte este dedicată problemei țevii libere, iar a doua parte cuprinde problema țevii înglobată în beton. Două diagrame suplimentare care însoțesc lucrarea prezintă interes pentru proiectare.

În ceea ce privește calculul țevii libere, menționăm în special problema stabilității (determinarea sarcinii critice de flambaj). Se consideră țeava nerigidizată și țeava cu rigidizări circulare, folosindu-se rezultatele date de Mises, Flügge, Sanden și Tölke. Cîteva exemple numerice ilustrează rezultatele obținute.

În cazul țevii înglobate în beton se prezintă calculul presiunii critice după Chwalla și Steiner, după Amstutz și Juillard. Se dau rezultate atît pentru cazul tubului nerigidizat, cît și pentru tubul cu rigidizări circulare. Rezultatele exeperimentale prezentate sînt în bună concordanță cu teoriile lui Amstutz și Juillard.

Cartea se remarcă prin precizie, minuțiozitate și claritate. Ea este utilă atît în cercetarea științifică, cît și în proiectarea inginerească.

P. P. Teodorescu

*** *Ingenieur Taschenbuch Bauwesen*, Band IV. Hochbau, Teil 1 : *Grundlagen. Fertigung und Fügung* (Agenda inginerului constructor, vol. IV. Construcții de clădiri, partea 1 : Fundamente. Execuție și montaj), editat sub conducerea prof. dr. ing. E. h. Heinrich Rettig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1964. 1 572 p.

Această agendă, prima parte a volumului al IV-lea, face parte dintr-o serie de cinci volume legate de activitatea inginerului constructor, intitulate : *Fundamentele ingineriei de construcții*, editat sub conducerea prof. dr. ing. habil. Günther Grünig și prof. dr. ing. Alfred Hütter (vol. I) ; *Proiectarea construcțiilor inginerești*, editat sub conducerea prof. dr. ing. hubil Gustav Bürgermesster (vol. II) ; *Pămînt, apă, comunicații*, editat sub conducerea prof. dr. ing. habil Karl Franz Bush (vol. III) ; *Construcții de clădiri* (vol. IV) ; *Tehnologia industriei de construcții*, editat sub conducerea prof. dipl. ing. Otto Heinrich Ledderboge și prof. dr. ing. E. h. Heinrich Rettig (vol. V).

Agenda recenzată este împărțită în două subpărți : A. Fundamente ; B. Execuție și montaj, conținînd cunoștiințele uzuale legate de realizarea construcțiilor de clădiri civile și industriale.

Prima subparte este divizată în trei capitole, după cum urmează : I. Elemente de calcul și desen constructiv ; II. Fizica construcțiilor ; III. Materiale.

Se remarcă în primul capitol prezența unui paragraf judicios realizat privind geometria reprezentativă (axonometrie, perspectivă, perspectivă militară, axonometrie ortogonală etc.). În paragraful destinat rezistenței materialelor trebuie menționat calculul învelitorilor prisma-

tice poligonale. Mai sînt prezentate în acest prim capitol date generale privind matematica, statica, construcţiilor.

Capitolul al II-lea, foarte complet, prezintă teoretic şi aplicat — cu multe aplicaţii şi detalii constructive — problemele termoizolării, hidroizolării, izolării fonice a acusticii încăperilor, izolării la şoc şi iluminării.

În capitolul al III-lea sînt prezentate cunoştinţe din chimie utile în industria construcţiilor, precum şi un paragraf, deosebit de dezvoltat, privind materialele de construcţii.

A doua subparte, privind execuţia şi montajul, este, la rîndul ei, împărţită în patru capitole: IV. Fundaţii de clădiri; V. Structuri de constructii de clădiri; VI. Finisaje; VII. Instalaţii de clădiri.

Capitolul al V-lea, deosebit de dezvoltat, se referă la proiectarea şi la execuţia structurilor de rezistenţă de clădiri, realizate din zidărie, lemn, piatră, oţel, beton, beton armat, schele şi cofraje.

De asemenea este mult dezvoltat capitolul al VII-lea, conţinînd date privind alimentarea cu apă, căldură a clădirilor, canalizarea, ventilaţia, realizarea instalaţiilor electrice, protecţia contra incendiilor etc.

În ansamblu se remarcă grija cu care au fost triate rezultatele şi datele prezentate, pe baza criteriului utilităţii în proiectarea şi execuţia construcţiilor de clădiri. În acest fel s-a reuşit ca într-un volum relativ mic să se includă o cantitate deosebit de mare de date utile.

În prezentarea acestor date s-a ţinut seama de cele mai recente rezultate obţinute în legătură cu proiectarea şi cu execuţia de clădiri. Fiecare paragraf este dublat de o bogată bibliografie de specialitate.

Lucrarea se adresează inginerilor constructori, proiectanţi şi executanţi, arhitecţilor, precum şi tehnicienilor în construcţii.

V. Visarion

J. D. ROBSON, *An introduction to random vibration* (Introducere în vibraţii aleatoare). Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 150 p.

Monografia se adresează specialiştilor, ingineri proiectanţi, cercetători ştiinţifici, care se ocupă cu studiul influenţei vibraţiilor ce se produc în timpul zborului aeronavelor în regim turbulent asupra structurii de rezistenţă, asupra stabilităţii şi comenzilor acestora. Ea poate fi utilizată şi de toţi cei ce se ocupă cu studiul vibraţiilor seismice, al vibraţiilor autovehiculelor provenite din neregularităţile căii de rulare sau cu studiul „zgomotelor" în electronică etc. Ea este rezultatul unor cursuri de specializare ţinute timp de mai mulţi ani de către autor la Universitatea din Edinburgh.

Primul capitol este dedicat definirii noţiunii de vibraţii aleatoare, caracteristicilor acestor vibraţii, posibilităţilor de modelare, teoretică şi aplicaţiilor practice ale acestora. De asemenea sînt date în acest capitol indicaţii referitoare la notaţiile utilizate.

Capitolele al II-lea şi al III-lea au un caracter pregătitor pentru studiul vibraţiilor aleatoare, fiind dedicate în întregime noţiunilor şi relaţiilor de bază, respectiv ale statisticii matematice (calculul probabilităţilor) şi al analizei armonice. În această ordine de idei sînt prezentate, în general fără demonstraţii, rezultatele pentru calculul probabilităţilor simple şi combinate

independent şi corelat, seriile şi integrala Fourier, densitatea spectrală, distribuţia probabilistică, funcţia de autocorelare etc.

În capitolul al IV-lea este studiat răspunsul unui sistem liniar, de o singură sarcină tranzitorie, periodică şi aleatoare.

Capitolul al V-lea este dedicat studiului răspunsului unui sistem liniar la acţiunea mai multor sarcini aleatoare prin utilizarea corelaţiilor cross (acţiuni la distanţă) pentru studiul excitaţiilor şi răspunsului. De asemenea este studiat răspunsul sistemului la o sarcină continuu distribuită.

În capitolul al VI-lea este studiată comportarea unui sistem liniar la sarcini aleatoare continue, cu o distribuţie probabilistică impulsivă sau gaussiană.

Capitolul al VII-lea este dedicat studiului metodelor de încercări la sarcini aleatoare, ţinîndu-se seama că cea mai mare parte a încercărilor nu se pot face pe modelele naturale în condiţiile de exploatare, aparatele de zbor şi rachetele fiind prin excelenţă greu de încercat în condiţii normale de funcţionare.

Monografia mai conţine un apendice referitor la teoria generală a vibraţiilor periodice, liniare sau cu amortizare, în care se dau rezultatele necesare unei înţelegeri depline a problemelor tratate.

Studiile întreprinse în capitolele IV—VII sînt duse pînă la formule care pot fi utilizate cu uşurinţă în munca de proiectare a structurilor supuse la vibraţii de acest tip.

Cunoaşterea variaţiilor unor mărimi mecanice (forţe, eforturi, deformaţii etc.) prin mijloace statistice — în medie — deşi imperfecte din punctul de vedere al determinismului mecanic, are o importanţă practică deosebită, datorită faptului că în realitate neliniaritatea sistemelor mecanice atenuează într-o măsură considerabilă efectele de vîrf.

Faptul că în monografie sînt studiate doar vibraţiile aleatoare staţionare şi ergodice nu micşorează valoarea practică a acestei lucrări.

Bibliografia dată la sfîrşitul cărţii are drept scop principal sprijinirea referirilor din text. Cîteva indicaţii bibliografice sînt date referitor la unele cărţi de mare importanţă în acest domeniu sau care conţin idei preţioase pentru dezvoltarea teoriei.

D. Drăghicescu

H. E. BARNACLE şi G. E. WALKER, *Mechanics of Machines*, vol. I (Mecanica maşinilor). Pergamon Press, Londra-New York, 1965, XI + 300 p., 193 fig.

Acest prim volum de mecanică tehnică cuprinde capitole consacrate diverselor efecte dinamice (giroscop, forţe inerţiale, frecare, forţe elastice) care intervin în calculul şi proiectarea elementelor de maşini (came, roţi dinţate, curele de transmisiune, mecanisme, regulatoare centrifugale etc.). Ordinea acestor capitole este oarecum arbitrară, vădind o practică pedagogică specializată în predarea mecanicii pentru studenţii facultăţilor tehnice, cărora li se adresează această lucrare. În acest sens, cartea reprezintă o combinaţie de mecanică analitică (capitolul general „Dynamics"), rezistenţa materialelor şi elasticitate (cap. „Vibraţii elastice"), lubrificaţie, teoria mecanismelor etc.

Prezentarea acestor capitole se distinge prin claritate şi eficacitate. Renunţînd la detalii, autorii au căutat să surprindă esenţa fiecărui efect dinamic şi să-l prezinte la un nivel de universitate modernă, în sensul descrierii matematice prin ecuaţiile diferenţiale corespunzătoare. Sînt

alese soluțiile tipice ale acestor ecuații și bogat ilustrate prin numeroase exemple practice, tratate complet, astfel încît oferă o imagine vie, concretă, a efectului teoretic studiat (de exemplu aplicațiile de la teoria giroscopului).

Această lucrare este o reușită culegere de probleme de mecanică tehnică, de un deosebit folos pentru cei care studiază mecanica și rezistența materialelor în scopul unor aplicații directe în calculul organelor de mașini.

Șt. N. Săvulescu

* * * VDI BERICHTE Nr. 75, *Hydraulische Strömungsmaschinen*, Vorträge der V D I – Tagung Freiburg im Breisgau 1963 (Rapoarte V D I nr. 75, Mașini hidraulice, Comunicările Conferinței V D I de la Freiburg im Breisgau, 1963), V D I-Verlag, Düsseldorf, 1964, 146 p. +217 fig. și 7 tabele.

Construcția și funcționarea diverselor tipuri de mașini hidraulice pun numeroase probleme, care au implicații teoretice în special în mecanica fluidelor și în termodinamică. Cele treisprezece lucrări prezentate la conferința organizată în aprilie 1963 de către Uniunea inginerilor germani conțin astfel de probleme și au ocazionat discuții ample și vii, în special în legătură cu scurgerile nestaționare, metodele de măsură termodinamice, problemele constructive ale turbinelor Francis și pompelor centrifuge, precum și în legătură cu desprinderea stratului-limită.

Astfel, în comunicarea sa prof. G. Hutarew prezintă unele aspecte ale exploatării turbinelor cu apă în regim nestaționar. Măsurătorile au fost efectuate pentru a se obține comportarea dinamică a unei turbine cu apă în complexul ei de funcționare, care include conducta de aducțiune și aceea de evacuare a apei, precum și partea electrică.

O comunicare asupra exploatării turbinelor Kaplan în afara domeniului normal de lucru, prezentată de W. Thuss, conține o serie de date interesante asupra momentului unei astfel de turbine în diverse situații speciale. Discuțiile au scos în evidență importanța cercetărilor experimentale pentru dezvoltarea mașinilor hidraulice moderne.

Comportarea la pornire a turbinelor-pompe cu putere mare sau cu turație specifică ridicată a fost studiată, în vederea obținerii unui proces de pornire cît mai convenabil, de către D. Florjancic și D. Hartland. Lucrarea a dat naștere la discuții ample, fapt care denotă importanța practică a acestor probleme.

O. Schiele și Th. Handwerker au prezentat o lucrare în legătură cu problema oscilațiilor de presiune la agregatele de pompare submersibile.

Tendințele de dezvoltare ale turbinei-pompă sînt analizate de către prof. M. Medici, care scoate în evidență extinderea viitoare a posibilităților de aplicare a acestei mașini reversibile. Discuțiile în legătură cu această lucrare au fost de asemenea interesante.

R. Dziallas a tratat problema turbinelor Francis la sarcină parțială și la suprasarcină. Funcționarea în aceste regimuri pricinuiește apariția unor perturbații periodice. În lucrare se analizează formarea vîrtejurilor și se discută metodele pentru înlăturarea acestor perturbații.

În lucrarea prezentată de G. Wonsak sînt expuse rezultatele cercetărilor cu privire la scurgerea într-o pompă radială de tip special.

O cercetare teoretică și experimentală asupra difuzoarelor radiale fără palete este conținută în lucrarea lui K. Vielhaber, care pune accentul în special pe influența pe care o are asupra scurgerii prezența unor perturbații fixe.

F. L. Brand a prezentat o metodă termodinamică pentru măsurarea randamentului turbinelor hidraulice şi pompelor, care a făcut obiectul unor discuţii cu precizări interesante.

H. Rögener şi F. Arens-Fischer au expus experienţe cu procedee termodinamice de măsură la pompele de alimentare ale căldărilor.

Pompele centrifuge utilizate la drage sînt supuse unor uzuri destul de intense, a cărei micşorare a făcut obiectul lucrării prezentate de către A. Welte.

O problemă constructivă referitoare la execuţia elementelor constructive cu formă toroidală ale turbomaşinilor constă în apariţia anumitor supratensiuni, care au fost calculate de către prof. J. Raabe în lucrarea sa.

În sfîrşit, prof. M. Strscheletzky a studiat desprinderea stratului-limită şi a suprafeţelor de discontinuitate în legătură cu fenomenele de scurgere în maşinile hidraulice.

Această scurtă trecere în revistă a comunicărilor prezentate arată diversitatea şi complexitatea problemelor care apar în studiul maşinilor hidraulice. Fără a cuprinde tot domeniul, aceste comunicări aduc contribuţii interesante, şi fără îndoială cunoaşterea conţinutului lor este utilă specialiştilor în domeniul respectiv.

T. Oroveanu

LUCRĂRI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE

MEMORIE E STUDI DELL'ISTITUTO DI IDRAULICA E COSTRUZIONI IDRAULICHE DEL POLITECNICO DI MILANO

M. MARCHETTI, *L'Istituto di Idraulica e costruzioni Idrauliche* (nr. 229/1964).
GIORGIO NOSEDA, *Un fenomeno di instabilità del risalto lungo una corrente veloce in espansione* (nr. 227/1964).
V. MARONE, *Coefficienti di efflusso degli sfioratori longitudinali* (nr. 226/1964).
V. MARONE, *Sulla resistenza al moto nei canali con scabrezza macroscopica geometricamente definita* (nr. 222/1964).
UGO MAIONE, *Nota sulla formula di Dupuit-Forchheimer* (nr. 230/1964).
UGO MAIONE, *Perdite di carico nelle correnti regolari in condotti circolari riscaldati dall'esterno* (nr. 204/1964).

DISERTAȚII DE LA INSTITUTUL POLITEHNIC STUTTGART

S. GURR, *Beitrag zur Berechnung zusammengesetzter ebener Flächentragwerke unter besonderer Berücksichtigung ebener Stauwände, mit Hilfe von Rundwert- und Lustwert-matrizen*, 1964.
L. ANHEUSER, *Beitrag zur Berechnung des Kreisträgers mit offenem dünnwandigem Profil*, 1964.
K. H. LILLICH, *Die Behandlung magnetofluidodynamischer Strömungsvorgänge in thermodynamischen Zustandsdiagrammen*, 1964.
D. STUMPP, *Experimentelle Untersuchungen zur Konstruktion und Wirtschaftlichkeit gespeister, ebener Luftlager*, 1964.
H. LENK, *Über das Schwingungsverhalten von Spannbeton- und Stahlbetonbalken*, 1964.
H. GOESER, *Geschlossene Lösungen für die Biegungs- und Drillmomente frei gelagerter orthotroper Rechtecksplatten sowie Plattenstreifen unter Einzellasten*, 1964.
K. OSWATITSCH, *Zwischenballistik*. Deutsche Luft- und Raumfahrt Forschungsbericht nr. 64—37/1964.
H. TRUE, *Die Instabilität einer strömenden, von unten geheizten Flüssigkeitsschicht gegenüber Längswirbeln*. Deutsche Luft- und Raumfahrt Forschungsbericht nr. 64—32/1964.
— *Galileo Galilei*. 1564—1964. Jena, 1964.
J. G. LEKKERKERKER, *On the Stress Distribution in Cylindrical Shells Weakened by a Circular Hole*. Delft, 1965.
S. ŢOI, *Osnovi teorii ventiliaţionnih setei*. Alma-Ata, 1965.
— *Realisierung der physikalischen Grundeinheiten*. Symposium, Braunschweig, 1964.
J. L. SYNGE, *The Petrov Classification of Gravitational Field*. Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, Series A, no. 15/1964.
B. K. O. LUNDBERG, *A Statistical Method for Fail-safe Design with Respect to Aircraft Fatigue*. FFA Report nr. 99/1964.
A. SAMUELSON, *A Theoretical Investigation of Creep Deformation and Buckling of a Circular Cylindrical Shell under Axial Compression and Internal Pressure*. FFA Report nr. 100/1964.
H. THOMAN, *Determination of the Size of Ice Criptals Formed During Condensation of Water in Wind Tunnels and of their Effect on Boundary Layers*. FFA Report nr. 101/1964.

P. ESCHMANN, *Untersuchung über den Einfluss des Verschleisses auf die Lebensdauer der Wälzlager*. Braunschweig, 1963.

N. GREGORY, *The Effect of Forward Speed on the Inlet Flow Distribution and Performance of a Lifting Fan Installed in a Wing*. Aeronautical Research Council Reports and Memoranda nr. 3388/1965.

G. G. POPE, *On the axial compression of long, slightly curved panels*. Aeronautical Research Council Reports and Memoranda nr. 3392/1965.

C. SALTER, *Notes and comments on some particular features of wind-tunnel design following measurements of flow distribution, wall pressures etc. in the N.P.L. 7 ft (low turbulence) wind tunnel*. Aeronautical Research Council Reports and Memoranda nr. 3399/1965.

A. B. HAINES, *Transonic tunnel tests on a 6% thick, warped 55° sweptback-wing model*. Aeronautical Research Council Reports and Memoranda nr. 3385/1965.

A. G. NAZAROV, *Metod injenernogo analiza seismiceskih sil*. Izdvo AN Armianskoi SSR Erevan, 1959, 285 p.

B. K. KARAPETIAN, *Mnogomaiatnikovie seismometri i rezultati ih primenenia v injenernoi seismologhii*. Aipetrat, Erevan, 1963, 174 p.

C. D. HOPE-GILL, *An experimental investigation into the shape of thrust augmenting surfaces in conjunction with Coanda-deflected jet sheets*. Part I. UTIAS Technical Note nr. 70/1964.

R. C. TENNYSON, *An experimental investigation of the buckling of circular cylindrical shells in axial compression using the photoelastic technique*. UTIAS Report nr. 102/1964.

J. DODU, *Contribution à l'étude de la dispersion des jets liquides à grande vitesse*. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de L'Air, nr. 407/1964.

H. BUDD, *Contributions à la théorie des phénomenes de transport*. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, nr. 408/1964.

M. SKOWRONEK, *Production de jets filiformes de gaz ionisés et application au passage de très fortes densités de courant*. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, nr. 409/1964.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 20, nr. 5 1965

SUMAR

STUDII

Pag.

T. OROVEANU, Cîteva consideraţii asupra deplasării suprafeţei de contact dintre două fluide într-un mediu poros neomogen 1065

ŞT. N. SĂVULESCU, Influenţa vîrtejurilor longitudinale instaţionare asupra profilului Blasius în stratul-limită tranziţional al plăcii plane 1083

VALERIU PETCU, Calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat rezemate pe trei laturi solicitate de încărcări de tip hidrostatic 1099

RADU PRIŞCU şi ADRIAN POPOVICI, O soluţie generală pentru dimensionarea barajelor de greutate triunghiulară 1117

AUGUSTIN PETRE şi VIRGIL BOGDAN, Discuri neomogene în mişcare de rotaţie 1133

AL. NICA, Contribuţii la determinarea jocului real în lagărele cu alunecare 1147

D. MANGERON, R. CHALÉAT şi C. DRĂGAN, Teoria generală a aproximaţiilor succesive în studiul mecanismelor şi maşinilor prin noua metodă matricială-tensorială, elaborată în vederea folosirii maşinilor electronice de calcul. I. . . . 1157

CHRISTIAN PELECUDI, Metoda solidarizării pentru lanţurile cinematice închise. Partea I 1203

FL. DUDIŢĂ, Contribuţii la cinetostatica mecanismelor cardanice 1235

RECENZII 1257

LUCRĂRI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACŢIE 1263

St. cerc. mec. apl., Tom. 20, Nr. 5, p. 1063—1266, Bucureşti, 1965

Budapesti Műszak[illegible]yetem
Központi Kény
Folyóiratjelt[illegible]
254 | 1966

CÎTEVA CONSIDERAȚII ASUPRA DEPLASĂRII SUPRAFEȚEI DE CONTACT DINTRE DOUĂ FLUIDE ÎNTR-UN MEDIU POROS NEOMOGEN[1])

de T. OROVEANU
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

Problema studiată este aceea a dezlocuirii unui fluid de către un altul într-un strat permeabil înclinat. Se deduce ecuația diferențială a suprafeței de contact, ținîndu-se seama de faptul că permeabilitatea este presupusă variabilă după o direcție normală pe baza stratului. În felul acesta se ajunge la o ecuație diferențială care are aceeași formă cu cea cunoscută în literatura de specialitate [1], [4] pentru cazul unui strat a cărui permeabilitate este constantă. Ecuația fiind neliniară, nu se poate găsi o soluție exactă decît dacă stratul este vertical, ceea ce face să dispară termenul neliniar. Atunci cînd unghiul pe care îl face stratul cu orizontala este oarecare, trebuie să se întrebuințeze un procedeu aproximativ de rezolvare, și anume cel propus pentru scurgerea într-un strat a cărui permeabilitate este constantă [4]. Analiza soluției exacte găsite în cazul particular semnalat mai sus face să reiasă rolul pe care îl joacă variația admisă a permeabilității. Concluzii asemănătoare rezultă din studiul soluției aproximative.

1. **Introducere.** Studiul dezlocuirii unui fluid de către un altul într-un mediu poros se poate face și cu ipoteza simplificatoare a existenței unei frontiere de separație între cele două fluide. Această frontieră împarte mediul poros în două regiuni, și anume una care conține fluidul ce urmează să fie dezlocuit și, eventual, o saturație ireductibilă în fluidul de dezlocuire și alta care conține fluidul de dezlocuire și o saturație reziduală în fluidul dezlocuit. În felul acesta, în prima zonă curge numai fluidul dez-

[1]) Publicată în „Rev. roum. sci. tech.-Mécanique Appliquée", **10**, *5* (1965) (în lb. franceză).

locuit, iar în a doua numai fluidul de dezlocuire. Frontiera dintre cele două fluide formează un front sau o suprafaţă de discontinuitate pentru saturaţie şi poate fi asimilată cu o suprafaţă de contact geometrică.

Dintre numeroasele probleme studiate pe această cale, vom considera în cele ce urmează determinarea formei suprafeţei de contact într-un plan vertical paralel cu viteza de filtrare. Această problemă apare atunci cînd se consideră dezlocuirea petrolului de către un alt fluid, apă sau gaz, într-un strat care poate avea o înclinare faţă de orizontală. În cadrul unei scheme simplificate, şi anume neglijînd diferenţa dintre masele specifice ale celor două fluide, deplasarea suprafeţei de contact dintre două fluide a fost considerată de către A. M. Pirverdian [10]. Ulterior, I. A. Ciarnîi [1] a dedus ecuaţia diferenţială a deplasării suprafeţei de contact, incluzînd şi efectul diferenţei dintre masele specifice ale celor două fluide, care de altfel este important.

Cercetările au arătat că diferenţele de masă specifică şi de viscozitate dintre cele două fluide influenţează considerabil forma suprafeţei de contact într-un plan vertical. Studierea acestui fenomen este interesantă din punct de vedere practic, deoarece înaintarea suprafeţei de contact spre sonde trebuie să se producă aşa fel, încît dezlocuirea să fie cît mai completă înainte ca în sonde să apară fluidul de dezlocuire. Din acest punct de vedere, problema a fost considerată de către D. N. Dietz [3], care a propus o metodă aplicabilă la sistemele de scurgere bidimensionale, ca şi cele menţionate mai sus. Concluziile au fost că pentru un interval de debite mici suprafaţa de contact este stabilizată, plană şi formează cu baza stratului un unghi care poate fi calculat uşor. Există însă un debit critic la care panta suprafeţei de contact este egală cu înclinarea stratului. Dacă debitul depăşeşte această valoare, înaintarea fluidului de dezlocuire se face aşa fel, încît se formează un „deget" care invadează zona ocupată de fluidul dezlocuit, la partea inferioară sau la partea superioară a stratului.

Teoria formulată de către D. N. Dietz este aproximativă, deoarece, atîta timp cît există un efect gravitaţional, scurgerea nu este riguros paralelă cu baza stratului. Această observaţie se aplică de altfel şi la rezultatele găsite de către I. A. Ciarnîi.

R. G. Hawthorne [5] a reluat consideraţiile lui D. N. Dietz, propunînd şi o metodă numerică pentru determinarea formei suprafeţei de contact nestabilizate. Ulterior, J. W. Sheldon şi F. J. Fayers [12] au studiat problema în cazul în care unghiul de înclinare al stratului faţă de orizontală este mic şi au integrat printr-o metodă numerică ecuaţia diferenţială a suprafeţei de contact. La rîndul lor, B. Le Fur şi P. Sourieau [4] au considerat forma completă a acestei ecuaţii, în cadrul aproximaţiei utilizate de către D. N. Dietz, şi au propus un procedeu de liniarizare care permite găsirea unei soluţii aproximative fără a mai fi necesar să se recurgă la metode numerice de integrare. Vom arăta mai departe că această ecuaţie nu diferă de aceea dedusă anterior de către I. A. Ciarnîi.

Mai înainte, J. C. Martin [6] a studiat de asemenea cazul în care unghiul de înclinare al stratului faţă de orizontală este mic şi a obţinut

o soluție exactă, presupunînd că suprafața de contact se deplasează cu o viteză constantă și nu-și schimbă forma în timp. O astfel de soluție corespunde unei suprafețe de contact stabilizate.

În sfîrșit, H. D. Outmans [8] a urmat o cale diferită, prin care se elimină unele aproximații ale metodelor menționate mai sus și se include efectul tensiunii interfaciale, punîndu-se în evidență influența acesteia asupra formei suprafeței de contact și asupra valorii debitului critic.

Precizăm că toate aceste cercetări se referă la comportarea macroscopică a suprafeței de contact, problema propriu-zisă a stabilității acesteia, care implică formarea mai multor „degete", studiindu-se pe altă cale.

În cele ce urmează vom extinde unele dintre considerațiile teoretice menționate mai înainte la cazul în care mediul poros este neomogen, în scopul de a urmări efectul acestei neomogenități asupra fenomenului de deplasare a suprafeței de contact. Vom păstra de asemenea ipoteza comună tuturor lucrărilor la care ne-am referit, și anume că cele două fluide sînt incompresibile.

2. **Ecuația diferențială a suprafeței de contact.** Să considerăm un strat de grosime h, înclinat cu un unghi α față de orizontală, inițial saturat cu un fluid pe care îl vom nota cu indicele 1, dezlocuirea efectuîndu-se cu ajutorul unui alt fluid cu masa specifică mai mare, notat cu indicele 2. Fluidul de dezlocuire se injectează pe la partea inferioară a stratului, cu un debit Q, iar dezlocuirea se face în condițiile pe care le-am precizat

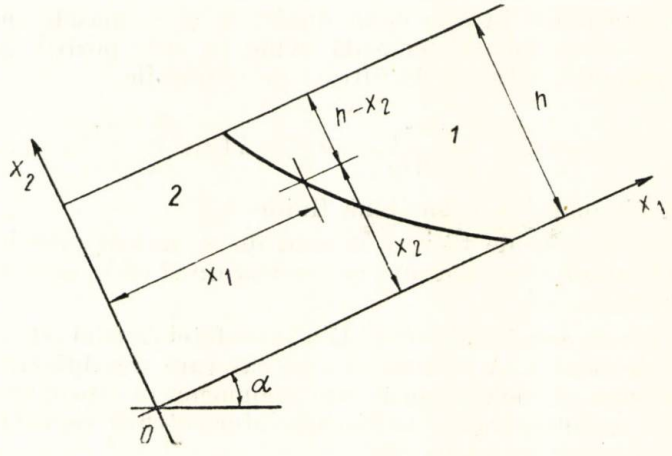


Fig. 1

mai sus, astfel că există o suprafață de contact care delimitează zonele ocupate de cele două fluide (fig. 1).

Ne vom mărgini la cazul în care permeabilitatea stratului variază în direcția normalei pe baza acestuia, situație care se întîlnește frecvent în practică [2]. Dacă alegem axele ca în figura 1, permeabilitatea apare ca

funcţie de variabila x_2. Teoria lui D. N. Dietz face uz de o aproximaţie de acelaşi fel cu cea introdusă de către J. Boussinesq în studiul scurgerilor cu suprafaţă liberă în medii poroase, şi anume că viteza de filtrare este paralelă cu baza stratului şi independentă de x_2. Vom extinde această aproximaţie aşa cum am procedat anterior [7] în studiul scurgerilor cu suprafaţă liberă în medii poroase neomogene, şi anume vom presupune că viteza de filtrare depinde de x_2 numai prin intermediul permeabilităţii care este funcţie de aceeaşi variabilă.

Deoarece în zona ocupată de fluidul dezlocuit 1 poate exista o situaţie ireductibilă în fluidul de dezlocuire 2, vom scrie permeabilitatea în această zonă sub forma

$$k^{(i)} = \tilde{k}^{(i)}\, k\,(x_2), \tag{1}$$

unde $k(x_2)$ este permeabilitatea absolută a mediului poros, iar $\tilde{k}^{(i)}$ o mărime adimensională, analogă cu permeabilitatea relativă însă constantă. Tot astfel, în zona ocupată de fluidul de dezlocuire 2, în care există o saturaţie reziduală în fluidul dezlocuit 1, avem

$$k^{(r)} = \tilde{k}^{(r)}\, k\,(x_2), \tag{2}$$

$\tilde{k}^{(r)}$ având aceeaşi semnificaţie ca şi $\tilde{k}^{(i)}$.

Dacă introducem funcţiile

$$\varphi_1 = -(p_1 + \rho_1 gz), \qquad \varphi_2 = -(p_2 + \rho_2 gz), \tag{3}$$

p_1 şi p_2 fiind presiunile în cele două fluide, ρ_1 şi ρ_2 masele specifice ale acestora, iar z o coordonată verticală având ca sens pozitiv pe acela al verticalei ascendente, vitezele de filtrare au expresiile

$$v_1^{(1)} = k(x_2)\frac{\tilde{k}^{(i)}}{\mu_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \qquad v_1^{(2)} = k(x_2)\frac{\tilde{k}^{(r)}}{\mu_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, \tag{4}$$

μ_1 şi μ_2 fiind viscozităţile celor două fluide.

Deoarece vitezele de filtrare depind de x_2 numai prin intermediul permeabilităţii absolute a mediului poros, înseamnă că φ_1 şi φ_2 sînt funcţii numai de variabila x_1.

Pentru a scrie ecuaţia diferenţială a suprafeţei de contact, vom utiliza calea urmată de către I. A. Ciarnîi [1], cu oarecare simplificări de detaliu şi cu presupunerea că mediul poros este neomogen în sensul precizat mai înainte. Într-o secţiune transversală care intersectează suprafaţa de contact (fig. 1), debitele au expresiile

$$Q_1 = k\frac{\tilde{k}^{(i)}}{\mu_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(h - x_2), \qquad Q_2 = k\frac{\tilde{k}^{(r)}}{\mu_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}x_2. \tag{5}$$

Pe de altă parte, ecuaţiile de continuitate pentru cele două fluide sînt

$$m\frac{\partial}{\partial t}(h - x_2) + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} = 0, \qquad m\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} = 0. \tag{6}$$

Adunînd formulele (5), obținem debitul total

$$Q = k\left[\frac{\widetilde{k}^{(i)}}{\mu_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(h - x_2) + \frac{\widetilde{k}^{(r)}}{\mu_2}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}x_2\right] \tag{7}$$

și, deoarece pe suprafața de contact presiunile p_1 și p_2 sînt egale, din (3) rezultă

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \rho g z, \tag{8}$$

unde

$$\rho = \rho_2 - \rho_1. \tag{9}$$

În felul acesta, formula (7) devine

$$Q = k\left\{\left[\frac{\widetilde{k}^{(i)}}{\mu_1}(h - x_2) + \frac{\widetilde{k}^{(r)}}{\mu_2}x_2\right]\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\widetilde{k}^{(i)}}{\mu_1}\rho g(h - x_2)\frac{\partial z}{\partial x_1}\right\} \tag{10}$$

și ne dă

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = \frac{Q - k\dfrac{\widetilde{k}^{(i)}}{\mu_1}\rho g(h - x_2)\dfrac{\partial z}{\partial x_1}}{k\left[\dfrac{\widetilde{k}^{(i)}}{\mu_1}(h - x_2) + \dfrac{\widetilde{k}^{(r)}}{\mu_2}x_2\right]}. \tag{11}$$

Prin urmare, debitul Q_2 se mai poate scrie sub forma

$$Q_2 = \frac{\widetilde{k}^{(r)}}{\mu_2}\frac{Q - k\dfrac{\widetilde{k}^{(i)}}{\mu_1}\rho g(h - x_2)\dfrac{\partial z}{\partial x_1}}{\dfrac{\widetilde{k}^{(i)}}{\mu_1}(h - x_2) + \dfrac{\widetilde{k}^{(r)}}{\mu_2}x_2}x_2 \tag{12}$$

și, dacă înlocuim această expresie în a doua ecuație (6), obținem ecuația diferențială a suprafeței de contact

$$m\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\widetilde{k}^{(r)}}{\mu_2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{Q - k\dfrac{\widetilde{k}^{(i)}}{\mu_1}\rho g(h - x_2)\left(\dfrac{\partial x_2}{\partial x_1}\cos\alpha + \sin\alpha\right)}{\dfrac{\widetilde{k}^{(i)}}{\mu_1}(h - x_2) + \dfrac{\widetilde{k}^{(r)}}{\mu_2}x_2}x_2\right] = 0, \tag{13}$$

după ce am ținut seama și de relația

$$z = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha. \tag{14}$$

Această ecuație este foarte asemănătoare cu cea dată în [1], deosebirea provenind numai din faptul că de data aceasta mediul poros este neomogen. Pe lîngă permeabilitatea absolută putem presupune că și porozitatea m este funcție de x_2.

Este ușor să dăm ecuației (13) o formă diferită, care constituie generalizarea, pentru un mediu poros neomogen de felul aceluia pe care l-am considerat, a ecuației deduse în [4]. Astfel, dacă punem

$$\varepsilon = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\widetilde{k}^{(r)}}{\widetilde{k}^{(i)}}, \tag{15}$$

ecuația (13) devine

$$m \frac{\partial x_2}{\partial t} + Q \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\varepsilon x_2}{(h - x_2) + \varepsilon x_2}\right] -$$

$$- \frac{\widetilde{k}^{(r)}}{\mu_2} \rho g \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{k x_2 (h - x_2)\left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1} \cos \alpha + \sin \alpha\right)}{(h - x_2) + \varepsilon x_2}\right] = 0. \tag{16}$$

Mai departe, introducem ca în [4] notația

$$s^* = \frac{x_2}{h}, \tag{17}$$

precum și permeabilitatea absolută adimensională

$$\widetilde{k}(s^*) = \frac{k}{k^{(m)}}, \tag{18}$$

unde $k^{(m)}$ este permeabilitatea absolută medie.

După cîteva calcule simple, ecuația (16) ia forma

$$m \frac{\partial s^*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{Q}{h} f_1(s^*) - k^{(m)} \frac{\widetilde{k}^{(i)}}{\mu_1} \rho g f_2(s^*) \sin \alpha\right] -$$

$$- k^{(m)} \frac{\widetilde{k}^{(i)}}{\mu_1} \rho g h \frac{\partial}{\partial x_1}\left[f_2(s^*) \frac{\partial s^*}{\partial x_1} \cos \alpha\right] = 0, \tag{19}$$

unde am pus

$$f_1(s^*) = \frac{\varepsilon s^*}{1 - (1 - \varepsilon) s^*}, \qquad f_2(s^*) = \frac{\varepsilon \widetilde{k}(s^*) s^* (1 - s^*)}{1 - (1 - \varepsilon) s^*}, \tag{20}$$

aceste funcții deosebindu-se de cele utilizate în [4] atît datorită definiției lui ε, cît și faptului că permeabilitatea este variabilă.

În sfîrșit, cu notațiile

$$v_1^{(m)} = \frac{Q}{h}, \qquad v_1^{(g)} = k^{(m)} \frac{\widetilde{k}^{(i)}}{\mu_1} \rho g \tag{21}$$

și

$$f(s^*) = f_1(s^*) - \frac{v_1^{(g)}}{v_1^{(m)}} f_2(s^*) \sin \alpha, \qquad g(s^*) = - \frac{v_1^{(g)}}{v_1^{(m)}} f_2(s^*) \cos \alpha, \tag{22}$$

ajungem la ecuația

$$m\frac{\partial s^*}{\partial t} + v_1^{(m)} f'(s^*)\frac{\partial s^*}{\partial x_1} + v_1^{(m)} h \frac{\partial}{\partial x_1}\left[g(s^*)\frac{\partial s^*}{\partial x_1}\right] = 0, \tag{23}$$

identică formal cu aceea dedusă în [4].

3. **Rezolvarea problemei într-un caz particular.** Ecuația (23) este neliniară, ceea ce face ca găsirea soluțiilor să prezinte dificultăți. Observăm însă că, atunci cînd stratul este vertical $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$, funcția $g(s^*)$ se anulează și, în loc de (23), obținem

$$\frac{1}{v_1^{(m)}}\frac{\partial s^*}{\partial t} + \frac{f'(s^*)}{m}\frac{\partial s^*}{\partial x_1} = 0, \tag{24}$$

ecuație de aceeași formă cu cea întîlnită în teoria dezlocuirii lichidelor imiscibile, atunci cînd nu se ține seama de efectul capilarității. Considerînd în spațiul t, x_1, s^* ($t \geqslant 0$, $x_1 \geqslant 0$, $0 \leqslant s^* \leqslant 1$) o curbă definită în cazul nostru prin

$$t_0(\tau) = 0, \quad x_1^{(0)}(\tau) = \tau, \quad s^*(\tau) = \chi(\tau), \tag{25}$$

unde τ este un parametru, găsirea suprafeței integrale a ecuației (24) corespunzătoare acestor condiții constituie problema de valori inițiale care trebuie rezolvată. Soluția se găsește cu ușurință prin integrarea sistemului caracteristic

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{1}{v_1^{(m)}}, \quad \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{f'(s^*)}{m}, \quad \frac{\mathrm{d}s^*}{\mathrm{d}\lambda} = 0, \tag{26}$$

λ fiind de asemenea un parametru.

Dacă presupunem că $v_1^{(m)}$ este o constantă, găsim

$$t = \frac{\lambda}{v_1^{(m)}} + t_0, \quad x_1 = \frac{f'(s^*)}{m}\lambda + x_1^{(0)}, \tag{27}$$

t_0 și $x_1^{(0)}$ fiind constante de integrare ; a treia ecuație (26) conduce la concluzia că, în lungul unei caracteristici, s^* păstrează aceeași valoare.

Deoarece avem

$$\tau = \chi^{-1}(s^*), \tag{28}$$

unde prin χ^{-1} am notat funcția inversă a lui $\chi(\tau)$, ecuațiile (27) ne dau, după eliminarea lui λ,

$$x_1 = \frac{f'(s^*)}{m} v_1^{(m)} t + \chi^{-1}(s^*) \tag{29}$$

sau

$$s^* = \chi\left[x_1 - \frac{f'(s^*)}{m} v_1^{(m)} t\right], \tag{30}$$

care este ecuația suprafeței integrale căutate. Dacă funcția are derivata de primul ordin continuă, soluția precedentă este unică pentru datele inițiale (25), deoarece este ușor de constatat că celelalte condiții necesare în acest scop sînt îndeplinite.

În cele ce urmează ne vom ocupa de un caz particular, și anume vom observa că

$$x_1 = \frac{f'(s^*)}{m} v_1^{(m)} t \tag{31}$$

este de asemenea o soluție a ecuației (24); suprafața integrală corespunzătoare trece prin curba

$$t_0(\tau) = 0, \quad x_1^{(0)}(\tau) = 0, \tag{32}$$

ceea ce înseamnă că în momentul inițial suprafața de contact dintre cele două fluide este planul orizontal $x_1 = 0$.

Din examinarea formulelor (20) și (22), ținînd seama de faptul că avem $\alpha = \frac{\pi}{2}$, rezultă

$$f(s^*) = \left[1 - \frac{v_1^{(g)}}{v_1^{(m)}}(1 - s^*)\,\tilde{k}(s^*)\right] f_1(s^*) \tag{33}$$

și, după cîteva calcule, obținem în loc de (31)

$$x_1(s^*, t) = \frac{\varepsilon}{m[1-(1-\varepsilon)s^*]}\left\{\frac{v_1^{(m)} - v_1^{(g)}(1-s^*)\,\tilde{k}(s^*)}{1-(1-\varepsilon)s^*} + \right.$$

$$\left. + v_1^{(g)}[\tilde{k}(s^*) - (1-s^*)\,\tilde{k}'(s^*)]\,s^*\right\} t. \tag{34}$$

Dacă în această formulă punem succesiv $s^* = 0$ și $s^* = 1$, găsim legile de deplasare în timp a extremităților suprafeței de contact, și anume

$$x_1(0, t) = \frac{\varepsilon}{m}[v_1^{(m)} - v_1^{(g)}\,\tilde{k}(0)]\,t, \qquad x_1(1, t) = \frac{1}{m\varepsilon}[v_1^{(m)} + \varepsilon v_1^{(g)}\,\tilde{k}(1)]t, \tag{35}$$

iar după ce scădem membru cu membru ajungem la expresia lungimii suprafeței de contact proiectate pe axa Ox_1, care este

$$\Delta x_1 = x_1(0, t) - x_1(1, t) = \frac{1}{m}\left\{\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon} v_1^{(m)} - [\varepsilon\,\tilde{k}(0) + \tilde{k}(1)]\,v_1^{(g)}\right\} t. \tag{36}$$

Se observă că pentru

$$v_1^{(m)} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}[\varepsilon\,\tilde{k}(0) + \tilde{k}(1)]\,v_1^{(g)} \tag{37}$$

rezultă $\Delta x_1 = 0$ și

$$x_1(0, t) = x_1(1, t) = \frac{1}{m}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}[\tilde{k}(0) + \varepsilon\,\tilde{k}(1)]v_1^{(g)}\,t. \tag{38}$$

Extremitățile suprafeței de contact se deplasează deci cu aceeași viteză constantă care depinde de valorile pe care le are permeabilitatea absolută la aceste extremități. Dacă introducem în (34) valoarea lui $v_1^{(m)}$ dată de (37), găsim

$$x_1(s^*, t) = \frac{\varepsilon v_1^{(g)}}{m(\varepsilon^2-1)[1-(1-\varepsilon)s^*]}\left\{\frac{\varepsilon[\varepsilon\widetilde{k}(0)+\widetilde{k}(1)]-(\varepsilon^2-1)(1-s^*)\widetilde{k}(s^*)}{1-(1-\varepsilon)s^*}+\right.$$

$$\left.+(\varepsilon^2-1)[\widetilde{k}(s^*)-(1-s^*)\widetilde{k}'(s^*)]\,s^*\right\}t, \tag{39}$$

formulă din care putem calcula deplasarea unui punct oarecare al suprafeței de contact atunci cînd $v_1^{(m)}$ are valoarea particulară (37).

În cazul în care mediul poros este omogen, ceea ce înseamnă că avem $\widetilde{k}(s^*) = \widetilde{k}(0) = \widetilde{k}(1) = 1$, toate punctele suprafeței de contact se deplasează cu viteza constantă

$$w_1 = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m}\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}v_1^{(g)}, \tag{40}$$

rezultat care este cunoscut, viteza de filtrare corespunzătoare fiind cea critică. Atunci cînd mediul poros este neomogen, din (39) se observă că viteza suprafeței de contact variază de la un punct la altul, astfel că această suprafață nu mai este plană. În acest caz, putem defini un debit critic Q_c, a cărui expresie rezultă imediat din (37) și (21) și este

$$Q_c = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\left[\frac{\widetilde{k}^{(r)}}{\mu_2}\widetilde{k}(0)+\frac{\widetilde{k}^{(i)}}{\mu_1}\widetilde{k}(1)\right]\rho g h k^{(m)}. \tag{41}$$

Dacă $v_1^{(m)}$ are o valoare mai mică decît cea dată de (37), rezultă $\Delta x_1 < 0$, ceea ce înseamnă că viteza punctului $x_1(1, t)$ este mai mare decît cea a punctului $x_1(0, t)$. De asemenea, atunci cînd $v_1^{(m)}$ are o valoare mai mare decît cea dată de (37), obținem $\Delta x_1 > 0$ și, prin urmare, punctul $x_1(0, t)$ se deplasează mai repede decît punctul $x_1(1, t)$.

Fixîndu-ne asupra cazului în care avem $\varepsilon > 1$ și $\rho_2 > \rho_1$, respectiv $v_1^{(g)} > 0$, pentru ca viteza punctului $x_1(0, t)$ să fie pozitivă, este necesar ca $v_1^{(m)} > v_1^{(g)} k(0)$, în timp ce punctul $x_1(1, t)$ are totdeauna o viteză pozitivă. Vom examina în continuare, tot pentru acest caz, influența variației permeabilității asupra deplasării suprafeței de contact. Astfel, dacă scriem formula (34) sub forma

$$x_1(s^*, t) = \frac{\varepsilon}{m[1-(1-\varepsilon)s^*]^2}\left\{v_1^{(m)}+v_1^{(g)}[\varepsilon s^{*2}-(1-s^*)^2]\widetilde{k}(s^*)-\right.$$

$$\left.-v_1^{(g)}s^*(1-s^*)[1-(1-\varepsilon)s^*]\widetilde{k}'(s^*)\right\}t, \tag{42}$$

se observă că deplasarea suprafeței de contact se compune din trei termeni, dintre care primul este independent de permeabilitatea mediului poros, al doilea depinde de permeabilitate, iar al treilea de derivata aces-

teia. Primii doi termeni corespund soluției problemei pentru mediul poros omogen care se obține din (34) sau (42) dacă punem $\widetilde{k}(s^*) = 1$. În ceea ce privește cazul de care ne ocupăm, se constată că expresia $\varepsilon s^{*2} - (1 - s^*)^2$ este negativă pentru $0 \leqslant s^* < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}+1}$, se anulează atunci cînd $s^* = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}+1}$ și este pozitivă pentru $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}+1} < s^* \leqslant 1$. Intervalul în care expresia amintită este negativă se micșorează atunci cînd ε crește, respectiv dacă viscozitatea fluidului dezlocuit este mult mai mare decît a fluidului de dezlocuire. Deoarece atît $v_1^{(g)}$, cît și $\widetilde{k}(s^*)$ sînt pozitive, rezultă că efectul termenului al doilea din (42) depinde calitativ numai de semnul expresiei $\varepsilon s^{*2} - (1 - s^*)^2$, variația permeabilității accentuînd sau diminuînd acest efect. În ceea ce privește termenul al treilea, deoarece coeficientul derivatei $\widetilde{k}'(s^*)$ este totdeauna negativ, efectul lui depinde în mod esențial de semnul acestei derivate. Faptul că la creșterea permeabilității acest termen contribuie la o micșorare a lui x_1 și invers provine din aceea că el reprezintă un efect de natură gravitațională, opus deci sensului deplasării suprafeței de contact.

Observăm cu această ocazie că și în cazul în care variația permeabilității este mică, marginea inferioară și cea superioară a funcției $\widetilde{k}(s^*)$ în intervalul [0,1] fiind deci apropiate, variații bruște locale ale permeabilității, la care corespund valori mari pozitive sau negative ale derivatei $\widetilde{k}'(s^*)$, pot conduce la diferențe apreciabile între valorile lui x_1 în două puncte apropiate. Prin urmare, variația rapidă a permeabilității are ca efect denivelări importante ale suprafeței de contact între puncte apropiate, valorile mari locale ale derivatei provocînd apariția unor protuberanțe ale acestei suprafețe. Formarea „degetelor", care constituie obiectul teoriei stabilității propriu-zise a suprafeței de contact, poate avea drept cauză variația permeabilității, așa cum s-a menționat în literatura de specialitate [11]. Din formulele pe care le-am stabilit mai sus rezultă o indicație în acest sens, dar desigur că nu se poate ajunge pe această cale la explicarea completă a formării și în special a dezvoltării „degetelor", în primul rînd deoarece însăși ipoteza pe care am făcut-o asupra variației permeabilității este simplificată. Totuși, ni se pare interesantă de semnalat concluzia care rezultă din examinarea formulei (42), deoarece aceasta confirmă observația că formarea „degetelor" implică o distribuție a permeabilității care nu este strict uniformă [9].

Mai observăm că formula (34) rămîne valabilă și în cazul în care porozitatea este variabilă, ca funcție de x_2, respectiv de s^*. Se constată că o creștere a porozității aduce după sine o scădere a lui x_1 și invers. Celelalte formule deduse anterior se modifică și găsim astfel

$$\Delta x_1 = \frac{1}{m(0)\,m(1)} \left\{ \frac{\varepsilon^2 m(1) - m(0)}{\varepsilon} v_1^{(m)} - [\varepsilon \widetilde{k}(0)\, m(1) + m(0)\, \widetilde{k}(1)]\, v_1^{(g)} \right\} t, \tag{43}$$

iar dacă $\Delta x_1 = 0$ rezultă

$$v_1^{(m)} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 m(1) - m(0)} [\varepsilon \tilde{k}(0) m(1) + m(0) \tilde{k}(1)] v_1^{(g)}, \tag{44}$$

respectiv

$$Q_c = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 m(1) - m(0)} \left[\frac{\tilde{k}^{(r)}}{\mu_2} \tilde{k}(0) m(1) + \frac{\tilde{k}^{(i)}}{\mu_1} m(0) \tilde{k}(1) \right] \rho g h k^{(m)}. \tag{45}$$

Debitul critic depinde deci nu numai de valorile pe care le are permeabilitatea absolută la extremitățile suprafeței de contact, ci și de valorile porozității în aceste puncte.

4. **O soluție aproximativă pentru cazul general.** Atunci cînd avem $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, ecuația (23) își păstrează caracterul neliniar și, dacă nu dorim să trecem la rezolvarea prin metode numerice, este necesar să recurgem la o aproximație care constă în liniarizarea ecuației. Aceasta se poate efectua înlocuind în ultimul termen al ecuației (23) derivata $\frac{\partial s^*}{\partial x_1}$ printr-o funcție numai de timp $F(t)$. Obținem astfel

$$m \frac{\partial s^*}{\partial t} + v_1^{(m)} [f'(s^*) + h F(t) g'(s^*)] \frac{\partial s^*}{\partial x_1} = 0, \tag{46}$$

adică o ecuație cvasiliniară cu derivate parțiale de ordinul întîi, asemănătoare cu (24) și care se poate integra prin aceeași metodă.

Caracteristicile acestei ecuații sînt soluțiile sistemului

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{v_1^{(m)}}, \quad \frac{dx_1}{d\lambda} = \frac{1}{m} [f'(s^*) + h F(t) g'(s^*)], \quad \frac{ds^*}{d\lambda} = 0 \tag{47}$$

și din a treia ecuație rezultă, ca și în cazul precedent, că, în lungul unei caracteristici, s^* păstrează o valoare constantă. Eliminînd apoi parametrul λ între primele două ecuații (47) și integrînd de la 0 la t, găsim

$$x_1(s^*, t) - x_1(s^*, 0) = \frac{v_1^{(m)}}{m} \left[f'(s^*) t + h g'(s^*) \int_0^t F(t)\, dt \right]. \tag{48}$$

Din condițiile inițiale (25) rezultă însă

$$x_1(s^*, 0) = x_1^{(0)} = \tau \tag{49}$$

și, după introducerea în (48), obținem

$$s^* = \chi \left\{ x_1 - \frac{v_1^{(m)}}{m} \left[f'(s^*)\, t + h g'(s^*) \int_0^t F(t)\, dt \right] \right\}. \tag{50}$$

Apare ca interesant de luat în considerare un caz particular, şi anume acela în care în momentul iniţial suprafaţa de contact este plană şi orizontală. Avem (fig. 2)

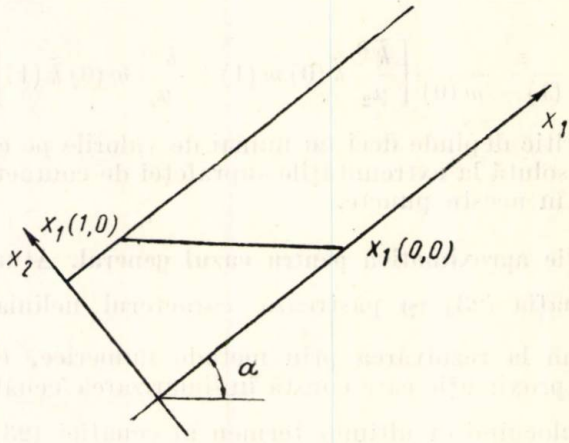


Fig. 2

$$x_1(s^*,0) = x_1(0,0) - s^* h \operatorname{cotg} \alpha \tag{51}$$

şi, în felul acesta, după înlocuirea în (48) ecuaţia suprafeţei libere la un moment oarecare este

$$x_1(s^*, t) = \frac{v_1^{(m)}}{m}\left[f'(s^*)\, t + h g'(s^*) \int_0^t F(t)\, \mathrm{d}t\right] - s^* h \operatorname{cotg} \alpha + a, \tag{52}$$

unde am introdus notaţia

$$x_1(0,0) = a. \tag{53}$$

Dacă ţinem seama de (20) şi (22), după cîteva calcule simple formula (52) devine

$$x_1(s^*, t) = a - s^* h \operatorname{cotg} \alpha + \frac{\varepsilon v_1^{(m)}}{m\,[1 - (1 - \varepsilon)s^*]^2}\, t +$$

$$+ \frac{\varepsilon v_1^{(g)}}{m[1 - (1 - \varepsilon)\, s^*]^2}\left\{[\varepsilon s^{*2} - (1 - s^*)^2]\, \tilde{k}(s^*) - s^*(1 - s^*)[1 - (1 -\right.$$

$$\left. - \varepsilon)\, s^*]\, \tilde{k}'(s^*)\right\}\left[t \sin \alpha + h \cos \alpha \int_0^t F(t)\, \mathrm{d}t\right], \tag{54}$$

deplasarea suprafeţei de contact compunîndu-se tot din trei termeni ca şi în cazul particular studiat mai înainte. Se observă de altfel imediat că,

dacă punem $\alpha = \frac{\pi}{2}$ și $a = 0$, regăsim formula (42), iar unghiul de înclinare α și integrala care conține funcția deocamdată necunoscută $F(t)$ nu afectează din punct de vedere calitativ, ci numai cantitativ, efectul permeabilității asupra deplasării suprafeței de contact. Prin urmare, discuția pe care am făcut-o în legătură cu formula (42) se poate reproduce întocmai, concluziile fiind calitativ identice. Rămîn de asemenea valabile constatările făcute în legătură cu situația în care și porozitatea este variabilă ca funcție de x_2, respectiv de s^*.

Legile de deplasare în timp a extremităților suprafeței de contact rezultă din (54), în care punem succesiv $s^* = 0$ și $s^* = 1$, și sînt

$$x_1(0, t) = a + \frac{\varepsilon}{m}\left\{[v_1^{(m)} - v_1^{(g)}\,\widetilde{k}\,(0)\sin\alpha]\,t - v_1^{(g)}\,\widetilde{k}\,(0)\,h\cos\alpha\int_0^t F(t)\,\mathrm{d}t\right\}, \tag{55}$$

respectiv

$$x_1(1, t) = a - h\operatorname{cotg}\alpha + \frac{1}{m\varepsilon}\left\{[\,v_1^{(m)} + \varepsilon v_1^{(g)}\,\widetilde{k}\,(1)\sin\alpha]t + \right.$$

$$\left. + \varepsilon v_1^{(g)}\,\widetilde{k}\,(1)\,h\cos\alpha\int_0^t F(t)\,\mathrm{d}t\right\}. \tag{56}$$

După scăderea membru cu membru a formulelor precedente, obținem expresia lungimii suprafeței de contact proiectate pe axa Ox_1 și anume

$$\Delta x_1 = x_1(0, t) - x_1(1, t) = h\operatorname{cotg}\alpha + \frac{1}{m}\left\{\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon}\,v_1^{(m)} - [\varepsilon\,\widetilde{k}\,(0) + \right. \tag{57}$$

$$\left. + \widetilde{k}\,(1)]\,v_1^{(g)}\sin\alpha\right\}t - \frac{1}{m}[\varepsilon\,\widetilde{k}(0) + \widetilde{k}\,(1)]\,v_1^{(g)}\,h\cos\alpha\int_0^t F(t)\,\mathrm{d}t.$$

Atunci cînd avem

$$v_1^{(m)} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}[\varepsilon\,\widetilde{k}\,(0) + \widetilde{k}\,(1)]\,v_1^{(g)}\sin\alpha, \tag{58}$$

formula (57) devine

$$\Delta x_1 = h\operatorname{cotg}\alpha - \frac{1}{m}[\varepsilon\,\widetilde{k}\,(0) + \widetilde{k}\,(1)]\,v_1^{(g)}\,h\cos\alpha\int_0^t F(t)\,\mathrm{d}t, \tag{59}$$

în timp ce în loc de (55) și (56) găsim

$$x_1(0, t) = a + \frac{\varepsilon}{m}\left[\frac{\widetilde{k}\,(0) + \varepsilon\widetilde{k}(1)}{\varepsilon^2 - 1}\,t\sin\alpha - \widetilde{k}\;(0)h\cos\alpha\int_0^t F(t)\,\mathrm{d}t\right]v_1^{(g)} \tag{60}$$

şi

$$x_1(1,t) = a - h\operatorname{cotg}\alpha + \frac{\varepsilon}{m}\left[\frac{\tilde{k}(0) + \varepsilon\tilde{k}(1)}{\varepsilon^2 - 1}\, t\sin\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{\tilde{k}(1)}{\varepsilon}\, h\cos\alpha \int_0^t F(t)\,\mathrm{d}t\right] v_1^{(g)}. \tag{61}$$

Cea mai simplă alegere a funcţiei $F(t)$ este aceea care a fost făcută în [4], şi anume

$$F(t) = \frac{1}{x_1(1,t) - x_1(0,t),} \tag{62}$$

ceea ce înseamnă că, în intervalul [0, 1] de variaţie a lui s^*, curba $s^*(x_1)$ este înlocuită prin coarda ei. În felul acesta, formula (57) se scrie

$$x_1(0,t) - x_1(1,\ t) = h\operatorname{cotg}\alpha + \frac{1}{m}\left\{\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon}\, v_1^{(m)} - [\varepsilon\tilde{k}(0) + \right. \tag{63}$$

$$\left. + \tilde{k}(1)]\, v_1^{(g)}\sin\alpha\right\} t - \frac{1}{m}\,[\varepsilon\tilde{k}(0) + \tilde{k}(1)]\, v_1^{(g)}\, h\cos\alpha \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{x_1(1,t) - x_1(0,t)}$$

şi, dacă se pune ca în [4]

$$\xi_1 = h\int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{x_1(0,t) - x_1(1,t),}, \tag{64}$$

obţinem în loc de (63) ecuaţia diferenţială

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\xi_1} - bt - c\xi_1 - \operatorname{cotg}\alpha = 0, \tag{65}$$

unde

$$b = \frac{1}{mh}\left\{\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon}\, v_1^{(m)} - [\varepsilon\tilde{k}(0) + \tilde{k}(1)]\, v_1^{(g)}\sin\alpha\right\} \tag{66}$$

şi

$$c = \frac{1}{mh}\,[\varepsilon\tilde{k}(0) + \tilde{k}(1)]\, v_1^{(g)}\cos\alpha. \tag{67}$$

Ţinînd seama de condiţia evidentă

$$\xi_1 = 0, \quad t = 0, \tag{68}$$

soluţia ecuaţiei (65) este

$$t = \left(\frac{c}{b} + \operatorname{cotg}\alpha\right)\frac{\mathrm{e}^{b\xi_1} - 1}{b} - \frac{c}{b}\,\xi_1 \tag{69}$$

și, după înlocuirea în (52), obținem

$$x_1(s^*, \xi_1) = \frac{v_1^{(m)}}{m}\left[\left(\frac{c}{b} + \operatorname{cotg}\alpha\right)\frac{e^{b\xi_1} - 1}{b} f'(s^*) - \frac{c}{b}\xi_1 f'(s^*) - \right.$$
$$\left. - \xi_1 g'(s^*)\right] - s^* h \operatorname{cotg}\alpha + a. \tag{70}$$

Ecuația suprafeței libere este definită astfel parametric prin formulele (69) și (70). Cazul particular în care constanta b este nulă corespunde la valoarea critică (58) a lui $v_1^{(m)}$, debitul critic fiind

$$Q_c = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}\left[\frac{\tilde{k}^{(r)}}{\mu_2}\tilde{k}(0) + \frac{\tilde{k}^{(i)}}{\mu_1}\tilde{k}(1)\right]\rho g h k^{(m)} \sin\alpha. \tag{71}$$

Cu $b = 0$ integrarea ecuației (65) ne dă

$$\xi_1 = -\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{c} + \frac{1}{c}\sqrt{\operatorname{cotg}^2\alpha + 2ct} \tag{72}$$

și, dacă introducem această valoare în (52), găsim

$$x_1(s^*, t) = \frac{v_1^{(m)}}{m}\left[f'(s^*)t + g'(s^*)\frac{\operatorname{cotg}\alpha - \sqrt{\operatorname{cotg}^2\alpha + 2ct}}{c}\right] -$$
$$- s^* h \operatorname{cotg}\alpha + a, \tag{73}$$

unde c are expresia

$$c = \frac{v_1^{(m)}}{mh}\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon}\operatorname{cotg}\alpha. \tag{74}$$

Atunci cînd avem

$$v_1^{(m)} < \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}[\varepsilon\tilde{k}(0) + \tilde{k}(1)]v_1^{(g)} \sin\alpha, \tag{75}$$

constanta b este negativă; în acest caz, pentru valori foarte mari ale timpului, putem pune, ca în [4], în loc de (69)

$$t \approx -\frac{c}{b}\xi_1 - \left(\frac{c}{b} + \operatorname{cotg}\alpha\right)\frac{1}{b}, \tag{76}$$

iar formula (70) devine

$$x_1(s^*, t) = \frac{v_1^{(m)}}{m}\left\{\left[f'(s^*) + \frac{b}{c}g'(s^*)\right]t + \left(\frac{c}{b} + \operatorname{cotg}\alpha\right)\frac{g'(s^*)}{c}\right\} -$$
$$- s^* h \operatorname{cotg}\alpha + a. \tag{77}$$

Așadar, un punct oarecare al suprafeței de contact tinde să se deplaseze cu viteza

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{v_1^{(m)}}{m}\left[f'(s^*) + \frac{b}{c}g'(s^*)\right], \tag{78}$$

care nu mai depinde de timp. În schimb, spre deosebire de cazul în care mediul poros este omogen, studiat în [4], această viteză variază de la un punct la altul al suprafeței de contact. Este ușor de arătat că, atunci cînd permeabilitatea este constantă, expresia $f'(s^*) + \frac{b}{c} g'(s^*)$ devine egală cu unitatea, astfel că viteza de deplasare a suprafeței de contact are aceeași valoare în toate punctele. Dacă mediul poros este neomogen, expresia $f'(s^*) + \frac{b}{c} g'(s^*)$ conține atît funcția $\widetilde{k}(s^*)$, cît și derivata $\widetilde{k}'(s^*)$, ceea ce înseamnă că variații locale bruște ale permeabilității conduc la schimbări mari ale vitezei de deplasare a suprafeței de contact.

Se poate arăta, urmînd calea indicată în [4], că, atunci cînd avem

$$v_1^{(m)} > \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} [\varepsilon \widetilde{k}(0) + \widetilde{k}(1)] v_1^{(g)} \sin \alpha, \tag{79}$$

viteza de deplasare a suprafeței de contact tinde să crească indefinit o dată cu timpul, ceea ce înseamnă că stabilizarea nu se mai produce.

Pentru un mediu poros omogen a cărui permeabilitate este constantă și egală cu $k^{(m)}$, debitul critic are expresia cunoscută

$$Q_c^{(0)} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1} \left(\frac{\widetilde{k}^{(r)}}{\mu_2} + \frac{\widetilde{k}^{(i)}}{\mu_1} \right) \rho g h k^{(m)} \sin \alpha \tag{80}$$

și, prin urmare, dacă ținem seama de (71)

$$\frac{Q_c}{Q_c^{(0)}} = \frac{\varepsilon \widetilde{k}(0) + \widetilde{k}(1)}{\varepsilon + 1}. \tag{81}$$

Este interesant de observat că acest raport depinde numai de valorile pe care le ia permeabilitatea la extremitățile intervalului ei de variație. Aceasta nu înseamnă însă că legea de variație a permeabilității nu prezintă importanță pentru desfășurarea fenomenului; așa cum am arătat mai înainte, viteza de deplasare a suprafeței de contact depinde de această lege.

Atunci cînd valorile $\widetilde{k}(0)$ și $\widetilde{k}(1)$ ale permeabilității sînt egale, din (81) obținem

$$\frac{Q_c}{Q_c^{(0)}} = \widetilde{k}(0) \tag{82}$$

și, deoarece putem avea $\widetilde{k}(0) \gtrless 1$, rezultă și $Q_c \gtrless Q_c^{(0)}$. În cazul în care $\widetilde{k}(0) > \widetilde{k}(1)$, găsim însă

$$\frac{Q_c}{Q_c^{(0)}} = \frac{\widetilde{k}(0)}{\varepsilon + 1} \left[\varepsilon + \frac{\widetilde{k}(1)}{\widetilde{k}(0)} \right] < \widetilde{k}(0), \tag{83}$$

în timp ce pentru $\tilde{k}(0) < \tilde{k}(1)$ obținem

$$\frac{Q_c}{Q_c^{(0)}} = \frac{\tilde{k}(0)}{\varepsilon + 1}\left[\varepsilon + \frac{\tilde{k}(1)}{\tilde{k}(0)}\right] > \tilde{k}(0). \tag{84}$$

Raportul $\frac{Q_c}{Q_c^{(0)}}$ mai depinde și de ε; dacă $\varepsilon > 1$, așa cum am presupus pînă acum, la valori foarte mari ale lui ε, $\frac{Q_c}{Q_c^{(0)}}$ tinde către $\tilde{k}(0)$. În cazul în care $\tilde{k}(0) > \tilde{k}(1)$, acest raport este o funcție crescătoare de ε, în timp ce, pentru $\tilde{k}(0) < \tilde{k}(1)$, $\frac{Q_c}{Q_c^{(0)}}$ descrește atunci cînd ε crește.

5. **Concluzii.** Studiul deplasării suprafeței de contact între două lichide într-un strat permeabil înclinat care prezintă un anumit tip de neomogenitate conduce la unele concluzii interesante în ceea ce privește efectul variației permeabilității. Semnalăm astfel influența pe care această variație o are asupra formei suprafeței de contact și care pare să aibă o legătură cu apariția instabilității propriu-zise a acestei suprafețe. În aceeași ordine de idei merită să fie reținut și faptul că valoarea debitului critic nu depinde de legea efectivă de variație a permeabilității, ci numai de valorile pe care aceasta le ia la extremitățile intervalului ei de variație. Pe de altă parte, nu trebuie uitat faptul că debitul critic are o importanță mai redusă decît în cazul unui strat omogen, deoarece forma suprafeței de contact este considerabil influențată de variația permeabilității. De asemenea, faptul că metoda de studiu utilizată este aproximativă prin unele ipoteze care stau la baza ei, iar rezolvarea problemei în cazul general a fost obținută tot cu ajutorul unei aproximații, afectează în oarecare măsură valoarea cantitativă a rezultatelor.

Primită la redacție la 14 iunie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. А. И. Чярный, *Методы расчета перемещения границы раздела нефти и воды в пластах*. Известия Академии Наук СССР, ОТН, *4* (1954).
2. N. Cristea, *Hidraulica subterană*, vol. I. București, Edit. tehnică, 1956, p. 68.
3. D. N. Dietz, *A theoretical approach to the problem of encroaching and by-passing edge water*. Proceedings Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, **56** (1953).
4. B. le Fur, P. Sourieau, *Etude de l'écoulement diphasique dans une couche inclinée et dans un modèle rectangulaire de milieu poreux*. Revue de l'Institut Français du Pétrole et Annales des combustibles liquides, Hors série (1963).
5. Robert G. Hawthorne, *Two-phase flow in two-dimensional systems-effect of rate, viscosity and density on fluid displacement in porous media*. Transactions AIME, **219** (1960).
6. John C. Martin, *Reservoir analysis for pressure maintenance operations based on complete segregation of mobile fluids*. Transactions AIME, **213** (1958).

7. T. Oroveanu, *Considérations sur l'écoulement à surface libre d'un liquide à travers un milieu poreux non homogène.* Rev. méc. appl., **V**, *3* (1960).
8. H. D. Outmans, *Transient interface during immiscible liquid-liquid displacement in porous media.* Transactions AIME, **225** (1962).
9. D. W. Peaceman, H. H. Rachford Jr., *Numerical calculations of multi-dimensional miscible displacement.* Transactions AIME, **225** (1962).
10. А. М. Пирвердиан, *О движении подошвенной воды в слабо наклоненных пластах.* Прикладная математика и механика, **XVI**, *2* (1952).
11. A. E. Scheidegger, *Growth on instabilities on displacement fronts in porous media.* The Physics of Fluids, **3**, *1* (1960).
12. J. W. Sheldon, F. J. Fayers, *The motion on an interface between two fluids in a slightly dipping porous medium.* Transactions AIME, **225** (1962).

INFLUENȚA VÎRTEJURILOR LONGITUDINALE INSTAȚIONARE ASUPRA PROFILULUI BLASIUS ÎN STRATUL-LIMITĂ TRANZIȚIONAL AL PLĂCII PLANE

de ȘT. N. SĂVULESCU
Institutul de mecanica fluidelor „Traian Vuia"
al Academiei Republicii Socialiste România

Autorul consideră cazul distribuțiilor instaționare ale vitezei laterale W, dată experimental. Se aplică metoda de integrare a ecuațiilor stratului-limită, expusă de autor într-un articol precedent [1]. Rezultă astfel expresia profilului de viteze, formată din trei termeni: profilul fundamental Blasius, perturbația datorită vîrtejurilor longitudinale (variabilă în timp) și perturbația datorită instaționarității $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$. Calculele efectuate pentru cazul particular al experiențelor citate [2] arată o distorsiune pronunțată a fluctuației sinusoidale a vitezei în decursul unei perioade de timp, corespunzătoare undelor Tollmien-Schlichting. Această distorsiune aparține stagiului final al tranziției, caracterizată prin nașterea spoturilor turbulente.

1. FORMULAREA PROBLEMEI

Am tratat într-o lucrare anterioară [1] influența vîrtejurilor longitudinale asupra profilului Blasius în cazul staționar. În lucrarea de față vom considera cazul instaționar, referindu-ne mereu la cercetările experimentale ale lui Klebanoff și alții [2].

Pentru facilitarea înțelegerii articolului pare necesară repetarea ipotezelor fundamentale ale metodelor de studiu, ipoteze întrucîtva modificate.

a) Se va utiliza sistemul complet de ecuații

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu \Delta u$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \qquad (1)$$

$$\vec{V} = \vec{i}\,u + \vec{j}\,v + \vec{k}w.$$

Fenomenele care se petrec în stratul-limită tranziţional realizat în experienţele citate [2] permit aprecierea importanţei diferiţilor termeni ce apar în aceste ecuaţii. De exemplu, caracterul tridimensional al perturbaţiilor arată că putem scrie

$$\frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{1}{\delta},$$

unde δ este grosimea stratului-limită. Domeniul de tranziţie pe placa

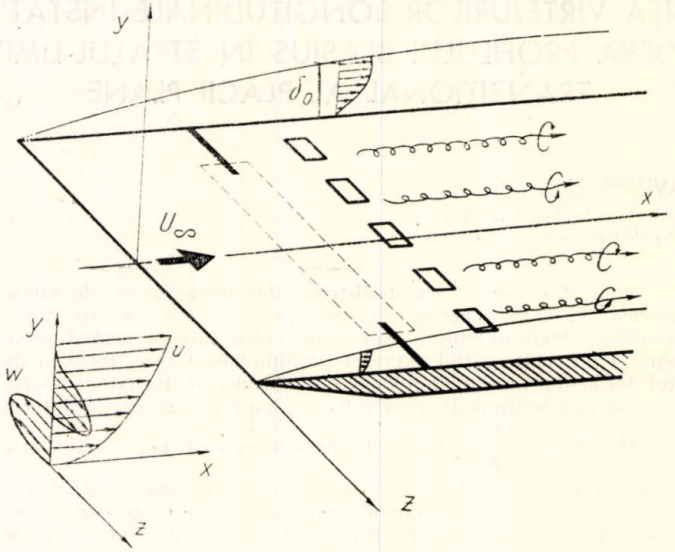


Fig. 1

plană este astfel ales, încît se poate considera $\delta \approx$ const. O schemă a stratului-limită tranziţional pe placa plană este dată în figura 1.

b) Vom considera dată următoarea expresie:

$$W = KU_e F\left(\frac{u}{U_e}\right) G\left(\frac{t}{T}, \frac{x}{\delta}, \frac{z}{\delta}\right), \tag{2}$$

unde

W este componenta vitezei în direcţia Oz, mică faţă de U_e,
u — componenta vitezei după Ox,
U_e — viteza curentului exterior,
t — timpul,
T — o mărime caracteristică pentru timp (o perioadă),
K — o constantă adimensională a cărei valoare este astfel încît

$$\frac{W_{\max}}{U_e} < 10^{-1}.$$

c) Vom considera viteza exterioară U_e constantă, deci

$$U_e = \text{const.}, \quad \delta = 5\sqrt{\frac{\nu x}{U_e}} \simeq \text{const.} \tag{3}$$

Astfel, fenomenele care se petrec în stratul-limită se dezvoltă numai în interior, fără vreo influență asupra scurgerii exterioare.

În cadrul acestor ipoteze vom integra sistemul (1), aducîndu-l la o formulare integrodiferențială cu ajutorul transformării integrale utilizate anterior [1]. Vom determina influența diferiților termeni din sistemul (1) asupra profilului Blasius.

2. ECUAȚIILE STRATULUI-LIMITĂ TRIDIMENSIONAL PERTURBAT

Sistemul cartezian de coordonate $Oxyz$ și componentele corespunzătoare ale vitezei sînt alese astfel încît U este în sensul scurgerii fundamentale, după cum se vede în figura 1. Sistemul (1) se scrie în forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\delta u}{\partial x} + \nu\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - w\frac{\partial u}{\partial z} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z}, \tag{4}$$

cu condițiile la limită

$$y = 0, \; u = v = w = 0,$$

$$y = \delta(t, x, z), \; u = U_e, \; \frac{\partial u}{\partial y} \to 0, \; w = 0. \tag{5}$$

Trebuie remarcat că aceste condiții aproximative (condiția exactă este $y \to \infty$, $u \to U_e$) sînt recent utilizate în tratarea ecuațiilor stratului-limită.

Membrul stîng al sistemului (4) reprezintă ecuațiile obținute ale stratului-limită Blasius. Vom analiza termenii din membrul drept. Putem scrie

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\Big/ w\frac{\partial u}{\partial z} \sim \frac{\delta}{L}\left(\frac{p}{\rho w u}\right) < \frac{\delta}{L}$$

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big/ w\frac{\partial u}{\partial z} \sim \frac{\delta}{L}\left(\frac{\nu}{wv}\right) < \frac{\delta}{L}, \quad \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big/ w\frac{\partial u}{\partial z} \sim \frac{\nu}{w\delta}. \tag{6}$$

Cu $\frac{w}{U_e} > 10^{-2}$, $\frac{U_e\delta}{\nu} > 10^3$ pentru tranziție se obține însă

$$\frac{\nu}{w\delta} < 10^{-1}. \tag{7}$$

La o distanță de bordul de atac al plăcii, pentru care avem

$$\frac{\delta}{L} \ll 1, \tag{8}$$

se poate scrie

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 0\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

cu aceleași condiții la limită (5).

3. ECUAȚIA INTEGRODIFERENȚIALĂ TRANSFORMATĂ

Vom introduce noile variabile:

$$\tau_a = \frac{t}{T} = t_a,\ \xi_a = \frac{x}{\delta} = x_a,\ \eta = \frac{\int_0^y u\,dy}{\int_0^\delta u\,dy} \quad \frac{\psi(x, y, z, t)}{\psi_\delta(x, z, t)},\ \zeta_a = \frac{z}{\delta} = z_a \tag{10}$$

și vom utiliza notațiile

$$u_a = \frac{u}{U_e},\ w_a = \frac{w}{U_e}. \tag{11}$$

A doua ecuație a sistemului (9) se poate pune sub forma

$$v = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y u\,dy - \frac{\partial}{\partial z}\int_0^y \frac{w}{u}\,u\,dy. \tag{12}$$

Cu ajutorul acestei expresii și efectuînd calculele în noile variabile, obținem următoarea expresie:

$$\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}(u_a^2) = \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}\left\{\frac{1}{T}\frac{1}{u_a}\frac{\partial u_a}{\partial\tau_a} + \frac{U_e}{\delta}\frac{\partial u_a}{\partial\xi_a} + \frac{U_e}{\delta}\frac{w_a}{u_a}\frac{\partial u_a}{\partial\zeta_a}\right\} -$$

$$-\frac{1}{\nu U_a^2}\left\{\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial\tau_a}(\psi_\delta^2)\int_0^\eta \frac{\partial\eta}{u_a} + \frac{U_e}{\delta}\frac{\partial}{\partial\zeta_a}(\psi_\delta^2)\int_0^\eta \frac{w_a}{u_e}\,d\eta\right\}\frac{\partial u_a}{\partial\eta} - \tag{13}$$

$$-\frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}\left\{\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial\tau_a}\int_0^\eta \frac{\partial\eta}{u_a} + \frac{U_e}{\delta}\frac{\partial}{\partial\zeta_a}\int_0^\eta \frac{w_a}{u_a}\,d\eta + \frac{U_e}{\delta}\frac{1}{2\psi_\delta^2}\frac{\partial}{\partial\xi_a}(\psi_\delta^2)\,\eta\right\}\frac{\partial u_a}{\partial\eta} + 0(\ldots).$$

Condițiile la limită corespunzătoare sînt

$$\eta = 0,\ u_a = v_a = 0,$$

$$\eta = 1,\ u_a = 1,\ \frac{\partial u_a}{\partial\eta} \to 0,\ w_a \to 0. \tag{14}$$

Vom introduce următoarele notații :

$$A = \int_0^\eta \left\{ \int_1^\eta \frac{1}{u_a} \frac{\partial u_a}{\partial \tau_a} \, d\eta \right\} d\eta ; \qquad B = \int_0^\eta \left\{ \int_1^\eta \frac{\partial u_a}{\partial \xi_a} \, d\eta \right\} d\eta ;$$

$$C = \int_0^\eta \left\{ \int_1^\eta \frac{w_a}{u_a} \frac{\partial u_a}{\partial \zeta_a} \, d\eta \right\} d\eta ; \qquad D = \int_0^\eta \left\{ \int_1^\eta \left[\int_0^\eta \frac{d\eta}{u_a} \right] du_a \right\} d\eta ;$$

$$E = \int_0^\eta \left\{ \int_1^\eta \left[\int_0^\eta w_a \frac{d\eta}{u_a} \right] du_a \right\} d\eta ; \quad Q = \int_0^\eta \left\{ \int_1^\eta \left[\frac{\partial}{\partial \tau_a} \int_0^\eta \frac{d\eta}{u_a} \right] du_a \right\} d\eta ; \tag{15}$$

$$P = \int_0^\eta \left\{ \int_1^\eta \eta \, du_a \right\} d\eta ; \qquad R = \int_0^n \left\{ \int_1^\eta \frac{\partial}{\partial \zeta_a} \int_0^\eta \frac{w_a}{u_a} d\eta \right] du_a \Big\} d\eta,$$

$$A_1, \; B_1, \ldots, \; R_1 = A(\eta = 1), \; B(\eta = 1), \ldots, \; R(\eta = 1).$$

Dacă se integrează relația (13) de două ori cu respectarea condițiilor la limită (14), se obține

$$u_a^2 = \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2} \left[\frac{1}{T} A + \frac{U_e}{\delta} B + \frac{U_e}{\delta} C \right] - \frac{1}{\nu U_e^2} \left\{ \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \tau_a} (\psi_\delta^2) D + \right.$$

$$\left. + \frac{U_e}{\delta} \frac{\partial}{\partial \zeta_a} (\psi_\delta^2) E \right\} - \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2} \left\{ \frac{1}{T} Q + \frac{U_e}{\delta} \frac{1}{2\psi_\delta^2} \frac{\partial}{\partial \xi_a} (\psi_\delta^2) P + \frac{U_e}{\delta} R \right\}. \tag{16}$$

Din condiția la limită $\eta = 1, u_a = 1$ se obține următoarea ecuație pentru ψ_δ^2 :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_a} (\psi_\delta^2) + \frac{E_1}{P_1} \frac{\partial}{\partial \zeta_a} (\psi_\delta^2) + \frac{D_1}{P_1} \frac{\delta}{U_e T} \frac{\partial}{\partial \tau_a} (\psi_\delta^2) - \tag{17}$$

$$- 2\psi_\delta^2 \left\{ \frac{\delta}{U_e T} \frac{A_1}{P_1} + \frac{B_1}{P_1} + \frac{C_1}{P_1} - \frac{\delta}{U_e T} \frac{Q_1}{P_1} - \frac{R_1}{P_1} \right\} + \frac{\nu U_e \delta}{P_1} = 0.$$

Dacă această relație (17) se introduce în ecuația (16) și se aranjează convenabil termenii, se obține următoarea expresie a energiei cinetice adimensionale :

$$U_a^2 = \frac{P}{P_1} + \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2 T} A_1 \left(\frac{A}{A_1} - \frac{P}{P_1} \right) + \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e \delta} B_1 \left(\frac{B}{B_1} - \frac{P}{P_1} \right) +$$

$$+ \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e \delta} C_1 \left(\frac{C}{C_1} - \frac{P}{P_1} \right) - \frac{1}{\nu U_e^2 T} \frac{\partial}{\partial \tau_a} (\psi_\delta^2) D_1 \left(\frac{D}{D_1} - \frac{P}{P_1} \right) - \tag{18}$$

$$- \frac{1}{\nu U_e \delta} \frac{\partial}{\partial \zeta_a} (\psi_\delta^2) E_1 \left(\frac{E}{E_1} - \frac{P}{P_1} \right) - \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e \delta} R_1 \left(\frac{R}{R_1} - \frac{P}{P_1} \right) - \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2 T} Q_1 \left(\frac{Q}{Q_1} - \frac{P}{P_1} \right).$$

Termenii neglijați $0\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$ pot fi de asemenea transformați și scriși în următoarea formă :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sum_1^N F_1^{(i)} \left\{ \frac{F^{(i)}}{F_1^{(i)}} - \frac{P}{P_1} \right\}. \tag{19}$$

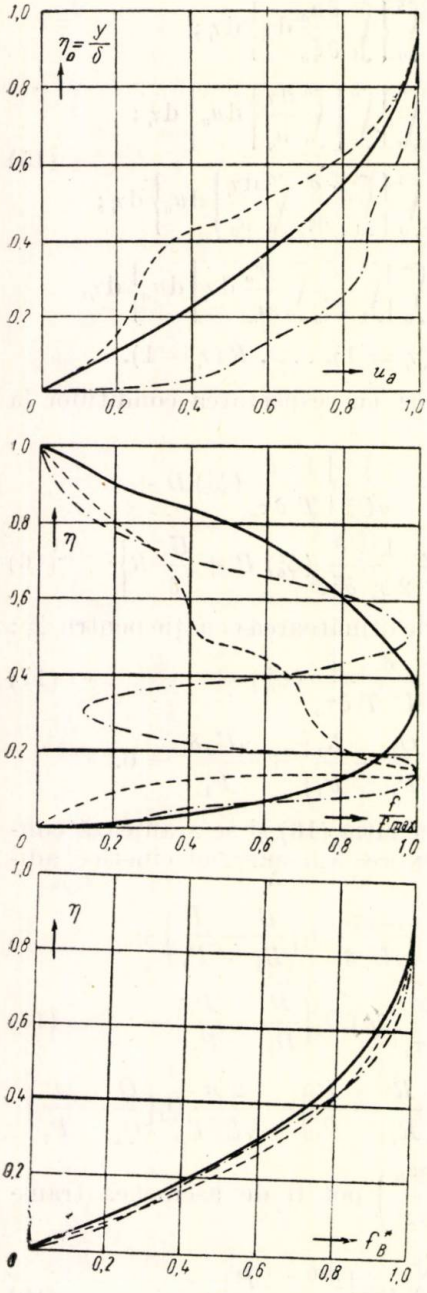


Fig. 2*a*

Însă, în comparaţie cu ceilalţi termeni, putem pune

$$\frac{F_1^{(i)}}{R_1} \ll 1 \tag{20}$$

pentru cazul pe care-l considerăm legat de experienţele citate [2].

4. CONSIDERAŢII ASUPRA TERMENILOR ECUAŢIEI (18)

a) Să considerăm expresia

$$f^* = \frac{\int_0^{\eta} \left[\int_1^{\eta} f \mathrm{d}\eta \right] \mathrm{d}\eta}{\int_0^1 \left[\int_1^{\eta} f \mathrm{d}\eta \right] \mathrm{d}\eta}, \tag{21}$$

unde f este o funcţie uniformă de η. Să scriem

$$f = \sum a_p \eta^p, \quad p \geqslant 0$$

şi obţinem

$$f^* = \frac{1}{\sigma} \sum \frac{a_p}{2+p} f_p^*$$

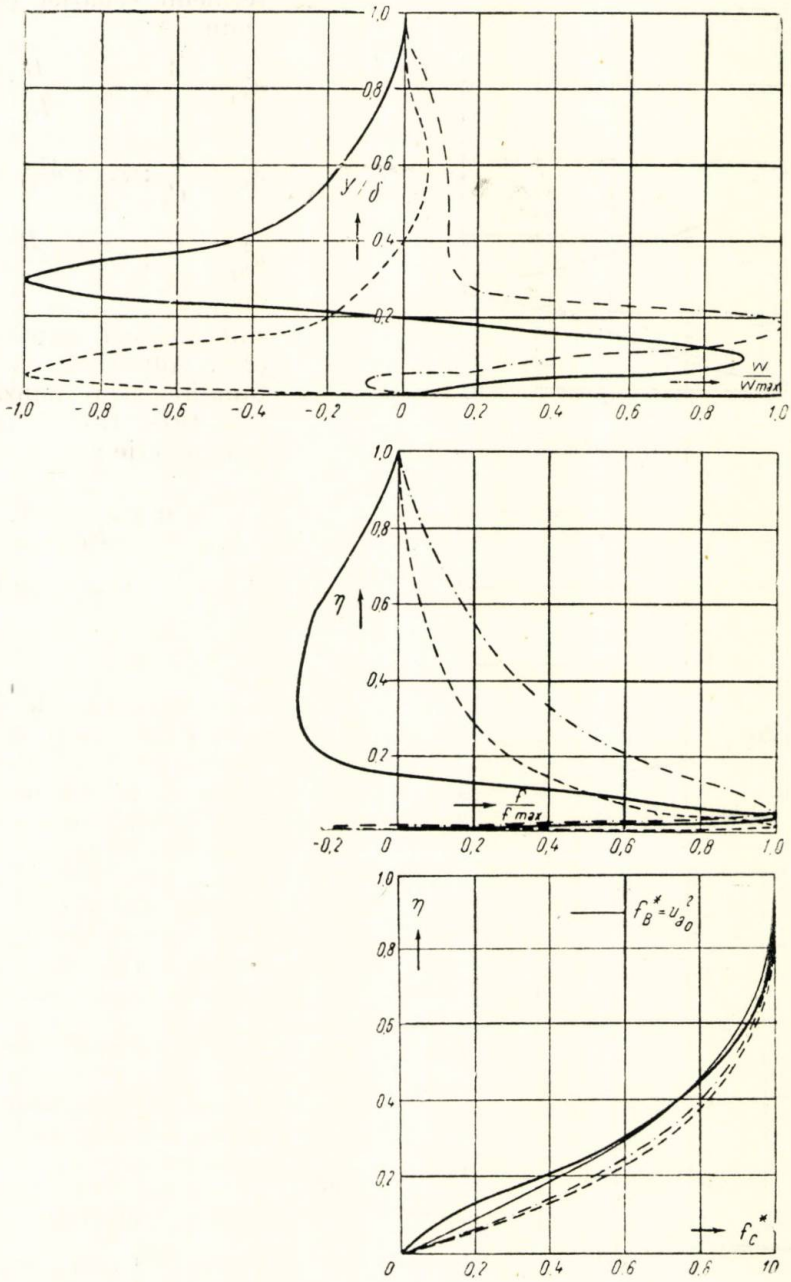
unde

$$\sigma = \sum \frac{a_p}{2+p} \neq 0,$$

$$f_p^* = \frac{2+p}{1+p} \left(\eta - \frac{\eta^2 + p}{2+p} \right). \tag{22}$$

Să observăm că expresia f_p^* este extrem de stabilă ca formă faţă de variaţiile parametrului p. Expresia f^*, fiind o sumă de astfel de funcţii, va avea în general o alură asemănătoare în raport cu η. Însă există şi excepţii.

În figura 2*a*, 2*b* şi 2*c* sînt date exemple din care rezultă că există o clasă largă de funcţii f care se transformă în funcţii tipice f^*. Vom numi aceste funcţii *tipic transformabile*.



1,0
0,8
0,6
y/δ
0,4
0,2
w/w_max
-1,0
-0,8
-0,6
-0,4
-0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
η
f/f_max
f_B* = u_a0²
f_c*

Fig. 2*b*

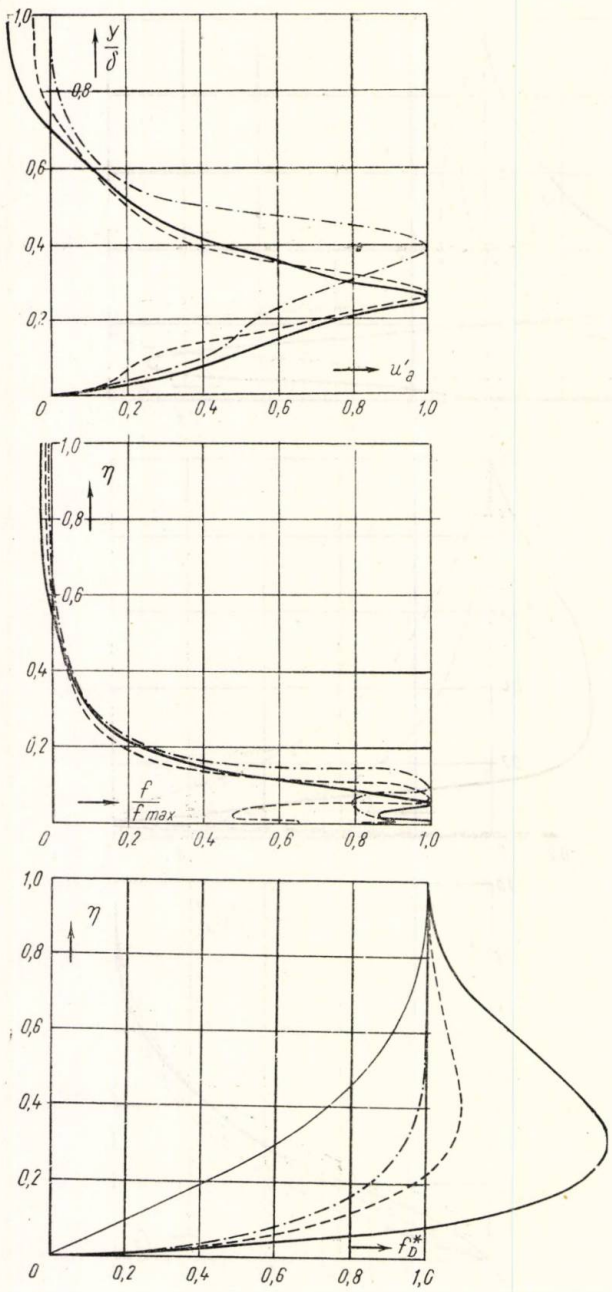


Fig. 2c

Acum să observăm că termenii ecuației (18), și anume

$$u^2_{a_A}=\frac{A}{A_1};\quad u^2_{a_B}=\frac{B}{B_1};$$

$$u^2_{a_C}=\frac{C}{C_1};\ \ldots;\ u^2_{a_P}=\frac{P}{P_1};$$

$$u^2_{a_Q}=\frac{Q}{Q_1};\quad u^2_{a_R}=\frac{R}{R_1}, \tag{23}$$

sînt analogi expresiei f^* (21). Admițînd că toate funcțiile corespunzătoare sînt tipic transformabile, putem scrie :

$$0\leqslant\frac{P}{P_1}\leqslant 1,$$

$$\Delta_A=\left|u^2_{a_A}-u^2_{aP}\right|\ll 1;\ \ldots$$

$$\ldots\ \Delta_Q=\left|u^2_{a_Q}-u^2_{a_P}\right|\ll 1. \tag{24}$$

În expresiile anterioare, f variază de la caz la caz datorită variației lui u, adică a profilului de viteze, apoi datorită lui w și, în sfîrșit, datorită lui p. Cînd u este foarte aproape de profilul Blasius, iar w și p sînt extrem de mici, în expresia (18) doar primul termen contează, adică $u^2_{a_P}=\frac{P}{P_1}$. Acesta este termenul corespunzător scurgerii fundamentale Blasius, iar ceilalți termeni ai relației (18) arată influența diferiților factori $\left(w,\ p,\ \frac{\partial u}{\partial t}\right)$ și depind sensibil de numărul Reynolds.

b) Forma generală a vitezei adimensionale din relația (18) se poate aproxima prin expresia

$$u_a \simeq \eta^n + K_a(\tau_a, \xi_a, \zeta_a)(\eta^{\frac{n}{1+n}} - \eta^n), \tag{25}$$

unde

$$0 \leqslant n \leqslant 1 , \qquad |K_a| < 1.$$

Această aproximație este justificată de următoarele observații :

— termenul fundamental P/P_1 în variabile transformate este extrem de apropiat de expresia $\eta(2-\eta)$, care duce la

$$u_{a_0} \approx \sqrt{2}\eta^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\eta}{4} + \ldots\right) \simeq \eta^{1/3};$$

— admițînd că termenii de perturbație în variabile transformate nu modifică sensibil profilul fundamental $u_{a_0}^2$, putem scrie

$$u_a \simeq u_{a_0} + \frac{k}{2}\left[\frac{f^*}{u_{a_0}} - u_{a_0}\right].$$

După cum am arătat în lucrarea [1] și după cum se vede din figura 2, expresia f^*/u_{a_0} se poate bine aproxima prin $u_{a_0}^*$, unde $u_{a_0}^*$ este transformata lui u_{a_0} cu ajutorul variabilei $\eta^* = \int_0^\eta u_{a_0}\,d\eta \Big/ \int_0^1 u_{a_0}\,d\eta$.

Cu $u_{a_0} \simeq \eta^n$ rezultă relația (25). Cu ajutorul acestei expresii aproximative vom compara diferiții termeni care apar în expresia (18) cu termenul datorit vîrtejurilor longitudinale :

$$\frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e \delta} R_1(u_{a_R}^2 - u_{a_R}^2) \approx \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e \delta}\frac{\partial}{\partial \zeta_a}\left(\frac{w_{\max}}{U_e}\right) K_R \Delta_R, \tag{26}$$

unde

$$K_R = \int_0^1 \left\{\int_1^\eta \left[\int_0^\eta \frac{1}{u_a}\left(\frac{w}{w_{\max}}\right) d\eta\right] du_a\right\} d\eta. \tag{27}$$

Se obține

$$\frac{\delta}{U_e T}\frac{A_1}{R_1}\frac{\Delta_A}{\Delta_R} \approx \frac{n^2}{2(2+2n-n^2)K_R}\cdot\frac{\partial k_a}{\partial \tau_a}\Big/\frac{\partial}{\partial \zeta_a}\left(\frac{w_{\max}}{U_e}\right)\cdot\frac{\partial}{U_e T} \tag{28}$$

$$\frac{\partial}{U_e T}\frac{Q_1}{R_1}\frac{\Delta_Q}{\Delta_R} \approx \frac{n^3(3+2n-2n^2)}{2(1+n)(2+2n-n^2)K_R}\cdot\frac{\partial k_a}{\partial \tau_a}\Big/\frac{\partial}{\partial \zeta_a}\left(\frac{w_{\max}}{U_e}\right)\cdot\frac{\partial}{U_e T} \tag{29}$$

$$\frac{B_1}{R_1}\frac{\Delta_B}{\Delta_R} \approx \frac{n^2}{(2+n)(2+3n)K_R}\frac{\partial k_a}{\partial \xi_a}\Big/\frac{\partial}{\partial \zeta_a}\left(\frac{w_{\max}}{U_e}\right) \tag{30}$$

$$\frac{C_1}{R_1}\frac{\Delta_C}{\Delta_R} \approx \frac{n^2}{(2+n)(2+3n)K_R}\frac{\partial k_a}{\partial \zeta_\alpha}\Big/\frac{\partial}{\partial \zeta_a}\left(\frac{w_{\max}}{U_e}\right)\cdot\frac{w_{\max}}{U_e} \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{U_e T}\frac{1}{\psi_\delta^2}\frac{\partial}{\partial \tau_a}(\psi_\delta^2)\frac{D_1}{2R_1}\frac{\Delta_D}{\Delta_R} \approx \tag{32}$$

$$\approx \frac{n}{4(1-n)K_R}\left[1-K_a\frac{n^2(3+2n-2n^2)}{(2+2n-n^2)(1-2n^2)}\right]\frac{\partial}{\partial \tau_a}(\psi_\delta^2)\Big/\psi_\delta^2\frac{\partial}{\partial \zeta_a}\left(\frac{w_{\max}}{U_e}\right)\frac{\partial}{U_e T}$$

$$\frac{1}{\psi_\delta^2}\frac{\partial}{\partial \zeta_a}(\psi_\delta^2)\frac{E_1}{2R_1}\frac{\Delta_E}{\Delta_R} \approx \frac{1}{2}\frac{1}{\psi_\delta^2}\frac{\partial}{\partial \zeta_a}(\psi_\delta^2)\frac{w_{\max}}{U_e}1\Big/\frac{\partial}{\partial \zeta_a}\left(\frac{w_{\max}}{U_e}\right). \tag{33}$$

Acum să observăm că

— raportul (30) este întotdeauna mic, deoarece

$$\frac{\partial}{\partial \xi_a} \ll \frac{\partial}{\partial \zeta_a}; \tag{34}$$

— raportul (31) este de asemenea mic, întrucît

$$\left|\frac{w_{\max}}{U_e}\right| \ll 10^{-1}; \tag{35}$$

— între rapoartele (28), (29), (32), raportul (28) este cel mai mare, fiindcă devine infinit pentru $n = 1$. Raportul (32) devine infinit pentru $n^2 = \frac{1}{2}$, însă diferența $1 - Kf(n)$ tinde obișnuit către zero.

Vom considera acum două cazuri.

5. STADIUL INIȚIAL AL TRANZIȚIEI NELINIARE

Acest stadiu îl vom caracteriza prin condițiile:

$$\frac{\partial}{U_e T} \ll 1; \quad \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e \delta} R_1 \leqslant 1. \tag{36}$$

Termenul datorit vîrtejurilor longitudinale este cel mai important și relația (18) devine

$$u_a^2 = u_{a_P}^2 - \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e \delta} R_1 (u_{a_R}^2 - u_{a_P}^2), \tag{37}$$

unde acest termen este mediat în intervalul perioadei în care variază w.

Ecuația (17) a lui ψ_δ^2 rămîne însă aceeași din scurgerea fundamentală Blasius, adică

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\psi_\delta^2) + \frac{\nu U_e \delta}{P_1} = 0. \tag{38}$$

Pentru a determina pe P, R, P_1, Q_1 se observă că expresia

$$u_a^2 = \frac{P}{P_1}, \tag{39}$$

care reprezintă scurgerea fundamentală, nu este aproape de loc influențată de w, bineînțeles în variabile η. Astfel, cu prima aproximație $u_{a_0} \simeq \eta^n$ obținem

$$u_{a_P}^2 = \frac{2+n}{1+n}\left(\eta - \frac{\eta^{2+n}}{2+n}\right). \tag{40}$$

Acestei expresii îi corespunde în planul real forma

$$u_a = \eta_0 (2 - \eta_0), \quad \eta_0 = \frac{y}{\delta}. \tag{41}$$

Cu ajutorul acestei expresii obținem

$$\eta = \frac{\int_0^{\eta_0} u_a \, d\eta_0}{\int_0^1 u_a \, d\eta_0} = \frac{1}{2}(3\eta_0^2 - \eta_0^3)$$

$$d\eta = \frac{U_e \delta}{\psi_\delta} u_a \, d\eta_0 = 1{,}5 \, n_a \, d\eta_0 \tag{42}$$

$$P_1 = -\int_0^1 \eta^2 \, du_a = -\int_0^1 \frac{1}{4}(3\eta_0^2 - \eta_0^3)^2 \, 2(1-\eta_0) \, d\eta_0 = -88.10^{-3}$$

$$R_1 = -\frac{\partial}{\partial \zeta_a}\left(\frac{w_{\max}}{U_e}\right)\int_0^1 \eta \left[\int_0^\eta \frac{w_a}{u_a} \, d\eta\right] du_a = -$$

$$-\frac{\partial}{\partial \zeta_a}\left(\frac{w_{\max}}{U_e}\right)\int_0^1 (3\eta_0^2 - \eta_0^3)\left[\int_0^{\eta_0}\left(\frac{w}{w_{\max}}\right) d\eta_0\right](1-\eta_0)\, d\eta_0 .$$

Ultima relație depinde de valoarea $\frac{\partial}{\partial \zeta_a}\left(\frac{w_{\max}}{U_e}\right)$ și de profilul $w(x, y, z, t)$.

Ecuația (38) ne dă soluția

$$\psi_\delta^2 = -\frac{\nu U_e}{P_1}\xi \approx 11{,}4 \, \nu \, U_e \xi \tag{43}$$

$$\delta = 5\xi \frac{1}{\sqrt{R_\xi}}, \quad \mathrm{Re}_\xi = \frac{U_e \xi}{\nu}.$$

Trebuie să menționăm că am efectuat calculele cu ajutorul expresiei de primă aproximație a lui u_a^2, întrucît am presupus că profilul Blasius nu este prea mult modificat. Final, relația (37) se scrie sub forma

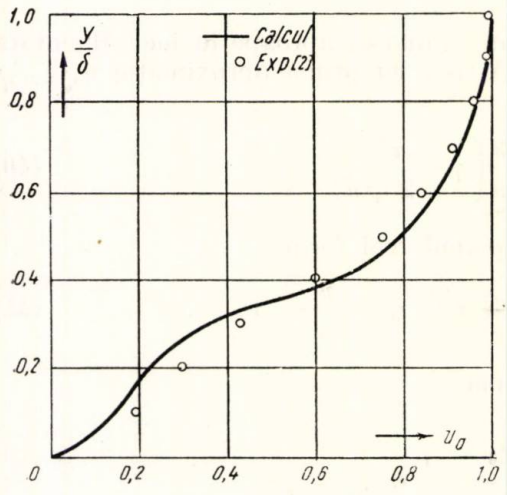


Fig. 3

$$u_a^2 = u_{a_P}^2 - 4{,}56 \times \times \sqrt{\mathrm{Re}_\xi}\,\frac{\partial}{\partial\zeta_a}\left(\frac{w_{\max}}{U_e}\right) K_R(u_{a_R}^2 - u_{a_P}^2). \tag{44}$$

Calculele s-au efectuat pentru fiecare $w(y, t)$ instantaneu, luat din experiențele citate [2], și apoi s-a mediat pe o perioadă. În figura 3 este dat profilul modificat în comparație cu cel calculat în prezenta lucrare. S-a utilizat pentru w expresia

$$\frac{w_{\max}}{U_e} = -K(\xi_0, \tau_a)\cos\frac{2\pi\zeta_a}{7}, \tag{45}$$

iar valorile luate [2] corespund punctului $\xi = 1^m$, $\mathrm{Re}_\xi = 10^6$.

6. STADIUL TRANZIȚIEI CU VARIAȚII MARI DE VITEZĂ

Rezultatele cantitative din paragraful precedent arată că o dată cu creșterea raportului $w_{\max}/U_e$ și a numărului Re_ξ profilul Blasius este extraordinar de mult alterat.

Dacă observăm că

α) $u_a^2 > 0$ întotdeauna,

β) $f_0^* > 0$ pentru $\eta_1 > 0{,}5$ întotdeauna și variază foarte puțin atunci cînd u_a variază foarte mult,

γ) $-\dfrac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e\,\delta}\dfrac{\partial}{\partial\zeta_a}\left(\dfrac{w_{\max}}{U_e}\right) K_R\,(u_{a_R}^2 - u_{a_P}^2)$ poate *deveni negativ* și foarte mare pentru $\eta_1 > 0{,}5$, atunci apare posibilitatea ca $u_a^2 < 0$, deci o incompatibilitate.

Această incompatibilitate fizică este înlăturată prin considerarea unui nou termen în ecuația (37).

Din analiza făcută rezultă că trebuie luat termenul Q, pentru că este cel mai important. Deci ecuația completă este

$$u_a^2 = \underbrace{u_{a_P}^2}_{0} - \underbrace{\frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e\,\delta}\,R_1\,(u_{a_R}^2 - u_{a_P}^2)}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2\,T}\,Q_1\,(u_{a_Q}^2 - u_{a_P}^2)}_{\mathrm{II}}. \tag{46}$$

Termenul **O** reprezintă scurgerea fundamentală în variabile transformate și *variază foarte puțin* cu u_a pentru $\eta > 0{,}5$.

Termenul **I** reprezintă influența vîrtejurilor longitudinale (componenta w a vitezei) și *variază foarte mult* cu $\frac{\partial w}{\partial z}$ și Re_x.

Termenul **II** reprezintă influența nestaționarității vitezei u (datorită acum nestaționării lui w) și trebuie să fie **negativă și mare** cînd termenul I este pozitiv și mare.

Condiția teoretică pentru a nu avea incompatibilitatea fizică se scrie astfel

$$u_{a_P}^2 - \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e\,\delta} R_1 (u_{a_R}^2 - u_{a_P}^2) - \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2\, T} Q_1 (u_{a_Q}^2 - u_{a_P}^2) \geqslant 0. \tag{47}$$

Vom calcula acum calitativ un exemplu pentru a ne face o idee despre ordinul de mărime a variației lui u, adică $\frac{\partial u}{\partial t}$. Calculul se efectuează prin aproximații succesive, luînd ca primă aproximație expresia

$$u_a^2 = u_{a_P}^2 - \varphi\, \Delta_R, \tag{48}$$

unde $\varphi = \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e\,\delta} R_1 \leqslant 1$. Mai departe se obține

$$2\, u_a \frac{\partial u_a}{\partial \tau_a} \approx - \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_a} \Delta_R, \tag{49}$$

fiindcă Δ_R variază foarte puțin cu timpul. În acest mod găsim

$$\frac{\partial}{\partial \tau_a} \int_0^\eta \frac{1}{u_a}\, \mathrm{d}\eta = - \int_0^\eta \frac{1}{u_a^2} \frac{\partial u_a}{\partial \tau_a}\, \mathrm{d}\eta = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_a} \int_0^\eta \frac{\Delta_R}{u_a^3}\, \mathrm{d}\eta. \tag{50}$$

Calculul lui Q este analog calculului lui R, cu noul integrand

$$w_a^* = \frac{\Delta_R}{u_a^2} \simeq \frac{u_{a_R}^2}{u_{a_P}^2} - 1. \tag{51}$$

Se obține

$$Q = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_a} \int_0^\eta \left\{ \int_1^\eta \left[\int_0^\eta \frac{w_a^*}{u_a}\, \mathrm{d}\eta \right] \mathrm{d}u_a \right\} \mathrm{d}\eta \tag{52}$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_a} K_Q.$$

Calculele arată că $u_{a_Q}^2 = \frac{Q}{Q_1}$ este foarte asemănător lui $u_{a_R}^2 = \frac{R}{R_1}$. Există diferențe pentru $t/T = 0{,}5$, $0 \leqslant \eta \leqslant 0{,}2$, fiindcă în acest domeniu $u_{a_R}^2 < u_{a_P}^2$.

Acum putem scrie

$$u_a^2 = u_{a_P}^2 - \varphi \Delta_R - 2{,}28 \sqrt{\mathrm{Re}_\xi} \frac{\delta}{U_e T} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_a} K_Q \Delta_Q,$$

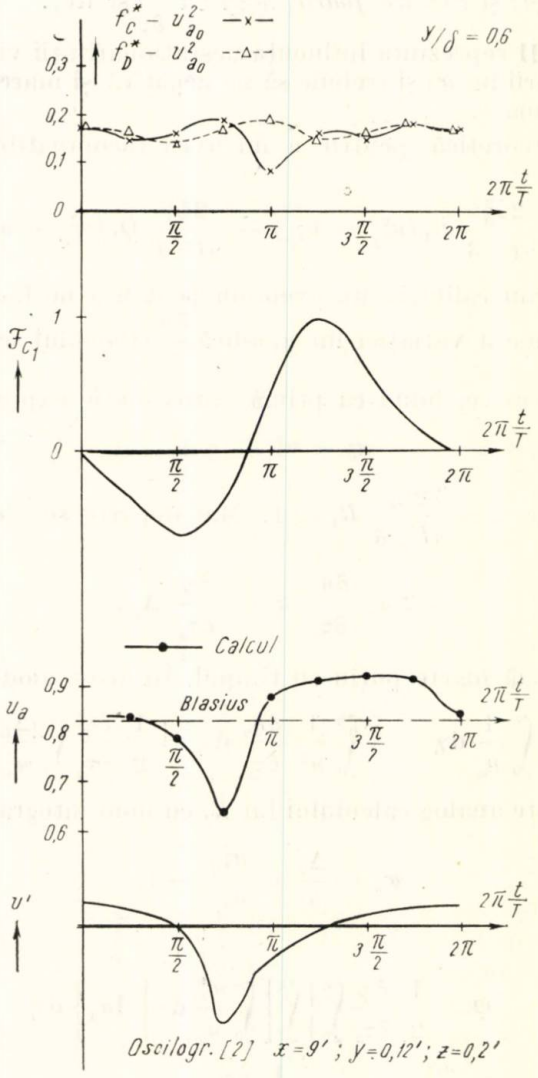


Fig. 4

unde

$$2{,}28 \sqrt{\mathrm{Re}_\xi} \frac{\delta}{U_e T} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_a} K_Q < 1. \tag{53}$$

S-a calculat după această formulă pentru a determina deformarea temporală a profilului Blasius. În figura 4 sînt date rezultatele calculului.

În cadrul ipotezelor și aproximațiilor făcute s-a obținut o variație a vitezei în cursul unei perioade ($T = \frac{1}{145}$ s) care se poate compara cu oscilograma [2] trasată pe figură. Se observă că variația sinusoidală a fluctuației este de asemenea modificată o dată cu creșterea lui Re_x și a derivatei $\frac{\partial w}{\partial z}$.

Se ajunge astfel la o situație în care, momentan, suma termenilor R și Q devine negativă și condiția de compatibilitate (47) nu mai este îndeplinită. Un raționament al desfășurării fenomenului este următorul:

— într-o variantă, este posibilă intervenția celorlalți termeni neglijați, și atunci fluctuația rămîne o sinusoidală deformată continuu;

— într-o altă variantă, ceilalți termeni n-au o contribuție pozitivă, și atunci are *loc o variație bruscă temporală*, care se traduce printr-o schimbare a termenului Q în sensul valorii lui pozitive. Calitativ putem scrie

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| \gg \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\text{stabilitate}}, \tag{54}$$

și acest lucru se traduce prin nașterea unui spot elementar (*breakdown of laminar flow*).

7. CONCLUZII

Mai întîi trebuie remarcată dificultatea calculelor de efectuat după metoda expusă. Rezultatele depind în mod esențial de datele experimentale particulare, întrucît experiențele pot accentua sau diminua unele dintre multele cauze perturbatoare ale scurgerii fundamentale.

Lucrarea de față este deci corectă în cadrul ipotezelor expuse și cu referire la experiențele citate [2].

Este extrem de importantă realizarea unei scurgeri fundamentale Blasius cît mai pure, fără influența turbulenței curentului exterior, a gradientului de presiune, a rugozității etc., și care să conserve caracteristicile principale (grosime, profil de viteze), caracterul armonic al fluctuațiilor pe o distanță cît mai mare. Producerea unor perturbații tridimensionale controlate în acest strat-limită a permis aproximațiile făcute în lucrare și deci efectuarea calculelor numerice.

Calculele arată, în esență, că într-un anume punct al stratului-limită variația sinusoidală a fluctuațiilor este deformată, și această deformație poate ajunge pînă acolo, încît să ia caracterul unei variații bruște, spotice. Această variație temporală dintr-un anume punct depășește variația

temporală a perturbaţiilor Tollmien-Schlichting şi pe oscilogramă apar salturile „catastrofice" de viteză care caracterizează stadiul final al tranziţiei.

Primită la redacţie la 15 iunie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Şt. N. Săvulescu, *La distorsion du profil Blasius due aux tourbillons longitudinaux dans la couche limite transitionnelle de la plaque plane.* Rev. méc. appl., *1* (1964).
2. P. S. Klebanoff, K. D. Tidstrom, L. M. Sargent, *The three-dimensional nature of Boundary-Layer instability.* J.F.M., *2*, part. 1, ianuarie (1962).

CALCULUL PLASTIC AL PLĂCILOR DREPTUNGHIULARE DE BETON ARMAT REZEMATE PE TREI LATURI SOLICITATE DE ÎNCĂRCĂRI DE TIP HIDROSTATIC

de VALERIU PETCU

Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București

În lucrare se stabilesc momentele plastice ale plăcilor de beton armat de formă dreptunghiulară rezemate pe trei laturi și libere pe a patra latură, solicitate de încărcări de tip hidrostatic, acționînd pe toată suprafața plăcilor. Sînt luate în considerație patru tipuri de plăci, în funcție de modul de rezemare a celor trei laturi (simplă rezemare sau încastrare perfectă).

Baza teoretică a studiului este constituită de metoda de calcul la starea limită de rezistență [8], [9] și de concepția coeficientului de redistribuție [2].

Pentru rezolvarea ecuației de echilibru plastic a acestor elemente de construcție se folosește criteriul redistribuției minime [3], [4].

NOTAȚII

l_1, l_2 — deschiderile plăcii, l_1 fiind deschiderea pe direcția laturii libere;

L_M — lucrul mecanic virtual al momentelor plastice în stadiul de mecanism al plăcii;

L_P — lucrul mecanic al încărcării temporare de calcul în stadiul de mecanism al plăcii;

M_{p1} — momentul plastic pozitiv pe unitatea de lungime, acționînd pe direcția l_1;

M_{p2} — momentul plastic pozitiv pe unitatea de lungime, acționînd pe direcția l_2;

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 20, NR. 5 P. 1099–1116 BUCUREȘTI 1965

M'_{p1} — valoarea absolută a momentului plastic negativ, acționînd pe unitatea de lungime a laturilor încastrate perpendiculare pe latura liberă;

M'_{p2} — valoarea absolută a momentului plastic negativ acționînd pe unitatea de lungime a laturii încastrate paralele cu latura liberă;

p_n — încărcare uniform distribuită pe unitatea de suprafață, reprezentînd ordonata maximă a diagramei încărcării temporare normate;

p_u — încărcare uniform distribuită pe unitatea de suprafață, reprezentînd ordonata maximă a diagramei încărcării temporare de calcul;

p_1 — încărcare uniform distribuită pe unitatea de suprafață, reprezentînd ordonata maximă a diagramei încărcării temporare corespunzătoare atingerii limitei de curgere de calcul într-un singur punct al armăturii;

$r = \frac{p_u}{p_1}$ — coeficientul de redistribuție, redeterminat în ipoteza transformării plăcii în mecanism sub acțiunea încărcării temporare de calcul;

$r_a = \frac{p_u}{p_n}$ — valoare-limită a coeficientului de redistribuție, determinată din condiția privind comportarea elastică a armăturii sub acțiunea încărcării temporare normate;

x_1 — distanță care caracterizează schema de rupere I (fig. 1*a*);

x_2 — distanță care caracterizează schema de rupere II (fig. 1*b*);

$$m_1 = \frac{M_{p1}}{p_u l_1^2}; \; m_2 = \frac{M_{p2}}{p_u l_1^2}; \; m'_1 = \frac{M'_{p1}}{p_u l_1^2}; \; m'_{p2} = \frac{M'_{p2}}{p_u l_1^2}$$

$$\lambda = \frac{l_2}{l_1}; \; \xi_1 = \frac{x_1}{l_1}; \; \xi_2 = \frac{x_2}{l_2}.$$

I. SCHEME DE RUPERE

Schemele posibile de rupere ale plăcilor dreptunghiulare de beton armat rezemate pe trei laturi solicitate de încărcări de tip hidrostatic sînt reprezentate în figura 1.

Ruperea plăcilor după una dintre aceste două scheme depinde de raportul laturilor, de modul de rezemare pe contur și de modul de distribuire a armăturii pe cele două direcții ale plăcilor.

Observație. Figura 1 cuprinde, de asemenea, reprezentarea convențională a liniilor de rupere și a laturilor simplu rezemate și încastrate perfect.

II. IPOTEZE DE CALCUL

1. Starea-limită de rezistenţă a plăcilor ce se studiază corespunde transformării lor în mecanisme sub acţiunea încărcărilor de calcul.

2. Pe fiecare direcţie, armătura corespunzătoare momentelor pozitive este uniform distribuită pe toată suprafaţa plăcilor, fără a se ridica

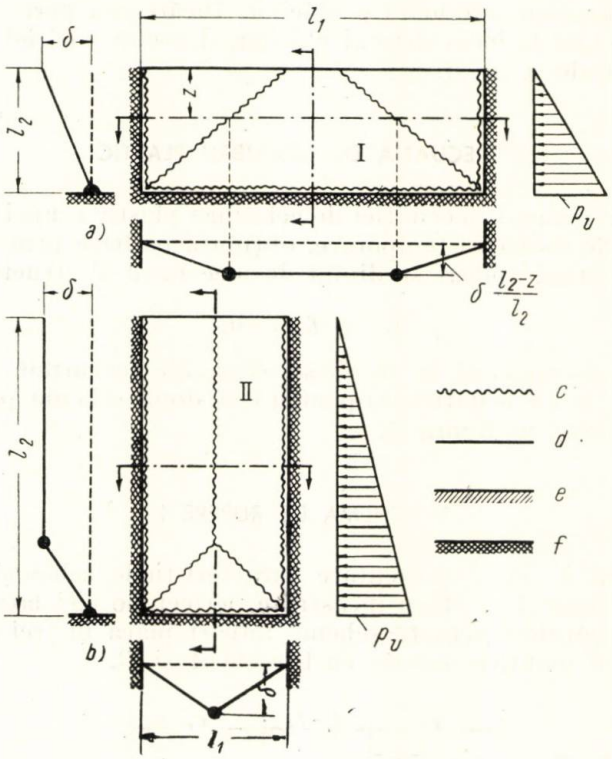


Fig. 1. — Scheme de rupere şi reprezentări convenţionale:

a — schema de rupere I; *b* — schema de rupere II; *c* — linie de rupere. *d* — latură liberă; *e* — latură simplu rezemată; *f* — latură încastrată perfect.

pe reazeme. De asemenea, pe fiecare direcţie, armătura corespunzătoare momentelor negative este uniform distribuită de-a lungul laturilor încastrate ale plăcilor.

3. Armarea şi ancorarea colţurilor opuse laturii libere sînt suficiente pentru a asigura fiecărei plăci formarea unui mecanism de rupere avînd ca schemă una dintre schemele reprezentate în figura 1.

4. Comportarea plăcilor sub acţiunea încărcărilor este perfect elastică pînă la atingerea limitei de curgere de calcul într-un singur punct al armăturii.

5. Armătura se presupune alcătuită din vergele de oţel cu palier de curgere, avînd limita de curgere de calcul cel mult egală cu 3 000 kgf/cm².

6. Plăcile se consideră situate în poziţie verticală sau aproape verticală, cu latura liberă la partea lor superioară.

7. Plăcile sînt solicitate de încărcări temporare de tip hidrostatic, diagramele lor avînd ordonată nulă la marginea superioară şi ordonată maximă la marginea inferioară a plăcilor. Încărcarea permanentă nu intervine în calculul la încovoiere al plăcilor, datorită poziţiei verticale sau aproape verticale a acestora.

III. ECUAŢIA DE ECHILIBRU PLASTIC

Expresia generală a ecuaţiei de echilibru plastic a unei structuri solicitate numai de încărcări temporare, obţinută pe baza principiului lucrului mecanic virtual aplicat stadiului de mecanism al structurii, este

$$L_M + L_P = 0. \tag{1}$$

În cele ce urmează se stabilesc expresiile lucrurilor mecanice virtuale L_M şi L_P şi ale ecuaţiei (1) pentru cele două scheme posibile de rupere reprezentate în figura 1.

1. SCHEMA DE RUPERE I

În figura 2 sînt reprezentate caracteristicile schemei de rupere I pentru cazul general al plăcii încastrate perfect pe trei laturi. Liniile de rupere care alcătuiesc această schemă împart placa în trei discuri, două dintre ele fiind identice, notate cu literele A şi B.

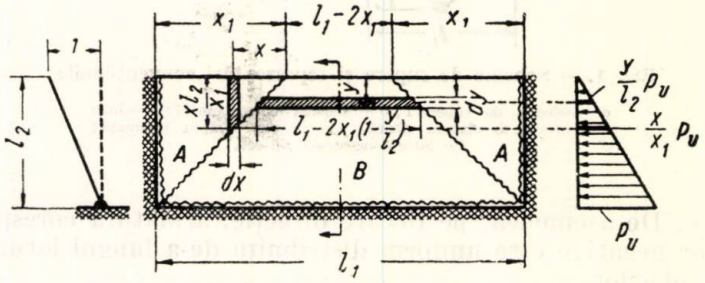


Fig. 2. — Caracteristicile schemei de rupere I.

Fie L_A şi L_B lucrurile mecanice virtuale ale încărcărilor temporare de calcul care acţionează pe suprafaţa unuia dintre discurile A, respectiv pe suprafaţa discului B, în stadiul de mecanism al plăcii.

Din egalitatea lucrului mecanic virtual al încărcării temporare care solicită întreaga placă cu suma lucrurilor mecanice virtuale ale încărcări-

lor temporare aplicate pe suprafaţa fiecăruia dintre discurile delimitate de liniile de rupere rezultă

$$L_P = 2L_A + L_B. \tag{2}$$

Pentru o deplasare virtuală egală cu unitatea a punctelor în care liniile de rupere din cîmpul plăcii intersectează latura liberă, lucrurile mecanice virtuale L_A şi L_B au expresiile

$$L_A = \frac{l_2\, p_u}{2x_1^3}\int_0^{x_1} x^2\,(x_1 - x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{24}\,\lambda\xi_1\, p_u\, l_1^2, \tag{3}$$

respectiv

$$L_B = \frac{p_u}{l_2^3}\int_0^{l_2} y(l_2 - y)\,[2\;x_1 y + l_2(l_1 - 2x_1)]\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{6}\,\lambda\,(1 - \xi_1)\; p_u\, l_1^2. \tag{4}$$

Făcînd în relaţia (2) înlocuirile indicate de relaţiile (3) şi (4), se obţine

$$L_P = \frac{\lambda}{12}\,(2 - \xi_1)\; p_u\, l_1^2. \tag{5}$$

Pentru deplasarea virtuală considerată mai sus, lucrul mecanic virtual al momentelor plastice, L_M, are expresia

$$L_M = 2\,\frac{\lambda}{\xi_1}\,M_{p1} + 2\,\frac{\xi_1}{\lambda}\,M_{p2} + 2\,\frac{\lambda}{\xi_1}\,M'_{p1} + \frac{1}{\lambda}\,M'_{p2}. \tag{6}$$

Ţinînd seama de expresiile (5) şi (6), pentru schema de rupere I se obţine următoarea formă a ecuaţiei de echilibru plastic (1):

$$2\lambda^2 M_{p1} + 2\xi_1^2 M_{p2} + 2\lambda^2 M'_{p1} + \xi_1 M'_{p2} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{12}\,\xi_1\,(2 - \xi_1)\; p_u\, l_1^2. \tag{7}$$

2. SCHEMA DE RUPERE II

În figura 3 sînt reprezentate caracteristicile schemei de rupere II pentru placa încastrată perfect pe trei laturi. Ca şi în cazul precedent, liniile de rupere care alcătuiesc această schemă împart placa în trei discuri, două dintre ele fiind identice, notate cu literele C şi D.

Fie L_C și L_D lucrurile mecanice virtuale ale încărcărilor temporare de calcul care acționează pe suprafața unuia din discurile C, respectiv pe suprafața discului D, în stadiul de mecanism al plăcii.

Între lucrurile mecanice virtuale L_P, L_C și L_D există egalitatea

$$L_P = 2L_C + L_D. \tag{8}$$

Pentru o deplasare virtuală egală cu unitatea a punctelor liniei de rupere din cîmp perpendiculară pe latura liberă, lucrurile mecanice

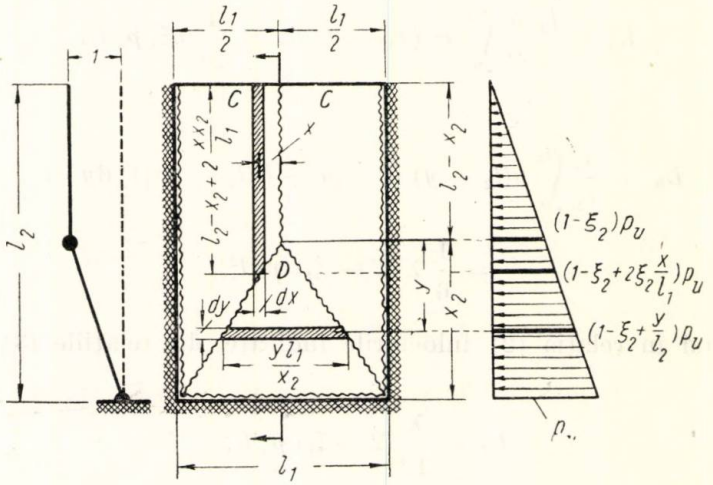


Fig. 3. — Caracteristicile schemei de rupere II.

virtuale L_C și L_D au expresiile

$$L_C = \frac{p_u}{2\, l_1^3 l_2} \int_0^{\frac{l_1}{2}} (l_1 - 2\,x)\,[(l_2 - x_2)\,l_1 + 2x_2 x]^2\,\mathrm{d}x = \\ = \frac{\lambda}{48}(6 - 8\xi_2 + 3\xi_2^2)\,p_u\,l_1^2, \tag{9}$$

respectiv

$$L_D = \frac{l_1\,p_u}{l_2\,x_2^2} \int_0^{x_2} y\,(x_2 - y)\,(l_2 - x_2 + y)\,\mathrm{d}y = \\ = \frac{\lambda}{12}\,\xi_2\,(2 - \xi_2)\,p_u\,l_1^2. \tag{10}$$

Făcînd în relația (8) înlocuirile indicate de relațiile (9) și (10), se obține

$$L_P = \frac{\lambda}{24}(6 - 4\,\xi_2 + \xi_2^2)\,p_u\,l_1^2. \tag{11}$$

Pentru deplasarea virtuală considerată mai sus, lucrul mecanic virtual al momentelor plastice, L_M, are expresia

$$L_M = 4\,\lambda\, M_{p1} + \frac{1}{\lambda\xi_2} M_{p2} + 4\,\lambda\, M'_{p1} + \frac{1}{\lambda\xi_2} M'_{p2}. \tag{12}$$

Ţinînd seama de expresiile (11) şi (12), pentru schema de rupere II se obţine următoarea formă a ecuaţiei de echilibru plastic (1):

$$4\lambda^2\xi_2 M_{p1} + M_{p2} + 4\lambda^2\xi_2 M'_{p1} + M'_{p2} =$$

$$= \frac{\lambda^2}{24}\,\xi_2(6 - 4\,\xi_2 + \xi_2^2)\,p_u\,l_1^2. \tag{13}$$

IV. EXPRESIILE MOMENTELOR PLASTICE

Expresiile (7) şi (13) ale ecuaţiei de echilibru plastic, corespunzătoare celor două scheme posibile de rupere, arată că pentru obţinerea unei soluţii a momentelor plastice sînt necesare ecuaţii suplimentare.

Stabilirea acestor ecuaţii se face pe baza criteriului redistribuţiei minime [3], [4], a cărui aplicare asigură unei plăci armate pe două direcţii cele mai favorabile condiţii de rupere şi de exploatare, precum şi un volum de armătură minim sau aproape minim [7]. Potrivit acestui criteriu, redistribuţia minimă de eforturi are loc în cazul în care limita de curgere a armăturii este atinsă simultan în punctele cele mai solicitate ale plăcii.

Pe de altă parte, momentul plastic al unei secţiuni de beton armat este egal cu momentul încovoietor corespunzător atingerii limitei de curgere în armătura întinsă a secţiunii. În consecinţă, aplicarea criteriului redistribuţiei minime are ca rezultat atingerea valorilor momentelor plastice simultan în punctele cele mai solicitate ale plăcii. În cazul plăcilor ce se studiază, fie p_1 valoarea încărcării temporare corespunzătoare acestui stadiu.

Din cele de mai sus rezultă că momentele plastice sînt egale cu momentele elastice produse de încărcarea p_1. Prin eliminarea încărcării p_1 între aceste egalităţi, se obţine numărul de ecuaţii suplimentare necesare pentru determinarea soluţiei momentelor plastice.

Mărimea încărcării p_1 necesară pentru calculul coeficientului de redistribuţie se obţine din egalarea valorii unui moment plastic oarecare cu expresia momentului elastic corespunzător, dat de încărcarea p_1.

Pentru efectuarea operaţiilor prezentate mai sus, este necesară stabilirea în prealabil a celor mai solicitate puncte ale plăcilor.

Din calculul elastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat rezemate pe trei laturi şi libere pe a patra latură, solicitate de încărcări de tip hidrostatic, rezultă că momentele elastice maxime (în valoare absolută) au loc în următoarele puncte (fig. 4):

a) momentul maxim în cîmp pe direcţia l_1: la mijlocul laturii libere (fig. 4, punctul 1*a*) sau în centrul plăcii (fig. 4, punctul 1*b*);

b) momentul maxim în cîmp pe direcția l_2 : în centrul plăcii (fig. 4, punctul 2) ;

c) momentul maxim pe laturile încastrate perpendiculare pe latura liberă : în punctele de intersecție ale acestora cu latura liberă (fig. 4, punctele $1'a$) sau în mijlocul acestor laturi (fig. 4, punctele $1'b$) ;

d) momentul maxim pe latura încastrată paralelă cu latura liberă : în mijlocul acestei laturi (fig. 4, punctul $2'$).

Ținînd seama de egalitatea dintre momentele plastice și momentele elastice produse de încărcarea p_1 în punctele cele mai solicitate ale plăcii, rezultă pentru momentele plastice următoarele expresii :

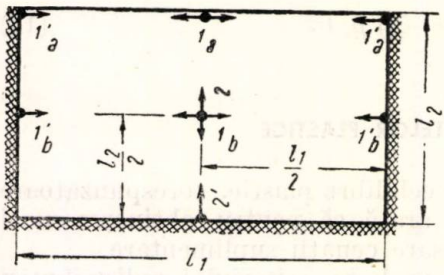


Fig. 4. — Punctele cele mai solicitate ale plăcilor.

$$\begin{cases} M_{p1} = \alpha_1 p_1 l_1^2 ; \; M'_{p1} = \alpha'_1 p_1 l_1^2 \\ M_{p2} = \alpha_2 p_1 l_1^2 ; \; M'_{p2} = \alpha'_2 p_1 l_1^2 \end{cases}, \tag{14}$$

unde α_1, α_2, α'_1 și α'_2 sînt coeficienții care caracterizează momentele elastice maxime (în valoare absolută) din punctele cele mai solicitate ale plăcii.

Valorile acestor coeficienți sînt date în lucrarea [1].

Prin eliminarea încărcării p_1 între egalitățile (14) se obțin următoarele ecuații :

$$M_{p2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} M_{p1} ; \; M'_{p1} = \frac{\alpha'_1}{\alpha_1} M_{p1} ; \; M'_{p2} = \frac{\alpha'_2}{\alpha_1} M_{p1}, \tag{15}$$

în care M_{p1} este considerat moment plastic de referință.

Sistemul format de ecuațiile (7) și (15), respectiv de ecuațiile (13) și (15), conduce la următoarele expresii pentru momentul plastic de referință M_{p1}, pentru încărcarea p_1 și pentru coeficientul de redistribuție r :

1. SCHEMA DE RUPERE I

$$M_{p1} = \frac{\lambda^2 \alpha_1}{12} \cdot \frac{2\xi_1 - \xi_1^2}{2\lambda^2 (\alpha_1 + \alpha'_1) + \alpha'_2 \xi_1 + 2 \alpha_2 \xi_1^2} p_u l_1^2 =$$

$$= m_1 p_u l_1^2, \tag{16}$$

unde coeficientul m_1 este dat de relația

$$m_1 = \frac{\lambda^2 \alpha_1}{12} \cdot \frac{2\xi_1 - \xi_1^2}{2\lambda^2 (\alpha_1 + \alpha'_1) + \alpha'_2 \xi_1 + 2 \alpha_2 \xi_1^2} \cdot \tag{17}$$

Din compararea ecuației (16) cu prima dintre ecuațiile (14) se obține

$$p_1 = \frac{m_1}{\alpha_1} p_u. \tag{18}$$

În cazul plăcilor studiate, coeficientul de redistribuție este egal cu raportul dintre încărcările p_u și p_1 [3], [4].

Din relația (18) rezultă că acest raport este egal cu $\frac{\alpha_1}{m_1}$.

În consecință, expresia coeficientului de redistribuție este

$$r = \frac{\alpha_1}{m_1}. \tag{19}$$

2. SCHEMA DE RUPERE II

$$M_{p1} = \frac{\lambda^2 \alpha_1}{24} \cdot \frac{6\xi_2 - 4\xi_2^2 + \xi_2^3}{(\alpha_2 + \alpha_2') + 4\lambda^2 (\alpha_1 + \alpha_1')\xi_2} \cdot p_u l_1^2 =$$

$$= m_1 p_u l_1^2, \tag{20}$$

unde coeficientul m_1 este dat de relația

$$m_1 = \frac{\lambda^2 \alpha_1}{24} \cdot \frac{6\xi_2 - 4\xi_2^2 + \xi_2^3}{(\alpha_2 + \alpha_2') + 4\lambda^2 (\alpha_1 + \alpha_1')\xi_2}. \tag{21}$$

Încărcarea p_1 și coeficientul de redistribuție r au aceleași expresii ca în cazul schemei de rupere I, cu deosebirea că coeficientul m_1 care intervine în aceste relații are valoarea dată de relația (21).

Relațiile (16)—(19) și (20)—(21) conțin necunoscutele ξ_1, respectiv ξ_2, care definesc cele două scheme de rupere.

Valorile acestor parametri se determină pe baza reciprocei teoremei cinematice a teoriei plastice a structurilor static nedeterminate.

Pentru plăcile studiate, enunțul acestei reciproce este următorul: fiind date caracteristicile statice-geometrice, precum și valoarea încărcării temporare de calcul ale unei plăci ale cărei momente plastice pot fi exprimate în funcție de un singur moment plastic luat ca referință, mărimea parametrului care caracterizează schema reală de rupere corespunde valorii maxime a momentului plastic de referință.

De aici rezultă că parametrii ξ_1 și ξ_2 se determină din condiția de maximum a expresiilor (16) și (20) ale momentului plastic de referință M_{p1}.

V. EXPRESIILE CONDIȚIEI DE MAXIMUM A MOMENTULUI PLASTIC DE REFERINȚĂ

Pentru cele două scheme de rupere reprezentate în figura 1, condiția de maximum a momentului plastic de referință M_{p1} este

$$\frac{\mathrm{d}M_{p1}}{\mathrm{d}\xi_1} = 0 \tag{22}$$

pentru schema de rupere I, respectiv

$$\frac{\mathrm{d}M_{p1}}{\mathrm{d}\xi_2} = 0. \tag{23}$$

pentru schema de rupere II.

Ținînd seama de expresiile (16) și (20) ale momentului plastic M_{p1}, ecuațiile (22) și (23) devin

$$\frac{4\alpha_2 + \alpha_2'}{4\lambda^2(\alpha_1 + \alpha_1')}\xi_1^2 + \xi_1 - 1 = 0, \tag{24}$$

respectiv

$$8\lambda^2\frac{\alpha_1 + \alpha_1'}{\alpha_2 + \alpha_2'}\xi_2^3 - \left(16\lambda^2\frac{\alpha_1 + \alpha_1'}{\alpha_2 + \alpha_2'} - 3\right)\xi_2^2 - 8\xi_2 + 6 = 0. \tag{25}$$

Ecuațiile (24) și (25) reprezintă expresiile condiției de maximum a momentului plastic de referință pentru schemele de rupere I și II.

În cele ce urmează se stabilesc valorile parametrilor schemelor de rupere rezultate din ecuațiile de condiție (24) și (25) și se determină momentele plastice și coeficienții de redistribuție pentru patru tipuri de plăci dreptunghiulare de beton armat rezemate pe trei laturi și libere pe a patra latură.

VI. PLACĂ SIMPLU REZEMATĂ PE TREI LATURI

Schema plăcii și diagrama încărcării temporare sînt reprezentate în figura 5.

Momentele plastice de pe laturile simplu rezemate sînt nule, adică $M_{p1}' = M_{p2}' = 0$, respectiv $\alpha_1' = \alpha_2' = 0$.

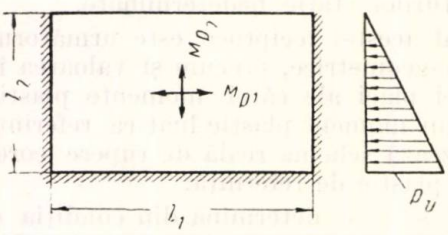


Fig. 5

Pentru acest caz, ecuațiile (24) și (25) devin

$$\frac{\alpha_2}{\lambda^2\alpha_1}\xi_1^2 + \xi_1 - 1 = 0, \tag{26}$$

respectiv

$$8\lambda^2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\xi_2^3 - \left(16\lambda^2\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 3\right)\xi_2^2 - 8\xi_2 + 6 = 0. \tag{27}$$

Valorile coeficienților α_1 și α_2 care intervin în aceste ecuații sînt date în tabela 1.

Tabela 1

λ	α_1	α_2
0,3	0,0086	0,0052
0,4	0,0138	0,0084
0,5	0,0190	0,0113
0,6	0,0234	0,0136
0,7	0,0271	0,0154
0,8	0,0297	0,0168
0,9	0,0313	0,0177
1,0	0,0327	0,0181
1,2	0,0334	0,0184
1,5	0,0314	0,0177
2,0	0,0275	0,0155

În tabela 2 sînt date valorile coeficienților m_1 și m_2, care caracterizează momentele plastice maxime, precum și valorile parametrilor ξ_1 și ξ_2.

Tabela 2

λ	m_1	m_2	Schema de rupere	ξ_1	ξ_2
0,3	0,0133	0,0081	I	0,32	—
0,4	0,0166	0,0101	I	0,40	—
0,5	0,0207	0,0123	II	—	0,67
0,6	0,0247	0,0144	II	—	0,58
0,7	0,0279	0,0159	II	—	0,51
0,8	0,0307	0,0174	II	—	0,46
0,9	0,0329	0,0186	II	—	0,42
1,0	0,0353	0,0196	II	—	0,38
1,2	0,0387	0,0214	II	—	0,33
1,5	0,0422	0,0238	II	—	0,27
2,0	0,0465	0,0262	II	—	0,21

Observație. Compararea coeficienților α_1 și α_2, care caracterizează momentele elastice, cu coeficienții m_1 și m_2, care caracterizează momentele plastice, arată că pentru toate valorile raportului $\lambda = \frac{l_2}{l_1}$ cuprinse între 0,5 și 2,0 momentele încovoietoare determinate în ipoteza comportării elastice a plăcilor sub acțiunea încărcării temporare de calcul sînt mai mici decît momentele plastice corespunzătoare.

Acest rezultat este datorit faptului că în stadiul elastic comportarea plăcilor este influențată în sens favorabil de momentele de torsiune care iau naștere ca urmare a împiedicării colțurilor de a se ridica de pe reazeme. Această influență are drept consecință obținerea de valori ale momentelor încovoietoare inferioare celor obținute în ipoteza ridicării libere a colțurilor sub acțiunea încărcării.

În stadiul de mecanism însă, influența momentelor de torsiune asupra capacității de rezistență a plăcilor este nulă. Acesta este motivul pentru care, la plăcile cu unul sau mai multe colțuri încadrate de laturi simplu rezemate, calculul plastic conduce în unele cazuri la momente plastice mai mari decît cele elastice, determinate pe baza încărcărilor de calcul.

Ținînd seama de rezultatele obținute și de observația de mai sus, se recomandă ca plăcile simplu rezemate pe trei laturi și libere pe a patra latură, solicitate de încărcări de tip hidrostatic, să fie dimensionate pentru momente de calcul egale cu momentele elastice produse de încărcările de calcul.

Această concluzie a fost obținută și în cazul calculului plastic al plăcilor dreptunghiulare simplu rezemate pe trei laturi, solicitate de încărcări uniform distribuite pe toată suprafața lor, pentru $\lambda \leqslant 0{,}84$ [6].

VII. PLACĂ SIMPLU REZEMATĂ PE DOUĂ LATURI PARALELE ȘI ÎNCASTRATĂ PERFECT PE UNA DINTRE CELELALTE DOUĂ LATURI

Schema plăcii și diagrama încărcării temporare sînt reprezentate în figura 6.

Momentele plastice de pe laturile simplu rezemate sînt nule, adică

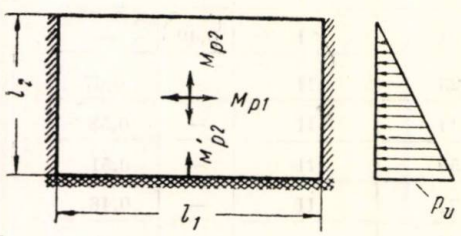


Fig. 6

$$M'_{p1} = 0, \text{ respectiv } \alpha'_1 = 0.$$

Pentru acest caz, ecuațiile de condiție (24) și (25) devin

$$\frac{4\,\alpha_2 + \alpha'_2}{4\,\lambda^2\alpha_1}\,\xi_1^2 + \xi_1 - 1 = 0, \qquad (28)$$

respectiv

$$8\,\lambda^2\frac{\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha'_2}\,\xi_2^3 -$$

$$-\left(16\,\lambda^2\frac{\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha'_2} - 3\right)\xi_2^2 - 8\xi_2 + 6 = 0. \qquad (29)$$

Valorile coeficienților α_1, α_2 și α_2 care intervin în aceste ecuații sînt date în tabela 1.

Tabela 3

λ	α_1	α_2	α'_2
0,3	0,0015	0	0,0135
0,4	0,0041	0,0001	0,0215
0,5	0,0077	0,0023	0,0290
0,6	0,0122	0,0047	0,0361
0,7	0,0162	0,0072	0,0423
0,8	0,0200	0,0098	0,0477
0,9	0,0229	0,0119	0,0531
1,0	0,0251	0,0138	0,0574
1,2	0,0288	0,0158	0,0649
1,5	0,0356	0,0176	0,0743
2,0	0,0464	0,0167	0,0848

Tabela 4 cuprinde valorile coeficienților m_1, m_2 și m'_2, care caracterizează momentele plastice maxime, schemele de rupere și valorile parametrilor ξ_1 și ξ_2 care le definesc, precum și valorile coeficientului de redistribuție r.

Tabela 4

λ	m_1	m_2	m'_2	r	Schema de rupere	ξ_1	ξ_2
0,3	0,0014	0	0,0126	1,07	I	0,18	—
0,4	0,0036	0,0001	0,0189	1,14	I	0,29	—
0,5	0,0064	0,0019	0,0241	1,21	I	0,36	—
0,6	0,0095	0,0037	0,0281	1,29	I	0,43	—
0,7	0,0123	0,0055	0,0322	1,32	II	—	0,92
0,8	0,0149	0,0073	0,0355	1,34	II	—	0,83
0,9	0,0171	0,0089	0,0396	1,34	II	—	0,76
1,0	0,0191	0,0105	0,0437	1,32	II	—	0,71
1,2	0,0227	0,0125	0,0512	1,27	II	—	0,62
1,5	0,0281	0,0139	0,0587	1,27	II	—	0,51
2,0	0,0355	0,0128	0,0649	1,31	II	—	0,38

VIII. PLACĂ ÎNCASTRATĂ PERFECT PE DOUĂ LATURI PARALELE ȘI SIMPLU REZEMATĂ PE UNA DIN CELELALTE DOUĂ LATURI

Schema plăcii și diagrama încărcării temporare sînt reprezentate în figura 7.

Momentul plastic de pe latura simplu rezemată este nul, adică

$$M'_{p2} = 0, \text{ respectiv } \alpha'_2 = 0.$$

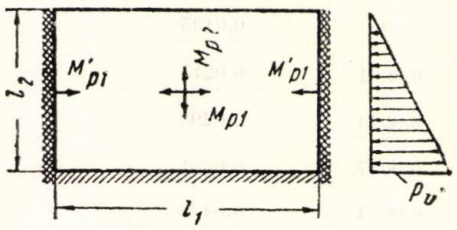


Fig. 7

Pentru acest caz, ecuațiile de condiție (24) și (25) devin

$$\frac{\alpha_2}{\lambda^2 (\alpha_1 + \alpha'_1)} \xi_1^2 + \xi_1 - 1 = 0, \quad (30)$$

respectiv

$$8 \lambda^2 \frac{\alpha_1 + \alpha'_1}{\alpha_2} \xi_2^3 - \left(16 \lambda^2 \frac{\alpha_1 + \alpha'_1}{\alpha_2} - 3\right) \xi_2^2 - 8 \xi_2 + 6 = 0. \quad (31)$$

Valorile coeficienților α_1, α_2 și α'_1 care intervin în aceste ecuații sînt date în tabela 5.

Tabela 5

λ	α_1	α_2	α'_1
0,3	0,0073	0,0053	0,0212
0,4	0,0099	0,0077	0,0227
0,5	0,0115	0,0090	0,0228
0,6	0,0119	0,0095	0,0262
0,7	0,0128	0,0097	0,0294
0,8	0,0144	0,0098	0,0322
0,9	0,0157	0,0094	0,0344
1,0	0,0168	0,0089	0,0365
1,2	0,0188	0,0080	0,0393
1,5	0,0203	0,0064	0,0414
2,0	0,0209	0,0043	0,0425

Introducerea rădăcinilor ecuațiilor (30) și (31) în expresiile (16) și (20) conduce la concluzia că momentele plastice maxime ale plăcilor considerate se obțin exclusiv pe baza schemei de rupere II.

Tabela 6 cuprinde valorile coeficienților m_1, m_2 și m'_1, care caracterizează momentele plastice maxime, precum și valorile parametrului ξ_2 și ale coeficientului de redistribuție r.

Tabela 6

λ	m_1	m_2	m'_1	r	Schema de rupere	ξ_2
0,3	0,0057	0,0041	0,0166	1,28	II	0,64
0,4	0,0078	0,0061	0,0179	1,27	II	0,56
0,5	0,0097	0,0076	0,0193	1,19	II	0,49
0,6	0,0104	0,0083	0,0229	1,15	II	0,42
0,7	0,0112	0,0085	0,0257	1,15	II	0,36
0,8	0,0124	0,0085	0,0277	1,16	II	0,30
0,9	0,0134	0,0080	0,0293	1,17	II	0,26
1,0	0,0143	0,0076	0,0311	1,18	II	0,23
1,2	0,0159	0,0068	0,0332	1,18	II	0,18
1,5	0,0174	0,0055	0,0355	1,17	II	0,12
2,0	0,0186	0,0038	0,0378	1,13	II	0,08

IX. PLACĂ ÎNCASTRATĂ PERFECT PE TREI LATURI

Schema plăcii și diagrama încărcării temporare sînt reprezentate în figura 8.

Pentru acest caz, condiția de maximum a momentului plastic de referință este dată de ecuațiile (24), respectiv (25).

Valorile coeficienților α_1, α_2, α'_1 și α'_2 care intervin în aceste ecuații sînt date în tabela 7.

Tabela 8 cuprinde valorile coeficienților m_1, m_2, m'_1 și m'_2 care caracterizează momentele plastice maxime, schemele de rupere și valorile parametrilor ξ_1 și ξ_2 care le definesc, precum și valorile coeficientului de redistribuție r.

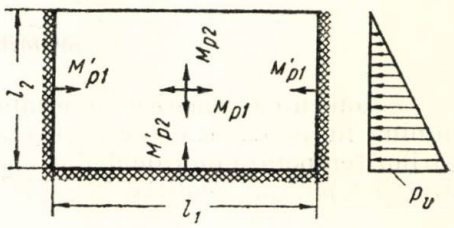


Fig. 8

Tabela 7

λ	α_1	α_2	α_1'	α_2'
0,3	0,0024	0	0,0083	0,0123
0,4	0,0048	0,0004	0,0131	0,0184
0,5	0,0068	0,0021	0,0158	0,0229
0,6	0,0083	0,0042	0,0166	0,0262
0,7	0,0092	0,0061	0,0202	0,0277
0,8	0,0105	0,0080	0,0241	0,0290
0,9	0,0120	0,0091	0,0272	0,0316
1,0	0,0130	0,0093	0,0301	0,0345
1,2	0,0149	0,0089	0,0347	0,0374
1,5	0,0169	0,0071	0,0382	0,0410
2,0	0,0191	0,0051	0,0412	0,0448

Tabela 8

λ	m_1	m_2	m_1'	m_2'	r	Schema de rupere	ξ_1	ξ_2
0,3	0,0017	0	0,0059	0,0087	1,42	I	0,42	—
0,4	0,0032	0,0003	0,0087	0,0123	1,50	II	—	0,94
0,5	0,0045	0,0014	0,0105	0,0152	1,51	II	—	0,86
0,6	0,0058	0,0029	0,0116	0,0183	1,43	II	—	0,76
0,7	0,0065	0,0043	0,0143	0,0196	1,42	II	—	0,66
0,8	0,0074	0,0056	0,0170	0,0204	1,42	II	—	0,59
0,9	0,0083	0,0063	0,0188	0,0219	1,45	II	—	0,53
1,0	0,0089	0,0064	0,0206	0,0236	1,46	II	—	0,49
1,2	0,0102	0,0061	0,0238	0,0256	1,46	II	—	0,41
1,5	0,0118	0,0050	0,0267	0,0287	1,44	II	—	0,33
2,0	0,0139	0,0037	0,0300	0,0326	1,38	II	—	0,25

X. MOMENTE DE CALCUL

Momentele plastice determinate pe baza criteriului redistribuției minime în ipoteza transformării plăcilor în mecanisme sub acțiunea încărcărilor temporare de calcul sînt momente plastice de calcul atîta timp cît este îndeplinită condiția [3], [4]

$$r \leqslant r_a, \tag{32}$$

unde r_a este valoarea-limită a coeficientului de redistribuție dedusă din condiția comportării elastice a întregii armături de rezistență sub acțiunea încărcării temporare normate. Acest coeficient are expresia

$$r_a = \frac{p_u}{p_n}. \tag{33}$$

În cazurile în care $r > r_a$, momentele plastice de calcul sînt date de relațiile [3], [4]

$$\begin{cases} M_{p1} = \alpha_1 p_n l_1^2; & M'_{p1} = \alpha'_1 p_n l_1^2, \\ M_{p2} = \alpha_2 p_n l_1^2; & M'_{p2} = \alpha'_2 p_n l_1^2. \end{cases} \tag{34}$$

Pentru aceste valori ale momentelor plastice, încărcarea p_1, corespunzătoare atingerii limitei de curgere de calcul simultan în punctele cele mai solicitate ale armăturii, este egală cu încărcarea temporară normată p_n.

Pentru $r > r_a$, momentelor plastice de calcul date de relațiile (34) le corespunde o redistribuție parțială a eforturilor, caracterizată printr-un coeficient de redistribuție egal cu r_a.

*

În calculul plastic al plăcilor de beton armat bazat pe criteriul redistribuției minime, momentele plastice de calcul reprezintă în același timp momente de rupere de calcul în ceea ce privește dimensionarea armăturii [5]. Această dimensionare se face pe baza prescripțiilor pentru calculul secțiunilor de beton armat la starea-limită de rezistență [8], [9].

XI. EXEMPLU DE CALCUL

Placă încastrată perfect pe trei laturi, solicitată de o încărcare de tip hidrostatic (fig. 9):

$$l_1 = 5{,}00 \text{ m}; \quad l_2 = 3{,}00 \text{ m}; \quad p_n = 2{,}0 \text{ t/m}^2; \quad p_u = 3{,}0 \text{ t/m}^2$$

$$\lambda = \frac{l_2}{l_1} = 0{,}6; \quad r_a = \frac{p_u}{p_n} = 1{,}5.$$

Din tabela 8 rezultă

$m_1 = 0{,}0058$; $m_2 = 0{,}0029$;

$m'_1 = 0{,}0116$; $m'_2 = 0{,}0183$

$$r = 1{,}43.$$

Întrucît $r < r_a$, momentele plastice de calcul, care reprezintă în același timp mo-

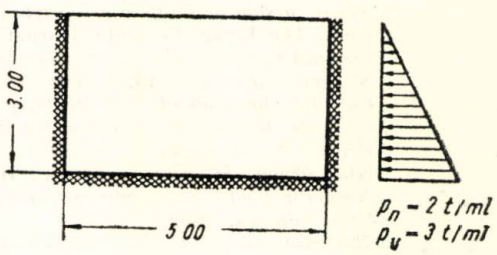


Fig. 9

mente de rupere de calcul în ce privește dimensionarea armăturii, sînt date de relațiile:

$$M_{p1} = 0{,}0058\ p_u\, l_1^2;\quad M'_{p1} = 0{,}0116\ p_u\, l_1^2;$$

$$M_{p2} = 0{,}0029\ p_u\, l_1^2;\quad M'_{p2} = 0{,}0183\ p_u\, l_1^2.$$

Pentru aprecierea eficienței economice a calculului plastic în raport cu calculul elastic, este suficientă compararea momentelor de mai sus cu momentele elastice produse de încărcarea de calcul p_u.

Din tabela 7 rezultă:

$$\alpha_1 = 0{,}0083;\quad \alpha_2 = 0{,}0042;\quad \alpha'_1 = 0{,}0166;\quad \alpha'_2 = 0{,}0262.$$

Momentele elastice sînt date de relațiile

$$M_{e1} = 0{,}0083\ p_u\, l_1^2;\quad M'_{e1} = 0{,}0166\ p_u\, l_1^2;$$

$$M_{e2} = 0{,}0042\ p_u\, l_1^2;\quad M'_{e2} = 0{,}0262\ p_u\, l_1^2.$$

Rapoartele dintre momentele plastice de calcul și momentele elastice corespunzătoare sînt

$$\frac{M_{p1}}{M_{e1}} = \frac{M_{p2}}{M_{e2}} = \frac{M'_{p1}}{M'_{e1}} = \frac{M'_{p2}}{M'_{e2}} = 0{,}70.$$

Rezultatul de mai sus arată că pentru placa considerată momentele plastice sînt mai mici decît cele elastice cu 30%.

În general, dacă $r < r_a$, rapoartele dintre momentele plastice de calcul și momentele elastice corespunzătoare sînt egale cu $\frac{1}{r}$, iar dacă $r > r_a$, aceste rapoarte sînt egale cu $\frac{1}{r_a}$.

Primită la redacție la 11 ianuarie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Д. В. Вайберг, Е. Д. Вайнберг, *Пластины, Диски, Балки—стенки* Киев, Госстройиздат, УССР, 1959.
2. V. Petcu, *Un principiu fundamental în proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat în domeniul plastic.* St. cerc. mec. apl., **12**, *5*, 1 017—1 023 (1961).
3. — *Calculul plastic al plăcilor armate cruciș.* Standardizarea, **14**, *4*, 174—182 (1962).
4. — *Plastic design of reinforced concrete rectangular slabs, under uniformly distributed loads.* The Indian Concrete Journal, **37**, *7*, 247—253 (1963).
5. — *Calculul plastic al plăcilor circulare de beton armat solicitate de încărcări simetrice.* St. cerc. mec. apl., **15**, 1, 159—188 (1964).
6. — *Calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat rezemate pe trei laturi, solicitate de încărcări uniform distribuite.* St. cerc. mec. apl., **16**, *1* (1965).
7. — *Criterii de soluționare a ecuației de echilibru plastic a plăcilor dreptunghiulare de beton armat.* St. cerc. mec. apl., **16**, *2* (1965).
8. * * * *Normativ condiționat pentru calculul construcțiilor la stări-limită.* București, vol. I, Edit. tehnică, 1962.
9. * * * *Recomandations pratiques unifiées pour le calcul et l'éxecution des ouvrages en béton armé.* Comité Européen du Béton, Paris, 1964.

O SOLUȚIE GENERALĂ PENTRU DIMENSIONAREA BARAJELOR DE GREUTATE TRIUNGHIULARE

de RADU PRIȘCU și ADRIAN POPOVICI

Inst. de construcții București

Intrep. de construcții hidroenergetice

539.4

În această lucrare se studiază profilele barajelor de greutate triunghiulare de forma cea mai generală. Admițînd drept criterii de dimensionare condițiile de efort nul la piciorul amonte, de stabilitate la alunecare și, în mod suplimentar, de volum minim de beton, se deduc ecuațiile necesare pentru determinarea înclinării paramentelor și a tălpii de fundație.

Se indică unele procedee de calcul practic și se scoate în relief influența pe care o are coeficientul de frecare statică asupra formei și economicității unui baraj.

Pe baza comparării cu alte tipuri de profile, se delimitează apoi domeniile în care este rațională aplicarea fiecăruia dintre ele.

I. INTRODUCERE

În cîteva lucrări anterioare s-au examinat, sub aspectul dimensionării raționale, profilele barajelor de greutate cu paramentul amonte vertical și înclinat [1], [2] și cu talpa de fundație înclinată [3]. Admițînd drept criterii de dimensionare condițiile clasice de efort normal nul la piciorul amonte și de stabilitate la alunecare, s-au determinat expresiile corespunzătoare ale pantelor paramentelor și, respectiv, ale tălpii de fundație.

S-a arătat anume că prin înclinarea paramentului amonte (fig. 1*b*), datorită prismului de apă purtat, se mărește stabilitatea profilului. Acest fapt conduce la economii de volum față de profilul cu parament amonte vertical (fig. 1*a*) cu atît mai însemnate, cu cît coeficientul de frecare beton-rocă este mai redus.

S-a arătat de asemenea că, înclinînd suprafața de fundație spre amonte, profilul care respectă aceleași condiții de stabilitate (fig. 1*c*)

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 20 NR. 5 P. 1117 – 1131 BUCUREȘTI 1965

MOSZTAKI EGYETLEN KÖZPONTI KÖNYVTÁRA BUDAPEST 1965

nu realizează economii față de cel cu parament amonte înclinat decît pentru coeficienți de frecare mai mici decît 0,50. În acest caz, apărînd alte probleme de stabilitate generală a terenului de fundație, aplicarea profilului cu talpa înclinată nu rezultă rațională.

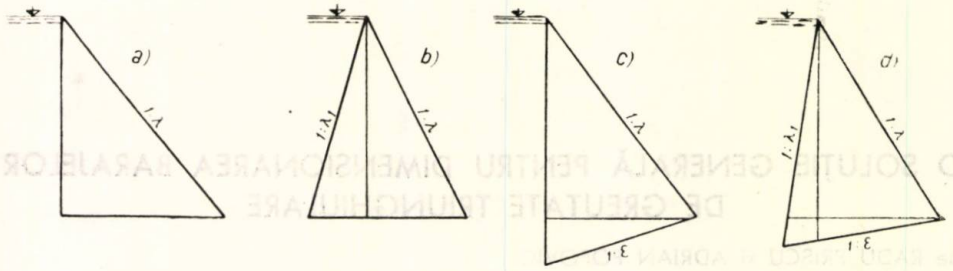


Fig. 1 *a* — profil cu paramentul amonte vertical și fundația orizontală; *b* — profil cu paramentul amonte înclinat și fundația orizontală; *c* — profil cu paramentul amonte vertical și fundația înclinată; *d* — profil cu paramentul amonte și fundația înclinate.

Constatînd, totuși, că în general înclinarea paramentului amonte și, respectiv, a tălpii de fundație influențează în mod favorabil stabilitatea barajelor de greutate, să analizăm efectul înclinării simultane a acestor două elemente asupra dimensiunilor și economicității unui profil. Această dispoziție constructivă corespunde cazului general al profilului triunghiular, la care, spre deosebire de cazurile studiate pînă acum, înclinările celor trei laturi sînt variabile.

NOTAȚII

H — înălțimea barajului (m);
λ — tangenta unghiului pe care îl face paramentul aval cu verticala;
λ_1 — tangenta unghiului pe care îl face paramentul amonte cu verticala;
ε — tangenta unghiului pe care îl face suprafața de fundație cu verticala;
γ — greutatea specifică a apei (t/m³);
γ_b — greutatea specifică a betonului (t/m³);
m — coeficientul de reducere a subpresiunilor;
σ — efort normal (t/m²);
f — coeficientul de frecare statică beton-rocă;
V — volumul de beton specific al unui profil (de 1 m grosime).

II. METODA DE DIMENSIONARE

Pentru determinarea celor trei parametri λ, λ_1 și ε sînt necesare, evident, trei ecuații. Primele două vor rezulta scriind condițiile clasice de stabilitate la alunecare și de efort normal nul la piciorul amonte, iar a treia din condiția ca volumul specific de beton al profilului să fie minim.

Condiția de stabilitate la alunecare a barajului în secțiunea de fundație se exprimă egalînd coeficientul de alunecare al construcției (raportul dintre suma forțelor care acționează tangențial și normal pe suprafața de fundație) cu coeficientul de frecare statică

$$\frac{\Sigma T(\lambda, \varepsilon, \lambda_1)}{\Sigma N(\lambda, \varepsilon, \lambda_1)} = f, \tag{1}$$

unde în valoarea lui f se poate introduce coeficientul de siguranță necesar.

Condiția prin care se exclud eforturile de tensiune care acționează la piciorul amonte, normal pe suprafața de fundație, în ipoteza lacului plin este

$$\sigma_{am}(\lambda, \varepsilon, \lambda_1) = \frac{\Sigma N}{\Omega} + \frac{\Sigma M}{W} = 0. \tag{2}$$

A treia condiție, prin care se impune ca volumul de beton al profilului să fie minim, va fi

$$V(\lambda, \varepsilon, \lambda_1) = V_{min}. \tag{3}$$

Se obține astfel un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute. Din ecuația (1) se explicitează λ sub forma

$$\lambda = f(\varepsilon, \lambda_1) \tag{4}$$

și se înlocuiește în ecuațiile (2) și (3). Se obțin ecuațiile:

din ecuația (2): $\psi(\varepsilon, \lambda_1) = 0$ (5)

din ecuația (3): $\varphi(\varepsilon, \lambda_1) = \varphi_{min}$. (6)

Deoarece din nici una dintre ecuațiile (5) și (6) nu se poate explicita λ_1 sau ε, rezolvarea se va face căutînd extremul de funcție legată. În acest scop se formează funcția

$$\xi(\varepsilon, \lambda_1) = \varphi(\varepsilon, \lambda_1) + K\psi(\varepsilon, \lambda_1) \tag{7}$$

și se rezolvă apoi sistemul

$$\psi(\varepsilon, \lambda_1) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \lambda_1} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon} = 0, \tag{10}$$

rezultînd astfel necunoscutele K, ε și λ_1. În ce privește extremul, în cazul de față acesta va fi un minim.

Operînd derivatele (9) și (10), se obține

$$\frac{\partial \xi}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} + K\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1} \tag{11}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} + K\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}, \tag{12}$$

în care, înlocuind pe K, rezultă

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = 0.$$

Sistemul de ecuații final va fi deci

$$\psi(\varepsilon, \lambda_1) = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1}\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = 0, \tag{14}$$

care va furniza pe ε și λ_1, a treia necunoscută λ determinîndu-se din relația (4).

III. EXPRESII CARACTERISTICE PENTRU PROFILUL TRIUNGHIULAR

Pentru calculul expresiilor caracteristice referitoare la profilul unui baraj cu paramentul amonte înclinat și cu talpa de fundație înclinată (fig. 2) s-au luat în considerare următoarele încărcări: greutatea proprie G, presiunea hidrostatică P și subpresiunea S (cu o variație liniară din amonte spre aval). În ipoteza lacului plin s-au obținut:

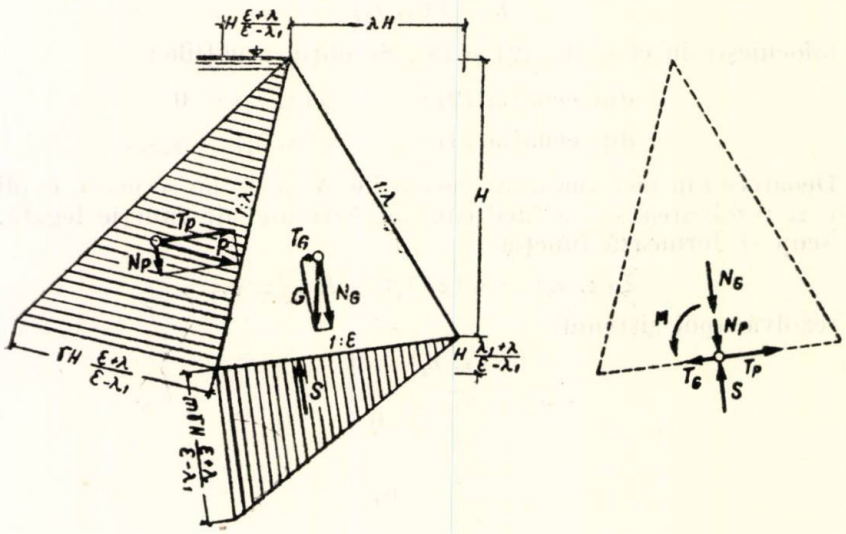


Fig. 2. — Forțele care acționează asupra unui profil cu paramentul amonte și fundația înclinate.

— suma forțelor normale pe fundație:

$$\Sigma N = N_P + N_G - S = \frac{1}{2}\frac{(\varepsilon + \lambda)H^2}{(\varepsilon - \lambda_1)^2\sqrt{1+\varepsilon^2}}[\gamma(\varepsilon + \lambda)(1 + \varepsilon\lambda_1) + \tag{15}$$

$$+ \gamma_b(\lambda_1 + \lambda)(\varepsilon - \lambda_1) - m\gamma(\lambda_1 + \lambda)(1 + \varepsilon^2)];$$

— suma forțelor tangențiale la fundație:

$$\Sigma T = T_P - T_G = \frac{1}{2}\,\frac{(\varepsilon+\lambda)H^2}{(\varepsilon-\lambda_1)\sqrt{1+\varepsilon^2}}\,[\gamma(\varepsilon+\lambda)-\gamma_b(\lambda_1+\lambda)]; \quad (16)$$

— suma momentelor față de centrul secțiunii:

$$\Sigma M = M_G + M_P + M_S, \quad (17)$$

unde

$$M_G = \frac{1}{12}\,\frac{\gamma_b H^3}{(\varepsilon-\lambda_1)^3}\,[\varepsilon^2(\lambda_1+\lambda)^3+\lambda(\varepsilon-\lambda_1)^2(3\varepsilon\lambda_1+$$

$$+\varepsilon\lambda+2\lambda\lambda_1)-\lambda_1(\varepsilon+\lambda)^2(3\varepsilon\lambda-2\lambda\lambda_1+\varepsilon\lambda_1)]$$

$$M_P = -\frac{1}{12}\,\frac{\gamma H^3}{(\varepsilon-\lambda_1)^3}\,(\varepsilon+\lambda)^2[2(\varepsilon+\lambda)(1+\lambda_1^2)-3(\lambda_1+\lambda)(1+\varepsilon\lambda_1)]$$

$$M_S = -\frac{1}{12}\,\frac{m\gamma H^3}{(\varepsilon-\lambda_1)^3}\,(\varepsilon+\lambda)(\lambda_1+\lambda)^2(1+\varepsilon^2).$$

Înlocuind expresiile obținute în relațiile (1), (2), (3), se obțin ecuațiile caracteristice căutate. Astfel,

— condiția de stabilitate la alunecare devine

$$\frac{(\varepsilon-\lambda_1)[\gamma(\varepsilon+\lambda)-\gamma_b(\lambda_1+\lambda)]}{\gamma(\varepsilon+\lambda)(1+\varepsilon\lambda_1)+\gamma_b(\lambda_1+\lambda)(\varepsilon-\lambda_1)\varepsilon-m\gamma(\lambda_1+\lambda)(1+\varepsilon^2)} = f, \quad (18)$$

— condiția de efort nul devine

$$(\varepsilon+\lambda)(\lambda_1+\lambda)[\gamma(\varepsilon+\lambda)(1+\varepsilon\lambda_1)+\gamma_b(\lambda_1+\lambda)(\varepsilon-\lambda_1)\varepsilon-$$

$$-m\gamma(\lambda_1+\lambda)(1+\varepsilon^2)]+\gamma_b[\varepsilon^2(\lambda_1+\lambda)^3+\lambda(\varepsilon-\lambda_1)^2(3\varepsilon\lambda_1+$$

$$+\varepsilon\lambda+2\lambda\lambda_1)-\lambda_1(\varepsilon+\lambda)^2(3\varepsilon\lambda-2\lambda\lambda_1+\varepsilon\lambda_1)]-m\gamma(\varepsilon+ \quad (19)$$

$$+\lambda)(\lambda_1+\lambda)^2(1+\varepsilon^2)-\gamma(\varepsilon+\lambda)^2[2(\varepsilon+\lambda)(1+\lambda_1^2)-$$

$$-3(\lambda_1+\lambda)(1+\varepsilon\lambda_1)]=0.$$

— condiția de volum minim devine

$$V(\lambda,\varepsilon,\lambda_1) = \frac{H^2}{2}\,\frac{(\lambda_1+\lambda)(\lambda+\varepsilon)}{\varepsilon-\lambda_1} = V_{\min}. \quad (20)$$

Explicitînd pe λ din relația (18), rezultă

$$\lambda = \frac{\lambda_1\varepsilon^2 f(\gamma+\gamma_b-m\gamma)-\lambda_1^2\gamma_b(1+f)-\varepsilon^2\gamma+\varepsilon\lambda_1(\gamma+\gamma_b)+\varepsilon f\gamma-\lambda_1 m\gamma f}{\lambda_1\varepsilon f(\gamma_b-\gamma)+\varepsilon^2 f(m\gamma-\gamma_b)+\lambda_1(\gamma_b-\gamma)+\varepsilon(\gamma-\gamma_b)+\gamma f(m-1)} \quad (21)$$

formulă care, notînd

$$\begin{aligned} a &= f(\gamma + \gamma_b - m\gamma), & g &= m\gamma f, \\ b &= \gamma_b(1 + f), & h &= f(\gamma_b - \gamma), \\ c &= \gamma, & i &= f(m\gamma - \gamma_b), \\ d &= \gamma + \gamma_b, & j &= \gamma_b - \gamma, \\ e &= \gamma f, & l &= \gamma f(m-1), \end{aligned} \tag{22}$$

se poate scrie sub forma

$$\lambda = \frac{a\lambda_1\varepsilon^2 - b\lambda_1^2 - c\varepsilon^2 + d\varepsilon\lambda_1 + e\varepsilon - g\lambda_1}{h\lambda_1\varepsilon + i\varepsilon^2 + j\lambda_1 - j\varepsilon + l}. \tag{23}$$

Relaţia (23) serveşte pentru determinarea lui λ, avînd cunoscuţi pe ε şi λ_1.

Înlocuind expresia lui λ din (23) în ecuaţiile (13) şi (14), se obţin ecuaţiile finale de dimensionare. Aceste ecuaţii sînt nişte polinoame de grad superior în λ_1 şi ε. Pentru scrierea coeficienţilor lor se vor utiliza notaţii de forma $C_{n,p}$, $D_{n,p}$ şi $M_{n,p}$, unde, în relaţiile primare, primul indice n indică gradul produsului $\varepsilon\lambda$, iar al doilea indice p indică gradul lui ε.

După lungi calcule, ecuaţia (13) devine

$$\begin{aligned} &+ C_{11,5}\,\lambda_1^6\,\varepsilon^5 + C_{11,6}\,\lambda_1^5\,\varepsilon^6 + C_{11,7}\,\lambda_1^4\,\varepsilon^7 + C_{11,8}\,\lambda_1^3\,\varepsilon^8 + C_{11,9}\,\lambda_1^2\varepsilon^9 + C_{10,3}\,\lambda_1^7\varepsilon^3 + \\ &+ C_{10,4}\,\lambda_1^6\,\varepsilon^4 + C_{10,5}\,\lambda_1^5\,\varepsilon^5 + C_{10,6}\,\lambda_1^4\,\varepsilon^6 + C_{10,7}\,\lambda_1^3\,\varepsilon^7 + C_{10,8}\,\lambda_1^2\varepsilon^8 + C_{10,9}\,\lambda_1\varepsilon^9 + \\ &+ C_{9,1}\,\lambda_1^8\,\varepsilon + C_{9,2}\,\lambda_1^7\,\varepsilon^2 + C_{9,3}\,\lambda_1^6\,\varepsilon^3 + C_{9,4}\,\lambda_1^5\,\varepsilon^4 + C_{9,5}\,\lambda_1^4\varepsilon^5 + C_{9,6}\,\lambda_1^3\varepsilon^6 + \\ &+ C_{9,7}\,\lambda_1^2\,\varepsilon^7 + C_{9,8}\,\lambda_1\,\varepsilon^8 + C_{9,9}\,\varepsilon^9 + C_{8,0}\,\lambda_1^8 + C_{8,1}\,\lambda_1^7\varepsilon + C_{8,2}\,\lambda_1^6\varepsilon^2 + \\ &+ C_{8,3}\,\lambda_1^5\,\varepsilon^3 + C_{8,4}\,\lambda_1^4\,\varepsilon^4 + C_{8,5}\,\lambda_1^3\,\varepsilon^5 + C_{8,6}\,\lambda_1^2\,\varepsilon^6 + C_{8,7}\,\lambda_1\varepsilon^7 + C_{8,8}\,\varepsilon^8 + \\ &+ C_{7,0}\,\lambda_1^7 + C_{7,1}\,\lambda_1^6\,\varepsilon + C_{7,2}\,\lambda_1^5\,\varepsilon^2 + C_{7,3}\,\lambda_1^4\,\varepsilon^3 + C_{7,4}\,\lambda_1^3\varepsilon^4 + C_{7,5}\,\lambda_1^2\varepsilon^5 + \\ &+ C_{7,6}\,\lambda_1\,\varepsilon^6 + C_{7,7}\,\varepsilon^7 + C_{6,0}\,\lambda_1^6 + C_{6,1}\,\lambda_1^5\,\varepsilon + C_{6,2}\,\lambda_1^4\varepsilon^2 + C_{6,3}\,\lambda_1^3\varepsilon^3 + \\ &+ C_{6,4}\,\lambda_1^2\,\varepsilon^4 + C_{6,5}\,\lambda_1\,\varepsilon^5 + C_{6,6}\,\varepsilon^6 + C_{5,0}\,\lambda_1^5 + C_{5,1}\,\lambda_1^4\varepsilon + C_{5,2}\,\lambda_1^3\varepsilon^2 + \\ &+ C_{5,3}\,\lambda_1^2\,\varepsilon^3 + C_{5,4}\,\lambda_1\,\varepsilon^4 + C_{5,5}\,\varepsilon^5 + C_{4,0}\,\lambda_1^4 + C_{4,1}\,\lambda_1^3\varepsilon + C_{4,2}\,\lambda_1^1\varepsilon^2 + \\ &+ C_{4,3}\,\lambda_1\,\varepsilon^3 + C_{4,4}\,\varepsilon^4 + C_{3,0}\,\lambda_1^3 + C_{3,1}\,\lambda_1^2\varepsilon + C_{3,2}\,\lambda_1\varepsilon^2 + C_{3,3}\,\varepsilon^3 = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Şi, la fel, ecuaţia (14) devine

$$\begin{aligned} &(6\,C_{11,5}\,\lambda_1^5\,\varepsilon^5 + 5\,C_{11,6}\,\lambda_1^4\,\varepsilon^6 + 4\,C_{11,7}\,\lambda_1^3\,\varepsilon^7 + 3\,C_{11\,8}\,\lambda_1^2\,\varepsilon^8 + 2\,C_{11,9}\,\lambda_1\,\varepsilon^9 + \\ &+ 7\,C_{10,3}\,\lambda_1^6\,\varepsilon^3 + 6\,C_{10,4}\,\lambda_1^5\,\varepsilon^4 + 5\,C_{10,5}\,\lambda_1^4\,\varepsilon^5 + 4\,C_{10,6}\,\lambda_1^3\,\varepsilon^6 + 3\,C_{10,7}\,\lambda_1^2\,\varepsilon^7 + \\ &+ 2\,C_{10,8}\,\lambda_1\,\varepsilon^8 + C_{10,9}\,\varepsilon^9 + 8\,C_{9,1}\,\lambda_1^7\,\varepsilon + 7\,C_{9,2}\,\lambda_1^6\,\varepsilon^2 + 6\,C_{9,3}\,\lambda_1^5\,\varepsilon^3 + \\ &+ 5\,C_{9,4}\,\lambda_1^4\,\varepsilon^4 + 4\,C_{9,5}\,\lambda_1^3\,\varepsilon^5 + 3\,C_{9,6}\,\lambda_1^2\,\varepsilon^6 + 2\,C_{9,7}\,\lambda_1\,\varepsilon^7 + C_{9,8}\,\varepsilon^8 + \\ &+ 8\,C_{8,0}\,\lambda_1^7 + 7\,C_{8,1}\,\lambda_1^6\,\varepsilon + 6\,C_{8,2}\,\lambda_1^5\,\varepsilon^2 + 5\,C_{8,3}\,\lambda_1^4\,\varepsilon^3 + 4\,C_{8,4}\,\lambda_1^3\,\varepsilon^4 + \end{aligned} \tag{25}$$

$$
\begin{aligned}
&+3C_{8,5}\lambda_1^2\varepsilon^5+2C_{8,6}\lambda_1\varepsilon^6+C_{8,7}\varepsilon^7+7C_{7,0}\lambda_1^6+6C_{7,1}\lambda_1^5\varepsilon+\\
&+5C_{7,2}\lambda_1^4\varepsilon^2+4C_{7,3}\lambda_1^3\varepsilon^3+3C_{7,4}\lambda_1^2\varepsilon^4+2C_{7,5}\lambda^1\varepsilon^5+C_{7,6}\varepsilon^6+\\
&+6C_{6,0}\lambda_1^5+5C_{6,1}\lambda_1^4\varepsilon+4C_{6,2}\lambda_1^3\varepsilon^2+3C_{6,3}\lambda_1^2\varepsilon^3+2C_{6,4}\lambda_1\varepsilon^4+\\
&+C_{6,5}\varepsilon^5+5C_{5,0}\lambda_1^4+4C_{5,1}\lambda_1^3\varepsilon+3C_{5,2}\lambda_1^2\varepsilon^2+2C_{5,3}\lambda_1\varepsilon^3+\\
&+C_{5,4}\varepsilon^4+4C_{4,0}\lambda_1^3+3C_{4,1}\lambda_1^2\varepsilon+2C_{4,2}\lambda_1\varepsilon^2+C_{4,3}\varepsilon^3+\\
&+3C_{3,0}\lambda_1^2+2C_{3,1}\lambda_1\varepsilon+C_{3,2}\varepsilon^2)\quad[(3D_{6,3}\lambda_1^3\varepsilon^2+4D_{6,4}\lambda_1^2\varepsilon^3+\\
&+5D_{6,5}\lambda_1\varepsilon^4+D_{5,1}\lambda_1^4+2D_{5,2}\lambda_1^3\varepsilon+3D_{5,3}\lambda_1^2\varepsilon^2+4D_{5,4}\lambda_1\varepsilon^3+\\
&+5D_{5,5}\varepsilon^4+D_{4,1}\lambda_1^3+2D_{4,2}\lambda_1^2\varepsilon+3D_{4,3}\lambda_1\varepsilon^2+4D_{4,4}\varepsilon^3+\\
&+D_{3,1}\lambda_1^2+2D_{3,2}\lambda_1\varepsilon+3D_{3,3}\varepsilon^2+D_{2,1}\lambda_1+2D_{2,2}\varepsilon)\\
&(M_{5,2}\lambda_1^3\varepsilon^2+M_{5,3}\lambda_1^2\varepsilon^3+M_{5\,4}\lambda_1\varepsilon^4+M_{5,5}\varepsilon^5+M_{4,1}\lambda_1^3\varepsilon+\\
&+M_{4,2}\lambda_1^2\varepsilon^2+M_{4,3}\lambda_1\varepsilon^3+M_{4,4}\varepsilon^4+M_{3,0}\lambda_1^3+M_{3,1}\lambda_1^2\varepsilon+\\
&+M_{3,2}\lambda_1\varepsilon^2+M_{3,3}\varepsilon^3+M_{2,0}\lambda_1^2+M_{2,1}\lambda_1\varepsilon+M_{2,2}\varepsilon^2+\\
&+M_{1,0}\lambda_1+M_{1,1}\varepsilon)-(D_{6,3}\lambda_1^3\varepsilon^3+D_{6,4}\lambda_1^2\varepsilon^4+D_{6,5}\lambda_1\varepsilon^5+\\
&+D_{5,1}\lambda_1^4\varepsilon+D_{5,2}\lambda_1^3\varepsilon^2+D_{5,3}\lambda_1^2\varepsilon^3+D_{5,4}\lambda_1\varepsilon^4+D_{5,5}\varepsilon^5+\\
&+D_{4,0}\lambda_1^4+D_{4,1}\lambda_1^3\varepsilon+D_{4,2}\lambda_1^2\varepsilon^2+D_{4,3}\lambda_1\varepsilon^3+D_{4,4}\varepsilon^4+\\
&+D_{3,0}\lambda_1^3+D_{3,1}\lambda_1^2\varepsilon+D_{3,2}\lambda_1\varepsilon^2+D_{3,3}\varepsilon^3+D_{2,0}\lambda_1^2+\\
&+D_{2,1}\lambda_1\varepsilon+D_{2,2}\varepsilon^2)\quad(2M_{5,2}\lambda_1^3\varepsilon+3M_{5,3}\lambda_1^2\varepsilon^2+4M_{5,4}\lambda_1\varepsilon^3+\\
&+5M_{5,5}\varepsilon^4+M_{4,1}\lambda_1^3+2M_{4,2}\lambda_1^2\varepsilon+3M_{4,3}\lambda_1\varepsilon^2+4M_{4,4}\varepsilon^3+\\
&+M_{3,1}\lambda_1^2+2M_{3,2}\lambda_1\varepsilon+3M_{3,3}\varepsilon^2+M_{2,1}\lambda_1+2M_{2,2}\varepsilon+\\
&+M_{1,1})]-(5C_{11,5}\lambda_1^6\varepsilon^4+6C_{11,6}\lambda_1^5\varepsilon^5+7C_{11,7}\lambda_1^4\varepsilon^6+8C_{11,8}\lambda_1^3\varepsilon^7+\\
&+9C_{11,9}\lambda_1^2\varepsilon^8+3C_{10,3}\lambda_1^7\varepsilon^2+4C_{10,4}\lambda_1^6\varepsilon^3+5C_{10,5}\lambda_1^5\varepsilon^4+6C_{10,6}\lambda_1^4\varepsilon^5+\\
&+7C_{10,7}\lambda_1^3\varepsilon^6+8C_{10,8}\lambda_1^2\varepsilon^7+9C_{10,9}\lambda_1\varepsilon^8+C_{9,1}\lambda_1^8+2C_{9,2}\lambda_1^7\varepsilon+\\
&+3C_{9,3}\lambda_1^6\varepsilon^2+4C_{9,4}\lambda_1^5\varepsilon^3+5C_{9,5}\lambda_1^4\varepsilon^4+6C_{9,6}\lambda_1^3\varepsilon^5+7C_{9,7}\lambda_1^2\varepsilon^6+\\
&+8C_{9,8}\lambda_1\varepsilon^7+9C_{9,9}\varepsilon^8+C_{8,1}\lambda_1^7+2C_{8,2}\lambda_1^6\varepsilon+3C_{8,3}\lambda_1^5\varepsilon^2+\\
&+4C_{8,4}\lambda_1^4\varepsilon^3+5C_{8,5}\lambda_1^3\varepsilon^4+6C_{8,6}\lambda_1^2\varepsilon^5+7C_{8,7}\lambda_1\varepsilon^6+8C_{8,8}\varepsilon^7+\\
&+C_{7,1}\lambda_1^6+2C_{7,2}\lambda_1^5\varepsilon+3C_{7,3}\lambda_1^4\varepsilon^2+4C_{7,4}\lambda_1^3\varepsilon^3+5C_{7,5}\lambda_1^2\varepsilon^4+\\
&+6C_{7,6}\lambda_1\varepsilon^5+7C_{7,7}\varepsilon^6+C_{6,1}\lambda_1^5+2C_{6,2}\lambda_1^4\varepsilon+3C_{6,3}\lambda_1^3\varepsilon^2+\\
&+4C_{6,4}\lambda_1^2\varepsilon^3+5C_{6,5}\lambda_1\varepsilon^4+6C_{6,6}\varepsilon^5+C_{5,1}\lambda_1^4+2C_{5,2}\lambda_1^3\varepsilon+\\
&+3C_{5,3}\lambda_1^2\varepsilon^2+4C_{5,4}\lambda_1\varepsilon^3+5C_{5,5}\varepsilon^4+C_{4,1}\lambda_1^3+2C_{4,2}\lambda_1^2\varepsilon+\\
&+3C_{4,3}\lambda_1\varepsilon^2+4C_{4,4}\varepsilon^3+C_{3,1}\lambda_1^2+2C_{3,2}\lambda_1\varepsilon+3C_{3,3}\varepsilon^2)
\end{aligned}
$$

$$[(3D_{6,3}\lambda_1^2\varepsilon^3 + 2D_{6,4}\lambda_1\varepsilon^4 + D_{6,5}\varepsilon^5 + 4D_{5,1}\lambda_1^3\varepsilon + 3D_{5,2}\lambda_1^2\varepsilon^2 +$$
$$+ 2D_{5,3}\lambda_1\varepsilon^3 + D_{5,4}\varepsilon^4 + 4D_{4,0}\lambda_1^3 + 3D_{4,1}\lambda_1^2\varepsilon + 2D_{4,2}\lambda_1\varepsilon^2 +$$
$$+ D_{4,3}\varepsilon^3 + 3D_{3,0}\lambda_1^2 + 2D_{3,1}\lambda_1\varepsilon + D_{3,2}\varepsilon^2 + 2D_{2,0}\lambda_1 +$$
$$+ D_{2,1}\varepsilon) \quad (M_{5,2}\lambda_1^3\varepsilon^2 + M_{5,3}\lambda_1^2\varepsilon^3 + M_{5,4}\lambda_1\varepsilon^4 + M_{5,5}\varepsilon^5 +$$
$$+ M_{4,1}\lambda_1^3\varepsilon + M_{4,2}\lambda_1^2\varepsilon^2 + M_{4,3}\lambda_1\varepsilon^3 + M_{4,4}\varepsilon^4 + M_{3,0}\lambda_1^3 +$$
$$+ M_{3,1}\lambda_1^2\varepsilon + M_{3,2}\lambda_1\varepsilon^2 + M_{3,3}\varepsilon^3 + M_{2,0}\lambda_1^2 + M_{2,1}\lambda_1\varepsilon +$$
$$+ M_{2,2}\varepsilon^2 + M_{1,0}\lambda_1 + M_{1,1}\varepsilon) - (D_{6,3}\lambda_1^3\varepsilon^3 + D_{6,4}\lambda_1^2\varepsilon^4 +$$
$$+ D_{6,5}\lambda_1\varepsilon^5 + D_{5,1}\lambda_1^4 + D_{5,2}\lambda_1^3\varepsilon^2 + D_{5,3}\lambda_1^2\varepsilon^3 + D_{5,4}\lambda_1\varepsilon^4 +$$
$$+ D_{5,5}\varepsilon^5 + D_{4,0}\lambda_1^4 + D_{4,1}\lambda_1^3\varepsilon + D_{4,2}\lambda_1^2\varepsilon^2 + D_{4,3}\lambda_1\varepsilon^3 +$$
$$+ D_{4,4}\varepsilon^4 + D_{3,0}\lambda_1^3 + D_{3,1}\lambda_1^2\varepsilon + D_{3,2}\lambda_1\varepsilon^2 + D_{3,3}\varepsilon^3 +$$
$$+ D_{2,0}\lambda_1^2 + D_{2,1}\lambda_1\varepsilon + D_{2,2}\varepsilon^2) \quad (3M_{5,2}\lambda_1^2\varepsilon^2 + 2M_{5,3}\lambda_1\varepsilon^3 +$$
$$+ M_{5,4}\varepsilon^4 + 3M_{4,1}\lambda_1^2\varepsilon + 2M_{4,2}\lambda_1\varepsilon^2 + M_{4,3}\varepsilon^3 + 3M_{3,0}\lambda_1^2 +$$
$$+ 2M_{3,1}\lambda_1\varepsilon + M_{3,2}\varepsilon^2 + 2M_{2,0}\lambda_1 + M_{2,1}\varepsilon + M_{1,0})] = 0$$

Coeficienţii $C_{n,p}$, $D_{n,p}$ şi $M_{n,p}$ sînt funcţii de m, f şi γ_b.

Ei au fost calculaţi numeric pentru valori ale coeficientului de reducere a subpresiunilor $m = 0{,}50$, $0{,}75$ şi $1{,}00$ şi pentru valori ale coeficientului de frecare statică $f = 0{,}20$, $0{,}30$, $0{,}40$, $0{,}50$, $0{,}60$, $0{,}70$ şi $0{,}80$. Expresiile lor, ca şi tabelele respective care au servit la calculele de dimensionare ce se vor prezenta în continuare, nu se reproduc din lipsă de spaţiu.

În legătură cu ecuaţiile (24) şi (25) este de remarcat faptul că, particularizîndu-le pentru cazul $\varepsilon = \infty$, se obţin ecuaţiile de dimensionare deduse anterior [1] şi [2] pentru profilele cu parament amonte înclinat şi talpa de fundaţie orizontală (fig. 1*b*). Astfel ecuaţia (24) devine

$$C_{11,9}\lambda_1^2 + C_{10,9}\lambda_1 + C_{9,9} = 0, \tag{26}$$

ecuaţie care provine din condiţia de efort nul la piciorul amonte (2), în care λ a fost înlocuit cu expresia lui dedusă din condiţia de stabilitate la alunecare (1).

Făcînd aceeaşi particularizare $\varepsilon = \infty$ în ecuaţia (25), care reprezintă condiţia de volum minim al profilului în cazul general, se obţine o ecuaţie identică cu (26). Aceasta înseamnează că, în cazul $\varepsilon = \infty$, profilul dimensionat cu ecuaţia (26) satisface cele două condiţii de stabilitate (1) şi (2) şi, în acelaşi timp, necesită volumul minim de beton. Acest lucru a fost demonstrat, de altfel, pe altă cale într-o lucrare anterioară [2].

În cazul în care $\lambda_1 = 0$, ecuaţia (24) devine

$$C_{9,9}\varepsilon^6 + C_{8,8}\varepsilon^5 + C_{7,7}\varepsilon^4 + C_{6,6}\varepsilon^3 + C_{5,5}\varepsilon^2 + C_{4,4}\varepsilon + C_{3,3} = 0, \tag{27}$$

ecuaţie de asemenea cunoscută [3] de la dimensionarea profilului cu paramentul amonte vertical şi talpa de fundaţie înclinată (fig. 1*c*).

IV. DIMENSIONAREA PRACTICĂ A PROFILELOR TRIUNGHIULARE

În principiu, un profil triunghiular de tipul celui din figura 1*d* poate fi dimensionat rezolvînd sistemul de ecuații (24), (25) și (23). Dar, din cauza gradului ridicat al necunoscutelor ε și λ_1 din ecuațiile (24) și (25) (în ecuația (24) ε are puterea maximă 9 și λ_1 are puterea 8, iar în ecuația (25) ε figu-

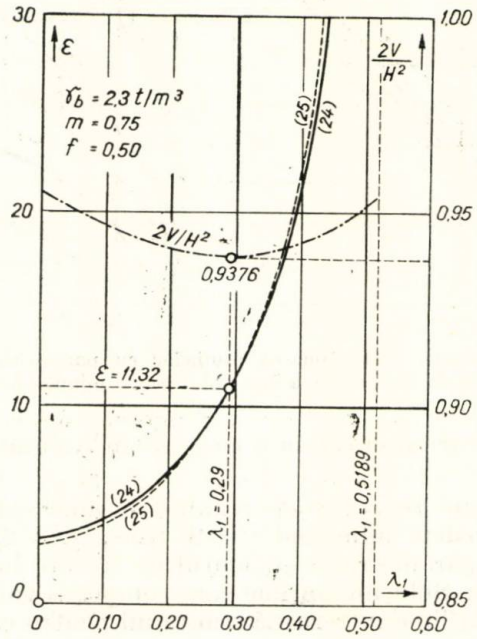


Fig. 3. — Determinarea pantelor λ_1 și ε ale profilului cu paramentul amonte și fundația înclinate prin rezolvarea grafică a ecuațiilor de dimensionare.

rează la puterea 18 și λ_1 la puterea 14), rezolvarea sistemului nu este posibilă prin metodele analitice obișnuite. La fel, utilizarea ecuațiilor diferențiale pentru determinarea soluțiilor sistemului conduce la calcule extrem de laborioase.

Un prim procedeu practic constă în reprezentarea grafică a ecuațiilor (24) și (25), admițînd, spre exemplu, o gamă de valori uzuale pentru λ_1. La intersecția celor două curbe (fig. 3) se găsesc valorile lui λ_1 și ε, care reprezintă soluțiile comune. Reprezentînd pe aceeași diagramă variația valorilor $2V/H^2$ conform ecuației (20), minimul acestei curbe va trebui să se găsească pe verticala soluțiilor comune. Pentru cazul rezolvat în figura 3 s-a admis $m = 0{,}75$ și $f = 0{,}50$. De remarcat că cele două curbe corespunzătoare ecuațiilor (24) și (25) admit o asimptotă comună pentru $\varepsilon \to \infty$, și anume $\lambda_1 = 0{,}5189$, fapt care corespunde cu cele arătate mai înainte.

Un al doilea procedeu mai expeditiv se bazează pe folosirea ecuațiilor (24), (23) și (20), rezolvate prin încercări succesive. Admițînd o valoare pentru λ_1, se determină ε corespunzător din ecuația (24) și λ corespunzător din ecuația (23). Se calculează apoi volumul profilului conform rela-

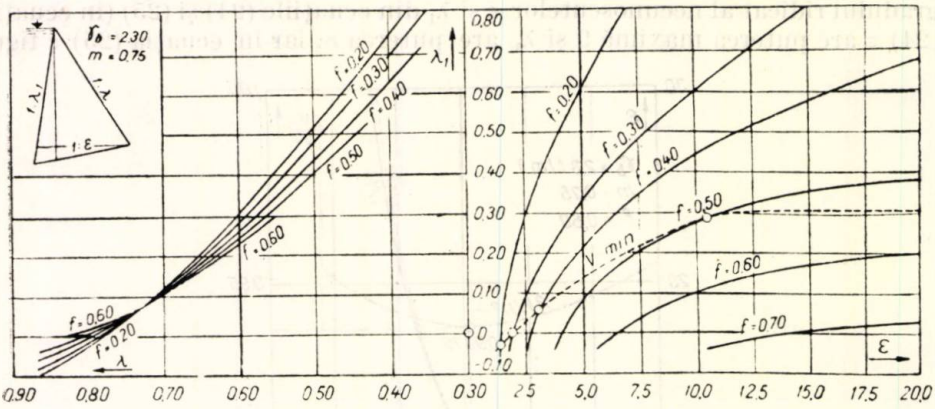


Fig. 4. — Diagramă pentru dimensionarea profilelor cu paramentul amonte și fundația înclinate (linia întreruptă indică soluțiile cu minimum de volum).

ției (20). Pantele variantei căreia îi corespunde volumul minim reprezintă soluțiile căutate.

În figura 4 sînt reprezentate rezultatele unor calcule efectuate conform acestui procedeu, admițînd $\gamma = 1$ t/m^3, $\gamma_b = 2{,}3$ t/m^3, $m = 0{,}75$, făcînd să varieze parametric coeficientul de frecare beton-rocă de la valoarea 0,20 la 0,80. Soluțiile optime care comportă volumul minim de beton sînt indicate cu linie întreruptă (cadranul pentru care rezultă valori ε negative, neuzuale, nu este reprezentat). Se constată că:

— valoarea coeficientului de frecare influențează sensibil înclinarea paramentului amonte și a tălpii de fundație, în timp ce înclinarea paramentului aval variază în limite mult mai strînse;

— pentru un coeficient de frecare dat există o multitudine de soluții care satisfac cele două condiții de stabilitate (23) și (24); dintre acestea, unele au talpa de fundație mai înclinată și paramentul amonte mai apropiat de verticală, altele invers;

— soluțiile optime care corespund volumului minim de beton conduc, în cazul frecărilor mai slabe, la înclinări mari ale tălpii de fundație, iar în cazul frecărilor mai bune, la înclinări mai mici, uneori chiar negative (adică orientate spre aval).

În figura 5 sînt reprezentate profilele triunghiulare optime, dimensionate așa cum s-a arătat mai înainte, menținînd constant coeficientul de reducere a subpresiunilor ($m = 0{,}75$) și făcînd să varieze coeficientul de frecare (vezi și tabela 1). Calculele și reprezentările s-au efectuat și pentru celelalte tipuri de profile (fig. 1*b* și *c*), în vederea comparării lor din punctul de vedere al formei și al economicității.

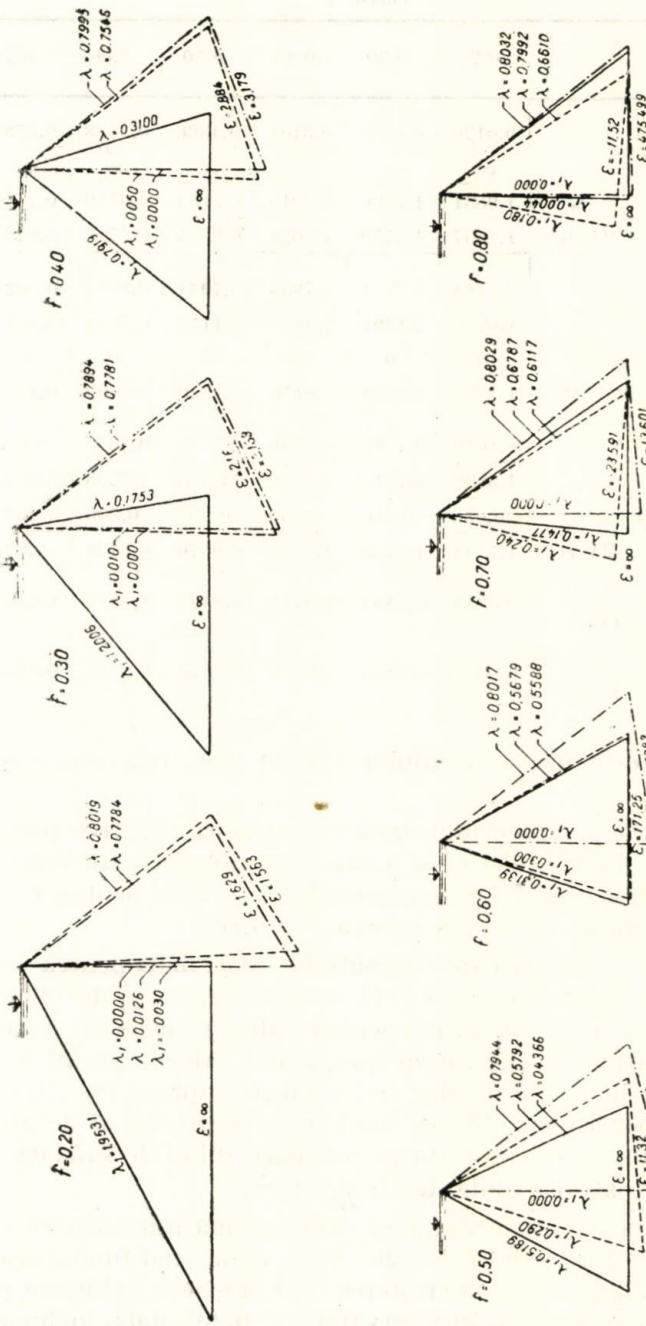


Fig. 5. — Profile pentru baraje de greutate dimensionate pentru $\gamma = 1$ t/m^3, $\gamma_b = 2{,}3$ t/m^3, $m = 0{,}75$ și diferiți coeficienți de frecare.

Tabela 1

Profil	f	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80
Cu paramet amonte înclinat şi fundaţie orizontală	λ	0,0126	0,1753	0,3101	0,4366	0,5588	0,6787	0,7992
	ε	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
	λ_1	1,9531	1,2006	0,7919	0,5189	0,3139	0,1477	0,0044
	$2V/H^2$	1,9657	1,3759	1,1020	0,9555	0,8727	0,8264	0,8036
Cu parament amonte vertical şi fundaţie înclinată	λ	0,7784	0,7894	0,7955	0,7944	0,8017	0,8029	0,8032
	ε	1,6290	2,1391	2,8837	4,1113	6,5282	13,6014	475,499
	λ_1	0	0	0	0	0	0	0
	$2V/H^2$	1,1503	1,0808	1,0150	0,9549	0,9002	0,8503	0,8046
Cu parament amonte înclinat şi fundaţie înclinată	λ	0,8019	0,7780	0,7546	0,5792	0,5679	0,6117	0, 6610
	ε	1,5630	2,1610	3,1790	11,320	171,25	−23,591	−11,520
	λ_1	−0,030	0,010	0,050	0,290	0,300	0,240	0,180
	$2V/H^2$	1,1458	1,0768	1,0125	0,9376	0,8721	0,8212	0,7769
Raport între volume	$\frac{V(\varepsilon,\lambda)}{V(\lambda,\lambda_1)}$	0,5852	0,7854	0,9211	0,9993	1,0313	1,0288	1,0012
	$\frac{V(\lambda,\varepsilon,\lambda_1)}{V(\lambda,\lambda_1)}$	0,5827	0,7825	0,9188	0,9813	0,9992	0,9935	0,9667

În ce priveşte forma profilului studiat (fig. 1*d*) constatăm următoarele :

— înclinarea paramentului amonte ia valori negative pentru coeficienţi de frecare foarte mici ($f = 0,20$), apoi înregistrează creşteri sensibile o dată cu creşterea lui f, ajungînd la $\lambda_1 = 0,30$ pentru $f = 0,60$, şi scade mai departe la $\lambda_1 = 0,18$ pentru $f = 0,80$;

— înclinarea fundaţiei spre amonte ia valori mari pentru coeficienţi de frecare reduşi, scade treptat o dată cu creşterea lui f, devenind orizontală ($\varepsilon = \infty$) pentru $f = 0,62$, iar pentru valori f mai mari ca aceasta ia chiar valori negative (se orientează spre aval) ; valorile negative rezultate din satisfacerea simultană a celor trei condiţii impuse (1), (2), (3) indică eficienţa mare pentru stabilitatea unui baraj a prismului de apă purtat de paramentul amonte şi inutilitatea înclinării tălpii de fundaţie în cazul terenurilor sănătoase capabile de frecări mari ;

— înclinarea paramentului aval scade pe măsura creşterii coeficientului de frecare în intervalul $f = 0,20-0,62$, apoi, cînd fundaţia se înclină spre aval ($f = 0,62$), odată cu creşterea lui f creşte şi înclinarea paramentului aval ; cu toate acestea, în intervalul $f = 0,20-0,62$, înclinarea paramentului aval variază în limite destul de strînse.

V. COMPARAȚIE CU CELELALTE TIPURI DE PROFILE

Urmărind modul în care evoluează forma celor trei tipuri de profile (fig. 1*b*, *c* și *d*), constatăm că:

— pentru valori mici ale coeficientului de frecare, profilul studiat (fig. 1*d*) se apropie ca formă de profilul cu parament amonte vertical și fundație înclinată (fig. 1*c*), devenind identic cu acesta pentru $f = 0{,}27$;

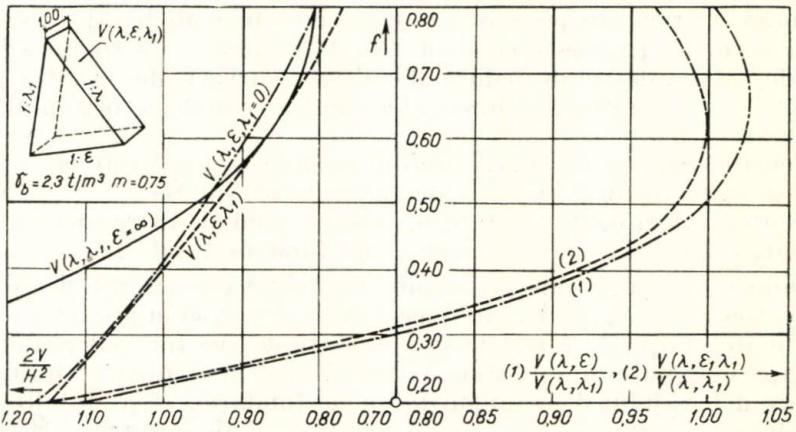


Fig. 6. — Variația volumelor specifice $2V/H^2$ și a rapoartelor (1) $\frac{V(\varepsilon, \lambda)}{V(\lambda, \lambda_1)}$, (2) $\frac{V(\lambda, \varepsilon, \lambda_1)}{V(\lambda, \lambda_1)}$ cu coeficientul de frecare.

— în intervalul $0{,}27 < f < 0{,}62$, profilul studiat trece treptat de la forma profilului cu parament amonte vertical și fundație înclinată (fig. 1*c*) la forma profilului cu parament amonte înclinat și fundație orizontală (fig. 1*b*), devenind identic cu acesta pentru $f = 0{,}62$;

— pentru valori mari ale coeficientului de frecare ($f > 0{,}62$), înclinarea tălpii profilului studiat devine negativă, îndepărtîndu-se de profilul cu parament amonte înclinat și fundație orizontală (fig. 1*b*).

În figura 6, în stînga, s-a reprezentat variația volumelor specifice de beton, pe metru liniar de baraj, cu coeficientul de frecare pentru cele trei tipuri de profile, iar în dreapta figurii s-au reprezentat aceleași volume raportate la volumul profilului cu parament amonte înclinat și fundație orizontală. Se constată că:

— volumele specifice de beton sînt cu atît mai mari, cu cît coeficienții de frecare au valori mai reduse;

— curba relativă (*1*) prezintă valori subunitare numai pentru valori ale coeficientului de frecare mai mici ca 0,50, ceea ce înseamnează că profilul cu parament amonte vertical și fundație înclinată realizează economii numai în acest domeniu [3];

— curba relativă (*2*) prezintă în permanență valori subunitare, cu excepția punctului corespunzător lui $f = 0{,}62$, pentru care raportul res-

pectiv este egal cu unitatea; curba indică economii pentru toată gama de valori considerată pentru coeficientul de frecare.

Din cele arătate mai sus rezultă că, teoretic, profilul studiat, satisfăcînd condițiile de stabilitate impuse și celorlalte profile, se bucură în plus de avantajul unor volume specifice de beton mai reduse. Să examinăm însă mai de aproape acest aspect, legat și de forma pe care o ia profilul pentru diferite valori ale coeficientului de frecare.

Pentru valori $f > 0{,}62$, am văzut că talpa de fundație se înclină spre aval, luînd o orientare pe care nu o prezintă nici un baraj executat în condiții normale. În aceste condiții este de preferat a se renunța la economia de volum, destul de redusă de altfel (variază de la 0% pentru $f = 0{,}62$, la 3% pentru $f = 0{,}80$), și a admite o fundație orizontală, mai sigură.

Pentru valoarea $f = 0{,}62$, profilul cel mai rațional este cel cu paramentul amonte înclinat și talpa de fundație orizontală.

Pentru valori $0{,}62 > f > 0{,}50$, profilul studiat apare mai bine proporționat, economiile maxime realizabile fiind însă sub 2,5%.

Domeniul pentru care economiile de volum cresc sensibil o dată cu scăderea coeficientului de frecare începe de la $f = 0{,}50$ în jos. Dar în acest caz înclinarea tălpii de fundație spre amonte devine tot mai pronunțată, acest fapt obligîndu-ne să luăm în considerare nu numai stabilitatea la alunecare a barajului de-a lungul tălpii de fundație, ci și stabilitatea în ansamblu a terenului pe care acesta urmează să fie construit. Sub acest aspect, terenuri al căror coeficient de frecare cu betonul este de ordinul a 0,20—0,30—0,40 evident că pun sub semn de întrebare oportunitatea aplicării unor profile de baraje cu talpa înclinată.

VI. CONCLUZII

Față de cele arătate mai înainte se pot trage următoarele concluzii:

1. Folosirea unei a treia condiții, de volum minim de beton, pe lîngă cele două condiții clasice de stabilitate dă posibilitatea dimensionării raționale a celui mai general profil de baraj de greutate, cu paramentele și talpa de fundație înclinate. Particularizînd ecuațiile deduse, cădem peste relațiile găsite anterior, referitoare la profile mai simple, definite numai de doi parametri.

2. Calculele efectuate scot în relief influența deosebită pe care o are valoarea coeficientului de frecare statică beton-rocă asupra formei și economicității diverselor tipuri de profile. În linii mari, în cazul terenurilor cu frecări mici efectul stabilizator este asigurat de înclinarea tălpii de fundație spre amonte, în timp ce în cazul terenurilor cu frecări mijlocii și mari acest efect este îndeplinit mai mult prin înclinarea paramentului amonte.

3. Deși profilul triunghiular studiat conduce teoretic la economii de volum mai mari sau mai mici față de celelalte profile, este de remarcat că zona în care aceste economii merită atenție corespunde valorilor mici ale coeficientului de frecare. Or, tocmai aici apar unele probleme legate

de stabilitatea generală a terenului de fundație, probleme care fac mai sigură aplicarea altor profile și dispoziții constructive.

4. Rezultă că domeniul de aplicare practică a profilului studiat corespunde terenurilor cu frecări mijlocii (f în jur de 0,50), pentru care economia de volum se ridică la cîteva procente. Pentru celelalte cazuri, forme particulare ale acestui profil au posibilitatea să se adapteze mai bine cu condițiile impuse inițial.

Primită la redacție la 10 iunie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. R. Prișcu, *Asupra profilului optim al barajelor de greutate.* St. cerc. mec. și metalurg., IV (1953).
2. — *Considérations sur le calcul des barrages en béton pour larges vallées.* Rapport nr. 46, Septième congrès des grands barrages, Roma, 1961.
3. R. Prișcu, G. Olteanu, *Eficiența înclinării tălpii de fundație la barajele de greutate.* St. cerc. mec. apl., *2* (1962).

DISCURI NEOMOGENE ÎN MIȘCARE DE ROTAȚIE

de AUGUSTIN PETRE și VIRGIL BOGDAN

Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

539.4

Se consideră starea de tensiune într-un disc neomogen alcătuit din două materiale așezate în straturi paralele lipite între ele.

Presupunînd discurile elementare suficient de subțiri, se introduce ipoteza neglijării variației radiale a deplasării pe grosimea unui asemenea disc față de deplasarea lui radială medie.

Problema este soluționată în deplasări. Punînd condițiile la limită, se determină legea de variație atît a eforturilor unitare, cît și a deformațiilor funcție de rază. Se determină de asemenea expresia eforturilor unitare în stratul de adeziv dintre discurile elementare.

În încheiere se dau considerențele necesare privind modul de variație a grosimii relative între cele două materiale funcție de caracteristicele lor fizice, pentru a se obține într-un material solicitarea minimă.

Se consideră un disc neomogen alcătuit din două materiale așezate în straturi paralele lipite între ele (fig. 1), diametrele interioare și exterioare ale discurilor fiind egale.

Considerînd că

$$\frac{R_e}{b_2} > 4 \quad \text{și} \quad \frac{R_e}{b_1} > 4,$$

problema este studiată în baza următoarei ipoteze : discurile elementare se presupun suficient de subțiri pentru a se putea neglija variația radială a deformației pe grosimea lui față de deformația lui medie (fig. 2).

În baza acestei ipoteze, problema se reduce la o stare plană de eforturi unitare.

Din condiţiile de simetrie ale problemei şi din ipoteza amintită rezultă că :

— deformaţiile şi eforturile unitare în disc sînt funcţie numai de rază ;

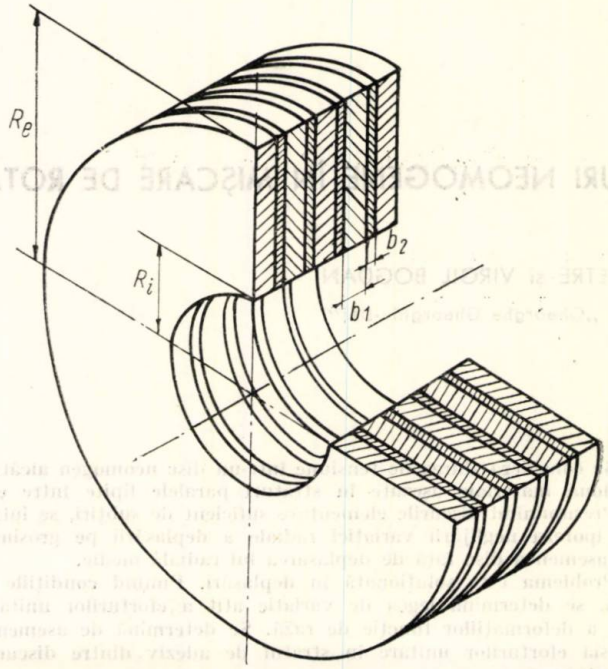


Fig. 1

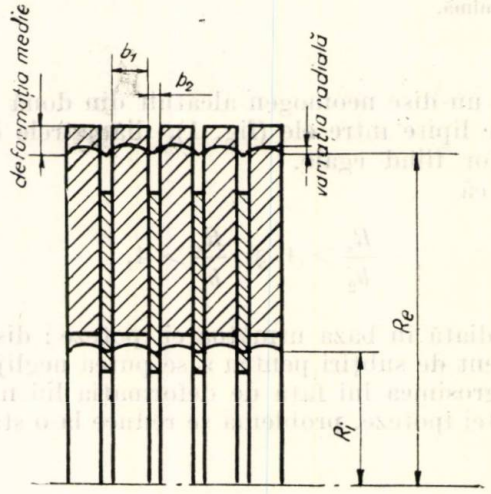


Fig. 2

— în secţiunile radiale ce conţin axa de rotaţie, eforturile unitare tangenţiale sînt nule. Deci aceste suprafeţe elementare (fig. 3 *a*, *b*) sînt suprafeţe principale.

De asemenea eforturile unitare σ_r şi σ_t sînt eforturi unitare principale.

În cele ce urmează se presupune că în timpul rotaţiei materialul ①

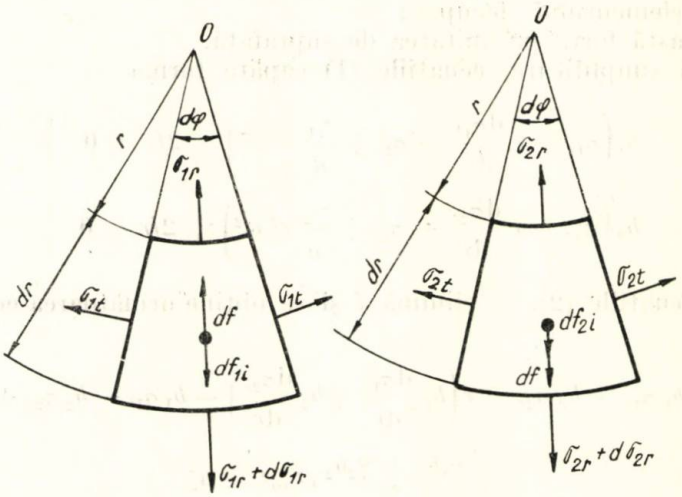


Fig. 3

tinde să se deformeze mai mult ca ②. Deformarea diferită dintre cele două materiale este împiedicată datorită lipirii.

Pentru soluţionarea problemei, se consideră cîte un element din fiecare disc elementar, ca în figura 3, de grosimi egale cu b_1, respectiv b_2.

Ecuaţiile de echilibru pentru cele două volume elementare sînt:

— pentru elementul din materialul ① de lăţime b_1:

$$b_1(\sigma_{1r}+\mathrm{d}\sigma_{1r})(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\varphi - b_1\sigma_{1r}\,r\,\mathrm{d}\varphi - 2b_1\,\sigma_{1t}\,\mathrm{d}r\sin\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} + \mathrm{d}f_{1i} - 2\mathrm{d}f = 0;$$

— pentru elementul din materialul ② de lăţime b_2: (1)

$$b_2(\sigma_{2r}+\mathrm{d}\sigma_{2r})(r+\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}\varphi - b_2\,\sigma_{2r}\,r\,\mathrm{d}\varphi - 2b_2\,\sigma_{2t}\,\mathrm{d}r\sin\frac{\mathrm{d}\varphi}{2} + \mathrm{d}f_{2i} + 2\mathrm{d}f = 0,$$

în care

$$\mathrm{d}f_{1i} = \frac{\gamma_1}{g}\,b_1\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.r\omega^2 \text{ şi}$$

$$\mathrm{d}f_{2i} = \frac{\gamma_2}{g}\,b_2\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi.r\omega^2$$

sînt forțele de inerție elementare care acționează asupra elementelor considerate,

$$df = fr\,d\varphi\,dr$$

este forța elementară ce apare în stratul de adeziv și care acționează pe o față a elementului decupat;
f fiind această forță pe unitatea de suprafață.

După simplificare, ecuațiile (1) capătă forma

$$\left.\begin{aligned} b_1\left(\sigma_{1r} + r\frac{d\sigma_{1r}}{dr} - \sigma_{1t} + \frac{\gamma_1}{g} r^2\omega^2\right) - 2fr = 0 \\ b_2\left(\sigma_{2r} + r\frac{d\sigma_{2r}}{dr} - \sigma_{2t} + \frac{\gamma_2}{g} r^2\omega^2\right) + 2fr = 0 \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Adunînd ecuațiile (2), se elimină f și se obține următoarea ecuație diferențială:

$$b_1\sigma_{1r} + b_2\sigma_{2r} + r\left(b_1\frac{d\sigma_{1r}}{dr} + b_2\frac{d\sigma_{2r}}{dr}\right) - b_1\sigma_{1t} - b_2\sigma_{2t} + \frac{\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2}{g} r^2\omega^2 = 0. \qquad (3)$$

Ecuațiile (3) se rezolvă în deplasări. Pentru starea plană de eforturi unitare,

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_t) = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{du}{dr} + \mu\frac{u}{r}\right]$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_t + \mu\varepsilon_r) = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{u}{r} + \mu\frac{du}{dr}\right],$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinală,
ε_r, ε_t — lungirile specifice radială și tangențială,
u — deplasarea radială,
μ — coeficientul lui Poisson.

Întrucît discurile elementare sînt solidarizate prin lipire, se poate scrie condiția de deformație:

$$u_1 = u_2 = u(r)$$

și deci

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{1r} = \frac{E_1}{1-\mu_1^2}\left[\frac{du}{dr} + \mu_1\frac{u}{r}\right]; \quad \sigma_{2r} = \frac{E_2}{1-\mu_2^2}\left[\frac{du}{dr} + \mu_2\frac{u}{r}\right] \\ \sigma_{1t} = \frac{E_1}{1-\mu_1^2}\left[\frac{u}{r} + \mu_1\frac{du}{dr}\right]; \quad \sigma_{2t} = \frac{E_2}{1-\mu_2^2}\left[\frac{u}{r} + \mu_2\frac{du}{dr}\right] \end{aligned}\right| \qquad (4)$$

Substituind valorile lui σ_{1r}, σ_{2r}, σ_{1t}, σ_{2t} în ecuaţia (3) şi efectuînd calculele, se obţine ecuaţia

$$r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u + \frac{\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2}{\frac{E_1 b_1}{1-\mu_1^2} + \frac{E_2 b_2}{1-\mu_2^2}} \cdot \frac{\omega^2}{g} r^3 = 0$$

sau, notînd

$$\beta = \frac{\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2}{\frac{E_1 b_1}{1-\mu_1^2} + \frac{E_2 b_2}{1-\mu_2^2}},$$

se obţine

$$r^2 \frac{d^2u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u + \beta \frac{\omega^2}{g} r^3 = 0. \tag{5}$$

Ecuaţia (5) este de tip Euler şi are soluţia

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{\beta}{8} r^3 \frac{\omega^2}{g}. \tag{6}$$

Constantele C_1 şi C_2 se determină din condiţiile la limită :

$$\left.\begin{aligned} r = R_i \to b_1 \sigma_{1R_i} + b_2 \sigma_{2R_i} = 0 \\ r = R_e \to b_1 \sigma_{1R_e} + b_2 \sigma_{2R_e} = 0 \end{aligned}\right| \tag{7}$$

respectiv feţele exterioară şi interioară ale discului sînt libere de sarcini.

Substituind ecuaţia (6) în expresiile (4), se obţine :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{1r} = \frac{E_1}{1-\mu_1^2}\left[C_1(1+\mu_1) - \frac{C_2}{r^2}(1-\mu_1) - \frac{\beta}{8}(3+\mu_1)\frac{\omega^2}{g} r^2\right] \\ \sigma_{2r} = \frac{E_2}{1-\mu_2^2}\left[C_1(1+\mu_2) - \frac{C_2}{r^2}(1-\mu_2) - \frac{\beta}{8}(3+\mu_2)\frac{\omega^2}{g} r^2\right] \end{aligned}\right| \tag{8}$$

Punînd condiţiile (7) în expresiile (8) şi rezolvînd, se obţine :

$$C_1 = \frac{\beta \alpha_2}{8}(R_i^2 + R_e^2)\frac{\omega^2}{g} \quad \text{şi} \quad C_2 = \frac{\beta \alpha_1}{8} R_i^2 R_e^2 \frac{\omega^2}{g},$$

în care

$$\alpha_2 = \frac{\dfrac{E_1(3+\mu_1)\,b_1}{1-\mu_1^2} + \dfrac{E_2(3+\mu_2)\,b_2}{1-\mu_2^2}}{\dfrac{E_1 b_1}{1-\mu_1} + \dfrac{E_2 b_2}{1-\mu_2}} \quad \text{și} \quad \alpha_1 = \frac{\dfrac{E_1(3+\mu_1)\,b_1}{1-\mu_1^2} + \dfrac{E_2(3+\mu_2)\,b_2}{1-\mu_2^2}}{\dfrac{E_1 b_1}{1+\mu_1} + \dfrac{E_2 b_2}{1+\mu_2}}$$

Expresia eforturilor unitare σ_{1r}, σ_{2r}, σ_{1t}, σ_{2t} și expresia de deplasări u vor fi de forma

$$u = \frac{\beta}{8} \cdot \frac{\omega^2}{g}\left[\alpha_2(R_i^2 + R_e^2)\,r + \alpha_1 R_i^2 R_e^2 \frac{1}{r} - r^3\right] \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{1r} &= \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \cdot \frac{\beta}{8} \cdot \frac{\omega^2}{g}\left[\alpha_2(1+\mu_1)(R_i^2+R_e^2) - \alpha_1(1-\mu_1)\frac{R_i^2 R_e^2}{r^2} - (3+\mu_1)\,r^2\right] \\
\sigma_{2r} &= \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \cdot \frac{\beta}{8} \cdot \frac{\omega^2}{g}\left[\alpha_2(1+\mu_2)(R_i^2+R_e^2) - \alpha_1(1-\mu_2)\frac{R_i^2 R_e^2}{r^2} - (3+\mu_2)\,r^2\right] \\
\sigma_{1t} &= \frac{E_1}{1-\mu_1^2} \cdot \frac{\beta}{8} \cdot \frac{\omega^2}{g}\left[\alpha_2(1+\mu_1)(R_i^2+R_e^2) + \alpha_1(1-\mu_1)\frac{R_i^2 R_e^2}{r^2} - (1+3\mu_1)\,r^2\right] \\
\sigma_{2t} &= \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \cdot \frac{\beta}{8} \cdot \frac{\omega^2}{g}\left[\alpha_2(1+\mu_2)(R_i^2+R_e^2) + \alpha_1(1-\mu_2)\frac{R_i^2 R_e^2}{r^2} - (1+3\mu_2)\,r^2\right]
\end{aligned}\right| \tag{10}$$

Se constată că legea de variație a eforturilor unitare și a deplasărilor are aceeași formă ca la discurile omogene (fig. 4). Intervin însă coeficienții β, α_1, α_2, care precizează influența reciprocă a celor două materiale. Solicitarea f care se naște între cele două materiale se obține scăzînd ecuațiile (2). După cîteva transformări se obține

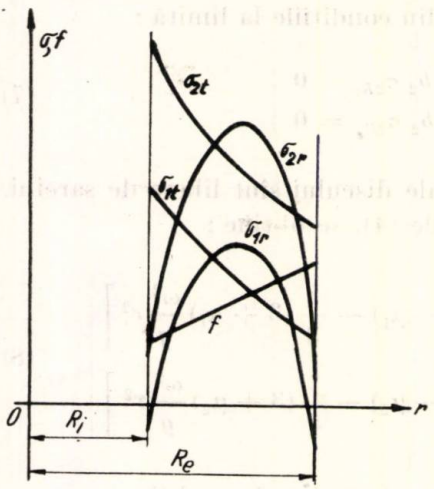


Fig. 4

$$f = \frac{k\omega^2}{2g}\,r, \tag{11}$$

în care

$$k = \frac{\dfrac{E_2\gamma_1}{1-\mu_2^2} - \dfrac{E_1\gamma_2}{1-\mu_1^2}}{\dfrac{E_1 b_1}{1-\mu_1^2} + \dfrac{E_2 b_2}{1-\mu_2^2}}\,b_1 b_2. \tag{12}$$

Rezultă deci că solicitarea în stratul de adeziv este proporțională cu distanța r față de centru a suprafeței pe care se aplică. Variația ei cu raza este arătată în figura 4.

Influența pe care o au proprietățile materialelor ① și ②, precum și lățimile discurilor elementare asupra solicitării în stratul de adeziv, rezultă din expresia lui k (12).

Pentru două materiale alese apriori, valorile E_1, E_2, μ_1, μ_2, γ_1 şi γ_2 sînt date şi k variază numai în funcţie de lăţimile b_1 şi b_2.

În cele ce urmează, pentru simplificarea relaţiilor se va face ipoteza

$$\mu_1 \approx \mu_2 \approx \mu,$$

întrucît valorile lui μ sînt în general apropiate.

Împărţind-o la b_2, relaţia (12) capătă forma

$$k \approx \frac{\dfrac{E_2\,\gamma_1}{1-\mu^2} - \dfrac{E_1\,\gamma_2}{1-\mu^2}}{\dfrac{E_2}{1-\mu^2} + \dfrac{E_1}{1-\mu^2}\cdot\dfrac{b_1}{b_2}} \cdot b_1 = \frac{\gamma_1 - \gamma_2\dfrac{E_1}{E_2}}{1+\dfrac{b_1}{b_2}\cdot\dfrac{E_1}{E_2}}\, b_1 .$$

Solicitarea maximă în stratul de adeziv se va produce pentru $r = R_e$ şi va fi

$$f = \frac{\omega^2 R_e}{2g}\cdot\frac{\gamma_1 E_2 - \gamma_2 E_1}{b_1 E_1 + b_2 E_2}\, b_1\, b_2. \tag{13}$$

Expresia k este deci funcţie de $\dfrac{b_1}{b_2}$ şi b_1. În tabela 1 este dată variaţia lui k în funcţie de raportul $\dfrac{b_1}{b_2}$ pentru o valoare b_1 dinainte dată.

Tabela 1

b_1/b_2	0	1	∞
b_2	∞	$b_2 = b_1$	0
k	$b_1\left(\gamma_1 - \gamma_2\dfrac{E_1}{E_2}\right)$	$b_1\dfrac{\gamma_1 - \gamma_2 E_1/E_2}{1 + b_1/b_2\cdot E_1/E_2}$	0
$\dfrac{dk}{d(b_1/b_2)}$	— — — — — — — — — — — — — — — — — —		
	——— $b_1 < b_2$ ———→ ←——— $b_1 > b_2$ ———		

Pentru mulţimea valorilor lui b_1 se obţine familia de curbe din figura 5, care au ca asimptote dreptele

$$k = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{b_1}{b_2} \approx -\frac{E_2}{E_1}.$$

Întrucît în cazurile reale $b_1 \geqslant 0$ și $b_2 \geqslant 0$, domeniul de existență al raportului $\frac{b_1}{b_2}$ este și el $0 \leqslant \frac{b_1}{b_2} \leqslant \infty$ și, ca atare, funcția k are ca domeniu intervalul

$$0 \leqslant k \leqslant b_1\left(\gamma_1 - \gamma_2 \frac{E_1}{E_2}\right).$$

Se vede că solicitarea în stratul de adeziv este cu atît mai mică, cu cît grosimile discurilor elementare sînt mai mici.

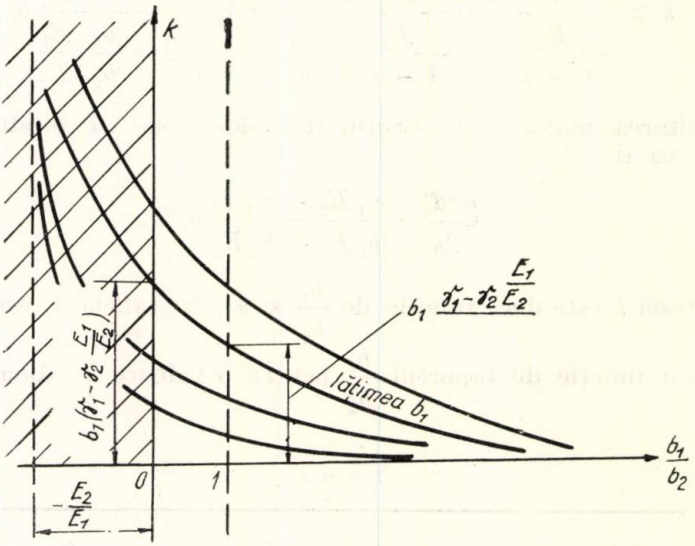


Fig. 5

De asemenea, se observă că, alegînd materialele astfel încît

$$\gamma_2 E_1 = \gamma_1 E_2,$$

forța de adeziune rezultă a fi nulă.

În cazul particular cînd sînt lipite două materiale identice $E_1 = E_2$, $\mu_1 = \mu_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$, se obține rezultatul așteptat $f \equiv 0$, respectiv $k = 0$, oricare ar fi lățimile b_1 și b_2.

DETERMINAREA STĂRII DE TENSIUNE

Pentru două materiale date, eforturile unitare σ_{1r}, σ_{2r}, σ_{1t}, σ_{2t} sînt funcții de parametrii b_1, b_2, R_i, R_e și ω. Variația acestor eforturi unitare este arătată în figura 6.

a) *Cazul în care σ_t este maxim*

Din analiza relațiilor (10) se constată că σ_t ia valoarea maximă pentru $r = R_i$. Cu aproximația $\mu_1 \approx \mu_2$ se obține

$$\sigma_{ech} = \sigma_{tmax} = \sigma_{t_{r=R_i}} \approx \frac{E^* \omega^2}{4g} \cdot \frac{\gamma_1 \frac{b_1}{b_2} + \gamma_2}{E_1 \frac{b_1}{b_2} + E_2} R_i^2 \left[(1-\mu) + (3+\mu) \frac{R_e^2}{R_i^2} \right], \qquad (14)$$

în care $E^* = E_1$ pentru σ_{1tmax} și $E^* = E_2$ pentru σ_{2tmax}.

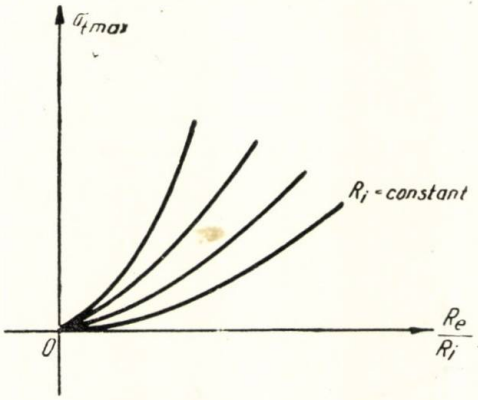


Fig. 6

Variația lui σ_{tmax} în funcție de rază este dată în figura 6. σ_{tmax} crește o dată cu creșterea razelor R_i și R_e.

Dacă se ține seama numai de variația raportului $\frac{b_1}{b_2}$, relația (14) se poate scrie sub forma

$$\sigma_{tmax} = E^* \beta_1 \frac{\gamma_1 \frac{b_1}{b_2} + \gamma_2}{E_1 \frac{b_1}{b_2} + E_2}, \qquad (15)$$

în care

$$\beta_1 = \frac{\omega^2 R_i^2}{4g} \left[(1 - \mu) + (3 + \mu) \frac{R_e^2}{R_i^2} \right]. \qquad (16)$$

În tabela 2 și în figura 7 este dată variația lui σ_{tmax} în funcție de raportul $\frac{b_1}{b_2}$.

Pentru valori mari ale raportului $\frac{b_1}{b_2}$, $\sigma_{t\max}$ tinde asimptotic spre $E^* \beta_1 \frac{\gamma_1}{E_1}$. Curba depinde esenţial de greutăţile specifice şi de modulele de elasticitate ale celor două materiale.

Tabela 2

$\frac{b_1}{b_2}$		0	1	∞
$\sigma_{t\max}$		$E^* \beta_1 \frac{\gamma_2}{E_2}$	$E^* \beta_1 \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{E_1 + E_2}$	$E^* \beta_1 \frac{\gamma_1}{E_1}$
$\frac{\partial \sigma_{t\max}}{\partial \left(\frac{b_1}{b_2}\right)}$	$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} < \frac{E_1}{E_2}$	− − − − − − − − − − − − − − − − −
	$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{E_1}{E_2}$	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
	$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} > \frac{E_1}{E_2}$	+ + + + + + + + + + + + + + + + +

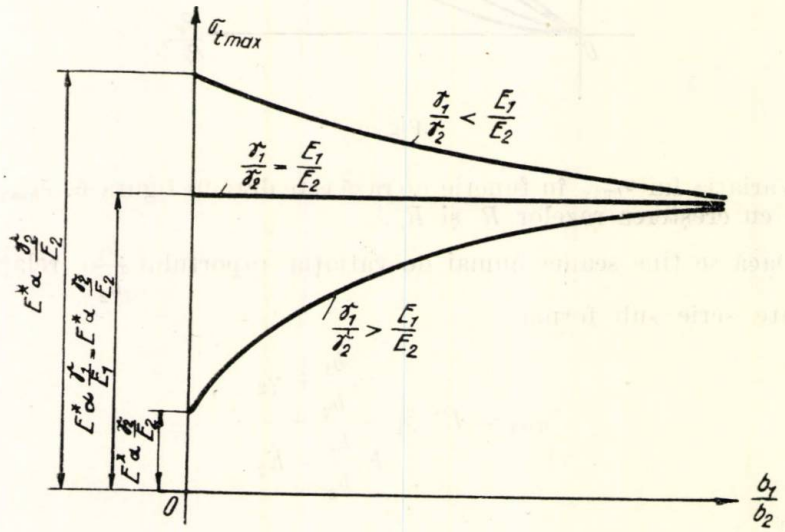


Fig. 7

Dacă $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} > \frac{E_1}{E_2}$, atunci $\sigma_{t\max}$ este cu atît mai mic, cu cît raportul $\frac{b_1}{b_2}$ este mai mic. Pentru valorile foarte mici ale lui $\frac{b_1}{b_2}$, $\sigma_{t\max}$ tinde spre $E^* \beta_1 \frac{\gamma_2}{E_2}$.

Dacă $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{E_1}{E_2}$, $\sigma_{t\max}$ nu depinde de raportul $\frac{b_1}{b_2}$, valoarea lui fiind aceeaşi, şi anume

$$\sigma_{t\max} = E^* \beta_1 \frac{\gamma_1}{E_1} = E^* \beta_1 \frac{\gamma_2}{E_2},$$

adică, pentru fiecare material în parte,

$$\sigma_{1t\max} = E_1 \beta_1 \frac{\gamma_1}{E_1} = \beta_1 \gamma_1$$

$$\sigma_{2t\max} = E_2 \beta_1 \frac{\gamma_2}{E_2} = \beta_1 \gamma_2,$$

deci în acest caz $\sigma_{t\max}$ nu depinde de modulul de elasticitate E, ci numai de greutatea specifică γ.

Dacă $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} < \frac{E_1}{E_2}$, atunci $\sigma_{t\max}$ este cu atît mai mare, cu cît raportul $\frac{b_1}{b_2}$ este mai mic. Pentru astfel de materiale, pentru ca $\sigma_{t\max}$ să se micşoreze este necesar ca raportul $\frac{b_1}{b_2}$ să fie cît mai mare.

Pentru două materiale date, alura curbelor din figura 7 este aceeaşi, diferind numai proporţiile în funcţie de dimensiunile discului şi de viteza de rotaţie (factorul β_1). Odată trasate, se poate stabili valoarea optimă a raportului $\frac{b_1}{b_2}$.

b) *Cazul în care σ_r este maxim*

Din relaţiile (10), cu simplificările de mai sus, se obţine

$$\sigma_r = \frac{E^* \omega^2}{4g} \cdot \frac{\gamma_1 \frac{b_1}{b_2} + \gamma_2}{E_1 \frac{b_1}{b_2} + E_2} (3 + \mu) \left[R_i^2 + R_e^2 - \frac{R_i^2 R_e^2}{r^2} - r^2 \right]. \qquad (17)$$

Valoarea maximă corespunde lui r din relaţia $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = 0$, adică

$$r^2 = R_i \cdot R_e, \qquad (18)$$

de unde se vede că secţiunea în care σ_r este maxim nu depinde de material.

Substituind valoarea lui r^2 din relația (18) în ecuația (17), se obține

$$\sigma_{ech} = \sigma_{rmax} = \sigma_{r_{r=\sqrt{R_e R_i}}} = \frac{E^* \omega^2}{4g} \cdot \frac{\gamma_1 \frac{b_1}{b_2} + \gamma_2}{E_1 \frac{b_1}{b_2} + E_2} (3 + \mu)(R_e - R_i)^2. \quad (19)$$

Scriind și aici

$$\sigma_{rmax} = E^* \beta_2 \frac{\gamma_1 \frac{b_1}{b_2} + \gamma_2}{E_1 \frac{b_1}{b_2} + E_2},$$

în care $\beta_2 = \frac{\omega^2}{4g}(3 + \mu)(R_e - R_i)^2$, se vede că σ_{rmax} variază în funcție de $\frac{b_1}{b_2}$ după aceeași lege ca și σ_{tmax}, diferind numai mărimile β_1 și β_2.

Făcînd raportul $\frac{\beta_1}{\beta_2}$, se constată că

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\frac{\omega^2}{4g}[(1 - \mu) R_i^2 + (3 + \mu) R_e^2]}{\frac{\omega^2}{4g}(3 + \mu)(R_e - R_i)^2} = \frac{\frac{1 - \mu}{3 + \mu} R_i^2 + R_e^2}{(R_e - R_i)^2} > 1,$$

deoarece termenul $\frac{R_e^2}{(R_e - R_i)^2} > 1$, iar cantitatea $\frac{1 - \mu}{3 + \mu} R_i^2$ rămasă la numărător este pozitivă.

De aici rezultă că σ_{rmax} nu atinge niciodată valoarea lui σ_{tmax}.

DETERMINAREA DEFORMAȚIILOR

Pe baza soluției (6) se pot determina deplasările radiale ale discurilor datorită deformațiilor pentru orice punct al lor.

Este interesant de determinat deplasarea radială a conturului exterior al discurilor. În acest caz, în ecuația (6) se va introduce

$$r = R_e,$$

obținîndu-se după cîteva simplificări

$$u_{r=R_e} = \frac{\omega^2 R_e}{8g} \cdot \frac{\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2}{E_1 b_1 + E_2 b_2} \{2(3 + \mu) R_i^2 + [(3 + \mu)(1 - \mu) + 1] R_e^2\}.$$

CONCLUZII

Din cele de mai sus rezultă că solicitarea maximă pentru discurile neomogene constituite din ansamblarea de discuri paralele din materiale diferite are loc pentru zona de interior ale acestora. Valoarea eforturilor unitare maxime este dată de relaţia (14).

Rezultă din această relaţie că, dacă $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} < \frac{E_1}{E_2}$, această solicitare scade cu creşterea raportului $\frac{b_1}{b_2}$ şi invers, solicitarea cea mai mare fiind în discul cu modulul de elasticitate cel mai mare. Dacă $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{E_1}{E_2}$, solicitarea maximă nu depinde de raportul grosimilor discurilor ansamblate $\frac{b_1}{b_2}$.

În stratul de adeziv, solicitarea maximă este dată de relaţia (13). Se observă că, dacă

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{E_1}{E_2},$$

această solicitare este nulă.

Ca aplicaţie tehnică se pot considera discurile de abraziv armate cu discuri metalice.

În acest caz $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} > \frac{E_1}{E_2}$ şi, după cum este uşor de văzut, solicitările maxime scad cu creşterea raportului $\frac{b_1}{b_2}$. Pe baza relaţiilor de mai sus, problema aceasta poate fi complet soluţionată.

Primită la redacţie la 7 mai 1965

BIBLIOGRAFIE

1. S. D. Ponomariov şi alţii, *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, vol. III. Bucureşti, Edit. tehnică, 1964.
2. Н. Д. Тарабасов, *Расчеты на прочность неоднородных составных дисков и труб с учетом инерционных сил*. Инженерный сборник, Изд. АН СССР, **X** (1951).

CONTRIBUȚII LA DETERMINAREA JOCULUI REAL ÎN LAGĂRELE CU ALUNECARE[1])

de AL. NICA
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

621.01

În timpul funcționării lagărului, jocul care se stabilește nu mai este identic cu cel de la montaj, datorită temperaturii și încărcării. În lucrare se prezintă o metodă de calcul a jocului real din lagăr, luîndu-se în considerație temperatura rezultată în timpul funcționării și sarcina lagărului. Se deduc relații de calcul care permit determinarea corecției ce trebuie făcută asupra jocului la montaj pentru ca în timpul funcționării lagărului să se obțină jocul calculat.

NOTAȚII

A — coeficient definit de relația (13);
A_{12}, A_{23} — coeficienți definiți de relațiile (14);
B_{12}, B_{23} — coeficienți definiți de relațiile (19);
c — jocul radial, mm;
C_1, C_2, C_1', C_2'' — constante de integrare;
E — modulul de elasticitate, kgf/cm²;
E_b, E_c — modulul de elasticitate al cuzinetului și al corpului lagărului, kgf/cm²;
p_m — încărcarea specifică medie, kgf/cm²;
r — rază, mm
r_1, r_2, r_3 — razele suprafețelor 1, 2, 3, mm;
R_{12}, R_{23} — coeficienți definiți prin relațiile (10);
R_{μ_b}, R_{μ_c} — coeficienți definiți prin relațiile (15);

[1]) Prezentată la „1964 Winter Annual Meeting" a Societății inginerilor mecanici din S.U.A., și publicată în „Transactions of the ASME — Journal of Basic Engineering".

t — temperatura, °C;
t_1, t_2, t_3 — temperatura pe suprafețele 1, 2, 3, °C;
t_m — temperatura la montaj;
u — deplasarea radială, mm;
u_{1b}, u_{2b}, u_{2c}, u_{3c} — deplasările radiale ale suprafețelor interioare și exterioare ale cuzinetului și corpului lagărului, mm;
u_a — deplasarea radială a arborelului, mm;
α — coeficientul de dilatare liniară;
α_a, α_b, α_c — coeficientul de dilatare liniară a arborelui, cuzinetului și corpului lagărului;
μ — coeficientul lui Poisson;
μ_b, μ_c — coeficientul lui Poisson pentru materialul cuzinetului și pentru materialul corpului lagărului;
σ_r — solicitare radială, kgf/cm²;
$\sigma_{r_{1b}}$, $\sigma_{r_{2b}}$, $\sigma_{r_{2c}}$, $\sigma_{r_{3c}}$ — solicitările radiale ale cuzinetului și corpului lagărului pe suprafețele lor interioare și exterioare, kgf/cm²;
ψ — jocul relativ.

(Indicele a se va referi la arbore, b la cuzinet și c la corpul lagărului; indicii 1, 2, 3 la suprafețele 1, 2, 3 respectiv.)

I. INTRODUCERE

În timpul funcționării lagărului, frecarea dintre suprafețele în mișcare determină stabilirea unui regim termic în lagăr caracterizat adesea prin temperaturi ridicate (80÷100°C), în cazuri speciale încă și mai mari. În aceste condiții, diferențele față de jocul la rece sînt mari și trebuie cunoscută valoarea reală a jocului în timpul funcționării, ceea ce ar permite să se facă corecțiile necesare asupra jocului la montaj, astfel încît în timpul funcționării lagărului să se obțină jocul calculat.

Pînă în prezent, pentru calculul jocului real în timpul funcționării lagărului s-au utilizat fie relații empirice, bazate pe stabilirea unor coeficienți experimentali de dilatare pentru diverse tipuri constructive de lagăre [1] sau prin asimilarea lagărului cu o bară care se dilată [2]. Condițiile tot mai severe care se impun lagărelor cu alunecare au condus la metode de calcul din ce în ce mai precise și la prelucrări tot mai exacte, ceea ce impune stabilirea unor relații mai exacte de calcul a jocului real stabilit în timpul funcționării, prin luarea în considerație a distribuției de temperaturi, a solicitărilor termice, a elasticității materialelor din care este făcut lagărul și influența încărcării.

II. STABILIREA RELAȚIILOR DE CALCUL

Se consideră relațiile generale care exprimă deformațiile și tensiunile într-un cilindru la care variația temperaturii produce solicitări termice [3], neglijîndu-se deplasările axiale care nu intervin în problemă.

Deplasările în direcție radială sînt date de relația

$$u = \frac{1}{r} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \int_{r_1}^{r} \alpha t \, r dr + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \tag{1}$$

iar solicitările radiale de relația

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\mu} \left(- \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^{r} \alpha t r dr + \frac{C_1}{1-2\mu} - \frac{C_2}{r^2} \right). \tag{2}$$

Pentru determinarea deplasării suprafeței interioare a cuzinetului (fig. 1), trebuie determinate constantele de integrare. În stabilirea condițiilor la limită considerăm două cazuri distincte :

a) corpul lagărului este montat într-o construcție rigidă, deci nu se poate dilata spre exterior și, în consecință, deplasarea radială a suprafeței sale exterioare este nulă ($u_{3c} = 0$) ;

b) corpul lagărului se poate dilata liber, deci tensiunile radiale la suprafața sa exterioară sînt nule ($\sigma_{r_{3c}} = 0$).

Celelalte condiții la limită sînt identice pentru ambele cazuri. Astfel, pe suprafața interioară a cuzinetului se va considera o solicitare la compresiune egală cu presiunea specifică medie a lagărului, cu semnul (—), fiind o compresiune.

Deplasarea suprafeței exterioare a cuzinetului se va considera egală cu cea a suprafeței interioare a corpului lagărului (în caz contrar nu s-ar mai asigura contactul dintre cele două piese sau s-ar constata întrepătrunderi de material), deci $u_{2b} = u_{2c}$. În fine, în zona de contact, tensiunile dintre cele două corpuri sînt egale ca mărime și de semn contrar, adică $\sigma_{r_{2b}} = -\sigma_{r_{2c}}$.

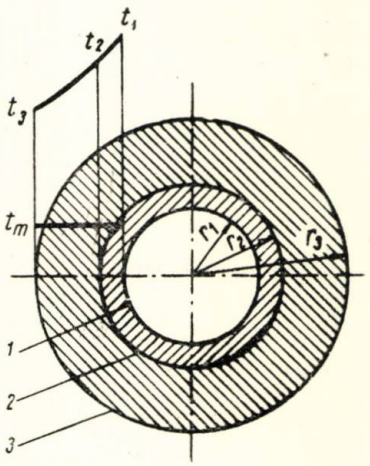


Fig. 1

În cazul *a*), cînd corpul lagărului nu se poate dilata spre exterior, ultimele două condiții sînt îndeplinite cu certitudine, însă pentru cazul *b*), cînd corpul lagărului se poate dilata liber, trebuie verificat dacă se mai menține contactul dintre cuzinet și corpul lagărului. Acest lucru se poate stabili calculînd pe u_{2b} și u_{2c}, considerînd cele două corpuri separat : dacă $u_{2b} \geqslant u_{2c}$, contactul se menține și se poate utiliza o relație globală pentru lagăr.

A. Pentru cazul *a*), cînd corpul lagărului nu se poate dilata spre exterior, aplicarea condițiilor la limită

$$u_{3c} = 0 \; ; \; u_{2b} = u_{2c} \; ; \; \sigma_{r_{2b}} = - \sigma_{r_{2c}} \; ; \; \sigma_{r_{1b}} = - p_m \tag{3}$$

ecuațiilor (1) și (2) conduce la următoarele relații:

$$\frac{1}{r_3}\cdot\frac{1+\mu_c}{1-\mu_c}\int_{r_2}^{r_3}\alpha_c\,tr\,\mathrm{d}r+C_1'r_3+\frac{C_2'}{r_3}=0 \tag{4}$$

$$\frac{1}{r_2}\cdot\frac{1+\mu_b}{1-\mu_b}\int_{r_1}^{r_2}\alpha_b\,tr\,\mathrm{d}r+C_1r_2+\frac{C_2}{r_2}=C_1'r_2+\frac{C_2'}{r_2} \tag{5}$$

$$\frac{E_b}{1+\mu_b}\left(-\frac{1+\mu_b}{1-\mu_b}\cdot\frac{1}{r_2^2}\int_{r_1}^{r_2}\alpha_b\,tr\,\mathrm{d}r+\frac{C_1}{1-2\mu_b}-\frac{C_2}{r_2^2}\right)= \tag{6}$$

$$=-\frac{E_c}{1+\mu_c}\left(\frac{C_1'}{1-2\mu_c}-\frac{C_2'}{r_2^2}\right)$$

$$\frac{E_b}{1+\mu_b}\left(\frac{C_1}{1-2\mu_b}-\frac{C_2}{r_1^2}\right)=-p_m. \tag{7}$$

Se consideră distribuția de temperaturi din interior spre exteriorul lagărului sub forma generală

$$t=\frac{t_i}{\ln\dfrac{r_{i+1}}{r_i}}\ln\frac{r_{i+1}}{r}, \tag{8}$$

ceea ce conduce la următoarele expresii pentru integralele din relațiile (4) — (7):

$$\left.\begin{aligned}\int_{r_1}^{r_2}\alpha_b\,tr\,\mathrm{d}r&=\frac{\alpha_b}{2}\left[(t_2-t_m)\,R_{12}+(t_1-t_2)\left(\frac{R_{12}}{2\ln\dfrac{r_2}{r_1}}-r_1^2\right)\right]\\ \int_{r_2}^{r_3}\alpha_c\,tr\,\mathrm{d}r&=\frac{\alpha_c}{2}\left[(t_3-t_m)\,R_{23}+(t_2-t_3)\left(\frac{R_{23}}{2\ln\dfrac{r_3}{r_2}}-r_2^2\right)\right]\end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

în care

$$R_{12}=r_2^2-r_1^2;\quad R_{23}=r_3^2-r_2^2, \tag{10}$$

iar temperatura t_2 pe suprafața 2 este dată de relația (fig. 1 și relația (8)):

$$t_2=t_3+\frac{t_1-t_3}{\ln\dfrac{r_3}{r_1}}\ln\frac{r_3}{r_2}. \tag{11}$$

Din relațiile (4)—(7) rezultă următoarele expresii pentru constantele de integrare C_1, C_2:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1-2\mu_b}{A_{12}A_{23}(1-2\mu_b) - AR_{12}R_{23}} \left\{ (R_{23}-A_{23})\, R\mu_c \int_{r_2}^{r_3} \alpha_c\, tr\, dr - \right. \\ &\left. - (AR_{23}+A_{23}) \left[R\mu_b \int_{r_1}^{r_2} \alpha_b\, tr\, dr + \frac{r_1^2 p_m (1+\mu_b)}{E_b} \right] \right\} \\ C_2 &= \frac{r_1^2 C_1}{1-2\mu_b} + \frac{r_1^2 p_m (1+\mu_b)}{E_b}, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

în care

$$A = \frac{E_b (1+\mu_c)}{E_c (1+\mu_b)}, \quad (13)$$

$$A_{12} = \frac{r_2^2 (1-2\mu_b) + r_1^2}{1-2\mu_b}; \qquad A_{23} = \frac{r_3^2 (1-2\mu_c) + r_2^2}{1-2\mu_c}, \quad (14)$$

$$R\mu_b = \frac{1+\mu_b}{1-\mu_b}; \qquad R\mu_c = \frac{1+\mu_c}{1-\mu_c}. \quad (15)$$

Aplicînd relația (1) suprafeței 1 și utilizînd relațiile (9) și (12), rezultă următoarea expresie pentru dilatarea radială a suprafeței interioare a cuzinetului:

$$\begin{aligned} u_{1b} = \frac{r_1 (1-\mu_b)}{A_{12}A_{23}(1-2\mu_b) - A R_{12} R_{23}} & \left\{ (R_{23}-A_{23})\, R\mu_c\, \alpha_c \left[(t_3 - t_m) R_{23} + \right. \right. \\ + (t_2 - t_3) \left(\frac{R_{23}}{2\ln \frac{r_3}{r_2}} - r_2^2 \right) & \left. \left. \right] - (A R_{23} + A_{23}) \left\{ R\mu_b\, \alpha_b \left[(t_2 - t_m) R_{12} + \right. \right. \right. \\ + (t_1 - t_2) \left(\frac{R_{12}}{2\ln \frac{r_2}{r_1}} - r_1^2 \right) & \left. \left. \left. \right] + \frac{2 r_1^2 p_m (1+\mu_b)}{E_b} \right\} \right\} + \frac{r_1 p_m (1+\mu_b)}{E_b}, \end{aligned} \quad (16)$$

în care A, A_{12}, A_{23}, $R\mu_b$, $R\mu_c$, R_{12} și R_{23} sînt date de expresiile (13), (14), (15) și (10).

B. Pentru cazul *b*), cînd corpul lagărului se poate dilata liber, pentru stabilirea deplasării suprafeței interioare u_{1b} a cuzinetului se folosește același procedeu.

Condiția $\sigma_{r_{3c}} = 0$ conduce la relația

$$- R\mu_c \frac{1}{r_3^2} \int_{r_2}^{r_3} \alpha_c\, tr\, dr + \frac{C_1'}{1-2\mu_c} - \frac{C_2'}{r_3^2} = 0, \quad (17)$$

care, împreună cu relațiile (5), (6) și (7), permite definirea constantelor C_1 și C_2:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \frac{1-2\mu_b}{B_{12}R_{23}-AB_{23}R_{12}}\left\{(B_{23}-R_{23})R\mu_c\int_{r_2}^{r_3}\alpha_c\,tr\,dr - \right.\\ &\left. -(AB_{23}+R_{23})\left[R\mu_b\int_{r_1}^{r_2}\alpha_b\,tr\,dr+\frac{r_1^2p_m(1+\mu_b)}{E_b}\right]\right\}\\ C_2 &= \frac{r_1^2C_1}{1-2\mu_b}+\frac{r_1^2p_m(1+\mu_b)}{E_b}, \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

în care

$$B_{12}=r_2^2(1-2\mu_b)+r_1^2;\quad B_{23}=r_2^2(1-2\mu_c)+r_3^2. \quad (19)$$

Scriind relația (1) pentru suprafața 1 și utilizînd relațiile (9), deducem pentru u_{1b} expresia

$$u_{1b}=\frac{r_1(1-\mu_b)}{B_{12}R_{23}-AB_{23}R_{12}}\left\{(B_{23}-R_{23})R\mu_c\alpha_c\left[(t_3-t_m)R_{23}+\right.\right.$$

$$+(t_2-t_3)\left(\frac{R_{23}}{2\ln\frac{r_3}{r_2}}-r_2^2\right)\Big]-(AB_{23}+R_{23})\Big\{R\mu_b\alpha_b\Big[(t_2-t_m)R_{12}+ \quad (20)$$

$$\left.\left.+(t_1-t_2)\left(\frac{R_{12}}{2\ln\frac{r_2}{r_1}}-r_1^2\right)\right]+\frac{2r_1^2p_m(1+\mu_b)}{E_b}\Big\}\right\}+\frac{r_1p_m(1+\mu_b)}{E_b},$$

în care A, $R\mu_b$, $R\mu_c$, R_{12}, R_{23}, sînt dați de expresiile (13), (15) și (10) iar B_{12}, B_{23} de expresiile (19).

După cum s-a arătat, pentru acest caz este necesară verificarea păstrării contactului dintre cuzinet și corpul lagărului, deoarece — ultimul putîndu-se dilata liber — pentru anumite dimensiuni ale lagărului, materiale utilizate și distribuție de temperaturi acest contact poate dispărea.

Scriind relația (1) pentru suprafața exterioară a cuzinetului și interioară a corpului lagărului și utilizînd relațiile (9), se obțin următoarele expresii pentru deplasările respective:

$$\left.\begin{aligned} u_{2b} &= r_2(1+\mu_b)\alpha_b\left[(t_2-t_m)+(t_1-t_2)\left(\frac{1}{2\ln\frac{r_2}{r_1}}-\frac{r_1^2}{R_{12}}\right)\right]\\ u_{2c} &= r_2(1+\mu_c)\alpha_c\left[(t_3-t_m)+(t_2-t_3)\left(\frac{1}{2\ln\frac{r_3}{r_2}}-\frac{r_2^2}{R_{23}}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Dacă, aplicînd aceste relații celor două corpuri considerate separat, rezultă $u_{2b} \geqslant u_{2c}$, înseamnă că contactul dintre cuzinet și corpul lagărului este asigurat și relația (20) poate fi utilizată. În caz contrar se va stabili, fără nici o dificultate, dilatarea cuzinetului independent de corpul lagărului [2].

III. CONSIDERAȚII FINALE

Relațiile (16) sau (20) dau valoarea deplasării suprafeței interioare a cuzinetului, u_{1b}, în funcție de dimensiunile părților componente ale lagărului, materialele utilizate, regimul termic și încărcare, făcîndu-se distincție între cazul cînd corpul lagărului se poate dilata liber sau nu.

Valoarea lui u_{1b} poate avea, după caracteristicile constructive și funcționale ale lagărului, semn pozitiv, ceea ce indică o deplasare spre exterior, deci o mărire a jocului, sau semn negativ, ceea ce indică o deplasare spre interior, deci o micșorare a jocului.

În cazul A, cînd corpul lagărului nu se poate dilata liber, rezultatul va fi întotdeauna o micșorare a jocului; o modalitate de reducere a acestui efect o constituie, după cum se poate constata din analiza relației (16), răcirea corpului lagărului. În cazul B, cînd lagărul se poate dilata liber în exterior, relația (20) arată că jocul se poate micșora, păstra sau chiar mări, funcție de dimensiunile și de materialele lagărului, precum și de regimul termic stabilit; o răcire a corpului lagărului în acest caz apare ca dezavantajoasă din punctul de vedere al dilatării cuzinetului, micșorîndu-se jocul.

Pentru stabilirea variației totale a jocului în lagăr, trebuie luată în considerație și dilatarea arborelui, u_a, [2]:

$$u_a = r_1 \alpha_a (t_1 - t_m). \tag{22}$$

Sensul deplasării fiind întotdeauna spre exterior, semnul lui u_a va fi întotdeauna pozitiv. În consecință, variația jocului Δ_c în timpul funcționării față de valoarea inițială de la montaj, c, va fi

$$\Delta_c = u_{1b} - u_a, \tag{23}$$

iar variația jocului relativ are expresia

$$\Delta\psi = \frac{u_{1b} - u_a}{r_1}. \tag{24}$$

Jocul radial real în timpul funcționării lagărului va fi $c + \Delta_c$, trebuind astfel să se aplice la montaj o corecție (Δ_c), pentru ca în timpul funcționării să se obțină jocul calculat c; jocul la montaj va avea deci

valoarea $c - \Delta_c^{\cdot}$. Dacă jocul are tendința să se micșoreze (Δ_c negativ), jocul la montaj va fi mai mare, și invers, Δ_c pozitiv, adică o mărire a jocului în timpul funcționării, va conduce la un joc inițial mai mic.

Relațiile de calcul presupun cunoscute, pe lîngă dimensiunile și materialele părților componente ale lagărului, și temperatura de lucru a lagărului t_1, precum și temperatura exteriorului corpului lagărului t_3. Prima este cunoscută de la proiectarea lagărului, iar a doua se poate estima prin cunoașterea condițiilor de disipare a căldurii din lagăr și a posibilităților de răcire în exterior a acestuia sau se poate aprecia pe baza măsurătorilor făcute pe construcții similare existente.

IV. EXEMPLU DE CALCUL

S-a considerat un lagăr experimental existent cu următoarele caracteristici :
$r_1 = 20$ mm ; $r_2 = 25$ mm ; $r_3 = 40$ mm ; $t_3 = 80°C$; $t_m = 20°C$; fusul și corpul lagărului au fost confecționate din oțel, iar cuzinetul din bronz. Corpul cuzinetului se putea dilata liber. Din relațiile (13), (19), (15) și (10) s-au dedus coeficienții A, B_{12}, B_{23}, $R\mu_b$, $R\mu_c^{\cdot}$, R_{12}, R_{23}, iar relația (11) a dat : $t_2 = 94°C$.

Relațiile (21) permit verificarea necesară în acest caz, obținîndu-se $u_{2b} = 4{,}5 \times 10^2$ mm și $u_{2c}^{\cdot} = 2{,}43 \times 10^{-2}$ mm, deci $u_{2b} > u_{2c}$.

Cu ajutorul relației (20) s-a calculat $u_{1b} = 2{,}23 \times 10^{-3}$ mm ; din relația (22) a rezultat $u_a = -1{,}2 \times 10^{-2}$ mm, deci (relația (23)) $\Delta_c = 2{,}23 \times 10^{-3} - 1{,}2 \times 10^{-2} = -1 \times 10^{-2}$ mm și $\Delta\psi = -0{,}5‰$.

Se constată deci în acest caz că dilatarea suprafeței de lucru a cuzinetului este neglijabilă, jocul dat la montaj, $c = 5 \cdot 10^{-2}$ mm (deci $\psi = 2{,}5‰$), fiind modificat doar de dilatarea arborelui, și, pentru a se păstra jocul inițial, acesta trebuie corectat (mărit) cu 1×10^{-2} mm.

Prin răcirea corpului lagărului s-a obținut $t_3 = 40°C$, deci $t_2 = 81°C$, t_1 rămînînd 100°C (relația (11)) ; relațiile (21) au dat : $u_{2b} = 4{,}1 \times 10^{-2}$ mm și $u_{2c} = 1{,}32 \times 10^{-2}$ mm, deci $u_{2b} > u_{2c}$, și se poate aplica relația (20), care dă $u_{1b} = -1{,}1 \times 10^{-2}$ mm, $\Delta_c = -1{,}1 \times 10^{-2} - 1{,}2 \times 10^{-2} = -2{,}3 \times 10^{-2}$ mm și $\Delta\psi = -1{,}15‰$. În acest caz, corpul lagărului, fiind răcit, s-a dilatat mai puțin, obligînd cuzinetul să se dilate spre interior, cu o mișcare sensibilă a jocului. Pentru a se păstra valoarea $c = 5 \cdot 10^{-2}$ mm, jocul la montaj trebuie să fie mărit cu $2{,}3 \times 10^{-2}$ mm.

Datele calculate au fost în bun acord cu măsurătorile efectuate pe acest lagăr experimental.

Presupunînd acum corpul lagărului montat într-o carcasă rigidă, fără posibilități de dilatare liberă, din relația (16) rezultă pentru A_{12} și

A_{23} deduși cu ajutorul relațiilor (14) și $t_1 = 100°C$, $t_3 = 80°C$ și $t_2 = 94°C$: $u_{1b} = -3{,}35 \times 10^{-2}$ mm și $\Delta_c = -4{,}47 \times 10^{-2}$ mm, deci $\Delta\psi = -2{,}23‰$. Pentru $t_1 = 100°C$, $t_3 = 40°C$ și $t_2 = 84°C$ rezultă $\Delta_c = -3 \times 10^{-2}$ mm și $\alpha\psi = -1{,}5‰$, ceea ce arată utilitatea răcirii corpului lagărului cînd acesta nu se poate dilata liber.

Primită la redacție la 14 iunie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. N. Tipei, V. N. Constantinescu, Al. Nica, O. Biță, *Lagăre de alunecare*, București, Edit. Acad. R.P.R., 1961, p. 88–89.
2. G. Vogelpohl, *Betriebsichere Gleitlager*. Göttingen, Springer-Verlag 1958, p. 182–192.
3. S. Timoshenko, *Strength of Materials*. Part II, New York, D. Van Nostrand Company, 1956, p. 228–231.

TEORIA GENERALĂ A APROXIMAȚIILOR SUCCESIVE ÎN STUDIUL MECANISMELOR ȘI MAȘINILOR PRIN NOUA METODĂ MATRICIALĂ-TENSORIALĂ, ELABORATĂ ÎN VEDEREA FOLOSIRII MAȘINILOR ELECTRONICE DE CALCUL. I[1])

de D. MANGERON, R. CHALEAT și C. DRĂGAN
Institutul politehnic Iași
Faculté des Sciences et l'Institut polytechnique
de l'Université de Bésançon, France.
Institutul politehnic Iași

518.5 : 621.01

Luînd ca punct de plecare lucrările proprii relative la o nouă metodă matricială-tensorială de studiu a mecanismelor și mașinilor, în lucrare se expune, în vederea programării la mașini electronice de calcul, teoria generală a aproximațiilor succesive privitoare la metoda matricială-tensorială elaborată.

§ 1. INTRODUCERE

1. Apariția cu totul recentă a unor teze de doctorat elaborate peste hotare [2]) și bazate exclusiv pe lucrările primului dintre autori, redactate în parte cu unii dintre colaboratorii săi de la Institutul politehnic Iași și consacrate unor noi clase de ecuații ale mecanicii analitice [1] — [2], teoriei generale a accelerațiilor reduse, metodei grafo-analitice de studiu al mecanismelor cu ajutorul accelerațiilor reduse de ordin și speță oarecare [3] — [4], metodei matriciale-tensoriale de studiu al meca-

[1]) Publicată în „Rev. roum. sci. tech.-Mécanique Appliquée", **10**, 5 (1965) (în lb. germană).

[2]) Prof. dr. Souleymane Niang, Faculté des Sciences de l'Université de Dakar, Rép. Sénégal; prof. dr. John J. Uicker jr., Northwestern University, S.U.A.; prof. dr. Milton Chace, Purdue University, Lafayette, Indiana, S.U.A.: prof. dr. V. V. Topentcharov, Inst. mec. electrotehn., Sofia, R.P. Bulgaria; prof. dr. Ia. S. Zilberman, Institutul de căi ferate, Rostov pe Don, U.R.S.S.; prof. dr. J. S. Beggs, California University, Los Angeles, S.U.A.; prof. dr. B. I. Tcheshankov, Inst. mec. electrotehn., Sofia, R.P. Bulgaria; Chang Tsy-siang., Aviation Institute Pekin R.P. China, ș.a.

nismelor şi maşinilor [5]—[7], metodei tangenţiale-duale [8]—[9], metodei ecuaţiilor integrale, interesînd îndeosebi mecanica tehnică a vibraţiilor [10]—[11] ş.a., precum şi atenţia deosebită acordată acestor metode, de importanţă vădită în proiectarea maşinilor moderne rapide şi în automatizarea proceselor de producţie, într-un volum publicat de curînd de istorie a mecanicii [12], a îndemnat pe autori să adîncească şi să lărgească şirul de expuneri anterioare, prezentate îndeosebi în paginile revistelor de mecanică ale Academiei Republicii Socialiste România.

Luînd ca punct de plecare, în cadrul unei preocupări generale promovate de primul dintre autori şi cristalizate în lucrările sale consacrate elaborării metodelor matematice constructive aplicabile nemijlocit la programări adecvate pentru folosirea maşinilor electronice de calcul [3]), lucrările proprii relative la o nouă metodă matricială-tensorială de studiu a mecanismelor şi maşinilor [4]), se expune în ceea ce urmează :

a) o variantă introductivă a problemei, alta decît cea expusă în lucrările [5], [23], în care se insistă asupra alegerii celor mai adecvate sisteme de coordonate pentru cazurile cuplelor sferice sau sferice cu deget, studiate de autori din punct de vedere matricial pentru prima oară în literatură matematică şi mecanică universală [5]), şi

b) teoria generală a aproximaţiilor succesive privitoare la metoda matricială-tensorială elaborată, urmînd ca aproximaţiile de ordin superior, precum şi o serie de aplicaţii concrete, diferite de aplicaţiile relative la mecanisme patrulatere spaţiale, studiate cu metoda elaborată în [33], sau traducerea rezultatelor obţinute în prezenta lucrare în limbile matematice artificiale uzuale (FORTRAN şi ALGOL) în vederea programării în consecinţă la MEC, să facă parte dintr-o serie de lucrări aflate în curs de elaborare.

---

[3]) Aici se citează, de exemplu, seria de lucrări de calcul numeric al soluţiilor variatelor sisteme de ecuaţii funcţionale, cuprinzînd cele mai importante fenomene ale fizicii matematice, reflectate prin prezenţa în atare ecuaţii a operatorilor poliarmonici (M. Picone), polivibranţi (D. Mangeron), policalorici (M. Nicolescu), cu termeni de remanenţă şi de control [13]—[16] ; şirul de studii elaborat în colaborare cu cel de-al doilea autor [17]—[18], consacrat determinării aproximaţiilor de ordin superior în studiul perturbaţiilor oscilatorilor neliniari [19]—[20] ; lucrările din cadrul calculului simbolic aplicat la integrarea ecuaţiilor fizicii matematice cu ajutorul transformatei lui Laplace-Picone cu intervalul de integraţie finit [21]—[23] ; lucrările de programare dinamică referitoare la probleme de contur de tip neeliptic, introduse de primul dintre autori pentru prima oară în literatură ştiinţifică [23]—[24] ; lucrările de studiu al spectrelor prin metode variaţionale [25]—[26] ; teoria generală a problemelor de contur de diferite tipuri ş.a.

[4]) Metoda matricială-tensorială elaborată a fost lărgită recent de primul dintre autori, prin traducerea în limbajul matricial a seriilor armonice complexe (şi, bineînţeles, reale) [27]. Această traducere apare deosebit de utilă dacă se ţine seama de faptul că în ultima vreme s-a publicat o vastă serie de lucrări asupra mecanismelor, în care se foloseşte drept aparat de investigaţie matematică analiza armonică [28], [29].

Utilizarea sistematică a seriilor armonice complexe în problematica referitoare la studiul grupelor assurice l-a condus pe R. C. Bogdan [30] la elaborarea în teza sa de disertaţie, paralel cu o nouă metodă mecanoelectronică, a metodei seriilor armonice complexe, care s-a arătat a fi deosebit de fructuoasă în analiza mecanismelor plane şi promite să fie eficace şi în sinteza lor.

[5]) Acest fapt a fost subliniat îndeosebi de Chang Tsy-siang [31].

§ 2. PROBLEMATICA METODEI MATRICIALE-TENSORIALE DE STUDIU AL MECANISMELOR

2. Problema transformării punctuale de coordonate se simplifică și se ordonează, similar cu ceea ce se întîmplă în cazul numeroaselor probleme de algebră liniară, transcriindu-se formulele de transformare de coordonate cu ajutorul matricelor și folosind simultan coordonate omogene. În acest caz, coordonatele unui punct P se vor determina prin intermediul a patru mărimi : x_4, $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$. Luînd $x_4 = 1$, se obține o legătură între coordonatele carteziene obișnuite și coordonatele omogene, care se transcrie, în notațiile clasice, după cum urmează :

$$\left.\begin{aligned} x_{i1} &= x^1_{j,i} + \alpha_{11} x_{j1} + \alpha_{12} x_{j2} + \alpha_{13} x_{j3} \\ x_{i2} &= x^2_{j,i} + \alpha_{21} x_{j1} + \alpha_{22} x_{j2} + \alpha_{23} x_{j3} \\ x_{i3} &= x^3_{j,i} + \alpha_{31} x_{j1} + \alpha_{32} x_{j2} + \alpha_{33} x_{j3} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{j1} &= x^1_{i,j} + \alpha_{11} x_{i1} + \alpha_{21} x_{i2} + \alpha_{31} x_{i3} \\ x_{j2} &= x^2_{i,j} + \alpha_{12} x_{i1} + \alpha_{22} x_{i2} + \alpha_{32} x_{i3} \\ x_{j3} &= x^3_{i,j} + \alpha_{13} x_{i1} + \alpha_{23} x_{i2} + \alpha_{33} x_{i3} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

În (1), (2) s-a presupus că reperele de referință $O_i x_{i1} x_{i2} x_{i3}$ și $O_j x_{j1} x_{j2} x_{j3}$ sînt legate invariabil de două elemente J_i și J_j, aparținînd unui lanț cinematic.

Formulele de transformare de coordonate pot fi transcrise sub forma matricială prescurtată

$$\left\| \begin{matrix} 1 \\ \widetilde{r}_i \end{matrix} \right\| = T^{(i,j)} \left\| \begin{matrix} 1 \\ \widetilde{r}_j \end{matrix} \right\| \text{ sau } \left\| \begin{matrix} 1 \\ \widetilde{r}_j \end{matrix} \right\| = T^{(j,i)} \left\| \begin{matrix} 1 \\ \widetilde{r}_i \end{matrix} \right\|, \tag{3}$$

în care prin $\widetilde{r}_i$ și $\widetilde{r}_j$ s-au notat matricele unicolonare de poziție ale unuia și aceluiași punct P în sistemele de coordonate carteziene considerate, $T^{(i,j)}$ și $T^{(j,i)}$ fiind matricele de transformare ale sistemului J_i în sistemul J_j și reciproc. Aceste matrice de transformare se exprimă, la rîndul lor, după cum urmează :

$$T^{(i,j)} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \widetilde{R}_i^{O_j} & M_{ij} \end{matrix} \right\| \text{ și } T^{(j,i)} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \widetilde{R}_j^{O_i} & M_{ji} \end{matrix} \right\|, \tag{4}$$

în care prin $\widetilde{R}_i^{O_j}$ s-a notat matricea unicolonară de poziție a originii O_j în sistemul J_i, $\widetilde{R}_j^{O_i}$ este matricea unicolonară de poziție a originii O_i în

sistemul J_j, iar M_{ij} şi M_{ji} matricele cosinusurilor de direcţie $\alpha_{K,l}^{(i,j)}$, $K, l = 1, 2, 3$ între axele sistemelor J_i şi J_j :

$$M_{ij} = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11}^{(i,j)} & \alpha_{12}^{(i,j)} & \alpha_{13}^{(i,j)} \\ \alpha_{21}^{(i,j)} & \alpha_{22}^{(i,j)} & \alpha_{23}^{(i,j)} \\ \alpha_{31}^{(i,j)} & \alpha_{32}^{(i,j)} & \alpha_{33}^{(i,j)} \end{matrix} \right\|, \quad M_{ji} = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11}^{(i,j)} & \alpha_{21}^{(i,j)} & \alpha_{31}^{(i,j)} \\ \alpha_{12}^{(i,j)} & \alpha_{22}^{(i,j)} & \alpha_{32}^{(i,j)} \\ \alpha_{13}^{(i,j)} & \alpha_{23}^{(i,j)} & \alpha_{33}^{(i,j)} \end{matrix} \right\| . \tag{5}$$

(Determinantul de ordinul trei al acestor matrice este diferit de zero.)

În teoria mecanismelor cu cuple cinematice inferioare, studiul poziţiilor relative ale sistemelor J_i şi J_j se face judicios, punîndu-se în

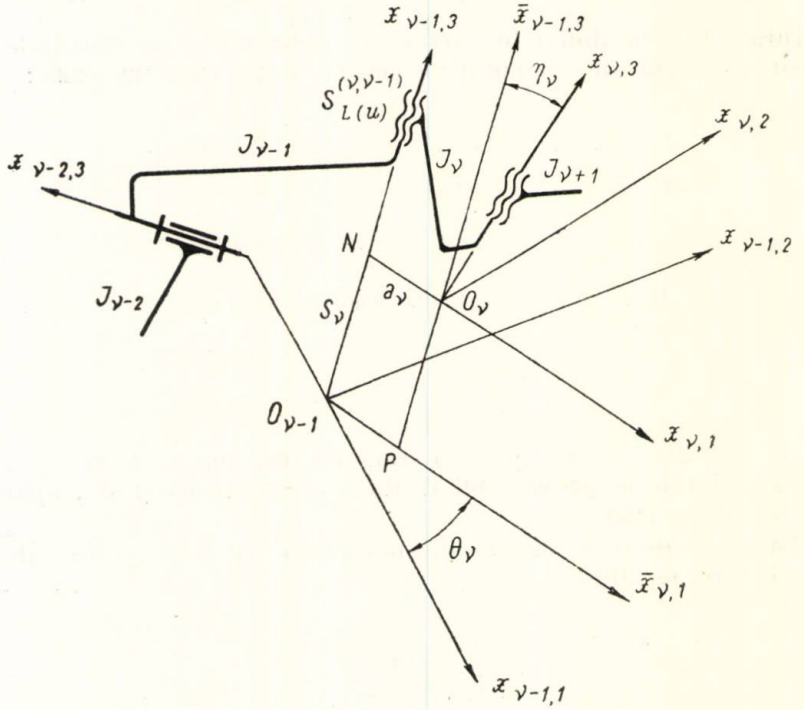


Fig. 1

evidenţă doi parametri liniari s_{ij} şi a_{ij}, legaţi de poziţia noii origini O_j, şi cele trei unghiuri ale lui Euler ψ_{ij}, θ_{ij} şi φ_{ij} (fig. 1). Prin s_{ij} s-a notat distanţa dintre cele două origini, măsurată de-a lungul axei $O_i x_{i3}$; prin a_{ij} distanţa dintre cele două origini O_i şi O_j, măsurată de-a lungul axei O_j, x_{j1}, presupusă perpendiculară pe axa $O_i x_{i3}$; ψ_{ij} (unghiul de precesie) este unghiul de rotaţie al sistemului J_i în jurul axei $O_i x_{i3}$, socotit de la axa $O_i x_{i1}$ la axa $O_j N$; φ_{ij} (unghiul de rotaţie directă) este unghiul de rotaţie al sistemului J_i în jurul axei $O_j x_{j3}$, socotit de la axa $O_j x_{j1}$ către axa $O_j N$, iar unghiul θ_{ij} (unghiul de nutaţie) este unghiul de rotaţie al aceluiaşi sistem J_j în jurul axei $O_j N$, socotit de la axa $O_i x_{i3}$ spre axa $O_j x_{j3}$ (toate

mărimile pozitive ale unghiurilor considerate se măsoară în sens invers acelor de ceasornic). În corespondență cu cele de mai sus, elementele matricelor (5) sînt date prin

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_{11}^{(i,j)} &= \cos\psi_{ij}\cos\varphi_{ij} - \sin\psi_{ij}\cos\theta_{ij}\sin\varphi_{ij}\\
\alpha_{12}^{(i,j)} &= -\cos\psi_{ij}\sin\varphi_{ij} - \sin\psi_{ij}\cos\theta_{ij}\cos\varphi_{ij}\\
\alpha_{13}^{(i,j)} &= \sin\psi_{ij}\sin\theta_{ij}\\
\alpha_{21}^{(i,j)} &= \sin\psi_{ij}\cos\varphi_{ij} + \cos\psi_{ij}\cos\theta_{ij}\sin\varphi_{ij}\\
\alpha_{22}^{(i,j)} &= -\sin\psi_{ij}\sin\varphi_{ij} + \cos\psi_{ij}\cos\theta_{ij}\cos\varphi_{ij}\\
\alpha_{23}^{(i,j)} &= -\cos\psi_{ij}\sin\theta_{ij}\\
\alpha_{31}^{(i,j)} &= \sin\theta_{ij}\sin\varphi_{ij}\\
\alpha_{32}^{(i,j)} &= \sin\theta_{ij}\cos\varphi_{ij}\\
\alpha_{33}^{(i,j)} &= \cos\theta_{ij},
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

iar matricele unicolonare $\widetilde{R}_i^{O_i}$ și $\widetilde{R}_j^{O_i}$ prin

$$\widetilde{R}_i^{O_j} = \begin{Vmatrix} x_{i,j}^1 \\ x_{i,j}^2 \\ x_{i,j}^3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{ij} & \alpha_{11}^{(i,j)} \\ a_{ij} & \alpha_{21}^{(i,j)} \\ s_{ij} + a_{ij} & \alpha_{31}^{(i,j)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{ij}(\cos\psi_{ij}\cos\varphi_{ij} - \sin\psi_{ij}\cos\theta_{ij}\sin\varphi_{ij}) \\ a_{ij}(\sin\psi_{ij}\cos\varphi_{ij} + \cos\psi_{ij}\cos\theta_{ij}\sin\varphi_{ij}) \\ s_{ij} + a_{ij}\sin\theta_{ij}\sin\varphi_{ij} \end{Vmatrix}, \tag{7}$$

$$\widetilde{R}_j^{O_i} = \begin{Vmatrix} x_{j,i}^1 \\ x_{j,i}^2 \\ x_{j,i}^3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -a_{ij} + s_{ij} & \alpha_{31}^{(i,j)} \\ -s_{ij} & \alpha_{32}^{(i,j)} \\ -s_{ij} & \alpha_{33}^{(i,j)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -a_{ij} - s_{ij}\sin\theta_{ij}\sin\varphi_{ij} \\ -s_{ij}\sin\theta_{ij}\cos\varphi_{ij} \\ -s_{ij}\cos\theta_{ij} \end{Vmatrix}.$$

În cazul cînd $\varphi_{ij} = 0$, matricele de transformare de ordinul 4 se transcriu explicit astfel

$$T^{(i,j)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{ij}\cos\psi_{ii} & \cos\psi_{ij} & -\sin\psi_{ij}\cos\theta_{ij} & \sin\psi_{ij}\sin\theta_{ij} \\ a_{ij}\sin\psi_{ij} & \sin\psi_{ij} & \cos\psi_{ij}\cos\theta_{ij} & -\cos\psi_{ij}\sin\theta_{ij} \\ s_{ij} & 0 & \sin\theta_{ij} & \cos\theta_{ij} \end{Vmatrix} \tag{8}$$

$$T^{(j,i)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{ij} & \cos\psi_{ij} & \sin\psi_{ij} & 0 \\ -s_{ij}\sin\theta_{ij} & -\sin\psi_{ij}\cos\theta_{ij} & \cos\psi_{ij}\cos\theta_{ij}\cos\theta_{ij} & \\ -s_{ij}\cos\theta_{ij} & \sin\psi_{ij}\sin\theta_{ij} & -\cos\psi_{ij}\sin\theta_{ij}\sin\theta_{ij} & \end{Vmatrix},$$

iar atunci cînd $\varphi_{ij} = 0$, $\theta_{ij} = 0$ şi $s_i = 0$ atare matrice devin

$$T^{(i,j)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{ij}\cos\psi_{ij} & \cos\psi_{ij} & -\sin\psi_{ij} & 0 \\ a_{ij}\sin\psi_{ij} & \sin\psi_{ij} & \cos\psi_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(j,i)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{ij} & \cos\psi_{ij} & \sin\psi_{ij} & 0 \\ 0 & -\sin\psi_{ij} & \cos\psi_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

3. În corespondenţă cu luarea în consideraţie a două elemente vecine $J_{\nu-1}$ şi J_ν, care fac parte dintr-un lanţ cinematic, matricea tensorului de poziţie a elementului J_ν în mişcarea sa faţă de elementul $J_{\nu-1}$ poate fi transcrisă sub forma

$$T^{(\nu,\,\nu-1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^1_{\nu,\,\nu-1} & \alpha^{(\nu,\,\nu-1)}_{11} & \alpha^{(\nu,\,\nu-1)}_{21} & \alpha^{(\nu,\,\nu-1)}_{31} \\ x^2_{\nu,\,\nu-1} & \alpha^{(\nu,\,\nu-1)}_{12} & \alpha^{(\nu,\,\nu-1)}_{22} & \alpha^{(\nu,\,\nu-1)}_{32} \\ x^3_{\nu,\,\nu-1} & \alpha^{(\nu,\,\nu-1)}_{13} & \alpha^{(\nu,\,\nu-1)}_{23} & \alpha^{(\nu,\,\nu-1)}_{33} \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

Schema oricărui mecanism poate fi considerată ca fiind constituită dintr-un lanţ cinematic închis, care posedă unul sau mai multe conture deformabile. Analiza poziţiilor elementelor se face în fiecare contur închis în parte, asociind în prealabil fiecărui element din contur cîte un sistem de coordonate (fig. 2). Aplicînd ecuaţiile (3) relative la transformările de coordonate ale sistemelor legate de elementele succesive, se parvine întotdeauna la ecuaţia de închidere a conturului

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ \tilde{r}_0{}^P \end{Vmatrix} = T^{(0,1)}\,T^{(1,2)}\ldots T^{(\lambda-1,\,\lambda)} \begin{Vmatrix} 1 \\ \tilde{r}_\lambda{}^P \end{Vmatrix} = T^{(0,m)}\,T^{(m,\,m-1)}\ldots T^{(\lambda+1,\,\lambda)} \begin{Vmatrix} 1 \\ \tilde{r}_\lambda{}^P \end{Vmatrix},$$

sau

$$\begin{Vmatrix} 1 \\ \tilde{r}_0{}^P \end{Vmatrix} = T^{(0,1)}\,T^{(1,2)}\ldots T^{(\lambda-1,\,\lambda)}\,T^{(\lambda,\,\lambda+1)}\ldots T^{(m-1,\,m)}\,T^{(m,\,0)} \begin{Vmatrix} 1 \\ \tilde{r}_0{}^P \end{Vmatrix}.$$

În consecinţă, ecuaţia matricială de închidere a unui contur ia forma

$$T^{(0,1)}\,T^{(1,2)}\ldots T^{(\lambda-1,\,\lambda)} = T^{(0,\lambda)} = T^{(0,\,m)}\,T^{(m,\,m-1)}\ldots T^{(\lambda+1,\,m)}, \tag{11}$$

sau

$$T^{(0,1)}\,T^{(1,2)}\,\ldots\,T^{(\lambda-1,\lambda)}\,T^{(\lambda,\lambda+1)}\,\ldots\,T^{(m-1,m)}\,T^{(m,0)} \equiv E, \qquad (12)$$

în care prin E s-a notat matricea pătrată unitate de ordinul al patrulea.

Ecuația matricială (11) sau (12) de închidere a unui contur conduce la rîndul său la 12 ecuații trigonometrice de legătură între toate coordo-

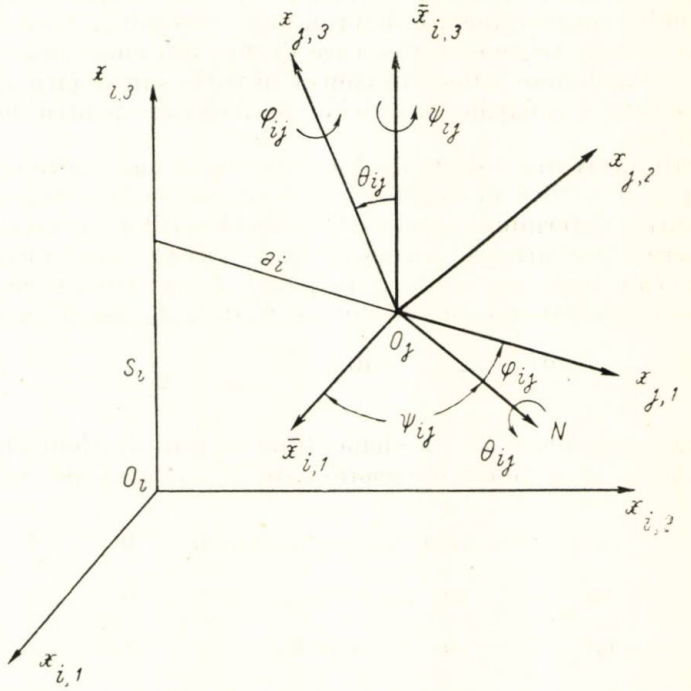


Fig. 2

natele generalizate. Trei dintre aceste ecuații, provenind din componentele primei coloane ale ecuației matriciale, caracterizează cele trei deplasări de translație de-a lungul axelor sistemului $O_0x_{01}x_{02}x_{03}$, iar celelalte nouă ecuații exprimă mișcările de rotație independente, în număr de trei. Prin urmare, ecuația matricială de închidere permite să se obțină cel mult șase ecuații independente.

Observații. Ținînd seama de diferite considerații geometrice, se pot obține uneori diferite relații particularizate utile. De exemplu, în cazul cînd se păstrează o distanță constantă între două puncte mobile, se obține nemijlocit o ecuație de legătură între coordonatele generalizate ale elementelor conducător și condus. În cazul cînd din conturul închis deformabil considerat face parte o cuplă sferică, este util să se formeze ecuații între un număr redus de parametri. Atare ecuații se obțin prin egalarea coordonatelor centrului cuplei sferice, exprimate prin parametrii din partea din dreaptă a conturului, cu aceleași coordonate exprimate prin parametrii din partea stîngă a aceluiași contur.

Aşadar, studiul mecanismelor cu un singur contur deformabil conduce întotdeauna la un număr suficient de ecuaţii trigonometrice, din care se pot obţine nemijlocit sau aplicînd — aşa cum se va face ulterior — metoda aproximaţiilor succesive, toate coordonatele generalizate rămase necunoscute.

În cazul cînd se studiază mecanisme complexe, constituite din două sau mai multe conture închise deformabile, se rezolvă, dacă este posibil, sisteme de ecuaţii trigonometrice care decurg din considerarea ecuaţiilor matriciale de închidere a fiecărui contur în parte sau se face apel la rezolvarea simultană a ecuaţiilor matriciale de închidere pentru două sau mai multe conture.

4. Prin derivarea o dată, de două ori sau de mai multe ori în raport cu timpul a ecuaţiilor de legătură folosite, se obţin sisteme de ecuaţii liniare pentru determinarea vitezelor, acceleraţiilor şi acceleraţiilor de ordin superior. Ca urmare a acestui fapt, viteza, acceleraţia şi acceleraţiile de ordin oarecare m ale unui punct P aparţinînd elementului J_j se determină în sistemul de coordonate $O_0 x_{01} x_{02} x_{03}$ după cum urmează :

$$\tilde{r}_0^P = \frac{\mathrm{d}\tilde{r}_0^P}{\mathrm{d}t}, \quad \tilde{r}_0^{(m)P} = \frac{\mathrm{d}r_0^{(m-1)P}}{\mathrm{d}t} \quad (m = 2, 3, \ldots). \tag{13}$$

Viteza unghiulară $\tilde{\omega}_i^{(ij)}$ a elementului J_j faţă de elementul J_i poate fi determinată în sistemul de coordonate $O_i x_{i1} x_{i2} x_{i3}$ pe baza formulei [34], [35]

$$\tilde{\omega}_i^{(ij)} = \begin{Vmatrix} \omega_{x_{i1}}^{(i,j)} \\ \omega_{x_{i2}}^{(ij)} \\ \omega_{x_{i3}}^{(ij)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\psi_{ij} \sin\psi_{jj} \sin\theta_{ij} & 0 \\ \sin\psi_{ij} - \cos\psi_{ij} \sin\theta_{ij} & 0 \\ 0 \qquad \cos\theta_{ij} & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \dot{\theta}_{ij} \\ \dot{\varphi}_{ij} \\ \dot{\psi}_{ij} \end{Vmatrix}, \tag{14}$$

sau a formulei corespunzătoare relaţiei (26) din lucrarea [36] a autorilor.

Viteza unghiulară absolută $\tilde{\omega}_0^{(0j)}$ a elementului J_j (elementul J_0 s-a luat drept batiu) se calculează pe baza formulei [37]

$$\tilde{\omega}_0^{(0j)} = \tilde{\omega}_0^{(01)} + M_{01}\tilde{\omega}_1^{(12)} + M_{02}\tilde{\omega}_2^{(23)} + \ldots + M_{0i}\,\omega_i^{(ij)}, \tag{15}$$

sau a formulei (12) date în lucrarea autorilor [34].

Renunţăm să reproducem aici expresiile acceleraţiilor unghiulare $\tilde{\varepsilon}_i^{(ij)}$ şi $\tilde{\varepsilon}_0^{(0j)}$ sau ale acceleraţiilor de ordin superior $\tilde{\varepsilon}_i^{(m)(ij)}$ şi $\tilde{\varepsilon}_0^{(m)(0j)}$, $m = 1, 2, \ldots$

În vederea folosirii cu succes a matricelor de ordinul al patrulea, în analiza mecanismelor cu cuple cinematice inferioare se recomandă următoarele alegeri de sisteme de coordonate carteziene dreptunghiulare.

De fiecare element al conturului se leagă cîte un singur sistem drept de coordonate, marcîndu-se, de regulă, în schematizarea mecanismelor spaţiale, din cele trei axe triortogonale Ox_1, x_2, x_3, doar axele x_1 şi x_3, iar în cazul mecanismelor plane doar axa x_1.

În vederea orientării sistemelor de coordonate se alege în primul rînd în fiecare element axa x_3, îndreptîndu-se apoi axa x_1 de-a lungul celei mai scurte distanţe dintre axele x_3 vecine.

În unele cazuri, axa x_1 aleasă trebuie să fie perpendiculară numai pe o singură axă x_3.

Pentru cuplele de rotație, de translație, cilindrice și elicoidale, axa x_3 se va alege de-a lungul axei cuplei considerate.

Pentru cupla sferică cu deget, axa x_3 coincide cu axa degetului sau este uneori perpendiculară pe planul median de secțiune al cuplei.

Pentru cupla sferică, axa x_3 este dirijată în așa fel ca să rămînă paralelă cu una din axele x_3 vecine sau să coincidă cu linia centrelor cuplei

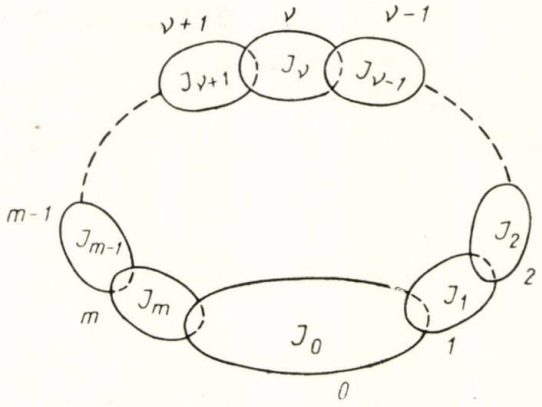


Fig. 3

sferice considerate și cuplei sferice adiacente. În cazul cuplei sferice, originea sistemului de coordonate se alege întotdeauna în centrul cuplei.

Exemple. Figura 3 prezintă o parte dintr-un contur spațial închis, avînd o cuplă cilindrică una sferică și una sferică cu deget. Poziția relativă a elementelor J_0, J_1 și J_2 se exprimă prin dispoziția sistemelor de coordonate $O_0x_{01}(x_{02})x_{03}$, $O_1x_{11}(x_{12})x_{13}$ și $O_2x_{21}(x_{22})x_{23}$, legate respectiv de aceste elemente. Se presupune că sistemul $O_0x_{01}(x_{02})x_{03}$, în care axa O_0x_{03} este orientată de-a lungul axei cuplei cilindrice, este deja orientat. Cererea de a se alege celelalte două sisteme de coordonate se rezolvă după cum urmează. Originea O_1 a sistemului de coordonate $O_1x_{11}(x_{12})x_{13}$ invariabil legat de elementul J_1, se situează în centrul cuplei sferice. Axa O_1x_{13} este paralelă la axa O_0x_{03}, iar axa O_1x_{11} este îndreptată de-a lungul celei mai scurte distanțe dintre axele O_3x_{13} și O_1x_{13}. Sistemul de coordonate $O_2x_{21}(x_{22})x_{23}$ se alege în așa fel, încît axa O_2x_{23} a sistemului să fie îndreptată de-a lungul dreptei perpendiculară pe planul median al secțiunii elementului J_3, iar axa O_2x_{22} să coincidă cu direcția perpendicularei coborîte din centrul cuplei sferice pe axa O_2x_{23}, poziția originii O_2 variind în timpul mișcării elementelor conturului. În fine, în vederea realizării trecerii de la sistemul de coordonate $O_1x_{11}(x_{12})x_{13}$ la sistemul $O_2x_{21}(x_{22})x_{23}$, se introduce axa auxiliară O_1N, perpendiculară la axele O_1x_{13} și O_2x_{23}.

Figura 4 prezintă un lanț spațial cu cinci elemente, avînd o cuplă sferică și patru cuple cilindrice. Sistemele de coordonate $O_0x_{01}(x_{02})x_{03}$, $O_1x_{11}(x_{12})x_{13}$, $O_2x_{21}(x_{22})x_{23}$, $O_3x_3(x_{32})x_{33}$ și $O_4x_{41}(x_{42})x_{43}$, pe care le legăm

respectiv de elementele J_0, J_1, J_2 J_3 și J_4, s-au ales după cum urmează. Axele O_0x_{03}, O_1x_{13}, O_2x_{23} și O_4x_{43} coincid cu axele cuplelor cilindrice. Din centrul O_3 al cuplei sferice se duce axa O_3x_{33} paralel cu axa O_2x_{23}. Axele

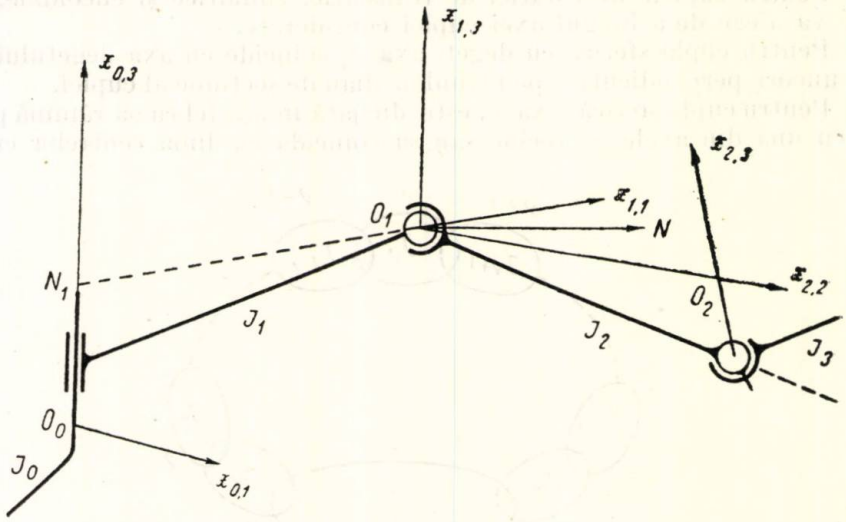


Fig. 4

O_0x_{01}, O_1x_{11}, O_2x_{21} și O_3x_{31} sînt îndreptate de-a lungul celor mai scurte distanțe dintre perechile corespunzătoare de axe x_3. Axa auxiliară O_3N, perpendiculară pe axele O_3x_{33} și O_3x_{43}, este paralelă cu axa O_4x_{43}, iar axa O_4x_{41}, care trece prin centrul O_3, este perpendiculară pe axa O_4x_{43}.

Fie cupla cinematică elicoidală $S^{(\nu,\nu-1)}_{L(u)}$ de pas L, avînd ca unică variabilă u unghiul de rotație sau avansul de-a lungul axei echivalent. Cupla asociază elementele $J_{\nu-1}$ și J_ν, care fac parte dintr-un lanț cinematic. În mișcarea virtuală a elementului J_ν față de elementul $J_{\nu-1}$, sensul de parcurs al circuitului este de la elementul cuplei cinematice care aparține elementului J_ν către elementul cuplei cinematice care aparține elementului $J_{\nu-1}$. Axa cuplei $S^{(\nu,\nu-1)}_{L(u)}$ o alegem ca axă $x_{\nu-1,3}$, axa cuplei care asociază elementele J_ν și $J_{\nu+1}$ o luăm ca axă $x_{\nu3}$, perpendiculara comună între axele $x_{\nu-1,3}$ și $x_{\nu3}$ în sensul de la elementul $J_{\nu-1}$ spre J_ν este aleasă ca axă $x_{\nu1}$, iar axele $x_{\nu-1,2}$ și $x_{\nu2}$ se iau astfel încît împreună, respectiv, cu celelalte axe de coordonate să formeze triedre drepte (fig. 5).

Punctele $O_{\nu-1}$ și O_ν sînt, respectiv, picioarele perpendicularelor comune. Coordonatele punctului O_ν în sistemul de axe de coordonate solidar cu elementul $J_{\nu-1}$ sînt

$$x_1^\nu = a_{\nu-1,\nu}\cos\theta_\nu,\quad x_2^\nu = a_{\nu-1,\nu}\sin\theta_\nu,\quad x_3^\nu = s_{\nu-1,\nu}. \tag{16}$$

Cosinusurile directoare $\alpha_{ij}^{(\nu,\nu-1)}$ se exprimă în acest caz în funcție de parametrii θ_ν și η_ν cu ajutorul relațiilor

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11}^{(\nu,\nu-1)} = \cos\theta_\nu \quad ; \quad \alpha_{12}^{(\nu,\nu-1)} = \sin\theta_\nu \quad ; \quad \alpha_{13}^{(\nu,\nu-1)} = 0,\\
&\alpha_{21}^{(\nu,\nu-1)} = -\cos\eta_\nu\sin\theta_\nu\,; \quad \alpha_{22}^{(\nu,\nu-1)} = \cos\eta_\nu\cos\theta_\nu\,; \quad \alpha_{23}^{(\nu,\nu-1)} = -\sin\eta_\nu,\\
&\alpha_{31}^{(\nu,\nu-1)} = -\sin\eta_\nu\sin\theta_\nu\,; \quad \alpha_{32}^{(\nu,\nu-1)} = \sin\eta_\nu\cos\theta_\nu\,; \quad \alpha_{33}^{(\nu,\nu-1)} = \cos\eta_\nu,
\end{aligned} \tag{17}$$

în care unghiul θ_ν este format de axa $x_{\nu-1,\nu}$ și paralela dusă prin $O_{\nu-1}$ la axa $x_{\nu 1}$, unghiul η_ν este format de axa $x_{\nu 3}$ și paralela la axa $x_{\nu-1,3}$ dusă prin O_ν, parametrul $a_{\nu-1,\nu}$ se măsoară pe axa $x_{\nu 1}$ de la punctul de intersecție al acestei axe cu axa $x_{\nu-1,3}$ pînă la punctul O_ν, iar parametrul

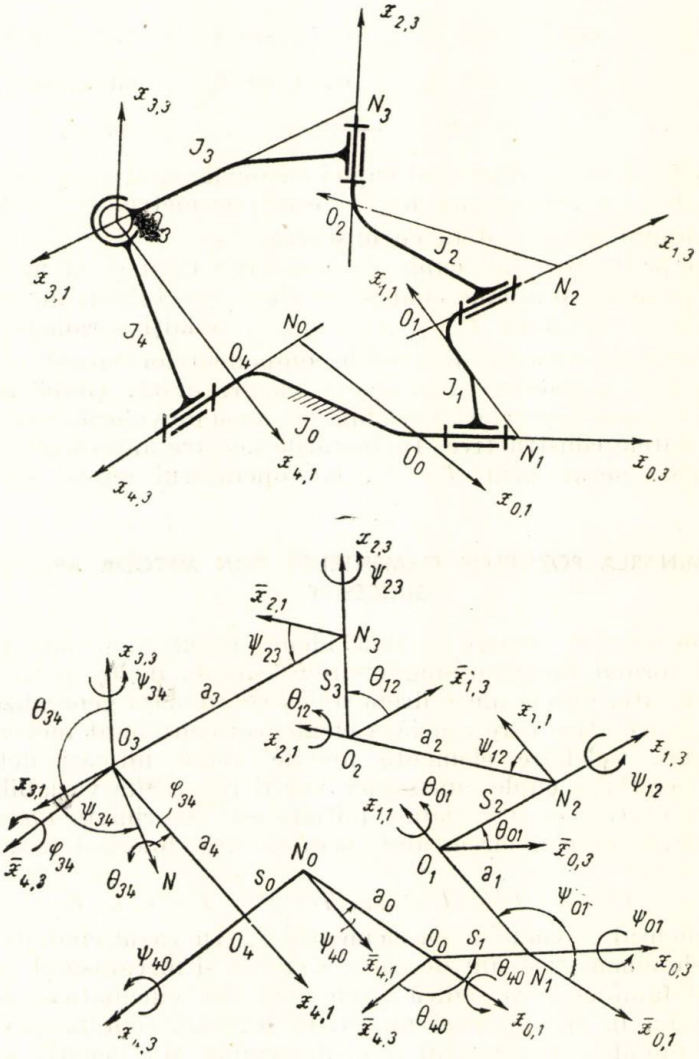


Fig. 5

$s_{\nu-1,\nu}$ se măsoară pe axa $x_{\nu-1,3}$ de la punctul $O_{\nu-1}$ pînă la punctul de intersecție al axei $x_{\nu 1}$ cu axa $x_{\nu-1,3}$.

După alegerea variabilei cuplei, θ_ν se exprimă prin formulele cunoscute în funcție de $s_{\nu-1,\nu}$ dacă $s_{\nu-1,\nu}$ este atare variabilă sau $s_{\nu-1,\nu}$ ca funcție de θ_ν dacă θ_ν este variabila cuplei.

Matricea tensorului de poziţie al elementului J_ν, în care componentele tensorului sînt exprimate în funcţie de unica variabilă a cuplei cinematice considerate, este

$$T_s^{(\nu,\nu-1)} = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{\nu-1,\nu}\cos\theta_\nu & \cos\theta_\nu & -\cos\gamma_\nu\sin\theta_\nu & -\sin\gamma_\nu\sin\theta_\nu \\ a_{\nu-1,\nu}\sin\theta_\nu & \sin\theta_\nu & \cos\gamma_\nu\cos\theta_\nu & \sin\gamma_\nu\cos\theta_\nu \\ s_{\nu-1,\nu} & 0 & -\sin\gamma_\nu & \cos\gamma_\nu \end{array} \right\|. \quad (17')$$

Articulaţia fiind un caz-limită al cuplei elicoidale cînd pasul elicei $L = 0$, orice variabilă a articulaţiei $R_{\theta_\nu}^{(\nu,\nu-1)}$ este parametrul θ_ν, ceilalţi parametri neschimbîndu-se o dată cu mişcarea.

Cupla prismatică sau cupla de translaţie fiind şi ea un caz-limită al cuplei elicoidale, şi anume cînd pasul elicei este infinit, unica variabilă a unei cuple de translaţie $P_{s_{\nu-1,\nu}}^{(\nu,\nu-1)}$ este $s_{\nu-1,\nu}$, ceilalţi parametri rămînînd constanţi în timpul mişcării. Expresiile componentelor tensorului de poziţie din relaţia (17) se folosesc şi în aceste cazuri-limită, ţinînd însă seama de parametrul care reprezintă variabila cuplei şi de valorile constante care depind de datele constructive. În lucrările noastre anterioare, operatorul articulaţiei s-a notat prin $T_R^{(\nu,\nu-1)}$, iar operatorul cuplei de translaţie $T_P^{(\nu,\nu-1)}$.

§ 3. DETERMINAREA POZIŢIILOR ELEMENTELOR PRIN METODA APROXIMAŢIILOR SUCCESIVE

5. Considerînd, pentru a fixa ideile, cazul unui mecanism plan sau spaţial format dintr-un singur circuit simplu închis şi cu un singur grad de libertate, putem alege drept unica coordonată generalizată variabila cuplei cinematice care asociază elementul considerat motor la batiul mecanismului. Celelalte elemente mobile avînd mişcări determinate, variabilele celorlalte cuple cinematice vor fi funcţii de variabilă iniţială. Dependenţa dintre ele şi variabila iniţială este exprimată matricial prin ecuaţia de închidere a circuitului, pentru care, folosind notaţia tensorială, vom scrie

$$T^{(n,0)} = T^{(1,0)} \cdot T^{(2,1)} \ldots T^{(n-1,n-2)}\, T^{(n,n-1)} = E, \quad (18)$$

în care elementul J_n coincide cu elementul J_0. În cazul cînd, de exemplu, toate cuplele cinematice sînt de clasa a cincea şi mecanismul este spaţial şi aparţine familiei zero, adică axele cuplelor cinematice sînt drepte situate oricum în spaţiu, deci nu există legături comune pentru toate elementele mobile, valoarea lui n se determină din ecuaţia structurală

$$1 = 6\,(n-1) - 5p_5 \quad (19)$$

şi conduce la $p_5 = (6n - 7)/5$. Valoarea minimă pentru n este $n = 7$ şi, prin urmare, $p_5 = 7$.

În corespondenţă cu acest fapt, elementele lanţului fiind notate cu J_0, J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6, ecuaţia de închidere (18) este

$$T^{(1,0)} \cdot T^{(2,1)} \cdot T^{(3,2)} \cdot T^{(4,3)} \cdot T^{(5,4)} \cdot T^{(6,5)} \cdot T^{(0,6)} = E. \quad (20)$$

Pentru un mecanism plan aparținînd familiei a treia se deduce

$$1 = 3\,(n-1) - 2p_5, \quad n = 4, \quad p_5 = 4 \tag{21}$$

și, prin urmare,

$$T^{(1,0)} \cdot T^{(2,1)} \cdot T^{(3,2)} \cdot T^{(0,1)} = E \quad (n = 0,1,\ 2,\ 3). \tag{22}$$

Deoarece cuplele cinematice sînt toate de clasa a cincea, adică permit un singur grad de mobilitate în mișcarea relativă, matricele reprezentative ale tensorilor din ecuațiile (20), (22) sînt funcții numai de cele șapte, respectiv patru coordonate generalizate:

$$q_1^{(1,0)},\ q_2^{(2,1)},\ q_3^{(3,2)},\ q_4^{(4,3)},\ q_5^{(5,4)},\ q_6^{(6,5)},\ q_0^{(0,6)};$$
$$q_1^{(1,0)},\ q_2^{(2,1)},\ q_3^{(3,2)},\ q_0^{(0,3)}.$$

Acestea pot fi unghiurile θ pentru articulații, deplasările liniare s pentru cuplele de translație, iar în cazul cuplelor elicoidale θ sau s, deoarece $\theta = \theta(s)$ sau $s = s(\theta)$, adică chiar variabilele cuplelor cinematice. Ceilalți parametri fixează caracteristicele formelor elementelor constitutive ale mecanismului considerat.

Notînd prin $q_1^{(1,0)}$ variabila inițială, adică variabila cuplei cinematice care asociază elementul conducător J_1 de bătiul J_0, variabilele $q_\nu^{(\nu,\nu-1)}$ pot fi exprimate ca sume a cîte unei valori inițiale estimate și a erorii corespunzătoare. Ecuațiile (20) și (22) devin

$$\begin{aligned} &T^{(1,0)}(q_1) \cdot T^{(2,1)}(\bar{q}_2 + \mathrm{d}q_2) \ldots T^{(\nu,\nu-1)}(\bar{q}_\nu + \mathrm{d}q_\nu) \\ &\ldots T^{(0,6)}(\bar{q}_0 + \mathrm{d}q_0) = E, \end{aligned} \tag{23}$$

și, respectiv,

$$T^{(1,0)}(q_1) \cdot T^{(2,1)}(\bar{q}_2 + \mathrm{d}q_2) \cdot T^{(3,2)}(\bar{q}_3 + \mathrm{d}q_3) \cdot T^{(0,3)}(\bar{q}_0 + \mathrm{d}q_0) = E, \tag{24}$$

în care $\bar{q}_\nu$ este valoarea primei aproximații a lui q_ν.

Pentru o articulație, matricea tensorului de poziție devine

$$T^{(\nu,\nu-1)}_{(\bar{\theta}_\nu + \mathrm{d}\theta_\nu)} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{\nu-1,\nu}\cos(\bar{\theta}_\nu+\mathrm{d}\theta_\nu) & \cos(\bar{\theta}_\nu+\mathrm{d}\theta_\nu) & -\sin(\bar{\theta}_\nu+\mathrm{d}\theta_\nu)\cos\eta_\nu & -\sin(\bar{\theta}_\nu+\mathrm{d}\theta_\nu)\sin\eta_\nu \\ a_{\nu-1,\nu}\sin(\bar{\theta}_\nu+\mathrm{d}\theta_\nu) & \sin(\bar{\theta}_\nu+\mathrm{d}\theta_\nu) & \cos(\bar{\theta}_\nu+\mathrm{d}\theta_\nu)\cos\eta_\nu & \cos(\bar{\theta}_\nu+\mathrm{d}\theta_\nu)\sin\eta_\nu \\ s_{\nu-1,\nu} & 0 & -\sin\eta_\nu & \cos\eta_\nu \end{matrix} \right\|. \tag{25}$$

Pentru o cuplă de translație se deduce

$$T^{(\nu,\nu-1)}_{\bar{s}_{\nu-1,\nu}+\mathrm{d}s_{\nu-1,\nu}} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{\nu-1,\nu}\cos\theta_\nu & \cos\theta_\nu & -\cos\eta_\nu\sin\theta_\nu & -\sin\eta_\nu\cos\theta_\nu \\ a_{\nu-1,\nu}\sin\theta_\nu & \sin\theta_\nu & \cos\eta_\nu\cos\theta_\nu & \sin\eta_\nu\sin\theta_\nu \\ \bar{s}_{\nu-1,\nu}+\mathrm{d}s_{\nu-1,\nu} & 0 & -\sin\eta_\nu & \cos\eta_\nu \end{matrix} \right\|. \tag{26}$$

În cazul cuplei elicoidale se ține seama de relația specifică cuplei dintre $s_{\nu-1,\nu}$ și $\theta_{\nu-1,\nu} \equiv \theta_\nu$.

Apreciind că valorile estimate inițial sînt suficient de exacte, se poate scrie

$$\begin{aligned} \cos(\bar{\theta}_\nu + \mathrm{d}\theta_\nu) &\approx \cos\bar{\theta}_\nu - \sin\bar{\theta}_\nu\,\mathrm{d}\theta_\nu + \ldots, \\ \sin(\bar{\theta}_\nu + \mathrm{d}\theta_\nu) &\approx \sin\bar{\theta}_\nu + \cos\bar{\theta}_\nu\,\mathrm{d}\theta_\nu + \ldots, \end{aligned} \tag{27}$$

sau, mărginindu-ne în această lucrare la primă aproximaţie,

$$\cos(\bar{\theta}_\nu + \mathrm{d}\theta_\nu) \approx \cos\bar{\theta}_\nu - \sin\bar{\theta}_\nu\,\mathrm{d}\theta_\nu,$$
$$\sin(\bar{\theta}_\nu + \mathrm{d}\theta_\nu) \approx \sin\bar{\theta}_\nu + \cos\bar{\theta}_\nu\,\mathrm{d}\theta_\nu. \tag{28}$$

Cu aceste din urmă aproximaţii se obţine

$$T^{(\nu,\nu-1)}_{(\bar{\theta}\nu+\mathrm{d}\theta\nu)} \approx$$

$$\approx \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{\nu-1,\nu}(\cos\bar{\theta}_\nu - \sin\bar{\theta}_\nu\,\mathrm{d}\theta_\nu) & \cos\bar{\theta}_\nu - \sin\bar{\theta}_\nu\,\mathrm{d}\theta_\nu & (-\sin\bar{\theta}_\nu - \cos\bar{\theta}_\nu\,\mathrm{d}\theta_\nu) & (-\sin\bar{\theta}_\nu - \cos\bar{\theta}_\nu\,\mathrm{d}\theta_\nu) \\ a_{\nu-1,\nu}(\sin\bar{\theta}_\nu + \cos\bar{\theta}_\nu\,\mathrm{d}\theta_\nu) & \sin\bar{\theta}_\nu + \cos\bar{\theta}_\nu\,\mathrm{d}\theta_\nu & \cos\eta_\nu & \sin\eta_\nu \\ s_{\nu-1,\nu} & 0 & -\sin\eta_\nu & \cos\eta_\nu \end{Vmatrix},$$

adică (29)

$$T^{(\nu,\nu-1)}_{(\bar{\theta}+\mathrm{d}\theta\nu)} \approx \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{\nu-1,\nu}\cos\bar{\theta}_\nu & \cos\bar{\theta}_\nu & -\sin\bar{\theta}_\nu\cos\eta_\nu & -\sin\bar{\theta}_\nu\sin\eta_\nu \\ a_{\nu-1,\nu}\sin\bar{\theta}_\nu & \sin\bar{\theta}_\nu & \cos\bar{\theta}_\nu\cos\eta_\nu & \cos\bar{\theta}_\nu\sin\eta_\nu \\ s_{\nu-1,\nu} & 0 & -\sin\eta_\nu & \cos\eta_\nu \end{Vmatrix} + \tag{30}$$

$$+ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{\nu-1,\nu}\sin\bar{\theta}_\nu & -\sin\bar{\theta}_\nu & -\cos\bar{\theta}_\nu\cos\eta_\nu & -\cos\bar{\theta}_\nu\sin\eta_\nu \\ a_{\nu-1,\nu}\cos\bar{\theta}_\nu & \cos\bar{\theta}_\nu & -\sin\bar{\theta}_\nu\cos\eta_\nu & -\sin\bar{\theta}_\nu\sin\eta_\nu \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \mathrm{d}\theta_\nu.$$

Prima dintre aceste două matrice reprezintă tensorul de poziţie evaluat pentru $\theta_\nu = \bar{\theta}_\nu$. Cea de-a doua matrice poate fi considerată ca prima derivată parţială a tensorului de poziţie în raport cu θ_ν, evaluată de asemenea pentru $\theta_\nu = \bar{\theta}_\nu$. Notînd prima din aceste matrice cu $\bar{T}^{(\nu,\nu-1)}_{(\theta_\nu)}$ ecuaţia (30) se scrie

$$T^{(\nu,\,\nu-1)}_{(\theta_\nu)} \approx \bar{T}^{(\nu,\,\nu-1)}_{(\theta_\nu)} + \left[\frac{\partial\, T^{(\nu,\,\nu-1)}_{(\theta_\nu)}}{\partial\,\theta_\nu}\right]_{\theta_\nu=\bar{\theta}_\nu} \mathrm{d}\theta_\nu. \tag{31}$$

În felul acesta problema derivării pe cale matricială în vederea aplicării ulterioare a programării operaţiilor la MEC se rezolvă folosind operatorul matricial constant Q_θ, definit prin relaţia

$$Q_\theta = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{32}$$

adică

$$\frac{\partial T^{(\nu,\nu-1)}_{(\theta_\nu)}}{\partial \theta_\nu}\bigg|_{\theta_\nu=\bar{\theta}_\nu} = Q_\theta \overline{T}^{(\nu,\nu-1)}_{(\theta_\nu)}. \tag{33}$$

Pentru cupla de translație se obține analog

$$Q_s = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{34}$$

și, prin urmare,

$$\frac{\partial T^{(\nu,\nu-1)}_{(s_{\nu-1,\nu})}}{\partial s_{\nu-1,\nu}}\bigg|_{s_{\nu-1,\nu}=\bar{s}_{\nu-1,\nu}} = Q_s \overline{T}^{(\nu,\nu-1)}_{(\theta_\nu)}. \tag{35}$$

Rezultă un procedeu simplificat, folosit în parte, luîndu-se ca punct de plecare lucrările autorilor [5], [36], în teza de doctorat a lui John J. Uicker jr. [38] pentru obținerea seriilor de derivate succesive ce figurează în aproximațiile succesive ale dezvoltărilor tensorilor $T^{(\nu,\nu-1)}$. Mărginindu-ne, așa cum ne-am fixat, la primele aproximații, avem, în definitiv,

$$T^{(\nu,\nu-1)}_{(\theta_\nu)} \approx \overline{T}^{(\nu,\nu-1)}_{(\theta_\nu)} + Q_\theta \overline{T}^{(\nu,\nu-1)}_{(\theta_\nu)} \mathrm{d}\theta_\nu = (E + Q_\theta \,\mathrm{d}\theta_\nu)\, \overline{T}^{(\nu,\nu-1)}_{(\theta_\nu)}, \tag{36}$$

$$T^{(\nu,\nu-1)}_{(s_{\nu-1,\nu})} \approx \overline{T}^{(\nu,\nu-1)}_{(s_{\nu-1,\nu})} + Q_s \overline{T}^{(\nu,\nu-1)}_{(s_{\nu-1,\nu})} \mathrm{d}s_{\nu-1,\nu} = (E + Q_s \,\mathrm{d}s_{\nu-1,\nu})\, \overline{T}^{(\nu,\nu-1)}_{(s_{\nu-1,\nu})} \tag{37}$$

sau, mai general,

$$T^{(\nu,\nu-1)}_{(q_\nu)} \approx \overline{T}^{(\nu,\nu-1)}_{(q_\nu)} + Q_{q_\nu} \overline{T}^{(\nu,\nu-1)}_{(q_\nu)} \mathrm{d}q_\nu = (E + Q_{q\nu} \mathrm{d}q_\nu)\, \overline{T}^{(\nu,\nu-1)}_{(q_\nu)}. \tag{38}$$

Substituind în ecuațiile (23), (24), rezultă

$$\begin{aligned} &T^{(1,0)}_{(q_1)} \cdot (E + Q_2 \,\mathrm{d}q_2)\; \overline{T}^{(2,1)}_{(q_2)} \cdot (E + Q_3 \,dq_3)\; \overline{T}^{(3,2)}_{(q_3)} \ldots \\ &\ldots (E + Q_\nu \,\mathrm{d}q_\nu)\; \overline{T}^{(\nu,\nu-1)}_{(q_\nu)} \ldots (E + Q_0 \,\mathrm{d}q_0)\; \overline{T}^{(0,6)}_{(q_6)} \approx E, \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} &T^{(1,0)}_{(q_1)} \cdot (E + Q_2 \,\mathrm{d}q_2)\; \overline{T}^{(2,1)}_{(q_2)} \cdot (E + Q_3 \mathrm{d}q_3)\; \overline{T}^{(3,2)}_{(q_3)} \cdot \\ &\cdot (E + Q_0 \,\mathrm{d}q_0)\; \overline{T}^{(0,3)}_{(q_0)} \approx E. \end{aligned} \tag{40}$$

Efectuînd înmulțirea, se obține un produs care, ținînd seama de ordinul de aproximație admis aici, se transcrie sub forma

$$\begin{aligned} &[T^{(1,0)}_{(q_1)} Q_2 \overline{T}^{(2,1)}_{(q_2)} \cdot \overline{T}^{(3,2)}_{(q_3)} \cdot \overline{T}^{(4,3)}_{(q_4)} \overline{T}^{(5,4)}_{(q_5)} \overline{T}^{(6,5)}_{(q_6)} \overline{T}^{(0,6)}_{(q_0)}]\, \mathrm{d}q_2 + \\ &+ [T^{(1,0)}_{(q_1)} \overline{T}^{(2,1)}_{(q_2)} Q_3 \overline{T}^{(3,2)}_{(q_3)} \overline{T}^{(4,3)}_{(q_4)} \overline{T}^{(5,4)}_{(q_5)} \overline{T}^{(6,5)}_{(q_6)} \overline{T}^{(0,6)}_{(q_0)}]\, \mathrm{d}q_3 + \\ &+ [T^{(1,0)}_{(q_1)} \overline{T}^{(2,1)}_{(q_2)} \overline{T}^{(3,2)}_{(q_3)} Q_4 \overline{T}^{(4,3)}_{(q_4)} \overline{T}^{(5,4)}_{(q_5)} \overline{T}^{(6,5)}_{(q_6)} \overline{T}^{(0,6)}_{(q_0)}]\, \mathrm{d}q_4 + \end{aligned} \tag{41}$$

$$+ [T_{(q_1)}^{(1,0)} \overline{T}_{(q_2)}^{(2,1)} \overline{T}_{(q_3)}^{(3,2)} \overline{T}_{(q_4)}^{(4,3)} Q_5 \overline{T}_{(q_5)}^{(5,4)} \overline{T}_{(q_6)}^{(6,5)} \overline{T}_{(q_0)}^{(0,6)}] \, dq_5 +$$

$$+ [T_{(q_1)}^{(1,0)} \overline{T}_{(q_2)}^{(2,1)} T_{(q_3)}^{(3,2)} \overline{T}_{(q_4)}^{(4,3)} \overline{T}_{(q_5)}^{(5,4)} Q_6 \overline{T}_{(q_6)}^{(6,5)} \overline{T}_{(q_0)}^{(0,6)}] \, dq_6 +$$

$$+ [T_{(q_1)}^{(1,0)} \overline{T}_{(q_2)}^{(2,1)} \overline{T}_{(q_3)}^{(3,2)} \overline{T}_{(q_4)}^{(4,3)} \overline{T}_{(q_5)}^{(5,4)} \overline{T}_{(q_6)}^{(6,5)} Q_0 \overline{T}_{(q_0)}^{(0,6)}] \, dq_0 \approx$$

$$\approx E - [T_{(q_1)}^{(1,0)} \overline{T}_{(q_2)}^{(2,1)} \overline{T}_{(q_3)}^{(3,2)} \overline{T}_{(q_4)}^{(4,3)} \overline{T}_{(q_5)}^{(5,4)} \overline{T}_{(q_6)}^{(6,5)} \overline{T}_{(q_0)}^{(0,6)}]$$

şi

$$[T_{(q_1)}^{(1,0)} Q_2 \overline{T}_{(q_2)}^{(2,1)} \overline{T}_{(q_3)}^{(3,2)} \overline{T}_{(q_0)}^{(0,3)}] \, dq_2 + [T_{(q_1)}^{(1,0)} \overline{T}_{(q_2)}^{(2,1)} Q_3 \overline{T}_{(q_3)}^{(3,2)} \overline{T}_{(q_0)}^{(0,3)}] \, dq_3 + \quad (42)$$

$$+ [T_{(q_1)}^{(1,0)} \overline{T}_{(q_2)}^{(2,1)} \overline{T}_{(q_3)}^{(3,2)} Q_0 \overline{T}_{(q_0)}^{(0,3)}] \, dq_0 \approx E - [T_{(q_1)}^{(1,0)} \overline{T}_{(q_2)}^{(2,1)} \overline{T}_{(q_3)}^{(3,2)} \overline{T}_{(q_0)}^{(0,3)}].$$

Ecuaţia (41), ca şi ecuaţia (42), va fi numită ecuaţia matricială de primă aproximaţie, specifică mecanismului considerat. Avînd în forma lor anumite simetrii, atare ecuaţii pot fi rezolvate prin programe adecvate în raport cu termenii de corecţie dq_ν cu ajutorul MEC.

Notînd prin

$$B_1 = T_{(q_1)}^{(1,0)} \overline{T}_{(q_2)}^{(2,1)} \overline{T}_{(q_3)}^{(3,2)} \overline{T}_{(q_4)}^{(4,3)} \overline{T}_{(q_5)}^{(5,4)} \overline{T}_{(q_6)}^{(6,5)} \overline{T}_{(q_0)}^{(0,6)}, \quad (43)$$

$$B_\nu = [T_{(q_1)}^{(1,0)} \overline{T}_{(q_2)}^{(2,1)} \dots \overline{T}_{(q_{\nu-1})}^{(\nu-1,\nu-2)} Q_\nu \overline{T}_{(q_\nu)}^{(\nu,\nu-1)} \dots \overline{T}_{(q_0)}^{(0,6)}] \, dq_\nu \quad (44)$$

şi analog pentru mecanismul plan [38], se obţine

$$B_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ B_{121} & B_{122} & B_{123} & B_{124} \\ B_{131} & B_{132} & B_{133} & B_{134} \\ B_{141} & B_{142} & B_{143} & B_{144} \end{Vmatrix} \quad (45)$$

şi

$$B_\nu = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{\nu 21} & B_{\nu 22} & B_{\nu 23} & B_{\nu 24} \\ B_{\nu 31} & B_{\nu 32} & B_{\nu 33} & B_{\nu 34} \\ B_{\nu 41} & B_{\nu 42} & B_{\nu 43} & B_{\nu 44} \end{Vmatrix}. \quad (46)$$

Cu aceste notaţii, ecuaţiile (41) şi (42) devin

$$B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_0 \approx E - B_1, \quad (47)$$

şi

$$B_2 + B_3 + B_0 \approx E - B_1. \quad (48)$$

Pentru a reprezenta şi mai simplu ecuaţia matricială de primă aproximaţie obţinută adineauri, se defineşte matricea unică A prin

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{Vmatrix}, \quad (49)$$

în care s-a notat

$$A_{jk} = \sum_\nu B_{\nu jk} \, d\theta_\nu , \qquad \nu = 1, 2, 3 \quad (50)$$

şi, în mod analog, $\nu = 0, 2, 3, 4, 5, 6$.

Ecuația matricială a primelor aproximații se reduce la

$$A \approx E - B_1. \tag{51}$$

Această ecuație este o notație prescurtată a expresiei complete a ecuației (41). Ea conține șase necunoscute în cazul mecanismului spațial, adică dq_2, dq_3, dq_4, dq_5, dq_6, dq_0, și trei necunoscute în cazul mecanismului plan, adică dq_2, dq_3, dq_0. Ea trebuie rezolvată în raport cu acestea pentru a se putea continua procesul de aproximări succesive.

Scrisă dezvoltat ecuația (51) este

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{Vmatrix} \approx \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_{121} & 1-B_{122} & -B_{123} & -B_{124} \\ -B_{131} & -B_{132} & 1-B_{133} & -B_{134} \\ -B_{141} & -B_{142} & -B_{143} & 1-B_{144} \end{Vmatrix}. \tag{52}$$

Egalînd elementele matricelor din cei doi membri din (52), se obține un sistem de douăsprezece ecuații liniare cu șase necunoscute pentru mecanismul spațial, cele șase dq_2, dq_3, dq_4, dq_5, dq_6, dq_0 și trei necunoscute dq_2, dq_3, dq_0 pentru mecanismul plan. Pentru că există o singură soluție, ecuațiile în plus vor fi eliminate ca identități sau se reduc la celelalte.

6. Se consideră acum matricea reprezentativă a tensorului de poziție $\overline{T}^{(\nu,\nu-1)}$ și $[\overline{T}^{(\nu,\nu-1)}]^{-1}$:

$$\overline{T}^{(\nu,\nu-1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{\nu-1,\nu} \cos\bar{\theta}_\nu & \cos\bar{\theta}_\nu & -\sin\bar{\theta}_\nu \cos\eta_\nu & -\sin\bar{\theta}_\nu \sin\eta_\nu \\ a_{\nu-1,\nu} \sin\bar{\theta}_\nu & \sin\bar{\theta}_\nu & \cos\bar{\theta}_\nu \cos\eta_\nu & \cos\bar{\theta}_\nu \sin\eta_\nu \\ s_{\nu-1,\nu} & 0 & -\sin\eta_\nu & \cos\eta_\nu \end{Vmatrix} \tag{53}$$

și

$$[T^{(\nu,\nu-1)}]^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{\nu-1,\nu} & \cos\bar{\theta}_\nu & \sin\bar{\theta}_\nu & 0 \\ s_{\nu-1,\nu}\sin\eta_\nu & -\sin\bar{\theta}_\nu\cos\eta_\nu & \cos\bar{\theta}_\nu\cos\eta_\nu & -\sin\eta_\nu \\ -s_{\nu-1,\nu}\cos\eta_\nu & -\sin\bar{\theta}_\nu\sin\eta_\nu & \cos\bar{\theta}_\nu\sin\eta_\nu & \cos\eta_\nu \end{Vmatrix} \tag{54}$$

Se menționează poziția zerourilor din linia întîi. Elementele care stabilesc distanțele între axele cuplelor cinematice, adică $a_{\nu-1,\nu}$ și $s_{\nu-1,\nu}$ sînt situate în prima coloană.

Se consideră matricele $\overline{M}^{(\nu,\nu-1)}$ și $\overline{M}_1^{(\nu,\nu-1)}$, adică

$$\overline{M}^{(\nu,\nu-1)} = \begin{Vmatrix} \cos\bar{\theta}_\nu & -\sin\bar{\theta}_\nu\cos\eta_\nu & -\sin\bar{\theta}_\nu\sin\eta_\nu \\ \sin\bar{\theta}_\nu & \cos\bar{\theta}_\nu\cos\eta_\nu & \cos\bar{\theta}_\nu\sin\eta_\nu \\ 0 & -\sin\eta_\nu & \cos\eta_\nu \end{Vmatrix} \tag{55}$$

și

$$\overline{M}_1^{(\nu,\nu-1)} = \begin{Vmatrix} \cos\bar{\theta}_\nu & \sin\bar{\theta}_\nu & 0 \\ -\sin\bar{\theta}_\nu\cos\eta_\nu & \cos\bar{\theta}_\nu\cos\eta_\nu & -\sin\eta_\nu \\ -\sin\bar{\theta}_\nu\sin\eta_\nu & \cos\bar{\theta}_\nu\sin\eta_\nu & \cos\eta_\nu \end{Vmatrix}. \tag{56}$$

Aceste matrice se transpun una într-alta.

Se pot face cîteva observaţii asupra produselor mai multor matrice $T^{(\nu,\nu-1)}$ sau $\overline{T}^{(\nu,\nu-1)}$, de exemplu B_1, aşa cum a fost definit anterior (45). Zerourile apar în linia superioară, $a_{\nu-1,\nu}$ şi $s_{\nu-1,\nu}$ şi sînt conţinute în ultimele trei elemente ale primei coloane. Matricele $\overline{M}^{(n,0)}$ şi $\overline{M}_1^{(n,0)}$, care sînt produsele mai multor matrice ortogonale, sînt de asemenea ortogonale.

Deoarece operatorul matricial Q_0 sau operatorul Q_s are linia întîi formată din zeroui, matricele B_ν şi suma lor, matricea A are aceeaşi caracteristică. Toţi parametrii referitori la distanţe sînt conţinuţi în prima coloană şi se referă la mişcări de translaţie. Matricele M de forma 3×3 sînt submatrice rotaţionale. Datorită acestui fapt, matricele ecuaţiei aproximaţiilor (51) pot fi separate în componentele lor translaţionale

$$A_{21} \approx -B_{121}, \quad A_{31} \approx -B_{131}, \quad A_{41} \approx -B_{141} \tag{57}$$

şi componentele lor rotaţionale

$$\begin{Vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{Vmatrix} \approx \begin{Vmatrix} 1 - B_{122} & -B_{123} & -B_{124} \\ -B_{132} & 1 - B_{133} & -B_{134} \\ -B_{142} & -B_{143} & 1 - B_{144} \end{Vmatrix}. \tag{58}$$

Ecuaţia matricială a aproximaţiilor de primul ordin va fi complet satisfăcută dacă ambele condiţii (57) şi (58) sînt satisfăcute. Prima condiţie furnizează trei din cele şase ecuaţii căutate. Celelalte trei ecuaţii se obţin din a doua condiţie.

În cele ce urmează vom folosi următoarea teoremă relativă la matrice antisimetrice. Fie Q o matrice antisimetrică, adică

$$Q_{jk} = -Q_{kj},$$

şi

$$Q_{jj} = 0.$$

TEOREMĂ. *Dacă H este o matrice nesingulară şi H^t este transpusa lui H, atunci produsul*

$$H_1 = HQH^t$$

este de asemenea o matrice antisimetrică.

Se consideră matricele B_ν care se găsesc în membrul stîng al ecuaţiei matriciale de prima aproximaţie (47).

Introducerea unui factor egal cu matricea unitară

$$E = [T_{(q_1)}^{(1,0)} \overline{T}_{(q_2)}^{(2,1)} \dots \overline{T}_{(q_{\nu-1})}^{(\nu-1,\nu-2)}]^{-1} \cdot [T_{(q_1)}^{(1,0)} \overline{T}_{(q_2)}^{(2,1)} \dots \overline{T}_{(q_{\nu-1})}^{(\nu-1,\nu-2)}] \tag{59}$$

nu va afecta această egalitate, adică se poate scrie

$$B_\nu = [T_{(q_1)}^{(1,0)} \overline{T}_{(q_2)}^{(2,1)} \dots \overline{T}_{(q_{\nu-1})}^{(\nu-1,\nu-2)}] \, Q_\nu \{[T_{(q_1)}^{(1,0)} \overline{T}_{(q_2)}^{(2,1)} \dots \overline{T}_{(q_{\nu-1})}^{(\nu-1,\nu-2)}]^{-1} \cdot$$
$$\cdot [T_{(q_1)}^{(1,0)} \overline{T}_{(q_2)}^{(2,1)} \dots \overline{T}_{(q_{\nu-1})}^{(\nu-1,\nu-2)}]\} \cdot [\overline{T}_{(q_\nu)}^{(\nu,\nu-1)} \dots \overline{T}_{(q_0)}^{(0,6)}] \, dq_\nu, \tag{60}$$

sau

$$B_\nu = [T^{(1,0)}_{(q_1)}\overline{T}^{(2,1)}_{(q_2)}\ldots\overline{T}^{(\nu-1,\nu-2)}_{(q_{\nu-1})}]\,Q_\nu\,[T^{(1,0)}_{(q_1)}\overline{T}^{(2,1)}_{(q_2)}\ldots\overline{T}^{(\nu-1,\nu-2)}_{(q_{\nu-1})}]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\,T^{(1,0)}_{(q_1)}\overline{T}^{(2,1)}_{(q_2)}\ldots\overline{T}^{(0,6)}_{(q_0)}\,\mathrm{d}q_\nu\,, \tag{61}$$

adică

$$B_\nu = [T^{(1,0)}_{(q_1)}\overline{T}^{(2,1)}_{(q_2)}\ldots\overline{T}^{(\nu-1,\nu-2)}_{(q_{\nu-1})}]\,Q_\nu\,[T^{(1,0)}_{(q_1)}\overline{T}^{(2,1)}_{(q_2)}\ldots\overline{T}^{(\nu-1,\nu-2)}_{(q_{\nu-1})}]\,B_1\,\mathrm{d}q_\nu. \tag{62}$$

Anterior a fost stabilit că în matricea $\overline{T}^{(\nu,\nu-1)}_{(q_\nu)}$ submatricea $\overline{M}^{(\nu,\nu-1)}$ este ortogonală. Deoarece inversa unei matrice ortogonale este transpusa ei, nu vor fi afectate submatricele rotației scriind [38]

$$B_\nu = [T^{(1,0)}_{(q_1)}\overline{T}^{(2,1)}_{(q_2)}\ldots\overline{T}^{(\nu-1,\nu-2)}_{(q_{\nu-1})}]\,Q_\nu\,[T^{(1,0)}_{(q_1)}\overline{T}^{(2,1)}_{(q_2)}\ldots\overline{T}^{(\nu-1,\nu-2)}_{(q_{\nu-1})}]^t\,B_1\mathrm{d}q_\nu. \tag{63}$$

Fără a discuta valabilitatea universală a egalității (63), subliniem că ea respectă submatricele rotației.

Întrucît $[\overline{T}^{(1,0)}_{(q_1)}\overline{T}^{(2,1)}_{(q_2)}\ldots\overline{T}^{(\nu-1,\nu-2)}_{(q_{\nu-1})}]$ este o matrice nesingulară, teorema enunțată mai sus relativă la matricele antisimetrice poate fi aplicată. Matricele B_ν și suma lor A pot fi privite ca produsul unei matrice antisimetrice Q^* și a matricei ortogonale B_1, adică

$$A = Q^*\,B_1\,, \tag{64}$$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & -Q^*_{32} & -Q^*_{42} \\ Q^*_{32} & 0 & -Q^*_{43} \\ Q^*_{42} & Q^*_{43} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} B_{122} & B_{123} & B_{124} \\ B_{132} & B_{133} & B_{134} \\ B_{142} & B_{143} & B_{144} \end{Vmatrix} \cdot \tag{65}$$

Introducînd matricea A astfel reconstruită în ecuația (42), se obține următoarea ecuație:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & -Q^*_{32}B_{132} & -Q^*_{32}B_{133} & -Q^*_{32}B_{134} \\ & -Q^*_{42}B_{142} & -Q^*_{42}B_{143} & -Q^*_{42}B_{144} \\ A_{31} & Q^*_{32}B_{122} & Q^*_{32}B_{123} & Q^*_{32}B_{124} \\ & -Q^*_{43}B_{142} & -Q^*_{43}B_{143} & -Q^*_{43}B_{144} \\ A_{41} & Q^*_{42}B_{122} & Q^*_{42}B_{123} & Q^*_{44}B_{124} \\ & +Q^*_{43}B_{132} & +Q^*_{43}B_{133} & +Q^*_{43}B_{134} \end{Vmatrix} \approx \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_{121} & 1-B_{122} & -B_{123} & -B_{124} \\ -B_{131} & -B_{132} & 1-B_{133} & -B_{134} \\ -B_{141} & -B_{142} & -B_{143} & 1-B_{144} \end{Vmatrix}. \tag{66}$$

În această ecuație, toate elementele B_{1jk} sînt cunoscute, fiind evaluate din estimarea inițială și ecuația (43). Cele trei elemente ale primei coloane conduc la cele trei ecuații ale translației. Singurele cantități care nu sînt

încă cunoscute sînt Q^*_{32}, Q^*_{42} şi Q^*_{43}. Acestea se obţin cu ajutorul următoarelor trei ecuaţii:

$$\begin{aligned} A_{32} &= Q^*_{32} B_{122} - Q^*_{43} B_{142} \approx - B_{132}, \\ A_{42} &= Q^*_{42} B_{122} + Q^*_{43} B_{132} \approx - B_{142}, \\ A_{43} &= Q^*_{42} B_{123} + Q^*_{43} B_{133} \approx - B_{143}. \end{aligned} \tag{67}$$

În acest mod, problema derivării este rezolvată. Ea trebuie să se efectueze în două etape. Mai întîi se scrie ecuaţia matricială a primei aproximaţii în funcţie de valorile estimate, de parametrii specifici elementelor mecanismului şi de erorile dq_ν. Apoi se izolează şase ecuaţii liniare pentru a evalua erorile. Pentru aceste şase ecuaţii, singurii termeni care este util să fie calculaţi sînt cei de sub diagonală, adică

$$\begin{Vmatrix} - & - & - & - \\ A_{21} & - & - & - \\ A_{31} & A_{32} & - & - \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & - \end{Vmatrix} \approx \begin{Vmatrix} - & - & - & - \\ - B_{121} & - & - & - \\ - B_{131} & - B_{132} & - & - \\ - B_{141} & - B_{142} & - B_{143} & - \end{Vmatrix}. \tag{68}$$

Aplicînd de un număr suficient de ori procesul de aproximare, cele şase dq_ν se apropie de zero şi sistemul conduce la convergenţă. Excepţiile la aceasta o fac poziţiile de întoarcere ale mecanismului (punctele moarte).

Admiţînd că sistemul trebuie să fie convergent, este necesar să se arate că matricea B_1 tinde către matricea unitară. Într-adevăr, cînd cele şase dq_ν dispar, întreaga matrice Q^* devine nulă, deoarece ea este o funcţie liniară şi omogenă de dq_ν. Din ecuaţiile (66) şi (68) se constată că partea din stînga dispare. Partea din dreapta însă dispare numai dacă B_1 tinde către matricea unitară.

Submatricea rotaţiei din B_1 este, prin definiţie, totdeauna ortogonală şi, după ce sistemul considerat a ajuns la limită, cele şase elemente situate sub diagonala principală devin zero:

$$B_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{122} & B_{123} & B_{124} \\ 0 & 0 & B_{133} & B_{134} \\ 0 & 0 & 0 & B_{144} \end{Vmatrix}. \tag{69}$$

Se poate demonstra, după cum observă în lucrarea sa de doctorat citată John J. Uicker jr. [38], [39], că sistemul nu converge neapărat către matricea unitară. Pentru a obliga toate componentele (elementele) diagonalei să se apropie de unitate, acestea vor furniza încă trei ecuaţii adiţionale, adică în total se obţin nouă ecuaţii cu şase necunoscute dq_ν:

$$\begin{Vmatrix} - & - & - & - \\ A_{21} & A_{22} & - & - \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & - \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{Vmatrix} \approx \begin{Vmatrix} - & - & - & - \\ - B_{121} & 1 - B_{122} & - & - \\ - B_{131} & - B_{132} & 1 - B_{133} & 0 \\ - B_{141} & - B_{142} & - B_{143} & 1 - B_{144} \end{Vmatrix}. \tag{70}$$

Aceste nouă ecuații scrise explicit se prezintă după cum urmează:

$$
\begin{aligned}
&B_{221}dq_2 + B_{321}dq_3 + B_{421}dq_4 + B_{521}dq_5 + B_{621}dq_6 + B_{021}dq_0 \approx -B_{121},\\
&B_{231}dq_2 + B_{331}dq_3 + B_{431}dq_4 + B_{531}dq_5 + B_{631}dq_6 + B_{031}dq_0 \approx -B_{131},\\
&B_{241}dq_2 + B_{341}dq_3 + B_{441}dq_4 + B_{541}dq_5 + B_{641}dq_6 + B_{041}dq_0 \approx -B_{141},\\
&B_{222}dq_2 + B_{322}dq_3 + B_{422}dq_4 + B_{522}dq_5 + B_{622}dq_6 + B_{022}dq_0 \approx 1 - B_{122},\\
&B_{232}dq_2 + B_{332}dq_3 + B_{432}dq_4 + B_{532}dq_5 + B_{632}dq_6 + B_{032}dq_0 \approx -B_{132},\\
&B_{242}dq_2 + B_{342}dq_3 + B_{442}dq_4 + B_{542}dq_5 + B_{642}dq_6 + B_{042}dq_0 \approx -B_{142},\\
&B_{233}dq_2 + B_{333}dq_3 + B_{433}dq_4 + B_{533}dq_5 + B_{633}dq_6 + B_{033}dq_0 \approx 1 - B_{133},\\
&B_{243}dq_2 + B_{343}dq_3 + B_{443}dq_4 + B_{543}dq_5 + B_{643}dq_6 + B_{043}dq_0 \approx -B_{143},\\
&B_{244}dq_2 + B_{344}dq_3 + B_{444}dq_4 + B_{544}dq_5 + B_{644}dq_6 + B_{044}dq_0 \approx 1 - B_{144}.
\end{aligned}
\tag{71}
$$

Evident, în general vorbind, sistemul considerat este incompatibil. Menționăm că erorile sînt relativ mici și termenii de ordin superior au fost neglijați.

Deoarece metoda elaborată se referă la determinarea aproximațiilor, erorile comise pot fi considerate ca fiind neglijabile dacă se alege drept soluție aproximativă a celor nouă ecuații incompatibile soluția obținută pe baza metodei celor mai mici pătrate.

7. Procesul de aproximare din cadrul analizei deplasărilor la mecanisme se prezintă, în lumina considerațiilor expuse adineauri, după cum urmează.

Sistemul de ecuații (71) exprimat sub forma matricială se transcrie astfel:

$$RD \approx V, \tag{72}$$

$$
\begin{Vmatrix}
B_{221} & B_{321} & \dots \\
B_{231} & B_{331} & \dots \\
B_{241} & B_{341} & \dots \\
B_{222} & B_{322} & \dots \\
B_{232} & B_{332} & \dots \\
B_{242} & B_{342} & \dots \\
B_{233} & B_{333} & \dots \\
B_{243} & B_{343} & \dots \\
B_{244} & B_{344} & \dots
\end{Vmatrix}
\cdot
\begin{Vmatrix}
dq_2 \\ dq_3 \\ dq_4 \\ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ dq_0
\end{Vmatrix}
\approx
\begin{Vmatrix}
-B_{121} \\ -B_{131} \\ -B_{141} \\ 1-B_{122} \\ -B_{132} \\ -B_{142} \\ 1-B_{133} \\ -B_{143} \\ 1-B_{144}
\end{Vmatrix},
\tag{73}
$$

unde R este definit ca matricea coeficienților B_{vjk}, D este matricea unicolonară a necunoscutelor dq_v și V este matricea unicolonară a constantelor.

În vederea aplicării la ecuațiile matriciale a metodei celor mai mici pătrate, executăm succesiunea de operații indicată mai jos:

$$N = R^t \cdot R, \quad W = R^t \cdot V, \tag{74}$$

în care s-a notat

$$ND \approx W, \tag{75}$$

W fiind noua matrice unicolonară a constantelor.

Din ecuaţia matricială de primă aproximaţie (75) se pot obţine erorile dq_ν căutate :

$$D \approx N^{-1} W. \tag{76}$$

Erorile dq_ν evaluate se adaugă valorilor iniţiale estimate $\overline{q}_\nu$ pentru a obţine valorile exacte q_ν. Pentru o mai mare precizie, aceste valori pot fi considerate valori estimate şi calculul se repetă pînă ce se obţine precizia dorită.

Pentru rezolvarea problemei cînd elementul iniţial ocupă o nouă poziţie, se dă lui q_1 o creştere finită Δq_1 şi valorile $\overline{q}_\nu$ calculate pentru valoarea precedentă a lui q_1 se consideră valori estimate pentru noua poziţie a elementului iniţial. După cîteva aproximaţii efectuate prin aceeaşi metodă, acestea converg către valorile reale q_ν corespunzător noii poziţii a elementului iniţial al mecanismului. Se verifică în acelaşi timp că Δq_1 sînt suficient de mici. Se trasează apoi diagramele

$$q_\nu = q_\nu (q_1).$$

§ 4. PROBLEMA VITEZELOR ÎN CADRUL METODEI GENERALE MATRICIAL-TENSORIALE DE APROXIMAŢIE SUCCESIVĂ

8. Ne vom mărgini în cele ce urmează la determinarea valorilor succesive ale primelor derivate în raport cu timpul ale variabilelor cuplelor cinematice care fac parte dintr-un circuit simplu închis.

Pentru aceasta se derivează în raport cu timpul, membru cu membru, ecuaţia de închidere a circuitului (18) şi se obţine

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}T^{(1,0)}}{\mathrm{d}t} \cdot T^{(2,1)} \dots T^{(\nu,\nu-1)} \dots T^{(0,6)} + T^{(1,0)} \frac{\mathrm{d}T^{(2,1)}}{\mathrm{d}t} T^{(3,2)} \dots T^{(0,6)} + \\ &+ \dots + T^{(1,0)} T^{(2,1)} \dots T^{(\nu-1,\nu-2)} \frac{\mathrm{d}T^{(\nu,\nu-1)}}{\mathrm{d}t} T^{(\nu+1,\nu)} \dots T^{(0,5)} + \\ &+ \dots + T^{(1,0)} T^{(2,1)} \dots T^{(\nu,\nu-1)} \dots T^{(6,5)} \frac{\mathrm{d}T^{(0,6)}}{\mathrm{d}t} = 0. \end{aligned} \tag{77}$$

Cu ajutorul matricei operator de derivare Q_ν, definită anterior, se poate scrie

$$\frac{\mathrm{d}T^{(\nu,\nu-1)}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T^{(\nu,\nu-1)}}{\partial q_\nu} \frac{\mathrm{d}q_\nu}{\mathrm{d}t} = Q_\nu T^{(\nu,\nu-1)} \dot{q}_\nu, \tag{78}$$

unde $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T^{(\nu,\nu-1)}$ este tensorul viteză în mişcarea relativă a elementului J_ν faţă de elementul $J_{\nu-1}$, calculat în lucrarea autorilor [5].

Introducînd în ecuaţia (77), se obţine

$$\begin{aligned} &Q_1 T^{(1,0)} T^{(2,1)} \dots T^{(\nu,\nu-1)} \dots T^{(0,6)} \dot{q}_1 + T^{(1,0)} Q_2 T^{(2,1)} T^{(3,2)} \dots T^{(0.5)} \dot{q}_2 + \\ &+ \dots + T^{(1,0)} T^{(2,1)} \dots T^{(\nu-1,\nu-2)} Q_\nu T^{(\nu,\nu-1)} T^{(\nu+1,\nu)} \dots T^{(0,6)} \dot{q}_\nu + \\ &+ \dots + T^{(1,0)} T^{(2,1)} \dots T^{(\nu-1,\nu-2)} Q_0 T^{(0,6)} \dot{q}_0 = 0. \end{aligned} \tag{79}$$

Se poate forma produsul matricial B_ν:

$$B_\nu = T^{(1,0)}\, T^{(2,1)} \ldots T^{(\nu-1,\,\nu-2)}\, Q_\nu\, T^{(\nu,\,\nu-1)} \ldots T^{(0,6)}. \tag{80}$$

Introducînd în ecuația (79) și rearanjînd termenii, se deduce, în baza ecuației de închidere a circuitului,

$$B_2 \dot{q}_2 + B_3 \dot{q}_3 + \ldots + B_0 \dot{q}_0 = - B_1 \dot{q}_1. \tag{81}$$

Relația obținută poate fi generalizată pentru un circuit închis conținînd n elemente $J_0, J_1, \ldots, J_{n-1}$.

Aceasta este forma matricială a ecuației vitezelor. Ea exprimă vitezele generalizate ale cuplelor cinematice în funcție de viteza generalizată a elementului cinematic inițial $\dot{q}_1$.

Așa cum se observă, există similitudine între ecuația (81) și ecuația de aproximare stabilită în analiza deplasărilor.

Datorită proprietății matricei operator de derivare Q de a fi antisimetrică și a ortogonalității submatricelor $M^{(\nu,\,\nu-1)}$ ale rotației ce figurează în $T^{(\nu,\,\nu-1)}$ se poate arăta că, din cele 16 ecuații liniare cuprinse în ecuația matricială (81), numai șase sînt distincte. Dacă simbolul A este definit să reprezinte complet membrul stîng al ecuației (81) și dacă cupla cinematică care asociază elementul J_1 de batiul J_0 este o articulație, atunci

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \dot{q}_1. \tag{82}$$

Egalînd cele șase elemente ale matricelor sub diagonala principală, ecuația matricială (82) este complet satisfăcută, datorită proprietăților sale. Totuși, pentru a păstra analogia cu calculul folosit în analiza deplasărilor, trei elemente ale diagonalei principale vor fi utilizate pentru obținerea a trei ecuații adiționale. Astfel, cele nouă ecuații liniare sînt

$$\begin{aligned}
B_{221}\dot{q}_2 + B_{321}\dot{q}_3 + \ldots + B_{021}\dot{q}_0 &= 0, \\
B_{231}\dot{q}_2 + B_{331}\dot{q}_3 + \ldots + B_{031}\dot{q}_0 &= 0, \\
B_{241}\dot{q}_2 + B_{341}\dot{q}_3 + \ldots + B_{041}\dot{q}_0 &= 0, \\
B_{222}\dot{q}_2 + B_{322}\dot{q}_3 + \ldots + B_{022}\dot{q}_0 &= 0, \\
B_{232}\dot{q}_2 + B_{332}\dot{q}_3 + \ldots + B_{032}\dot{q}_0 &= 0, \\
B_{242}\dot{q}_2 + B_{342}\dot{q}_3 + \ldots + B_{042}\dot{q}_0 &= 0, \\
B_{233}\dot{q}_2 + B_{333}\dot{q}_3 + \ldots + B_{033}\dot{q}_0 &= 0, \\
B_{243}\dot{q}_2 + B_{343}\dot{q}_3 + \ldots + B_{043}\dot{q}_0 &= 0, \\
B_{244}\dot{q}_2 + B_{344}\dot{q}_3 + \ldots + B_{044}\dot{q}_0 &= 0.
\end{aligned} \tag{83}$$

Ecuaţiile (83) se transcriu sub forma unei singure ecuaţii matriciale

$$RD_\nu = C_\nu \dot{q}_1, \tag{84}$$

unde R reprezintă matricea rectangulară a coeficienţilor $B_{\nu j k}$, iar C_ν matricea unicolonară a constantelor din membrul al doilea al ecuaţiei (85). Cu alte cuvinte, avem

$$\begin{Vmatrix} B_{221} & B_{321} & \dots & B_{021} \\ B_{231} & B_{231} & \dots & B_{031} \\ B_{241} & B_{341} & \dots & B_{041} \\ B_{222} & B_{322} & \dots & B_{022} \\ B_{232} & B_{332} & \dots & B_{032} \\ B_{242} & B_{342} & \dots & B_{042} \\ B_{233} & B_{333} & \dots & B_{033} \\ B_{243} & B_{343} & \dots & B_{043} \\ B_{244} & B_{344} & \dots & B_{044} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \\ \dot{q}_0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \dot{q}_1. \tag{85}$$

Deoarece matricea R a coeficienţilor nu este pătratică, ea nu poate fi inversată. Rezultă că ecuaţia (85) nu poate fi rezolvată direct. Totuşi, mecanismul avînd mişcare desmodromă, sistemul are o soluţie ce poate fi obţinută prin metoda celor mai mici pătrate. Pentru aceasta se înmulţesc ambii membri ai ecuaţiei (84) prin matricea transpusă a coeficienţilor. Se obţine

$$R^t \cdot R \cdot D_\nu = R^t \cdot C_\nu \dot{q}_1. \tag{86}$$

Produsul $[R^t \cdot R]$ formează o matrice pătratică şi, considerînd că aceasta nu este o matrice singulară, el poate fi inversat. Aceasta conduce la o soluţie pentru matricea viteză D_ν necunoscută, adică

$$D_\nu = [R^t \cdot R]^{-1} \cdot R^t \cdot C_\nu \dot{q}_1. \tag{87}$$

În vederea generalizării rezultatelor obţinute, se va conveni să se rezolve ecuaţia matricială (87) pentru vitezele generalizate şi normalizate $\overline{\dot{q}}_\nu$, $\dot{q}_\nu = \overline{\dot{q}}_\nu \dot{q}_1$. Aceste viteze se obţin din ecuaţia

$$\overline{D}_\nu = [R^t \cdot R]^{-1} R^t C_\nu, \tag{88}$$

punînd într-însa $\dot{q}_1$ egal cu unitatea. Avem astfel, folosind notaţia matricială corespunzătoare pentru matricea unicolonară a vitezelor generalizate şi normalizate D_ν (88). Se observă că efortul de calcul este minim, pentru că matricea R^t şi matricea $[R^t \cdot R]^{-1}$ au fost deja calculate în cadrul analizei deplasărilor. Analiza vitezelor constă, prin urmare, în cazul considerat aici, numai în două multiplicări matriciale, aşa cum se vede din ecuaţia (88), urmate apoi de o multiplicare ulterioară a matricei (87) cu $\dot{q}_1$.

Ecuația (86) a fost rezolvată în ipoteza că matricea $[R^t \cdot R]$ are determinantul asociat de rang maxim diferit de zero. Dacă acest determinant al matricei $[R^t \cdot R]$ este zero, matricea nu poate fi inversată, lăsînd vitezele nedefinite. Acest lucru se întîmplă numai în pozițiile de întoarcere (puncte moarte) ale mecanismului, ele constituind puncte singulare.

§ 5. PROBLEMA DETERMINĂRII ACCELERAȚIILOR DE PRIMUL ORDIN ÎN CADRUL METODEI MATRICIAL-TENSORIALE DE APROXIMAȚIE SUCCESIVĂ

9. A doua derivată în raport cu timpul a variabilei unei cuple cinematice, se notează, păstrînd notațiile și ipotezele fixate anterior, prin

$$\ddot{q}_\nu = \frac{\mathrm{d}^2 q_\nu}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\dot{q}_\nu}{\mathrm{d}t}. \tag{89}$$

Se consideră ecuația matricială a vitezelor.

Pentru derivarea acestei ecuații în raport cu timpul este necesar să se găsească o expresie convenabilă pentru derivata în raport cu timpul a produsului matricial B_ν, adică

$$\frac{\mathrm{d}B_\nu}{\mathrm{d}t} = \dot{B}_\nu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,[T^{(1,0)}\,T^{(2,1)} \ldots T^{(\nu-1,\,\nu-2)}\,Q_\nu\,T^{(\nu,\,\nu-1)} \ldots T^{(0,6)}]. \tag{90}$$

Se poate scrie

$$\begin{aligned}
\dot{B}_\nu = {} & \frac{\mathrm{d}T^{(1,0)}}{\mathrm{d}t}\,T^{(2,1)} \ldots T^{(\nu-1,\,\nu-2)}\,Q_\nu\,T^{(\nu,\,\nu-1)} \ldots T^{(0,6)} + \\
& + T^{(1,0)}\,\frac{\mathrm{d}T^{(2,1)}}{\mathrm{d}t}\,T^{(3,2)} \ldots T^{(\nu-1,\,\nu-2)}\,Q_\nu\,T^{(\nu,\,\nu-1)} \ldots T^{(0,6)} + \ldots \\
& \ldots + T^{(1,0)}\,T^{(2,1)} \ldots T^{(\nu-2,\,\nu-3)}\,\frac{\mathrm{d}T^{(\nu-1,\,\nu-2)}}{\mathrm{d}t}\,Q_\nu\,T^{(\nu,\,\nu-1)} \ldots T^{(0,6)} + \\
& + T^{(1,0)}\,T^{(2,1)} \ldots T^{(\nu-1,\,\nu-2)}\,\frac{\mathrm{d}Q_\nu}{\mathrm{d}t}\,T^{(\nu,\,\nu-1)} \ldots T^{(0,6)} + \ldots + \\
& + T^{(1,0)}\,T^{(2,1)} \ldots T^{(\nu-1,\,\nu-2)}\,Q_\nu\,\frac{\mathrm{d}T^{(\nu,\,\nu-1)}}{\mathrm{d}t}\,T^{(\nu+1,\,\nu)} \ldots T^{(0,6)} + \ldots + \\
& + T^{(1,0)}\,T^{(2,1)} \ldots T^{(\nu-1,\,\nu-2)}\,Q_\nu\,T^{(\nu,\,\nu-1)} \ldots T^{(6,5)}\,\frac{\mathrm{d}T^{(0,6)}}{\mathrm{d}t}.
\end{aligned} \tag{91}$$

și, utilizînd operatorii de derivare, rezultă

$$\begin{aligned}
\dot{B}_\nu = {} & Q_1\,T^{(1,0)}\,T^{(2,1)} \ldots T^{(\nu-1,\,\nu-2)}\,Q_\nu\,T^{(\nu,\,\nu-1)} \ldots T^{(0,6)} + T^{(1,0)}\,Q_2\,T^{(2,1)} \ldots \\
& \ldots T^{(\nu-1,\,\nu-2)}\,Q_\nu\,T^{(\nu,\,\nu-1)} \ldots T^{(0,6)}\,\dot{q}_2 + \ldots + T^{(1,0)} \ldots \\
& \ldots T^{(\nu-2,\,\nu-3)}\,Q_{\nu-1}\,T^{(\nu-1,\,\nu-2)}\,Q_\nu \cdot T^{(\nu,\,\nu-1)} \ldots T^{(0,6)}\,\dot{q}_{\nu-1} + \ldots + T^{(1,0)} \ldots \\
& \ldots T^{(\nu-1,\,\nu-2)}\,Q_\nu\,Q_\nu\,T^{(\nu,\,\nu-1)} \ldots T^{(0,6)}\,\dot{q}_\nu + \ldots + T^{(1,0)} \ldots \\
& \ldots T^{(\nu-1,\,\nu-2)}\,Q_\nu\,T^{(\nu,\,\nu-1)} \ldots T^{(6,5)}\,Q_0\,T^{(0,6)}\,\dot{q}_0.
\end{aligned} \tag{92}$$

De notat că fiecare termen al acestei expresii este de forma

$$T^{(1,0)} \dots T^{(j-1,\,j-2)}\, Q_j\, T^{(j,\,j-1)} \dots T^{(t-1,\,k-2)}\, Q_k\, T^{(k,\,k-1)} \dots T^{(0,6)}\, \dot{q}_j. \tag{93}$$

Introducînd în termenul de mai sus, la locul indicat, un factor egal cu unitatea $T^{(t,\,t-1)} \dots T^{(0,6)}\, T^{(0,1)} \dots T^{(k-1,\,k-2)}$, fapt care se justifică de la sine dacă se ţine seama de ipoteza că avem de-a face cu un circuit închis, precum şi de faptul că ecuaţia de închidere a circuitului (18) se poate scrie de la oricare element, avem succesiv

$$\begin{aligned} &T^{(1,0)} \dots T^{(j-1,\,j-2)}\, Q_j.\ T^{(j,\,j-1)} \dots T^{(k-1,\,k-2)}. \\ &[T^{(k,\,t-1)} \dots T^{(0,6)}\, T^{(1,0)} \dots T^{(k-1,\,k-2)}] \cdot Q_k\, T^{(k,\,k-1)} \dots T^{(0,6)} \dot{q}_j. \end{aligned} \tag{94}$$

şi, prin urmare

$$\begin{aligned} &[T^{(1,0)} \dots T^{(j-1,\,j-2)}\, Q_j T^{(j,\,j-1)} \dots T^{(0,6)}]. \\ &[T^{(1,0)} \dots T^{(k-1,\,k-2)}\, Q_k T^{(k,\,k-1)} \dots T^{(0,6)}]\, \dot{q}_j = B_j B_k \dot{q}_j. \end{aligned} \tag{95}$$

Introducînd această formă a ecuaţiei matriciale în expresia (92), se obţine, ţinîndu-se, bineînţeles, seama de ordinea permisă a multiplicărilor cu matrice,

$$\begin{aligned} \dot{B}_\nu = {} & B_1 B_\nu \dot{q}_1 + B_2 B_\nu \dot{q}_2 + \dots + B_{\nu-1} B_\nu \dot{q}_{\nu-1} + \dots + \\ & + B_\nu B_\nu \dot{q}_\nu + B_\nu B_{\nu+1}\, \dot{q}_{\nu+1} + \dots + B_0 B_\nu \dot{q}_0. \end{aligned} \tag{96}$$

Derivînd ambii membri ai ecuaţiei matriciale a vitezelor, se obţine

$$\begin{aligned} & B_2 \ddot{q}_2 + B_3 \ddot{q}_2 + \dots + B_0 \ddot{q}_0 + \\ & + \dot{B}_2 \dot{q}_2 + \dot{B}_3 \dot{q}_3 + \dots + \dot{B}_0 \dot{q}_0 = - Q_1 \ddot{q}_1 \end{aligned} \tag{97}$$

După rearanjarea termenilor şi substituirea expresiei (96) în ecuaţia (97), rezultă

$$\begin{aligned} & B_2 \ddot{q}_2 + B_3 \ddot{q}_3 + \dots + B_0 \ddot{q}_0 - Q_1 \ddot{q}_1 - \\ & - B_1 B_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - B_2 B_2 \dot{q}_2 \dot{q}_2 - B_2 B_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 - \dots - B_2 B_0 \dot{q}_2 \dot{q}_0 - \\ & - B_1 B_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 - B_2 B_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 - B_3 B_3 \dot{q}_3 \dot{q}_3 - \dots - B_3 B_0 \dot{q}_3 \dot{q}_0 - \\ & - \qquad\qquad . \quad . \quad . \qquad\qquad - \\ & - B_1 B_0 \dot{q}_1 \dot{q}_0 - B_2 B_0 \dot{q}_2 \dot{q}_0 - B_3 B_0 \dot{q}_3 \dot{q}_0 - \dots - B_0 B_0 \dot{q}_0 \dot{q}_0. \end{aligned} \tag{98}$$

Sistemul (98), dacă se regrupează convenabil termenii în vederea operaţiilor matriciale care urmează, devine

$$\begin{aligned} B_2 \ddot{q}_2 + B_3 \ddot{q}_3 + \dots + B_0 \ddot{q}_0 = {} & - Q_1 \ddot{q}_1 - (B_1 \dot{q}_1 + B_2 \dot{q}_2 + \underline{B_1 \dot{q}_1})\, B_2 \dot{q}_2 - \\ & - (B_1 \dot{q}_1 + B_2 \dot{q}_2 + B_3 \dot{q}_3 + \underline{B_1 \dot{q}_1} + B_2 \dot{q}_2) B_3 \dot{q}_3 - \\ & - \qquad\qquad . \quad . \quad . \qquad\qquad - \\ & - (B_1 \dot{q}_1 + B_2 \dot{q}_2 + B_3 \dot{q}_3 + \dots + B_0 \dot{q}_0 + \underline{B_1 \dot{q}_1} + B_2 \dot{q}_2 + B_3 \dot{q}_3 + \dots + \\ & + B_6 \dot{q}_6)\, B_0 \dot{q}_0 + \underline{B_1 \dot{q}_1 (B_2 \dot{q}_2 + B_3 \dot{q}_3 + \dots + B_0 \dot{q}_0)}. \end{aligned} \tag{99}$$

De notat că termenii subliniați au fost adăugați și scăzuți din ecuație pentru a-i da forma dorită.

Din ecuația vitezelor se constată că ultima linie se reduce la

$$B_1\dot{q}_1(B_2\dot{q}_2 + B_3\dot{q}_3 + \ldots + B_0\dot{q}_0) = -B_1B_1\dot{q}_1\dot{q}_1 \tag{100}$$

și

$$B_1B_1 = Q_1Q_1.$$

Introducîndu-se vitezele generalizate normalizate $\dot{\bar{q}}_\nu$, se notează prin simbolul W_ν expresia

$$W_\nu = B_1 + B_2\dot{\bar{q}}_2 + \ldots B_\nu\dot{\bar{q}}_\nu. \tag{101}$$

Ținînd seama de faptul că termenii care figurează în (99) pot fi calculați numeric în prealabil, ecuația accelerațiilor generalizate de primul ordin se scrie

$$B_2\ddot{q}_2 + B_3\ddot{q}_3 + \ldots + B_n\ddot{q}_n = -Q_1\ddot{q}_1 +$$
$$+ [Q_1Q_1 + (W_1 + W_2)\,B_2\dot{\bar{q}}_2 + (W_2 + W_3)\,B_3\dot{\bar{q}}_3 + \ldots + (W_6 +$$
$$+ W_0)\,B_0\dot{\bar{q}}_0]\,\dot{q}_1^2. \tag{102}$$

Această ecuație matricială este analogă ca formă cu ecuația vitezelor (81) și are aceleași proprietăți de antisimetrie. Ea este echivalentă cu un sistem de nouă ecuații liniare similare cu ecuațiile (85). Dacă sînt definite matricele unicolonare C_a și D_a,

$$C_a = \left\| \begin{matrix} A_{21} \\ A_{31} \\ A_{41} \\ A_{22} \\ A_{32} \\ A_{42} \\ A_{33} \\ A_{43} \\ A_{44} \end{matrix} \right\| \tag{103},$$

$$D_a = \left\| \begin{matrix} \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \\ \\ \ddot{q}_0 \end{matrix} \right\}, \tag{104}$$

fiecare A_{jk} fiind o matrice 4×4 care include toți termenii cuprinși în paranteze drepte din ecuația (102) și semnul minus. În formă matricială, cele nouă ecuații liniare pot fi scrise

$$RD_a = C_v\ddot{q}_1 + C_a\dot{q}_1^2, \tag{105}$$

matricele R și C_v fiind cele din paragraful anterior. Pentru a rezolva sistemul matricial de prima aproximație din cadrul analizei accelerațiilor

de primul ordin, se foloseşte metoda celor mai mică pătrate. Se scrie succesiv

$$D_a = [R^t R]^{-1} R^t C_v \ddot{q}_1 + [R^t R]^{-1} R^t C_a \dot{q}_1^2, \tag{106}$$

sau

$$D_a = \bar{D}_v \ddot{q}_1 + \bar{D}_a \dot{q}_1^2, \tag{107}$$

unde $\bar{D}_v$ este matricea definită în paragraful precedent şi

$$\bar{D}_a = [R^t R]^{-1} R^t C_a. \tag{108}$$

În vederea generalizării rezultatelor obţinute, se poate întroduce noţiunea de acceleraţie normalizată $\ddot{\bar{q}}_\nu$, astfel încît

$$\ddot{q}_\nu = \dot{\bar{q}}_\nu \ddot{q}_1 + \ddot{\bar{q}}_\nu (\dot{q}_1)^2, \tag{109}$$

în care $\dot{\bar{q}}_\nu$ sînt vitezele normalizate şi $\ddot{\bar{q}}_\nu$ pot fi calculate cu ajutorul ecuaţiei (108).

Merită subliniată expresia (109). Ea decurge din prezenţa matricei C_v în ecuaţia (105).

Acceleraţiile generalizate $\ddot{\bar{q}}_\nu$ nu sînt definite numai în poziţiile de întoarcere ale mecanismelor (puncte moarte), unde matricea $[R^t R]$ este singulară.

§ 6. PROBLEMA DETERMINĂRII ACCELERAŢIILOR DE ORDIN SUPERIOR PRIN METODA MATRICIAL-TENSORIALĂ DE APROXIMAŢII SUCCESIVE

10. Dacă se notează prin $\dddot{q}_\nu$ a treia derivată în raport cu timpul a variabilei unei cuple cinematice, adică acceleraţia generalizată de ordinul doi,

$$\dddot{q}_\nu = \frac{\mathrm{d}\ddot{q}_\nu}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 q_\nu}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^3 q_\nu}{\mathrm{d}t^3}, \tag{110}$$

valorile acestor mărimi se pot obţine printr-un procedeu întru totul analog cu cel utilizat pentru acceleraţiile generalizate de ordinul întîi, adică $\ddot{q}_\nu$.

Se găseşte o expresie convenabilă a derivatei de ordinul al doilea a produsului matricial B_ν, adică $\ddot{B}_\nu = \dfrac{\mathrm{d}^2 B_\nu}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\mathrm{d}\dot{B}_\nu}{\mathrm{d}t}$, utilizînd operatorii de derivare Q_ν.

Se derivează ambii membri ai ecuaţiei acceleraţiilor generalizate de ordinul întîi (102) şi se izolează apoi în membrul întîi termenii de forma $B_\nu \dddot{q}_\nu$. În membrul al doilea vor apărea şi termeni conţinînd $\dot{q}_\nu$ şi $\ddot{q}_\nu$. Se obţine astfel o ecuaţie matricială a acceleraţiilor de ordinul al doilea, care poate fi rezolvată prin metoda celor mai mici pătrate.

Introducînd și aici noțiunea de accelerație normalizată, $\dddot{\bar{q}}_\nu$, în expresia analogă relației [109) vor apărea, în locul termenilor $\ddot{\bar{q}}_\nu\,\ddot{q}_1$ și $\dddot{\bar{q}}_\nu\,(\dot{q}_1)^2$, succesiv $\dddot{\bar{q}}_\nu\,\dddot{q}_1$ și,

$$3\ddot{\bar{q}}_\nu\dot{q}_1\ddot{q}_1\,,\quad \dddot{\bar{q}}_\nu\dot{q}_1^3.$$

și, mai general,

$$q_\nu^{(m)} = K_{m1}\dot{\bar{q}}_\nu + K_{m2}\ddot{\bar{q}}_\nu + \ldots + K_{nm}\dddot{\bar{q}}_\nu^{(n)}, \tag{111}$$

$$K_{mn} = \dot{K}_{m-1,\,n} + \dot{q}_1 K_{m-1,\,n-1} \qquad (n = 1,\ 2,\ldots,m).$$

Din aproape în aproape, prin același procedeu, se pot determina accelerațiile generalizate de ordin oarecare m.

§ 7. STUDIUL DEPLASĂRILOR PUNCTELOR APARȚINÎND UNOR DOMENII SOLIDARE CU ELEMENTELE MECANISMULUI

11. Metoda matricială-tensorială a fost dezvoltată definind un sistem de axe de coordonate rectangular drept $O_\nu x_{\nu1}\,x_{\nu2}\,x_{\nu3}$ solidar cu elementul J_ν. Fiecare punct al domeniului D_ν poate fi definit prin coordonatele sale în acest sistem.

Poziția punctului considerat P față de sistemul de axe de coordonate solidar cu batiul J_0 este definită de coordonatele sale x_{01}, x_{02}, x_{03}. Dacă se introduc două matrice unicolonare pentru a reprezenta vectorii de poziție ai căror componente sînt coordonatele punctului P în cele două sisteme de axe de coordonate,

$$X_\nu^* = \left\| \begin{matrix} 1 \\ x_{\nu1} \\ x_{\nu2} \\ x_{\nu3} \end{matrix} \right\|, \tag{112}$$

$$\overline{X}_\nu^* = \left\| \begin{matrix} 1 \\ x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{matrix} \right\|, \tag{113}$$

atunci relația dintre acești doi vectori se poate scrie

$$\overline{X}_\nu^* = T^{(1,0)}\,T^{(2,1)}\ldots T^{(\nu,\nu-1)}X_\nu^*. \tag{114}$$

Dacă se calculează matricea

$$T^{(\nu,0)} = T^{(1,0)}\,T^{(2,1)}\ldots T^{(\nu,\nu-1)}$$

pentru fiecare element, atunci o singură multiplicare matricială permite determinarea lui $\overline{X}_\nu^*$, adică

$$\overline{X}_\nu^* = T^{(\nu,0)}X_\nu^*. \tag{115}$$

Fiecare punct aparținînd fiecărui domeniu D_ν solidar cu elementul J_ν poate fi urmărit în felul astfel indicat.

§ 8. VITEZELE PUNCTELOR APARŢINÎND UNOR DOMENII SOLIDARE CU ELEMENTELE MECANISMULUI

12. Vitezele punctelor pot fi determinate în mod analog cu vitezele generalizate. Punctul de plecare îl constituie ecuaţia (114), care se derivează membru cu membru în raport cu timpul. Se utilizează operatorii de derivare, adică se poate scrie

$$\begin{aligned} \dot{X}_\nu^* = {} & Q_1 T^{(1,0)} T^{(2,1)} \dots T^{(\nu,\nu-1)} X_\nu^* \dot{q}_1 + \\ & + T^{(1,0)} Q_2 T^{(2,1)} \dots T^{(\nu,\nu-1)} X_\nu^* \dot{q}_1 + \dots + \\ & + T^{(1,0)} T^{(2,1)} \dots T^{(\nu-1,\nu-2)} Q_\nu T^{(\nu,\nu-1)} X_\nu^* \dot{q}_\nu + T^{(1,0)} \dots T^{(\nu,\nu-1)} \dot{X}_\nu^* . \end{aligned} \tag{116}$$

Deoarece $x_{\nu i}$ $(i = 1, 2, 3)$ sînt coordonatele unui punct fix în raport cu axele solidare cu elementul J_ν, avem $\dot{X}_\nu^* = 0$. Fiecare din termenii rămaşi este de forma

$$T^{(1,0)} T^{(2,1)} \dots T^{(j-1,j-2)} Q_j T^{(j,j-1)} \dots T^{(\nu,\nu-1)} X_\nu^* \dot{q}_j . \tag{117}$$

Introducerea unui factor egal cu unitatea dă

$$\begin{aligned} & T^{(1,0)} . T^{(2,1)} \dots T^{(j-1,j-2)} Q_j T^{(j,j-1)} \dots T^{(\nu,\nu-1)} . \\ & [T^{(\nu+1,\nu)} \dots T^{(0,6)} . T^{(1,0)} \dots T^{(\nu,\nu-1)}] X_\nu^* \dot{q}_j , \end{aligned} \tag{118}$$

Aceşti termeni pot fi regrupaţi după cum urmează:

$$\begin{aligned} & [T^{(1,0)} . T^{(2,1)} \dots T^{(j-1,j-2)} Q_j T^{(j,j-1)} \dots T^{(0,6)}] . \\ & [T^{(1,0)} \dots T^{(\nu,\nu-1)}] X_\nu^* \dot{q}_j = B_j T^{(\nu,0)} X_\nu^* \dot{\bar{q}}_j \dot{q}_1 . \end{aligned} \tag{119}$$

Introducînd aceşti termeni în ecuaţia (116), se obţine

$$\dot{\bar{X}}_\nu^* = B_1 T^{(\nu,0)} X_\nu^* \dot{q}_1 + B_2 T^{(\nu,0)} X_\nu^* \dot{\bar{q}}_2 \dot{q}_1 + \dots + B_{\nu-1} T^{(\nu,0)} X_\nu^* \dot{\bar{q}}_\nu \dot{q}_1 , \tag{120}$$

sau

$$\dot{\bar{X}}_\nu^* = (B_1 + B_2 \dot{\bar{q}}_2 + \dots + B_{i-1} \dot{\bar{q}}_\nu) T^{(\nu,0)} X_\nu^* \dot{q}_1 . \tag{121}$$

Dacă produsul matricial

$$U_\nu = W_{\nu-1} T^{(\nu,0)} \tag{122}$$

este calculat, o singură înmulţire matricială furnizează viteza punctului considerat, adică

$$\dot{\bar{X}}_\nu^* = U_\nu X_\nu^* \dot{q}_1 . \tag{123}$$

Prin urmare aceste matrice sînt vitezele matriciale ale punctelor considerate.

§ 9. ACCELERAȚIILE DE ORDINUL ÎNTÎI ALE PUNCTELOR APARȚINÎND UNOR DOMENII SOLIDARE CU ELEMENTELE MECANISMULUI

13. Pentru a obține relațiile care determină accelerația de ordinul întîi a unui punct dat, va fi necesar să se deriveze membru cu membru, în raport cu timpul, ecuația (116).

Este util să se găsească derivata termenului general

$$\dot{\overline{X}}_{\nu}^{**} = T^{(1,0)}\, T^{(2,1)} \ldots T^{(j-1,\, j-2)}\, Q_j\, T^{(j,\, j-1)} \ldots T^{(\nu,\, \nu-1)}\, X_{\nu}^{*}\, \dot{q}_j. \tag{124}$$

Utilizînd din nou operatorul matricial de derivare Q_ν, se obține

$$\begin{aligned}
\ddot{\overline{X}}_{\nu}^{**} = {} & Q_1\, T^{(1,0)}\, T^{(2,1)} \ldots T^{(j-1,\, j-2)}\, Q_j\, T^{(j,\, j-1)} \ldots T^{(\nu,\, \nu-1)}\, X_{\nu}^{*}\, \dot{q}_1 \dot{q}_j + \\
& + T^{(1,0)}\, Q_2\, T^{(2,1)} \ldots T^{(j-1,\, j-2)}\, Q_j\, T^{(j,\, j-1)} \ldots T^{(\nu,\, \nu-1)}\, X_{\nu}^{*}\, \dot{q}_2 \dot{q}_j + \ldots + \\
& + T^{(1,0)}\, T^{(2,1)} \ldots T^{(j-1,\, j-2)}\, Q_j\, Q_j\, T^{(j,\, j-1)} \ldots T^{(\nu,\, \nu-1)}\, X_{\nu}^{*}\, \dot{q}_j \dot{q}_j + \ldots + \\
& + T^{(1,0)}\, T^{(2,1)} \ldots T^{(j-1,\, j-2)}\, Q_j\, T^{(j,\, j-1)} \ldots T^{(\nu-1,\, \nu-2)}\, Q_\nu\, T^{(\nu,\, \nu-1)}\, X_{\nu}^{*}\, \dot{q}_\nu \dot{q}_j + \\
& + \ldots + T^{(1,0)}\, T^{(2,1)} \ldots T^{(j-1,\, j-2)}\, Q_j\, T^{(j,\, j-1)} \ldots T^{(\nu,\, \nu-1)}\, X_{\nu}^{*}\, \ddot{q}_j.
\end{aligned} \tag{125}$$

După introducerea factorilor potriviți, se poate arăta că această expresie se reduce la

$$\begin{aligned}
\ddot{\overline{X}}_{\nu}^{**} = {} & B_1 B_j\, T^{(\nu,0)}\, X_{\nu}^{*}\, \dot{q}_1 \dot{q}_j + B_2 B_j\, T^{(\nu,0)}\, X_{\nu}^{*}\, \dot{q}_2 \dot{q}_j + \ldots + B_j B_j\, T^{(\nu,0)}\, X_{\nu}^{*} \\
& \dot{q}_j \dot{q}_j + \ldots + B_j B_{\nu-1}\, T^{(\nu,0)}\, X_{\nu}^{*}\, \dot{q}_j \dot{q}_\nu + B_j\, T^{(\nu,0)}\, X_{\nu}^{*}\, \ddot{q}_\nu
\end{aligned} \tag{126}$$

și, după scoaterea factorilor comuni,

$$\begin{aligned}
\ddot{\overline{X}}_{\nu}^{**} = {} & [B_1 B_j\, \dot{\bar{q}}_j + B_2\, B_j\, \dot{\bar{q}}_2\, \dot{q}_j + \ldots + B_j B_j\, \dot{\bar{q}}_j \dot{\bar{q}}_j + \ldots + \\
& + B_j B_{\nu-1}\, \dot{\bar{q}}_j \dot{\bar{q}}_\nu]\, T^{(\nu,0)}\, X_{\nu}^{*}\, \dot{q}_1^2 + B_j\, T^{(\nu,0)}\, \ddot{q}_j.
\end{aligned} \tag{127}$$

De notat că B_j nu poate fi scos în factor comun, datorită necesității de a se ține seama de ordinea multiplicării matricelor.

Introducînd acești termeni în ecuația (116), se obține

$$\begin{aligned}
\ddot{\overline{X}}_{\nu}^{*} = {} & [B_1\, \ddot{q}_1 + B_2\, \ddot{q}_2 + \ldots + B_{\nu-1}\, \ddot{q}_\nu]\, (T^{(\nu,0)}\, X_{\nu}^{*}) + \\
& + [B_1 B_1 + B_1 B_2\, \dot{\bar{q}}_2 + \ldots + B_1 B_{\nu-1}\, \dot{\bar{q}}_\nu + \\
& + B_1 B_2\, \dot{\bar{q}}_2 + B_2\, B_2\, \dot{\bar{q}}_2 \dot{\bar{q}}_2 + \ldots + B_2 B_\nu\, \dot{\bar{q}}_2 \dot{\bar{q}}_\nu + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + B_1 B_\nu\, \dot{\bar{q}}_\nu + \ldots + B_\nu B_\nu\, \dot{\bar{q}}_\nu]\, (T^{(\nu,0)}\, X_{\nu}^{*}\, \dot{q}_1^2).
\end{aligned} \tag{128}$$

Folosind expresia accelerațiilor generalizate normalizate, se deduce

$$\begin{aligned}
& (B_1\, \ddot{q}_1 + B_2\, \ddot{q}_2 + \ldots + B_{\nu-1}\, \ddot{q}_\nu)\, (T^{(\nu,0)}\, X_{\nu}^{*}) = \\
& = (B_1 + B_2\, \dot{\bar{q}}_2 + \ldots + B_{\nu-1}\, \dot{\bar{q}}_\nu)\, T^{(\nu,0)}\, X_{\nu}^{*}\, \ddot{q}_1 + \\
& + (B_2\, \ddot{\bar{q}}_2 + B_3\, \ddot{\bar{q}}_3 + \ldots + B_{\nu-1}\, \ddot{\bar{q}}_\nu)\, T^{(\nu,0)}\, X_{\nu}^{*}\, \dot{q}_1^2.
\end{aligned} \tag{129}$$

Introducînd în ecuaţia (128), regrupînd şi scoţînd factorii comuni, rezultă

$$\begin{aligned}\ddot{X}^*_\nu = {} & [B_1 + B_2\dot{\bar{q}}_2 + \ldots + B_{\nu-1}\dot{\bar{q}}_\nu]\, T^{(\nu,0)} X^*_\nu \ddot{q}_1 + \\ & + [(B_2\ddot{\bar{q}}_2 + B_3\ddot{\bar{q}}_3 + \ldots + B_{\nu-1}\ddot{\bar{q}}_\nu) + \\ & + (B_1) B_1 + (B_1 + B_2\dot{\bar{q}}_2 + B_1) B_2\dot{\bar{q}} + \\ & + (B_1 + B_2\dot{\bar{q}}_2 + B_3\dot{\bar{q}}_3 + B_1 + B_2\dot{\bar{q}}_2) B_3\dot{\bar{q}}_3 + \ldots + \\ & + (B_1 + B_2\dot{\bar{q}}_2 + \ldots + B_{\nu-1}\dot{\bar{q}}_\nu + B_1 + B_2\dot{\bar{q}}_2 + \ldots + \\ & + B_{\nu-2}\dot{\bar{q}}_{\nu-1}) B_{\nu-1}\dot{\bar{q}}_\nu]\, T^{(\nu,0)} X^*_\nu \dot{q}_1^2 .\end{aligned} \tag{130}$$

După rearanjarea unor grupe de termeni, se obţin din (130)

$$\begin{aligned}\ddot{\overline{X}}^*_\nu = {} & W_{\nu-1}\, T^{(\nu,0)} X^*_\nu \ddot{q}_1 + [(B_2\ddot{\bar{q}}_2 + B_3\ddot{\bar{q}}_3 + \ldots + B_{\nu-1}\ddot{\bar{q}}_\nu) + \\ & + Q_1 Q_1 + (W_1 + W_2) B_2\dot{\bar{q}}_2 + (W_2 + W_3) B_3\dot{\bar{q}}_3 + \ldots + \\ & + (W_{\nu-2} + W_{\nu-1}) B_{\nu-1}\dot{\bar{q}}_{\nu-1}]\, T^{(\nu,0)} X^*_\nu \dot{q}_1^2 .\end{aligned} \tag{131}$$

Definind o nouă matrice V_ν

$$\begin{aligned}V_\nu = {} & [(B_2\ddot{\bar{q}}_2 + B_3\ddot{\bar{q}}_3 + \ldots + B_{\nu-1}\ddot{\bar{q}}_\nu) + \\ & + Q_1 Q_1 + (W_1 + W_2) B_2\dot{\bar{q}}_2 + (W_2 + W_3) B_2\dot{\bar{q}}_3 + \ldots + \\ & + (W_{\nu-2} + W_{\nu-1}) B_{\nu-1}\dot{\bar{q}}_\nu]\, T^{(\nu,0)},\end{aligned} \tag{132}$$

care poate fi evaluată numeric cu ajutorul MEC, acceleraţia oricărui punct poate fi exprimată ca suma a doi termeni

$$\ddot{\overline{X}}^*_\nu = U_\nu X^*_\nu \ddot{q}_1 + V_\nu X^*_\nu \dot{q}_1^2 . \tag{133}$$

§ 10. ACCELERAŢIILE DE ORDIN SUPERIOR ALE PUNCTELOR APARŢINÎND UNOR DOMENII SOLIDARE CU ELEMENTELE MECANISMULUI

14. Procedînd similar cu cele expuse în paragraful precedent, introducînd, după determinarea expresiilor pentru $\overline{X}^{*(m)}_\nu$ şi rearanjarea unor grupe de termeni, anume matrice noi care pot fi evaluate numeric în prealabil prin folosirea MEC, acceleraţiile de ordin superior ale unui punct oarecare solidar cu elementul J_ν al mecanismului considerat pot fi exprimate ca sumă a m termeni :

$$\overline{X}^{*(m)}_\nu = U_{\nu m n} X^*_\nu q_1^{(m)} + \ldots \qquad (n = 1, 2, \ldots, m), \tag{134}$$

în care prin $U_{\nu m n}$ şi $U_{\nu m\, n-1}$, ... s-au notat, aşa cum a arătat primul dintre autori în [40], anume expresii recurente.

§ 11. PROBLEMATICA ACTUALĂ ASOCIATĂ METODEI MATRICIALE-TENSORIALE

15. Rezervînd, după cum s-a anunțat în introducere, o altă lucrare pentru traducerea aproximațiilor succesive din cadrul metodei matriciale-tensoriale elaborate într-una din limbile matematice artificiale în vederea

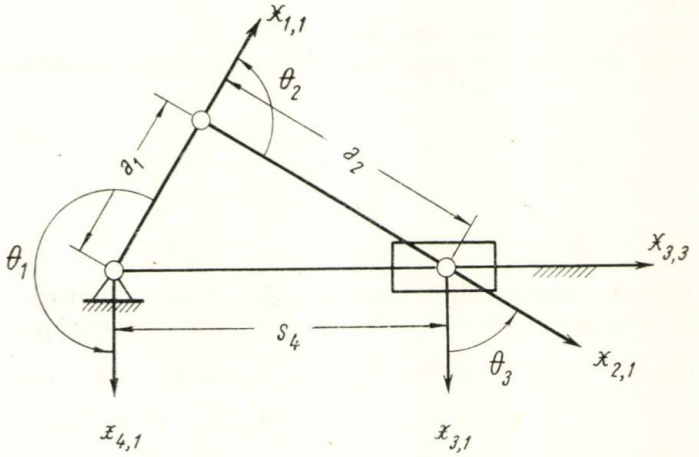


Fig. 6

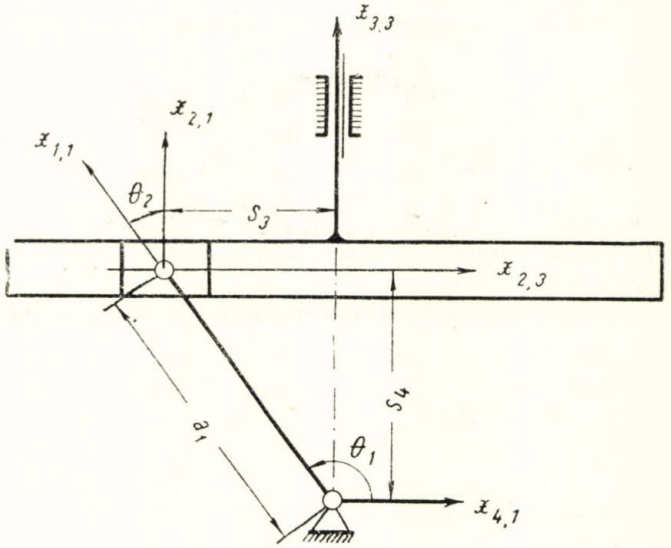


Fig. 7

aplicării mașinilor digitale electronice de calcul, subliniem că John J. Uicker jr. [38], luînd ca bază lucrările autorilor [5] ș.a. a tradus în limbajul

FORTRAN II pentru programarea specifică pentru uzul IBM 709 (International Business Machine Corporation FORmula TRANslating system, 709/7090, FORTRAN II) ansamblul problemelor relative la analiza poziţională şi la analiza cîmpurilor de viteze şi de acceleraţii pentru următoarele mecanisme şi ecuaţii simbolice corespunzătoare dimensiunilor particulare alese :

I. *Mecanism de bielă-manivelă* (fig. 6)

Ecuaţia simbolică corespunzătoare dimensiunilor particulare alese[6]) este

$$R_1 \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ \theta_1 \\ 0 \end{vmatrix} R_2 \begin{vmatrix} 5 \\ 0 \\ \theta_2 \\ 0 \end{vmatrix} R_3 \begin{vmatrix} 0 \\ 90^\circ \\ \theta_3 \\ 0 \end{vmatrix} P_4 \begin{vmatrix} 0 \\ -90^\circ \\ 0 \\ S_4 \end{vmatrix} = 1, \tag{135}$$

pe cînd metoda matricială-tensorială, elaborată de autori, referindu-se, de exemplu, la unele rezultate privitoare la bielă-manivelă spaţială, dă [42]

$$s_1 = a_3 \sin\theta_0 + \sqrt{a_2^2 - (a_3\cos\theta_0 + a_0)^2},\ \sin\theta_2^1 = (a_3\cos\theta_0 + a_0)\,a_2^{-1},$$

$$\omega^{(2,0)} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \theta_2^1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\theta_2^1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},\ \omega^{(3,0)} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dot\theta_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dot\theta_0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{136}$$

II. *Mecanism cu culisă* (fig. 7)

Ecuaţia simbolică corespunzătoare dimensiunilor particulare alese este

$$R_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1 \\ 0 \end{vmatrix} R_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 90^\circ \\ \theta_2 \\ 0 \end{vmatrix} P_3 \begin{vmatrix} 0 \\ 90^\circ \\ 90^\circ \\ s_3 \end{vmatrix} P_4 \begin{vmatrix} 0 \\ 90^\circ \\ 90^\circ \\ s_4 \end{vmatrix} = E. \tag{137}$$

III. *Mecanism spaţial cu două cuple rotoide*[7]) *şi două articulaţii sferice* (fig. 8).

Ecuaţia corespunzătoare dimensiunilor alese particulare este

$$R_1 \begin{vmatrix} 1{,}0 \\ 90^\circ \\ \theta_1 \\ -2{,}12 \end{vmatrix} R_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 90^\circ \\ \theta_2 \\ 0 \end{vmatrix} R_3 \begin{vmatrix} 0 \\ 90^\circ \\ \theta_3 \\ 0 \end{vmatrix} R_4 \begin{vmatrix} 0 \\ -90^\circ \\ \theta_4 \\ 3{,}0 \end{vmatrix} R_5 \begin{vmatrix} 0 \\ -90^0 \\ \theta_5 \\ 0 \end{vmatrix} R_6 \begin{vmatrix} 1{,}0 \\ -90^\circ \\ \theta_6 \\ 0 \end{vmatrix} R_7 \begin{vmatrix} 0{,}5 \\ 25^\circ \\ \theta_7 \\ -0{,}45 \end{vmatrix} = E. \tag{138}$$

IV. *Mecanismul lui Bennett* (fig. 9)

---

[6]) Notaţiile care se referă la figurile 6—11 datează începînd cu seria de cercetări datorite lui R. S. Hartenberg şi J. Denavit [41].

[7]) Un studiu adîncit al articulaţiilor sferice, precum şi acela al articulaţiilor sferice cu deget, se găseşte în lucrarea autorilor [42]. Acest studiu a fost reluat apoi în vederea unor aplicaţii concrete în teza de disertaţie elaborată recent de Chang Tsy-siang [37].

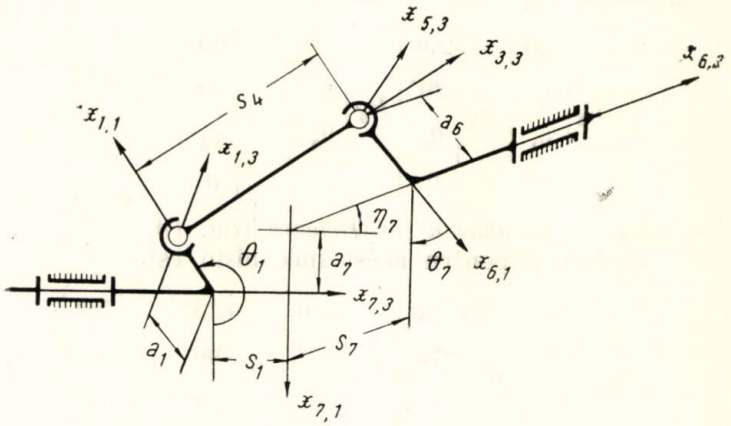

$x_{5,3}$
$x_{3,3}$
$x_{6,3}$
s_4
$x_{1,1}$
$x_{1,3}$
a_6
η_7
θ_1
a_7
θ_7
$x_{6,1}$
$x_{7,3}$
a_1
s_1
s_7
$x_{7,1}$

Fig. 8

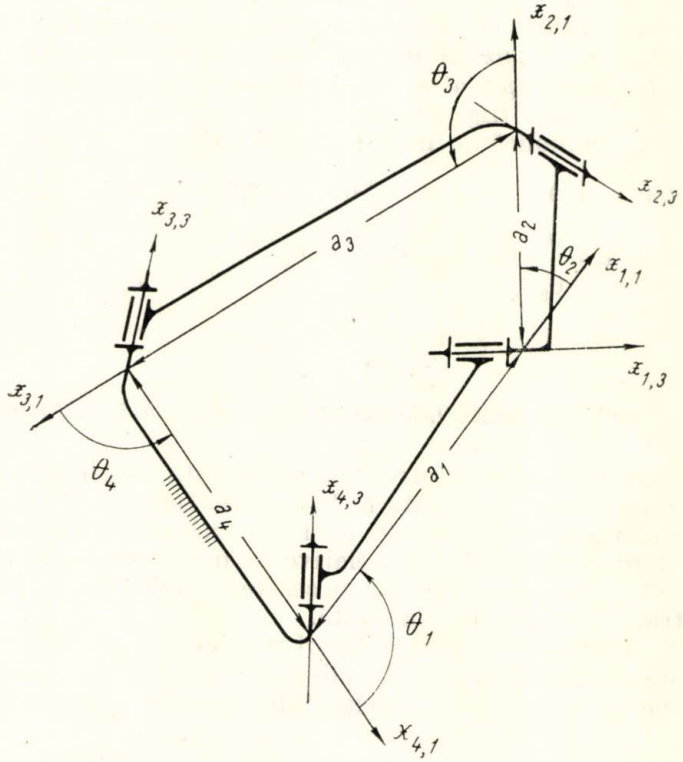

$x_{2,1}$
θ_3
$x_{2,3}$
$x_{3,3}$
a_3
a_2
θ_2
$x_{1,1}$
$x_{3,1}$
$x_{1,3}$
θ_4
a_4
$x_{4,3}$
a_1
θ_1
$x_{4,1}$

Fig. 9

Ecuaţia simbolică, indicînd dimensiunile mecanismului [8]), este

$$R_1\begin{vmatrix}4.0\\90^\circ\\\theta_1\\0\end{vmatrix}R_2\begin{vmatrix}2.0\\30^\circ\\\theta_2\\0\end{vmatrix}R_3\begin{vmatrix}4.0\\90^\circ\\\theta_3\\0\end{vmatrix}R_4\begin{vmatrix}2.0\\30^0\\\theta_4\\0\end{vmatrix}=E. \tag{139}$$

V. *Mecanismul hexabar a lui Bricard* (fig. 10)
Ecuaţia simbolică pentru acest mecanism este

$$R_1\begin{vmatrix}5.0\\270^\circ\\\theta_1\\0\end{vmatrix}R_2\begin{vmatrix}2.0\\270^\circ\\\theta_2\\0\end{vmatrix}R_3\begin{vmatrix}2.0\\270^\circ\\\theta_3\\0\end{vmatrix}R_4\begin{vmatrix}5.0\\90^\circ\\\theta_4\\0\end{vmatrix}R_5\begin{vmatrix}2.0\\90^\circ\\\theta_5\\0\end{vmatrix}R_6\begin{vmatrix}2.0\\90^\circ\\\theta_6\\0\end{vmatrix}=E. \tag{140}$$

Dat fiind faptul că mecanismul conţine un punct mort, analiza programată a fost făcută pentru mulţimea valorilor lui θ_1, începînd de la zero pînă la punctul mort. Programarea poate fi făcută pornind apoi din acelaşi punct şi făcînd ciclul în sens invers sau continuînd ciclul luînd ca punct de plecare o poziţie de cealaltă parte a punctului mort.

VI. *Mecanism spaţial cu lanţ cinematic conţinînd trei cuple cilindrice şi una rotoidă* (fig. 11)
Ecuaţia simbolică a mecanismului este

$$R_1\begin{vmatrix}2.0\\30^\circ\\\theta_1\\0\end{vmatrix}R_2\begin{vmatrix}0\\0\\\theta_2\\0\end{vmatrix}P_3\begin{vmatrix}4.0\\55^\circ\\0\\s_3\end{vmatrix}R_4\begin{vmatrix}0\\0\\\theta_4\\0\end{vmatrix}P_5\begin{vmatrix}3.0\\45^\circ\\0\\s_5\end{vmatrix}R_6\begin{vmatrix}0\\0\\\theta_6\\0\end{vmatrix}P_7\begin{vmatrix}5.0\\60^\circ\\0\\s_7\end{vmatrix}=E. \tag{141}$$

§ 12. METODA REZOLVĂRII ECUAŢIEI VECTORIALE TETRAEDRALE

16. Milton A. Chace, într-o lucrare recentă prezentată la Conferinţa asupra mecanismelor organizată la Lafayette Ind. în octombrie 1964, bazată pe cercetările autorilor din cadrul prezentei lucrări [43], subliniază faptul că numeroase probleme relative la mecanisme mai simple pot fi rezolvate, făcîndu-se programările necesare la MEC, fără a recurge la metoda matricială-tensorială elaborată.

Acest lucru are loc ori de cîte ori problema se reduce — aşa cum se întîmplă de exemplu adesea în aplicarea concretă a construcţiilor auxiliare relative la determinarea acceleraţiilor de ordin superior — prin metoda

[8]) Toate datele numerice relative la mecanismele indicate în figurile 6—11, sînt preluate din teza de disertaţie a lui John J. Uicker jr. deja menţionată [38].

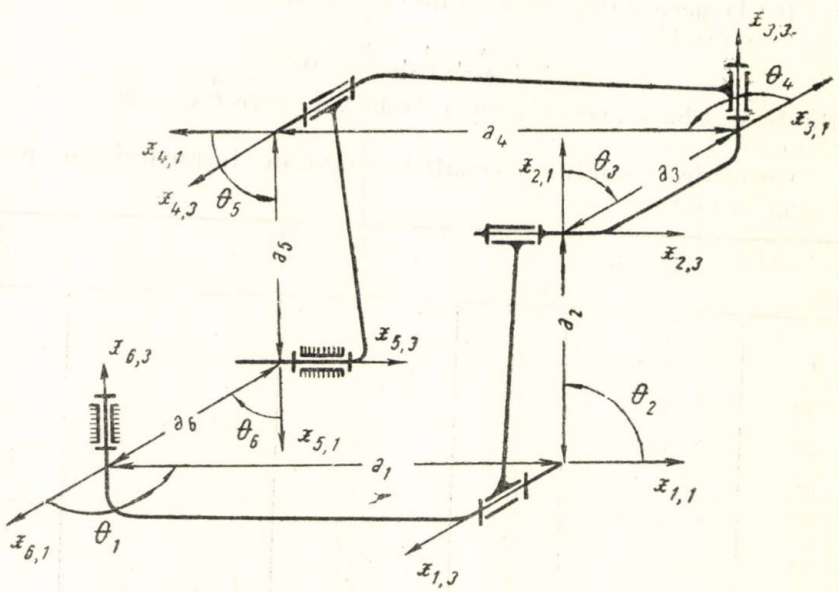

x3,3
θ4
x3,1
a4
x4,1
x4,3
θ5
x2,1
θ3
a3
x2,3
a5
a2
x5,3
x6,3
a6
θ6
x5,1
θ2
a1
x1,1
x6,1
θ1
x1,3

Fig. 10

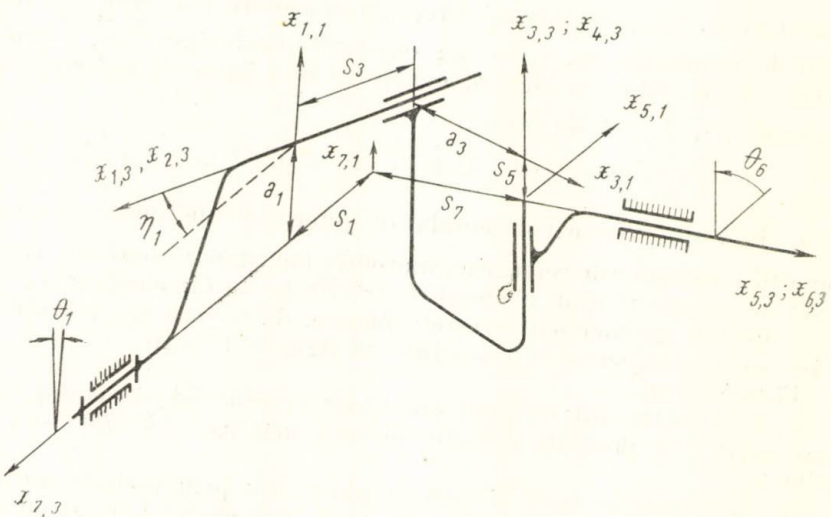

x1,1
x3,3 ; x4,3
S3
x5,1
x1,3 ; x2,3
x7,1
a3
S5
x3,1
θ6
a1
η1
S1
S7
θ1
x5,3 ; x6,3
x7,3

Fig. 11

acceleraţiilor reduse de specie şi ordin oarecare, elaborată de autori în [44]—[46] la necesitatea de a se determina trei necunoscute scalare din ecuaţia vectorială

$$\vec{r} + \vec{s} + \vec{t} + \vec{C} = 0, \tag{142}$$

numită de M. Chace „ecuaţia tetraedrală", în care $\vec{C}$ este un vector constant dat.

Categorisirea soluţiilor ecuaţiei vectoriale tetraedrale se prezintă în tabela următoare,

Cazul / numărul	Necunoscute	Cunoscute			Gradul soluţiei polinomiale
		Vectori	Versori	Scalari	
1	$r,\ \theta_r,\ \varphi_r$	$\vec{C}$	$\hat{s},\ \hat{t},$	$s,\ t$	1 (banal)
2a	$r,\ \theta_r,\ s$	$\vec{C}$	$\hat{s},\ \hat{\omega}_r$	φ_r	2
2b	$r,\ \theta_r,\ \theta_s$	$\vec{C}$	$\hat{\omega}_r,\ \hat{\omega}_s$	$\varphi_r ; s, \varphi_s$	4
2c	$\theta_r,\ \varphi_r ; s$	$\vec{C}$	$\hat{s}$	r	2
2d	$\theta_r,\ \varphi_r ; \theta_s$	$\vec{C}$	$\hat{\omega}_s$	$r_r ; s, \varphi_s$	2
3a	$r ; s ; t$	$\vec{C}$	$\hat{r},\ \hat{s},\ \hat{t}$		1
3b	$r ; s ; \theta_t$	$\vec{C}$	$\hat{r},\ \hat{s},\ \hat{\omega}_t$	$t,\ \varphi_t$	2
3c	$r ; \theta_s ; \theta_t$	$\vec{C}$	$\hat{r},\ \hat{\omega}_s,\ \hat{\omega}_t$	$s,\ \varphi_s ;\ t,\ \varphi_t$	4
3d	$\theta_r ; \theta_s ; \theta_t$	$\vec{C}$	$\hat{\omega}_r,\ \hat{\omega}_s,\ \hat{\omega}_t$	$r, \varphi_r ; s, \varphi_s ; t, \varphi_t$	8

în care prin $\hat{w}_r$, $\hat{\omega}_s$, $\hat{\omega}_t$ s-au notat direcţiile cunoscute de la care s-au măsurat unghiurile cunoscute φ_r, φ_s şi φ_t; expresiile vectorilor $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$ din ecuaţia (142), în coordonate sferice, măsurate în triedre de referinţă drepte cunoscute t, $\hat{j}$, $\hat{k}$ sînt de formă

$$\vec{r} = r\{\sin\varphi_r\,[\cos\theta_r\,\hat{\lambda}_r + \sin\theta_r\,\hat{\mu}_r] + (\cos\varphi_r)\,\hat{\nu}_r\}, \tag{143}$$

$\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ sînt versorii sistemului de referinţă fundamental, iar $\hat{\lambda}_r$, $\hat{\mu}_r$, $\hat{\nu}_r$ versorii sistemelor de referinţă cunoscute menţionate mai sus, $\hat{\omega}_{ij}$ versor la axei de rotaţie al unui element J_i relativ la un alt element J_j.

Aspectele geometrice corespunzătoare, de exemplu, cazurilor 1—3*d* din tabela de mai sus sînt reproduse în figurile 12—20.

17. *Observaţii.*

a) Este interesant de făcut un studiu aprofundat al cazului exceptat de noi relativ la poziţiile moarte, în care matricea $[R' \cdot R]$ (108) devine singulară.

b) Merită să se facă în detaliu un studiu prin metoda matricială-tensorială elaborată al unor mecanisme cu mai multe lanţuri cinematice închise, făcîndu-se apoi un paralelism cu rezultatele recente în domeniu obţinute de R. P. Voinea şi M. C. Atanasiu în cadrul metodei ciclurilor independente [47].

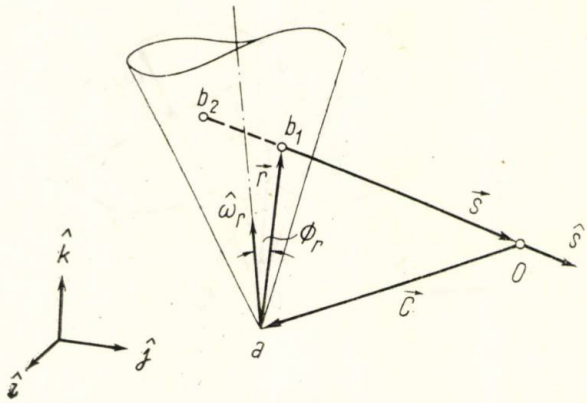


Fig. 12

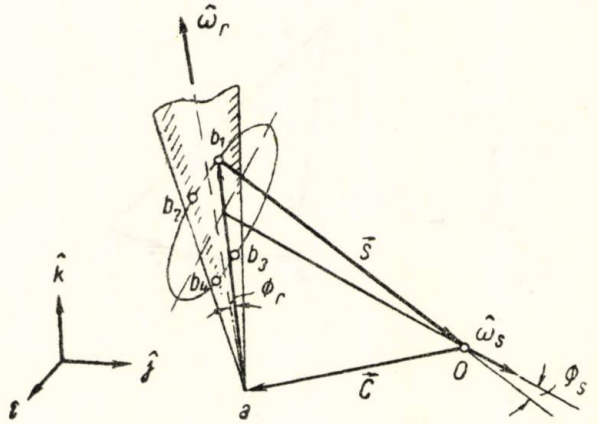


Fig. 13

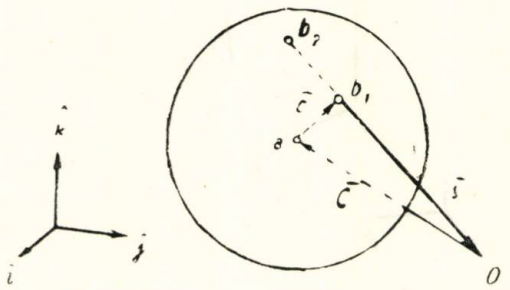


Fig. 14

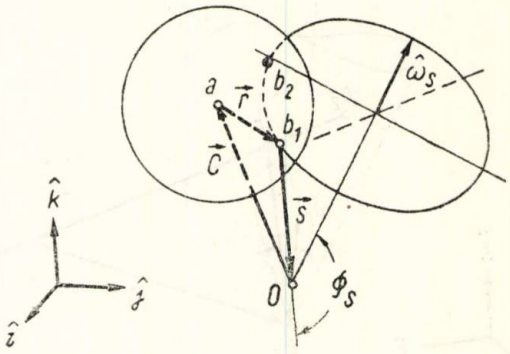


Fig. 15

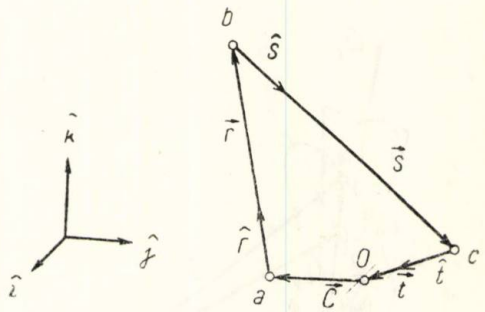


Fig. 16

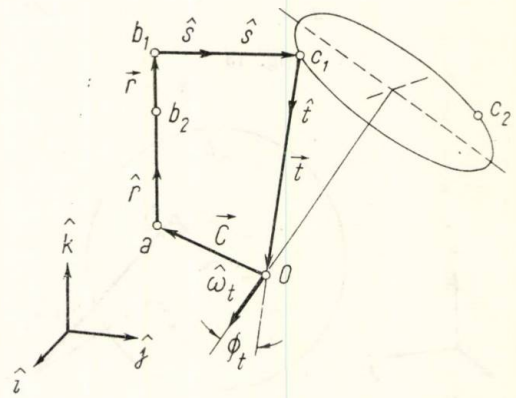


Fig. 17

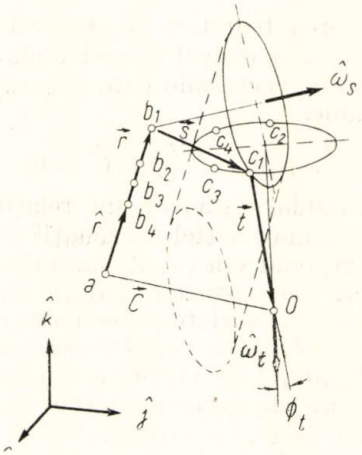


Fig. 18

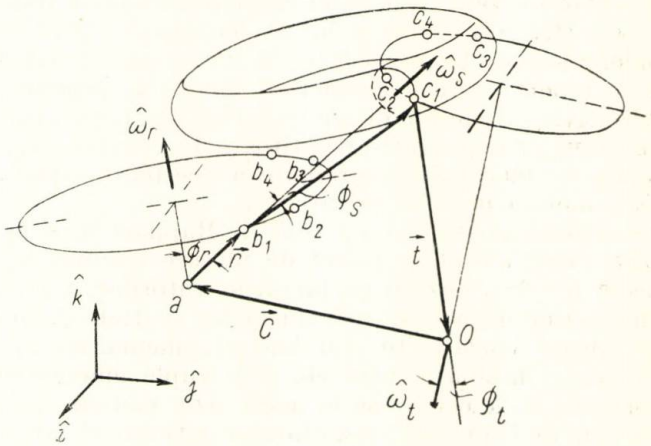


Fig. 19

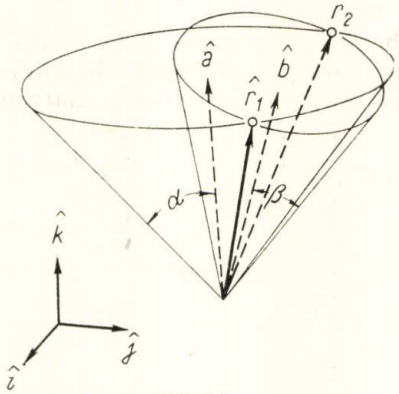


Fig. 20

c) Este utilă extinderea teoretică şi practică a studiului cazurilor particulare mai complicate din cadrul metodei matriciale-tensoriale elaborate, cristalizate în ecuaţii vectoriale care generalizează ecuaţia vectorială tetraedrală, şi anume

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \ldots + \vec{r}_n + \vec{C} = 0, \tag{144}$$

pentru care s-a fixat un număr suficient de relaţii între r_1, $r_2, \ldots r_n$. Analiza soluţiilor posibile a unor astfel de ecuaţii răspunde la variate cazuri relative la studiul poziţional sau cel al cîmpurilor de viteze şi de acceleraţii de diferite ordine al mecanismelor spaţiale cu mai multe elemente folosite din ce în ce mai mult în variate procese de producţie [48], iar particularizarea unor atare probleme la cazul mecanismelor plane articulate permite abordarea din alt punct de vedere a studiului mecanismelor cu mai multe elemente, întîlnite, de exemplu, recent în paginile „Buletinului Institutului politehnic din Iaşi", în lucrările lui I. I. Artobolevski [49] sau în alte lucrări recente referitoare la conicografe universale sau la mecanisme formate prin metoda translaţiei circulare, datorite respectiv primului dintre autori (D. Mangeron) şi lui D. Tutunaru [50]—[51] ş.a.

d) Problematica de la punctul (c) se încadrează totodată în tendinţele actuale de modernizare a geometriei analitice, promovată în particular, din iniţiativa catedrelor de matematică ale Institutului politehnic Iaşi, în cadrul unui şir de lucrări pregătitoare în vederea organizării unui simpozion consacrat instruirii programate a acestei discipline şi reînnoirii şi modernizării metodelor folosite într-însa.

e) Într-o disertaţie susţinută recent de Raphael Razi la North-Western University [52], avînd ca punct de plecare rezultatele obţinute de John J. Uicker jr. [38], bazate pe lucrările autorilor, s-a făcut analiza forţelor statice acţionînd asupra mecanismelor spaţiale (s-au luat în consideraţie mecanisme constituite din lanţuri cinematice simple formate din şapte elemente îmbinate între ele prin cuple cinematice de rotaţie sau cuple prismatice), folosindu-se în acest scop metoda deplasărilor virtuale, urmată apoi de traducerea rezultatelor obţinute în notaţii matriciale 4×4, precum şi de elaborarea programării scrisă pentru MEC IBM 709 Data Processing System.

Trimiţînd pe cititor la lucrarea [52] citată mai sus şi renunţînd la a da aici semnificaţia notaţiilor folosite, sistemul de ecuaţii pentru aflarea forţelor statice se prezintă sub formă matricială astfel

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{dt_2}{df_i} \\ \dfrac{dt_3}{df_i} \\ \vdots \\ \dfrac{dt_7}{df_i} \end{Vmatrix} = - B^{-1} \begin{Vmatrix} c_{i1} \\ c_{i2} \\ \vdots \\ c_{i6} \end{Vmatrix}, \tag{145}$$

în care matricea coeficienților B, nesingulară, are forma

$$B = \begin{Vmatrix} a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{61} & a_{71} \\ a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} & a_{72} \\ a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} & a_{63} & a_{73} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{64} & a_{74} \\ a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{65} & a_{75} \\ a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} & a_{76} \end{Vmatrix}. \tag{146}$$

Rezultatele de mai sus deschid calea studierii, prin aceeași metodă matricială-tensorială elaborată de autori, a problemelor de dinamică a mecanismelor și mașinilor, probleme care vor constitui preocuparea de bază a părții a doua a prezentei lucrări.

Într-o altă lucrare se vor expune unele rezultate de dinamică a mecanismelor, luînd ca punct de plecare lucrările inițiate de J. Haag și continuate apoi de cel de-al doilea autor (R. Chaléat), singur sau în colaborare cu primul [53]—[54]. Încheind, se menționează unele lucrări cu totul recente elaborate de autori referitoare la metoda matricială- tensorială [55]—[60].

Primită la redacție la 20 mai 1965

BIBLIOGRAFIE

1. D. Mangeron, *The Study of Machine Dynamics in the Light of a New Presentation of the Analytical Mechanics.* I. Rev. roum. Sci. techn., Série Méc. appl., **9**, *5* 1 063—1 069 (1964).
2. Д. Манжерон, *Об обобщенных формах уравнений аналитической динамики.* Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, *2*, 128 (1962).
3. D. Mangeron, *Sopra alcuni nuovi metodi d'indagine dei meccanismi e delle macchine.* Macchine, Rassegna tecnica italiana dell'industria metalmeccanica, *6*, 1—4 (1963).
4. — *Problèmes de cinématique ponctuelle et tangentielle concernant la théorie des mécanismes et des machines.* Revue Fac. Sci. Univ. d'Istanbul, s.A. **27**, 15—24 (1962).
5. D. Mangeron, C. Drăgan, *Asupra unei noi metode tensoriale de studiu a mecanismelor.* Bul. Inst. polit. Iași, s.n., **III (VII)**, *1—2*, 151—164 (1957).
6. Д. Манжерон, К. Драган, *Кинематическое исследование новым матрично-тензорным методом четырехзвенных пространственных механизмов.* Rev. méc. appl., **VIII**, *3*, 539—552 (1962).
7. Д. Манжерон, Д. Тавхелидзе, *Общая теория последовательных приближений в исследовании механизмов и машин новым матрично-тензорным методом успешно переводимым на искусственные математические языки.* В сборнике *Теория механизмов и машин.* Акад. АН СССР, И. И. Артоболевскому к 60-летию со дня рождения. Ин-тут Машиноведения, Москва (в печати).
8. D. Mangeron, *Contributions to the general theory of reduced accelerations in punctual and tangential co-ordinates.* Rev. méc. appl., **VIII**, *1*, 5—17 (1963).
9. — *Study of Mechanisms by Means of Projective Co-ordinates.* Sesiunea științifică jubiliară a Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Acad. Republicii Socialiste România, București, 4—7 iulie 1960, p. 371—372.
10. — *Neue graphisch-analytische Methoden zum Studium der nichtlinearen Schwingungen.* Tagungsbericht. III. Konferenz über nichtlineare Schwingungen. DAW, Berlin, 25—30 mai 1964, p. 76—90.

11. D. MANGERON, *The Integral Equations Method in Nonlinear Mechanics*. IUTAM, Proceedings of the Intern. Symposium on Nonlinear Oscillations. Kiev, 12—18 septembrie, I, 347—350 (1961).
12. А. Н. БОГОЛЮБОВ, *История механики машин*, „Наукова Думка", Киев, 1964, *4*.
13. D. MANGERON, L. E. KRIVOSHEIN, *New Methods of numerical calculation for the solutions of various integro-differential systems*. I. Rev. Roum. Sci. techn., Méc. appl., **9**, *6*, 1 195—1 221 (1964).
14. — *New methods of numerical calculation of the solutions of various integro-differential systems presenting interest in applied Mechanics. II. Polylocal ordinary integro-differential systems*. Rev. Roum. Sci. techn., Méc. appl., **10**, *1*, 3—34 (1965).
15. — *Sistemi policalorici a rimanenza ed a argomento ritardato. I. Problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali con operatore calorico ed argomento ritardato*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **XXV**, *24* (1965) (Dedicata a Mauro Picone nel suo 80° compleanno).
16. — *Problemi al contorno per una classe di equazioni integro-differenziali non lineari alle derivate di Picone*. Rend. Accad. Sci. Fis. e Mat., Napoli, s. 4, **XXXI**, 106—129 (1964). Ad Ernesto Pascal in memoriam (nel 100° anniversario della sua nascita).
17. R. CHALÉAT, D. MANGERON, *Approximations d'ordre supérieur dans la théorie des perturbations*. Bul. Inst. polit. Iaşi, s.n. **X(XIV)**, 3—4, 263—270 (1964).
18. — *Quelques problèmes concernant la synchronisation*. Mathematica, Cluj (sub tipar).
19. R. CHALÉAT, J. HAAG, *Problèmes de chronométrie et de théorie générale des oscillations*. Paris, Gauthier-Villars, Eyrolles, 1960.
20. R. CHALÉAT, *L'étude des petites oscillations en fonction de leur amplitude*. Bul. Inst. polit. Iaşi, s.n., **XI (XV)** (1965).
21. D. MANGERON, *Théorie unitaire des problèmes au contour de différents types et nouvelles méthodes d'étude de leurs solutions*. Colloque sur la théorie des fonctions convexes avec applications au Calcul numérique. Acad. Republicii Socialiste România, Inst. de calcul, Cluj, **1—5**, *VII* (1965). Programme des Travaux.
22. — *Problemi integro-differenziali con operatori iperbolici ed argomenti ritardati*. I. Atti Accad. Naz. dei Lincei, Rend. Cl. Sci. fis., mat. e nat., *8* (1965) (sub tipar).
23. — *On Bellman Equations of Dynamic Programming Concerning a New Class of Boundary Value Problems with „Total Derivatives"*. Journ. Math. Analysis and Appl., **9**, *1*, 141—146 (1964).
24. — *Sur une classe de problèmes à la frontière d'ordre supérieur et non elliptique*. Comptes rendus Acad. Sci, Paris, **255**, 2 894—2 896 (1962).
25. D. MANGERON, E. E. STIHI, *Noi ecuaţii funcţionale în teoria programării dinamice*. Min. Înv., Inst. polit. Braşov, 1964, p. 13—21.
26. M. PICONE, *Criteri sufficienti in generali problemi di calcolo delle variazioni riguardanti integrali pluridimensionali d'ordine qualunque nel vettore minimante a più componenti*. Bul. Inst. polit. Iaşi, s.n. **X(XIV)**, *3—4*, 21—26 (1964).
27. D. MANGERON, A. JASIUIONIS, *New matrix methods for studying mechanisme and machines*. Rev. Roum. Sci. techn., Méc. appl., **9**, *4*, 969—894 (1964).
28. W. MEYER ZUR CAPELLEN, *Die Fourierreihe für den Schleifenwinkel der zentrischen Kurbelschleife und verwandte Fourierreihen*. Bul. Inst. polit. Iaşi, s.n., **V(IX)**, *1—2*, 311—320 (1959).
29. D. MANGERON, *Neue Methoden zum Studium der Getriebe und Antriebe*. III. Wiss. Tagung „Getriebe und Antriebe", Miskolc, Sept. 1963.
30. R. BOGDAN, *General study of five-bar mechanisms with the aid of complex harmonic series*. Rev. Roum. Sci. techn., Méc. appl., **9**, *4*, 851—868 (1964).
31. ЧЖАН, ЦЫ СЯНЬ, *Кинематический анализ четырехзвенных механизмов с шаровыми парами методом матриц*. Изв. высш. учебн. завед., Машиностроение, 1, (1961).
32. C. DRĂGAN, *Tensorii de poziţie şi tensorii de viteză în mecanismele spaţiale cu culisă*. Bul. Inst. polit. Iaşi, s.n., **III (VII)**, *3—4* (1957).
33. D. MANGERON, C. DRĂGAN, V. HANGANU, *Teoria generale delle approssimazioni successive nello studio dei meccanismi e delle macchine tramite il nuovo metodo matriciale-tensoriale tradotto nei linguaggi matematici artificiali*. I. Bul. Inst. polit. Iaşi, s.n., **X (XIV)**, *3—4*, 243—246 (1964).

34. D. Mangeron, C. Drăgan, *Formes tensorielles des équations de mouvement des chaines et mécanismes.* Izv. na matem. Inst., Acad. Bulgare Sci., **IV**, *2*, 57—65 (1960).
35. Чжан Цы-Сянь, *Кинематический анализ механизмов с низшими парами методом матриц.* Изв. высш. учебн. завед., Машиностроение, 2 (1961).
36. D. Mangeron, C. Drăgan, *Aplicarea metodei tensoriale la studiul unor probleme de sinteză a mecanismelor cu came spațiale.* Bull. Inst. polit. Iași, s.n., **IV (VIII)**, *3—4* (1958).
37. Чжан Цы-Сянь, *Кинематический анализ механизмов с низшими парами методом квадратных матриц n-го порядка* АН СССР, Теория машин и механизмов, *92—93*, 17—27 (1962.
38. John J. Uicker jr., *Velocity and Acceleration Anaylsis of Spacial Mechanisms using 4×4 Matrices.* Northwestern University, Technological Institute, Evanston, III, Sept., 1963.
39. — *Displacement Analysis of Spacial Mechanisms by an Iterative Method based of 4×4 Matrices.* Thesis. Northwestern University. Technological Institute, Evanston, III, June, 1963.
40. Д. Манжерон, *К графо-аналитическим методам кинематики материальных систем.* ДАН СССР, *4*, 705—706 (1955); **102**, *5*, 897—898 (1955); **112**, *1*, 27—28 (1957); 148, *1*, 54—56 (1963).
41. J. Denavit, R. S. Hartenberg, *Analysis of Spacial Mechanisms by Matrix Methods.* National Science Foundation, Contract G-19704, Sept., 1963.
42. D. Mangeron, C. Drăgan, *Studiul problemelor de sinteză a mecanismelor cu came plane prin metoda tensorială.* Bul. Inst. polit. Iași, s.n., **IV (VIII)**, *3—4*, 275—286 (1958).
43. M. E. Chace, *Solutions to the Vector Tetrahedron Equation.* ASME Publ. *64*-Mech-23, 24.
44. D. Mangeron, C. Drăgan, *Study of Special Mechanisms through the Method of reduced accelerations.* I. Four-Link Special Mechanisms. Rev. Méc. appl., **VII** *1*, 41—62 (1962).
45. D. Mangeron, *Mechanisms Design based on the Theory of Reduced Accelerations of any Order.* Proc. Seventh Congress on Theoretical and Applied Mechanics. Bombay, 23—26 decembrie, 1961, p. 249—252.
46. — *Sur quelques aspects pratiques de la théorie des accélérations réduites d'ordre quelconque.* Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belgique, 5-e sér. **XLVIII**, *10*, 1 153—1 160 (1962).
47. R. Voinea, M. Atanasiu, *Metode analitice noi în teoria mecanismelor.* București, Edit. tehnică, 1964, p. 142.
48. S. N. Kojevnikov, D. Mangeron, *On the dynamic Effects caused by accelerations of higher Order.* Bul. Inst. polit. Iași, s.n., **X (XIV)**, *1—2*, 243—254 (1964).
49. И. И. Артоболевский, К вопросу об исследовании сложных кинематических цепей. Bul. Inst. polit. Iași, s. n., **VI(X)**, *1—2*, 285—298, (1960).
50. D. Mangeron, *Konstruktion und Dynamik von Maschinen im Licht neuer Forschungen über ebene und räumliche Mechanismen.* Karl-Marx-Stadt, Getriebelehre-Tagung, 1963.
51. D. Tutunaru, Elena Murgulescu, *Mecanisme matematice rezultate din mecanismul lui Newton.* St. cerc. mec. apl., *3* (1963).
52. R. Razi, *Static Force Analysis of Spacial Mechanisms by the Matrix Method.* Thesis.Northwestern University, Technological Institute, Evanston, III, June, 1963.
53. J. S. Beggs, *The screw matrix.* Bul. Inst. polit. Iași, s.n., **VI (X)**, *3—4*, 315—322 (1960).
54. R. Chaléat, *Calcul de la période des oscillations en fonction de leur amplitude.* Actes de la Seconde Conférence sur les vibrations non linéaires, PAN, Varșovia, 1962.
55. П. А. Лебедев, *Аналитические методы в исследовании механизмов* ИТП. Ленинград (sub tipar).
56. Н. Н. Дижечко, С. Г. Кислицын, *Аналитические методы исследования сложных пространственных механизмов.* Второй Всесоюзный Съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов, АН СССР, Москва, 1964, р. 82.
57. Г. Калицин, *Теория на механизме и машините*, София, Изд. „Техника", 1960, р. 9.
58. C. Pelecudi, *Analogie acceleratie-viteză în studiul mecanismelor.* Bul. Inst. polit. Iași, s.n., **XI (XV)**, *1—2* (1965).
59. D. Mangeron, C. Drăgan, Gh. Silaș, *Contribuții la studiul mecanismelor spațiale prin metoda matricială-tensorială.* Bul. Inst. polit. Timișoara (sub tipar).
60. Я. С. Эйльберман, *К матрично-тензорному методу исследования механизмов и машин.* Труды Ростовского (на Дону) Института Инженеров Железнодорожного Транспорта (sub tipar).

METODA SOLIDARIZĂRII PENTRU LANȚURILE CINEMATICE ÎNCHISE [1)]

PARTEA I

de CHRISTIAN PELECUDI
Centrul de mecanica solidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

Bazată pe proprietățile cinematice ale mișcării lanțurilor de cîte trei corpuri, metoda solidarizării se bucură de trei avantaje importante :

a) reduce numărul de laturi din metoda poligoanelor auxiliare (poziții false), ceea ce mărește precizia construcțiilor grafice ;

b) permite aplicarea simplă a metodelor proiecțiilor sau a planelor asemenea contururilor închise de orice clasă, înlocuind metoda poligoanelor false ;

c) livrează direct dreapta punctelor finale, permițînd astfel construcția directă a poligonului real.

Pentru evidențierea proprietăților semnalate, lucrarea prezintă exemplificări pe contururi de diferite clase IV—VIII, în care între corpurile succesive se cunosc centrele de rotație relative. Contururile de clasele IV—VI sînt reduse direct la contururi cu trei laturi, ceea ce permite considerarea calculelor ca pentru un singur solid. La contururile de clasa VII—VIII, reducerea se face mai întîi la contururi patrulatere care pot fi înlocuite cu două contururi triunghiulare și calculele se execută ca pentru două solide rigide legate în punctul comun (diade).

Cercetarea cinematică a sistemelor de solide cu legături în scopul determinării distribuțiilor de viteze și de accelerații în elementele componente se bazează pe o serie de metode grafice, analitice și experimentale, expuse în mai multe lucrări de specialitate. Utilizarea unora sau altora din metodele cunoscute se face în raport cu avantajele specifice pentru unele poziții sau situații ale diferitelor mecanisme simple sau complexe [1]—[10].

[1)] Publicată în „Rev. roum. sci. tech.—Mécanique Appliquée", **10**, 5 (1965) (în lb. franceză).

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 20 NR. 5 P. 1203—1234 BUCUREȘTI 1965

Există posibilitatea extinderii eficienței diferitelor metode pentru utilizarea lor în cazurile cele mai generale ale mecanismelor. Astfel, metoda solidarizării, bazată pe proprietățile cinematicii lanțurilor de corpuri, pe lîngă că reduce construcțiile grafice mărind precizia, permite de asemenea alegerea celor mai eficiente construcții. Această metodă mărește avantajele metodei construcțiilor auxiliare pentru determinarea vitezelor și accelerațiilor în lanțurile cinematice simple închise. Permite aplicarea metodei proiecțiilor sau a planurilor asemenea și livrează direct construcția finală, eliminînd construcțiile auxiliare. Metoda generală va fi exemplificată pe lanțul cinematic simplu închis cu contur deformabil de clasa VI, avînd numai cuple de rotație, după care se vor semnala adaptările pentru lanțurile cinematice cu cuple de translație, utilizînd un contur de clasa V. Se va expune mersul calculului pentru contururi de alte clase, tratîndu-se apoi cazul general al unor contururi arbitrare prin metode independente de natura cuplelor cinematice. La început se va prezenta pe scurt metoda construcțiilor auxiliare (false). Prima parte a lucrării se referă la determinarea vitezelor.

1. STUDIUL VITEZELOR PENTRU LANȚURILE SIMPLE ÎNCHISE CU CENTRE DE ROTAȚIE AȘEZATE LA DISTANȚE FINITE (CUPLE DE ROTAȚIE)

1.1. *Metoda poligoanelor auxiliare* se aplică în situația cînd se cunoaște în fiecare vîrf al conturului poligonal (centre de rotație) cîte un parametru scalar de viteze. Se cunosc deci proiecțiile vitezelor punctelor P_{12}, P_{23}, ..., P_{61} pe niște direcții oarecare. În cazul conturului de clasa VI (fig. 1), direcțiile din vîrfurile conturului poligonal sînt $\Delta A_1 P_{16}$, $\Delta A_1 P_{12}$, $\Delta B_3 P_{32}$, $\Delta B_3 P_{34}$, $\Delta C_5 P_{54}$, $\Delta C_5 P_{56}$, pe care se proiectează vitezele presupuse cunoscute ale punctelor A_1, B_3, C_5. În planul vitezelor (fig. 2), extremitățile finale ale vitezelor $\overline{v}_{P_{12}}$, $\overline{v}_{P_{23}}$, ..., $\overline{v}_{P_{61}}$ se vor găsi pe dreptele Δp_{12}, Δp_{23}, ..., Δp_{61} perpendiculare pe direcțiile proiecțiilor în extremitățile acestora și care trec deci prin vîrfurile vitezelor $\overline{v}_{A_1}$, $\overline{v}_{B_3}$, $\overline{v}_{C_5}$ concurente în polul p.

Deoarece

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{\overline{v}_{P_2^3}}{\Delta p_{23}} = \dfrac{\overline{v}_{P_2^1}}{\Delta p_{12}} + \dfrac{\overline{v}_{P_2^3 P_2^1}}{\perp P_{12} P_{23}} \\
\dfrac{\overline{v}_{P_3^4}}{\Delta p_{34}} = \dfrac{\overline{v}_{P_3^2}}{\Delta p_{23}} + \dfrac{\overline{v}_{P_3^4 P_3^2}}{\perp P_{23} P_{34}} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{\overline{v}_{P_6^1}}{\Delta p_{61}} = \dfrac{\overline{v}_{P_6^5}}{\Delta p_{65}} + \dfrac{\overline{v}_{P_6^1 P_6^5}}{\perp P_{56} P_{61}} \\
\dfrac{\overline{v}_{P_1^2}}{\Delta p_{12}} = \dfrac{\overline{v}_{P_1^6}}{\Delta p_{61}} + \dfrac{\overline{v}_{P_1^2 P_1^6}}{\perp P_{61} P_{12}}
\end{array}
\qquad (1)
$$

şi întrucît

$$\overline{v}_{P_1^2} = \overline{v}_{P_2^1} \; ; \; \overline{v}_{P_2^3} = \overline{v}_{P_3^2} \; ; \; \overline{v}_{P_3^4} = \overline{v}_{P_4^3}$$
$$\overline{v}_{P_4^5} = \overline{v}_{P_5^4} \; ; \; \overline{v}_{P_5^6} = \overline{v}_{P_6^5} \; ; \; \overline{v}_{P_6^1} = \overline{v}_{P_1^6} \; , \tag{2}$$

indiferent dacă centrele de rotaţie sînt permanente sau instantanee, în fiecare ecuaţie vectorială se cunosc numai cîte trei parametri scalari, proiec-

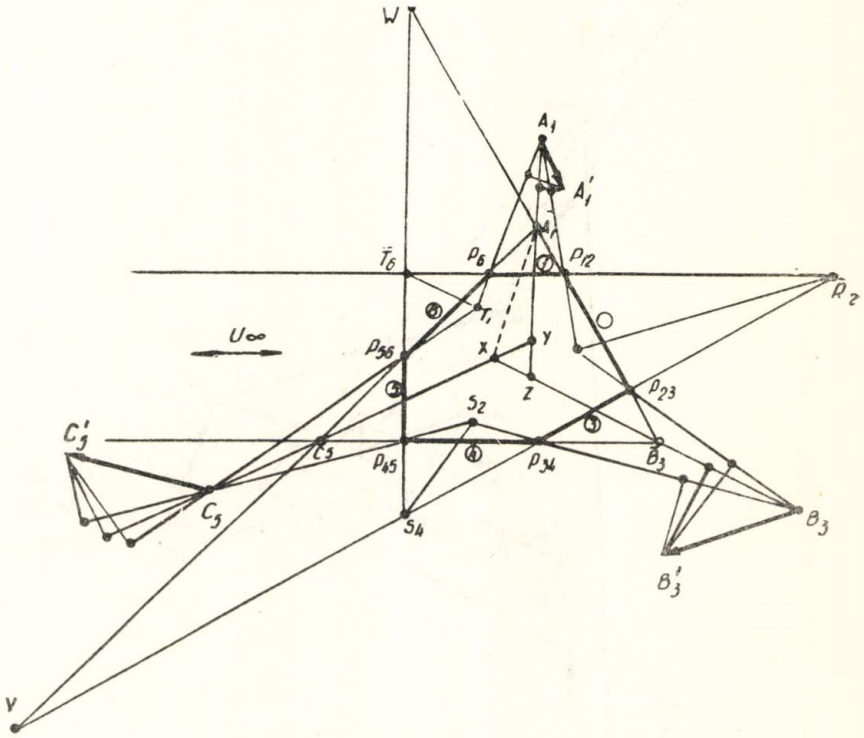


Fig. 1

ţiile vitezelor punctelor şi direcţiile vitezelor pentru mişcarea relativă de rotaţie, ceea ce face ca rezolvarea grafică directă să nu fie posibilă. Prin metoda construcţiilor auxiliare (poziţii false) se porneşte executarea poligonului de viteze de la un punct arbitrar dat iniţial p_{12}^i, situat pe dreapta iniţială $\Delta^i p_{12} \equiv \Delta p_{12}$, corespunzător vitezei $\overline{v}_{P_2^1}^i$ din prima ecuaţie, ceea ce permite mai departe rezolvarea pe rînd a ecuaţiilor sus-menţionate. Ultima ecuaţie ne dă punctul final p_{12}^f, situat la intersecţia dreptelor $\perp P_{61} P_{12}$ (finală) şi $\perp P_{12} P_{23}$ (iniţială), care în general nu este pe dreapta Δp_{12} şi deci nu se confundă cu p_{12}^i. Deoarece la o deplasare a punctului iniţial p_{12}^i pe o dreaptă $\Delta^i p_{12}$ punctul final p_{12}^f al poligonului se deplasează pe o altă dreaptă $\Delta^f p_{12}$ pentru că ecuaţiile sînt liniare, se construieşte un al doilea poligon auxiliar pentru alt punct iniţial p_{12}^{ii} arbitrar pe dreapta

punctelor inițiale $\Delta^i p_{12} \equiv \Delta p_{12}$ și se determină al doilea punct final p_{12}'', ceea ce permite trasarea dreptei punctelor finale $\Delta^f p_{12}$. La intersecția dreptelor $\Delta^i p_{12} \equiv \Delta p_{12}$ și $\Delta^f p_{12}$ se află punctul căutat p_{12}, pentru care se

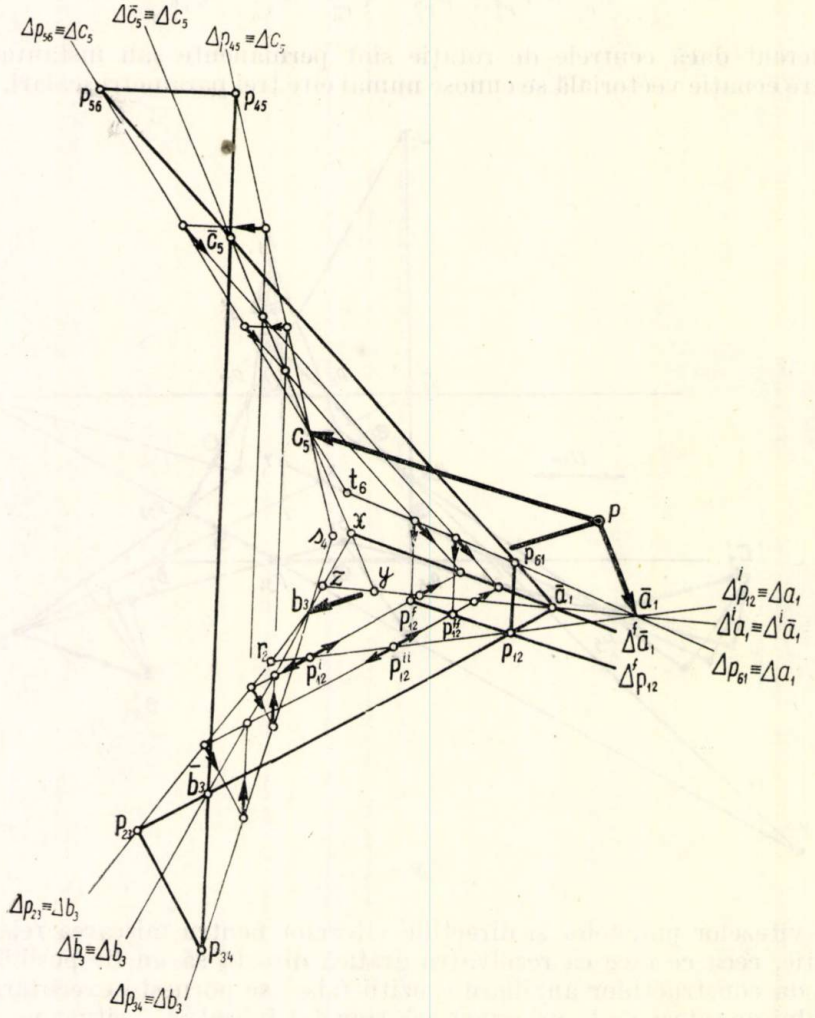


Fig. 2

construiește al treilea poligon real. Cele trei poligoane au, desigur, laturile paralele, aceste fiind perpendiculare pe laturile conturului poligonal al lanțului. Laturile poligonului real reprezintă, la scară, vitezele relative de rotație din care se pot deduce vitezele unghiulare, iar vîrfurile sale vor marca extremitățile vitezelor punctelor P_{12}, P_{23}, ..., P_{61} (fig. 2).

În fiecare corp fiind cunoscute vitezele a cîte două sau chiar trei puncte (de exemplu P_{61}, A_1, P_{12}), distribuția de viteze este cunoscută prin

utilizarea în continuare a metodei asemănării, aplicată fiecărui element separat. Pentru exactitate, în construcția grafică a figurilor auxiliare este important ca dreptele Δ^i și Δ^j să facă între ele un unghi apropiat de $\pi/2$, fiind posibilă în acest scop alegerea corespunzătoare între șase drepte inițiale Δp_{12}, Δp_{23}, ..., Δp_{61}.

1.2. *Metoda solidarizării* se bazează pe proprietățile proiecțiilor [2] de care se bucură punctele dreptei care trece prin centrele relative de rotație a trei corpuri în mișcare plană: *proiecțiile vitezelor punctelor de pe dreapta centrelor pe această dreaptă sînt egale, indiferent cărui corp aparțin punctele.* Astfel, din punctul de vedere al acestor proiecții, dreapta centrelor se comportă ca un solid, proprietatea enunțată fiind specifică solidelor rigide.

1.2.1. Prima consecință importantă bazată pe această proprietate este reducerea conturului poligonal de n-corpuri la $\frac{n}{2}$-laturi. În exemplul considerat (fig. 1) se poate forma conturul triunghiurilor $\overline{A}_1$, $\overline{B}_3$, $\overline{C}_5$ din laturile $\Delta P_{12}P_{23}$, $\Delta P_{34}P_{45}$ și $\Delta P_{56}P_{61}$ în vîrfurile căruia se cunosc proiecțiile de viteze $\overline{v}_{\overline{A}_1}$, $\overline{v}_{\overline{B}_3}$, $\overline{v}_{\overline{C}_5}$ pe direcțiile $\Delta A_1\overline{A}_1$, $\Delta B_3\overline{B}_3$ și $\Delta C_5\overline{C}_5$ egale cu proiecțiile vitezelor $\overline{v}_{A_1}$, $\overline{v}_{B_3}$, și $\overline{v}_{C_5}$ pe aceleași direcții. Pentru acest contur poligonal redus se poate aplica metoda pozițiilor false, astfel:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{v}_{\overline{B}_3}}{\Delta\overline{b}_3} &= \frac{\overline{v}_{\overline{A}_1}}{\Delta\overline{a}_1} + \frac{\overline{v}_{P_1^2\overline{A}_1} + \overline{v}_{P_2^3P_2^1} + \overline{v}_{\overline{B}_3P_3^2}}{\perp\,\Delta\overline{A}_1P_{12}P_{23}\overline{B}_3} \\
\frac{\overline{v}_{\overline{C}_5}}{\Delta\overline{c}_5} &= \frac{\overline{v}_{\overline{B}_3}}{\Delta\overline{b}_3} + \frac{\overline{v}_{P_3^4\overline{B}_3} + \overline{v}_{P_4^5P_4^3} + \overline{v}_{\overline{C}_5P_5^4}}{\perp\,\Delta\overline{B}_3P_{34}P_{45}\overline{C}_5} \qquad (3) \\
\frac{\overline{v}_{\overline{A}_1}}{\Delta\overline{a}_1} &= \frac{\overline{v}_{\overline{C}_5}}{\Delta\overline{c}_5} + \frac{\overline{v}_{P_5^6\overline{C}_5} + \overline{v}_{P_6^5P_6^1} + \overline{v}_{\overline{A}_1P_1^6}}{\perp\,\Delta\overline{C}_5P_{56}P_{61}\overline{A}_1}.
\end{aligned}$$

Vîrfurile vitezelor $\overline{v}_{\overline{A}_1}$, $\overline{v}_{\overline{B}_3}$, $\overline{v}_{\overline{C}_5}$ se găsesc pe dreptele $\Delta\overline{a}_1$, $\Delta\overline{b}_3$, Δc_5 perpendiculare pe direcțiile proiecțiilor respective în extremitățile lor, adică trec prin vîrfurile vitezelor $\overline{v}_{A_1}$, $\overline{v}_{B_3}$, $\overline{v}_{C_5}$ (fig. 2). Poligoanele auxiliare sînt triunghiuri cu laturile perpendiculare pe dreptele $\Delta\overline{A}_1\overline{B}_3$, $\Delta\overline{B}_3\overline{C}_5$ și $\Delta\overline{C}_5\overline{A}_1$. Construcțiile expuse anterior sînt reduse de la exagoanele $p_{12}p_{23}p_{34}$, ..., p_{61} la triunghiurile $\overline{a}_1$, $\overline{b}_3$, $\overline{c}_5$. Mai mult, triunghiul real $\overline{a}_1\,\overline{b}_3\,\overline{c}_5$ din planul vitezelor și triunghiul $\overline{A}_1\,\overline{B}_3\,\overline{C}_5$ din planul lanțului cinematic, avînd laturile perpendiculare, se bucură de proprietatea de asemănare. Raportul de asemănare este

$$r = \frac{(\overline{a}_1\,\overline{b}_3)}{(\overline{A}_1\,\overline{B}_3)} = \frac{(\overline{b}_3\,\overline{c}_5)}{(\overline{B}_3\,\overline{C}_5)} = \frac{(\overline{c}_5\,\overline{a}_1)}{(\overline{C}_5\,\overline{A}_1)} = \frac{\omega}{k_\omega}, \qquad (4)$$

în care ω are caracterul unei viteze medii :

$$\omega = \frac{\omega_1 \overline{A}_1 P_{12} + \omega_2 P_{12} P_{23} + \omega_3 P_{23} \overline{B}_3}{\overline{A}_1 \overline{B}_3} =$$

$$= \frac{\omega_3 \overline{B}_3 P_{34} + \omega_4 P_{34} P_{45} + \omega_5 P_{45} \overline{C}_5}{\overline{B}_3 \overline{C}_5} \tag{5}$$

$$= \frac{\omega_5 \overline{C}_5 P_{56} + \omega_6 P_{56} P_{61} + \omega_1 P_{61} \overline{A}_1}{\overline{C}_5 \overline{A}_1} .$$

Se ajunge astfel la determinarea distribuției de viteze în corpurile de indice impar și apoi în cele intermediare cu indice par, utilizînd metode clasice, respectiv metoda planelor asemenea. Prin reducerea construcțiilor grafice auxiliare, metoda solidarizării mărește precizia calculelor, care poate fi de asemenea controlată prin alte construcții.

Este posibil a utiliza și alte poligoane cu trei laturi asemenea între planul vitezelor și planul mecanismului, dar raportul de asemănare diferă. Astfel, triunghiul $\overline{r}_2 \overline{s}_4 \overline{t}_6$ din planul vitezelor (fig. 3) este asemenea cu triunghiul $R_2 S_4 \overline{T}_6$ din planul mecanismului format cu laturile $\Delta P_{23} P_{34}$, $\Delta P_{45} P_{56}$ și $\Delta P_{61} P_{12}$, iar raportul de asemănare este

$$r' = \frac{(\overline{r}_2 \overline{s}_4)}{(\overline{R}_2 S_4)} = \frac{(\overline{s}_4 \overline{t}_6)}{(S_4 \overline{T}_6)} = \frac{(\overline{t}_6 \overline{r}_2)}{(\overline{T}_6 \overline{R}_2)} = \frac{\omega'}{k_\omega}, \tag{6}$$

în care

$$\omega' = \frac{\omega_2 \overline{R}_2 P_{23} + \omega_3 P_{23} P_{34} + \omega_4 P_{34} \overline{S}_4}{\overline{R}_2 S_4} =$$

$$= \frac{\omega_4 \overline{S}_4 P_{45} + \omega_5 P_{45} P_{56} + \omega_6 P_{56} \overline{T}_6}{S_4 \overline{T}_6} \tag{7}$$

$$= \frac{\omega_6 \overline{T}_6 P_{61} + \omega_1 P_{61} P_{12} + \omega_2 P_{12} \overline{R}_2}{\overline{T}_6 \overline{R}_2} .$$

Bazate pe aceleași proprietăți de proiecții, mai trebuie remarcate triunghiurile considerate ca solide $W\overline{A}_1 P_{56}$, $W\overline{B}_3 P_{45}$, $W\overline{T}_6 P_{12}$ și $W\overline{S}_4 P_{23}$, asemenea cu triunghiurile respective din planul vitezelor, dar, desigur, cu rapoarte de asemănare diferite (fig. 3). Se semnalează însă vitezele egale ale punctelor comune W din cele patru triunghiuri sus-arătate, ceea ce poate permite alte simplificări în construcțiile grafice, așa cum se va extinde mai departe metoda solidarizării. Asemănător punctului W mai există punctul U pentru triunghiurile $U\overline{B}_3 P_{12}$, $U\overline{C}_5 P_{61}$, $U\overline{T}_6 P_{45}$ și $U\overline{R}_2 P_{34}$, care în cazul exemplului considerat este aruncat la infinit, și apoi punctul V pentru triunghiurile $V\overline{C}_5 P_{34}$, $V\overline{A}_1 P_{23}$, $V\overline{R}_2 P_{61}$ și $V S_4 P_{56}$.

Pe de altă parte, atunci cînd se obţin puncte importante situate la distanţe mari în afara graficului (de exemplu punctul U la infinit), reducerea conturului poligonal poate fi oprită înainte de a ajunge la contur triunghiular. Astfel se pot executa construcţiile grafice pentru pentagonul $\overline{A}_1 P_{23} P_{34} P_{45} P_{56} \overline{A}_1$ sau pentru patrulaterul $S_4 \overline{T}_6 P_{12} P_{23}$ sau altele corespunzătoare atît posibilităţilor grafice, cît şi în raport cu parametrii cunoscuţi ai vitezelor.

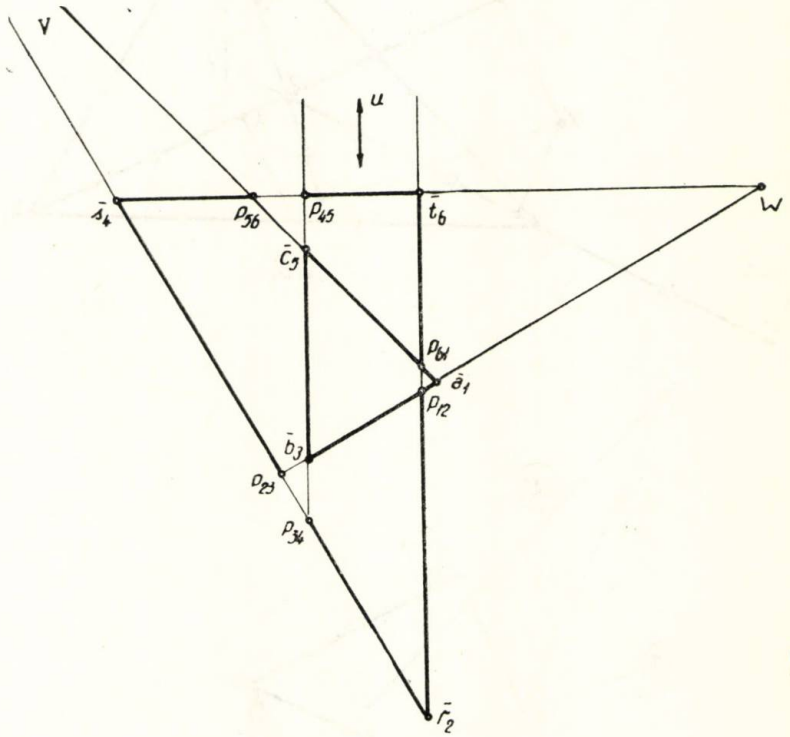


Fig. 3

1.2.2. A doua consecinţă importantă a considerării triunghiului $\overline{A}_1 \overline{B}_3 \overline{C}_5$ ca fiind format din bare rigide este că i se pot aplica proprietăţile simple de proiecţii (fig. 4) sau poligoane (fig. 5) pentru a se afla vitezele vîrfurilor $\overline{A}_1$, $\overline{B}_3$, $\overline{C}_5$. Într-adevăr, la acest solid se cunosc trei parametri scalari, respectiv proiecţiile vitezelor din punctele $\overline{A}_1$, $\overline{B}_3$, $\overline{C}_5$. Două din acestea, de exemplu proiecţiile vitezelor punctelor $\overline{B}_3$ şi $\overline{C}_5$ conduc la viteza punctului X aflat la intersecţia suporturilor respective $\Delta B_3 \overline{B}_3 X$ şi $\Delta C_5 \overline{C}_5 X$ (fig. 4). Această viteză proiectată pe direcţia $\Delta X \overline{A}_1$ va permite împreună cu proiecţia cunoscută a vitezei punctului $\overline{A}_1$ aflarea acestei viteze.

În poligonul vitezelor (fig. 5), dreapta care trece prin x, extremitatea vitezei punctului X, şi este perpendiculară pe direcţia $\Delta X \overline{A}_1$ întîlneşte dreapta $\Delta \bar{a}_1$ în punctul $\bar{a}_1$, determinînd viteza respectivă. Mai departe

se poate proceda prin metoda asemănării, aplicată separat fiecărui element pentru aflarea vitezelor tuturor punctelor. Construcţii asemănătoare se

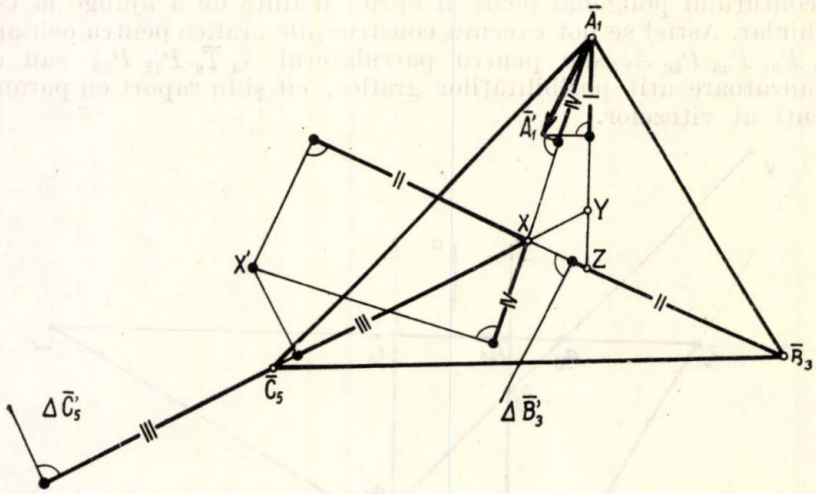


Fig. 4

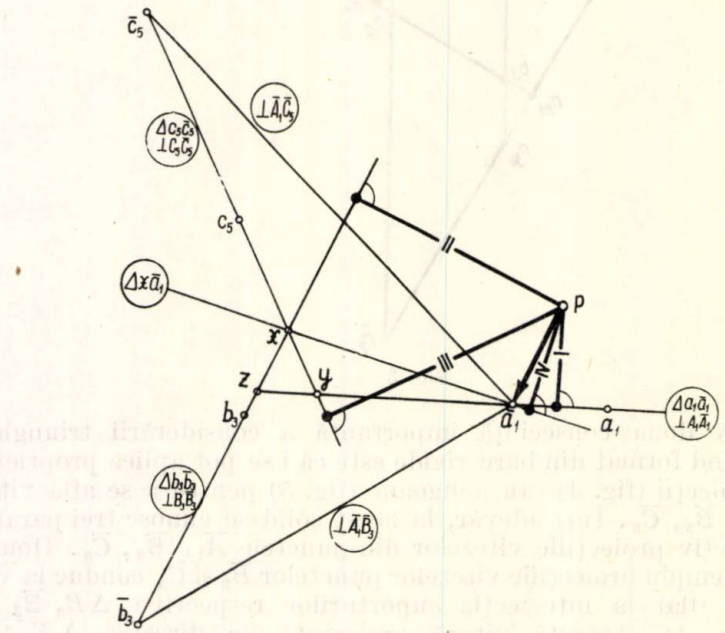


Fig. 5

pot face pentru punctele Y şi Z, care ajută la aflarea directă a vitezelor punctelor $\overline{B}_3$ şi $\overline{C}_5$.

Vectorul $\overline{v}_x$ construit pentru punctul X al triunghiului rigidizat $\overline{A}_1\,\overline{B}_3\,\overline{C}_5$ poate fi considerat că reprezintă în realitate vitezele egale ale unor

puncte $\overline{\overline{A}}_1$, $\overline{\overline{B}}_3$, $\overline{\overline{C}}_5$, $\overline{\overline{R}}_2$, $\overline{\overline{S}}_4$, $\overline{\overline{T}}_6$, legate separat de fiecare din elemente și a căror poziție se poate afla prin metoda asemănării, deoarece

$$\Delta p_{61} x p_{12} \backsim \Delta P_{61} \overline{\overline{A}}_1 P_{12}, \quad \Delta p_{12} x p_{23} \backsim \Delta P_{12} \overline{\overline{R}}_2 P_{23},$$

$$\Delta p_{23} x p_{34} \backsim \Delta P_{23} \overline{\overline{B}}_3 P_{34}, \quad \Delta p_{34} x p_{45} \backsim \Delta P_{34} \overline{\overline{S}}_4 P_{45}$$

$$\Delta p_{45} x p_{56} \backsim \Delta P_{45} \overline{\overline{C}}_5 P_{56}, \quad \Delta p_{56} x p_{61} \backsim \Delta P_{56} \overline{\overline{T}}_6 P_{61}.$$

Pentru punctele $\overline{\overline{A}}_1$, $\overline{\overline{B}}_3$, $\overline{\overline{C}}_5$, așezate pe dreptele $X\overline{A}_1$, $X\overline{B}_3$, $X\overline{C}_5$, avem de altfel: $(\overline{A}_1 \overline{\overline{A}}_1) = k_\omega \frac{(\overline{a}_1 x)}{\omega}$, $(\overline{B}_3 \overline{\overline{B}}_3) = k_\omega \frac{(\overline{b}_3 x)}{\omega}$, $(\overline{C}_5 \overline{\overline{C}}_5) = k_\omega \frac{(\overline{c}_5 x)}{\omega}$.

1.2.3. A treia proprietate importantă constă în faptul că dreapta $\Delta x \overline{a}_1$ din figura reprezentativă a metodei solidarizării (fig. 2 și 5) este identică cu dreapta $\Delta' \overline{a}_1$ (fig. 2) a punctelor finale $\overline{a}'_1$ obținută prin metoda pozițiilor false. Într-adevăr, punctul x din figura pozițiilor false poate fi privit ca al patrulea poligon triunghiular auxiliar degenerat cu vîrfurile confundate în el. Cum, pe de altă parte, dreapta punctelor finale $\Delta' \overline{a}_1$ trece și prin punctul $\overline{a}_1$ adevărat de pe dreapta $\Delta \overline{a}_1$, rezultă $\Delta x \overline{a}_1 \equiv \Delta' \overline{a}_1$. Prin solidarizarea triunghiului $\overline{A}_1 \overline{B}_3 \overline{C}_5$ se extinde asemănarea triunghiurilor $X \overline{A}_1 \overline{B}_3$ cu $x \overline{a}_1 \overline{b}_3$, $X \overline{B}_3 \overline{C}_5$ cu $x \overline{b}_3 \overline{c}_5$ și $X \overline{C}_5 \overline{A}_1$ cu $x \overline{c}_5 \overline{a}_1$.

În consecință, dreapta finală $\Delta' \overline{a}_1$ necesară în construcția poligoanelor auxiliare se definește prin punctul x și cu direcția perpendiculară la dreapta $X \overline{A}_1$, ceea ce permite construcția directă a poligonului real și elimină construcțiile ajutătoare, contribuind în continuare la mărirea preciziei. În plus, construcția optimă cere ca unghiul dintre dreptele $\Delta^i \overline{a}_1$ și $\Delta' \overline{a}_1$, inițială și finală, să fie cît mai apropiat de $\pi/2$, ceea ce poate fi îndeplinit. Într-adevăr acest unghi este egal cu acela format de suporturile de forma $X\overline{A}_1$ și $\overline{A}_1 A_1$, YB_3 și $B_3 \overline{B}_3$, $Z\overline{C}_5$ și $C_5 \overline{C}_5$, pentru că au laturile perpendiculare. Deci dintre cele trei cupluri de două astfel de suporturi se vor alege acelea care fac între ele unghiul cel mai mare, construcția poligoanelor începîndu-se cu punctele respective $\overline{a}_1$, $\overline{b}_3$ sau $\overline{c}_5$.

2. STUDIUL VITEZELOR PENTRU LANȚURILE SIMPLE ÎNCHISE CARE CUPRIND CENTRE DE ROTAȚIE AȘEZATE LA INFINIT (CUPLE DE TRANSLAȚIE)

2.1. *Metoda poligoanelor auxiliare.* Exemplificarea se va face pe un contur deformabil de clasa V (fig. 6), compus din cinci elemente legate prin trei cuple de rotație P_{51}, P_{23}, P_{34} și două cuple de translație pentru care centrele sînt la infinit $P_{12\infty}$ și $P_{45\infty}$. În lanțul considerat se dau vitezele punctelor A_1 și B_3 și o proiecție de viteze în ultimul corp, determinîndu-se imediat viteza punctului C_5 de la intersecția suportului proiecției cu dreapta $A_1 P_{51}$, pe care desigur, se cunoaște de asemenea o proiecție de viteze (fig. 7 și 8).

Pentru aplicarea metodei poligoanelor auxiliare (false) este necesar să se considere în locul centrelor $P_{12\infty}$ și $P_{45\infty}$ punctele Q_{12} și Q_{45}, așezate la distanțe finite acceptabile, în care sînt confundate punctele Q_1 și Q_2 sau

Q_4 și Q_5 cu viteze diferite. Datorită cunoașterii vitezelor punctelor A_1, B_3 și C_5 și eventual prin metoda punctelor particulare și a vitezelor punctelor R_2 și S_4, sînt cunoscute proiecțiile de viteze ale tuturor punctelor

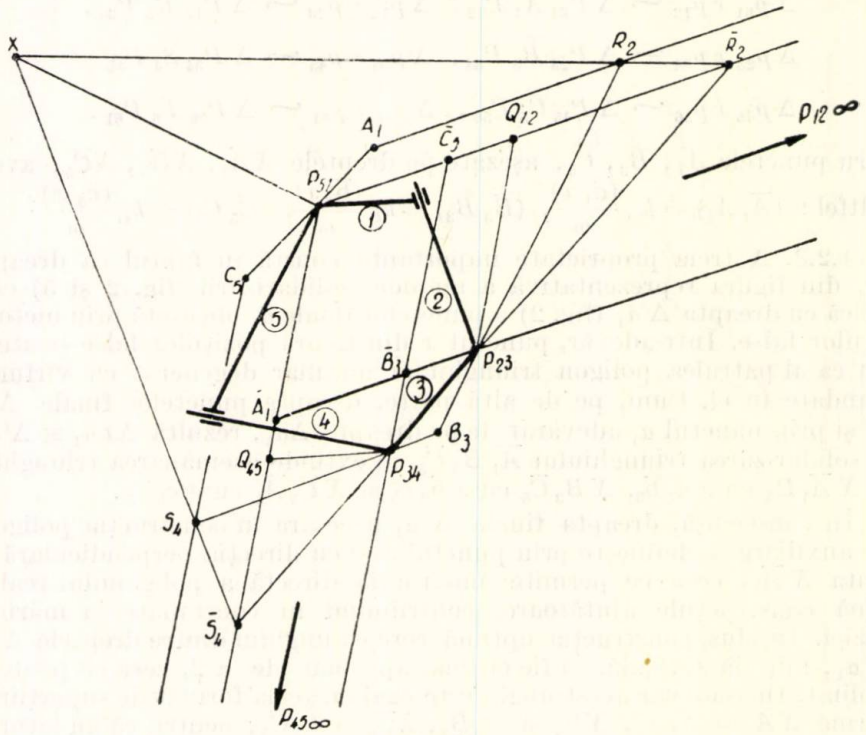


Fig. 6

pe dreptele care le leagă de punctele menționate cu viteze date. Ecuațiile vectoriale de viteze sînt

$$
\begin{aligned}
\frac{\bar{v}_{Q_1^2}}{\Delta q_1} &= \frac{\bar{v}_{P_1^5}}{\Delta p_{15}} + \frac{\bar{v}_{Q_1^2 P_1^5}}{\perp P_{51} Q_{12}} \\
\frac{\bar{v}_{P_2^3}}{\Delta p_{23}} &= \frac{\bar{v}_{Q_2^1}}{\Delta q_2} + \frac{\bar{v}_{P_2^3 Q_2^1}}{\perp Q_{12} P_{23}} \\
\frac{\bar{v}_{P_3^4}}{\Delta p_{34}} &= \frac{\bar{v}_{P_3^2}}{\Delta p_{23}} + \frac{\bar{v}_{P_3^4 P_3^2}}{\perp P_{23} P_{34}} \\
\frac{\bar{v}_{Q_4^5}}{\Delta q_4} &= \frac{\bar{v}_{P_4^3}}{\Delta p_{34}} + \frac{\bar{v}_{Q_4^5 P_4^3}}{\perp P_{34} Q_{45}} \\
\frac{\bar{v}_{P_5^1}}{\Delta p_{12}} &= \frac{\bar{v}_{Q_5^4}}{\Delta q_5} + \frac{\bar{v}_{P_5^1 Q_5^4}}{\perp Q_{45} P_{51}},
\end{aligned}
\tag{8}
$$

la care se adaugă și ecuațiile de compunere a vitezelor în mișcarea relativă pentru corpurile legate prin cuple de translație, deoarece vitezele diferi-

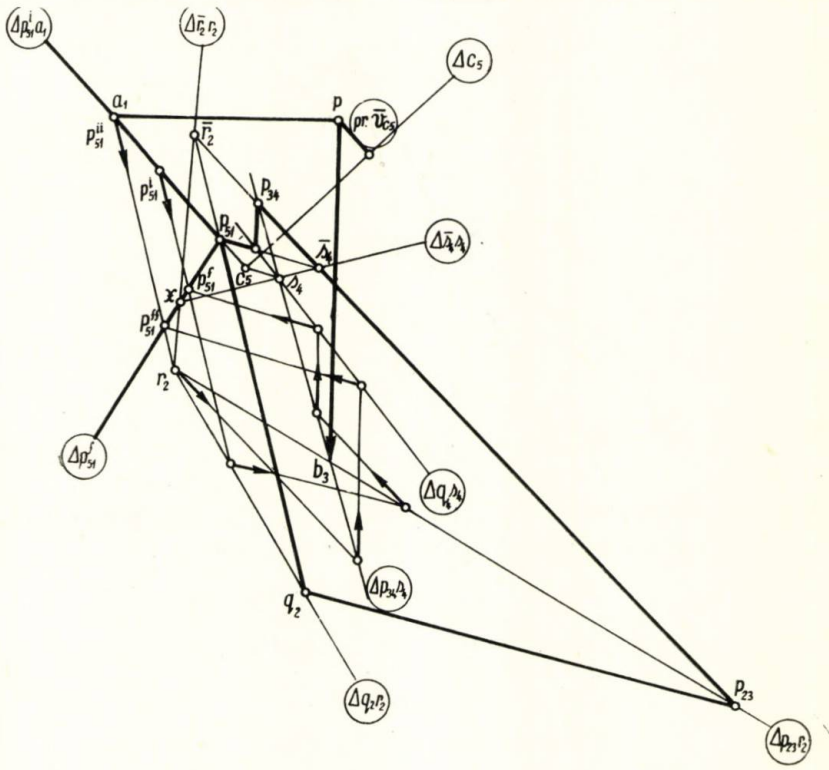


Fig. 7

telor puncte, deși confundate geometric Q_1 și Q_2 sau Q_4 și Q_5, dar legate de corpuri diferite, nu sînt egale:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{v}_{Q_2^1}}{\Delta q_2} &= \frac{\bar{v}_{Q_1^2}}{\Delta q_1} + \frac{\bar{v}_{Q_{21}}}{\perp P_{12}^{\infty} Q_{12}} \\ \frac{\bar{v}_{Q_5^4}}{\Delta q_5} &= \frac{\bar{v}_{Q_4^5}}{\Delta q_4} + \frac{\bar{v}_{Q_{54}}}{\perp P_{12}^{\infty} Q_{45}}. \end{aligned} \tag{9}$$

În cazul cuplelor de rotație, aceste ecuații, desigur, nu intervin, pentru că vitezele punctelor din cuplă aparținînd corpurilor care formează cupla sînt egale.

Cum în fiecare ecuație a sistemului (8)—(9) sînt cîte trei parametri cunoscuți, se pot construi poligoanele auxiliare, care vor avea cîte o latură în plus față de poligonul conturului de elemente pentru fiecare cuplă de

translație, respectiv pentru fiecare punct ajutător Q ales să înlocuiască centrul de rotație de la infinit. Numărul laturilor poligoanelor false poate fi redus printr-o alegere convenabilă a punctelor ajutătoare Q_{12} și Q_{45}.

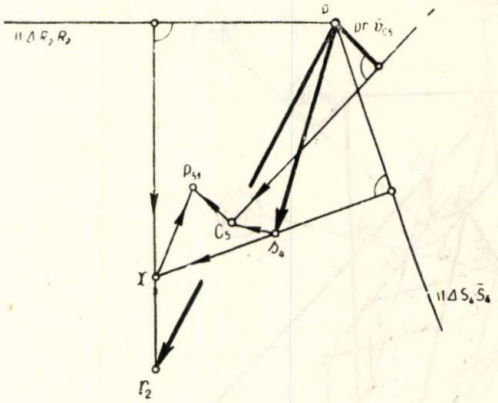


Fig. 8

Astfel, dacă se alege punctul Q_{12} pe dreapta $P_{51}P_{12\infty}$ și punctul Q_{45} pe dreapta $P_{51}P_{45\infty}$, ecuațiile vectoriale rămîn sub forma

$$
\begin{aligned}
&\frac{\overline{v}_{Q_2^1}}{\Delta q_2} + \frac{\overline{v}_{P_1^5}}{\Delta p_{15}} + \frac{\overline{v}_{Q_1^2P_1^5} + \overline{v}_{Q_{21}}}{\perp P_{51}Q_{12}P_{12\infty}} \\
&\frac{\overline{v}_{P_2^3}}{\Delta p_{23}} = \frac{\overline{v}_{Q_2^1}}{\Delta q_2} + \frac{\overline{v}_{P_2^3Q_2^1}}{\perp Q_{12}P_{23}} \\
&\frac{\overline{v}_{P_3^4}}{\Delta p_{34}} = \frac{\overline{v}_{P_3^2}}{\Delta p_{23}} + \frac{\overline{v}_{P_3^4P_3^2}}{\perp P_{23}P_{34}} \\
&\frac{\overline{v}_{Q_4^5}}{\Delta q_4} = \frac{\overline{v}_{P_4^3}}{\Delta p_{34}} + \frac{\overline{v}_{Q_4^5P_4^3}}{\perp P_{34}Q_{45}} \\
&\frac{\overline{v}_{P_5^1}}{\Delta p_{15}} = \frac{\overline{v}_{Q_4^5}}{\Delta q_4} + \frac{\overline{v}_{P_5^1Q_5^4} + \overline{v}_{Q_{54}}}{\perp Q_{45}P_{45\infty}P_{51}}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

În particular se pot alege punctele Q_{12} și Q_{45} în P_{51}, astfel că vitezele $\overline{v}_{Q_1^2P_1^5} = 0$ și $\overline{v}_{P_5^1Q_5^4} = 0$ sînt nule. Desigur, mai ales în situația în care se cunosc numai vitezele punctelor A_1, B_3 și C_5, căutînd a grupa ecuațiile numai pe proiecțiile vitezelor punctelor din aceste corpuri 1—2—3, trebuie să se aleagă Q_{12} pe dreapta $P_{23}Q_{12}P_{12\infty}$ și Q_{45} pe dreapta $P_{34}Q_{45}P_{45\infty}$.

În conformitate cu ecuațiile de mai sus se construiesc poligoanele auxiliare (fig. 7), obținîndu-se punctul p_{51} la intersecția dreptelor $\Delta^i p_{51}$ și $\Delta^f p_{51}$, inițială și finală.

2.2. Metoda solidarizării reduce mai mult construcțiile grafice, neavînd nevoie de punctele ajutătoare. Pentru aceasta se caută un contur triunghiular, cu punctele la distanță finită cît mai apropiate între ele, ale cărei laturi să respecte proprietățile proiecțiilor, adică să treacă prin centrele de rotație. Dintre posibilitățile $P_{51}\,\overline{R}_2\,S_4$, $P_{23}\,S_4\,\overline{A}_1$, $P_{34}\,\overline{C}_5\,\overline{R}_2$ s-a ales conturul triunghiular considerat ca un solid rigid $P_{51}\,\overline{R}_2\,S_4$ (fig. 6 și 7) în vîrfurile căruia se cunosc proiecțiile de viteze ale punctelor respective. Aceasta revine în a se considera punctele ajutătoare Q_{12} în $\overline{R}_2$ și Q_{45} în S_4, adică poligoanele auxiliare sînt construite după ecuațiile vectoriale:

$$\begin{aligned}
&\frac{\overline{v}_{\overline{R}_2}}{\Delta\,\overline{r}_2} = \frac{\overline{v}_{P_1^5}}{\Delta\,p_{15}} + \frac{\overline{v}_{\overline{R}_1 P_1^5} + \overline{v}_{\overline{R}_{21}}}{\perp\, P_{51}\,\overline{R}_2}\\
&\frac{\overline{v}_{\overline{S}_4}}{\Delta\,\overline{s}_4} = \frac{\overline{v}_{\overline{R}_2}}{\Delta\,\overline{r}_2} + \frac{\overline{v}_{\overline{S}_4 P_4^3} + \overline{v}_{P_3^4 P_3^2} + \overline{v}_{P_2^3 \overline{R}_2}}{\perp\, \overline{R}_2\, P_{23}\, P_{34}\, S_4} \qquad (11)\\
&\frac{\overline{v}_{P_5^1}}{\Delta\,p_{15}} = \frac{\overline{v}_{\overline{S}_4}}{\Delta\,\overline{s}_4} + \frac{\overline{v}_{P_5^1 \overline{S}_5} + \overline{v}_{\overline{S}_{54}}}{\perp\, P_{51}\,S_4}.
\end{aligned}$$

Raportul de asemănare între triunghiurile $\Delta p_{51}\,\overline{r}_2\,\overline{s}_4$ și $\Delta P_{51}\,\overline{R}_2\,S_4$ este $r = \frac{\omega}{k_\omega}$,

unde

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{\omega_1\, P_{51}\,\overline{R}_1 + v_{\overline{R}_{21}}}{P_{51}\,\overline{R}_1} =\\
&= \frac{\omega_2\,\overline{R}_2\,P_{23} + \omega_3\,P_{23}\,P_{34} + \omega_4\,P_{34}\,S_4}{\overline{R}_2\,S_4} = \qquad (12)\\
&= \frac{\omega_5\,S_5\,P_{51} + v_{\overline{S}_{54}}}{S_5\,P_{51}}.
\end{aligned}$$

Pentru aplicarea metodelor proiecțiilor sau a poligoanelor de viteze se găsește mai întîi vectorul viteză al punctului X al triunghiului rigid $P_{51}\,\overline{R}_2\,S_4$ situat la intersecția suporturilor proiecțiilor $R_2\,\overline{R}_2$ și $S_4\,S_4$ care apoi se proiectează (fig. 6 și 8) pe direcția XP_{51} și livrează a doua proiecție de viteză necesară pentru aflarea vitezei punctului P_{51}.

În planul vitezelor (fig. 8), construcțiile grafice se fac pentru triunghiul rigid $P_{51}\,\overline{R}_2\,S_4$, conform următoarelor ecuații:

$$\overline{v}_X = \overline{v}_{\overline{R}_2} + \overline{v}_{X\overline{R}_2} = \overline{v}_{\overline{S}_4} + \overline{v}_{X\overline{S}_4}$$

sau

$$\overline{v}_X = \overline{v}_{\overline{R}_2} + \frac{\overline{v}_{\overline{R}_2 R_2} + \overline{v}_{X\overline{R}_2}}{\perp\, X\,R_2\,\overline{R}_2} = \overline{v}_{S_4} + \frac{\overline{v}_{\overline{S}_4 S_4} + \overline{v}_{X\overline{S}_4}}{\perp\, X\,S_4\,S_4}$$

şi apoi

$$\overline{v}_{P_{51}} = \overline{v}_X + \underset{\perp XP_{51}}{\overline{v}_{P_{51}X}} = \overline{v}_{C_5} + \underset{\perp C_5P_{51}}{\overline{v}_{P_{51}C_5}}.$$

De asemenea, dreapta finală $\Delta^1 p_{51}$ de la metoda poligoanelor auxiliare corespunde cu dreapta care trece prin x, extremitatea vitezei punctului X, şi este perpendiculară pe direcţia XP_{51}, ceea ce se justifică şi prin proprietăţile de asemănare, punctele X şi P_{51} făcînd parte dintr-un lanţ cinematic considerat ca solid rigid (fig. 6).

Odată aflată viteza punctului P_{51}, se cunosc vitezele a două puncte A_1, P_1 şi C_5, P_5 din primul şi ultimul corp, astfel că distribuţia lor de viteze este cunoscută, iar apoi, prin metodele simple clasice, se determină distribuţia de viteze şi în celelalte corpuri ale lanţului.

3. STUDIUL GENERAL AL VITEZELOR ÎN LANŢURILE SIMPLE ÎNCHISE CU CUPLE INFERIOARE (CUPLE DE TRANSLAŢIE ŞI CUPLE DE ROTAŢIE)

3.1. Pentru aplicarea metodei poziţiilor false sub forma cea mai generală, se aleg punctele ajutătoare A_{12}, R_{23}, B_{34}, ..., D_{78}, Q_{81}... oarecare (fig. 9), în care se găsesc confundate punctele materiale legate de corpurile arătate prin indicii respectivi. Exemplificarea făcîndu-se pe un contur de clasa VIII, se pot scrie următoarele ecuaţii vectoriale:

$$\begin{aligned}
&\underset{\Delta a_2}{\overline{v}_{A_2}} = \underset{\Delta a_1}{\overline{v}_{A_1}} + \underset{\perp P_{12}A_{12}}{\overline{v}_{A_{21}}} \\
&\underset{\Delta r_2}{\overline{v}_{R_2}} = \underset{\Delta a_2}{\overline{v}_{A_2}} + \underset{\perp AR}{\overline{v}_{R_2A_2}} \\
&\underset{\Delta r_3}{\overline{v}_{R_3}} = \underset{\Delta r_2}{\overline{v}_{R_2}} + \underset{\perp P_{23}R_{23}}{\overline{v}_{R_{32}}} \\
&\underset{\Delta b_3}{\overline{v}_{B_3}} = \underset{\Delta r_3}{\overline{v}_{R_3}} + \underset{\perp RB}{\overline{v}_{B_3R_3}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\underset{\Delta q_1}{\overline{v}_{Q_1}} = \underset{\Delta q_8}{\overline{v}_{Q_8}} + \underset{\perp P_{81}Q_{81}}{\overline{v}_{Q_{18}}} \\
&\underset{\Delta a_1}{\overline{v}_{A_1}} = \underset{\Delta q_1}{\overline{v}_{Q_1}} + \underset{\perp QA}{\overline{v}_{A_1Q_1}}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Pornindu-se de la faptul că se cunosc proiecţiile vitezelor tuturor punctelor, deoarece se cunosc vitezele punctelor A_1, B_3, C_5 etc. şi apoi pentru punctele particulare assurice R_2, S_4, T_6 etc. cîte unul pentru fie-

care corp, se pot construi poligoanele false care vor avea un număr dublu de laturi ($2n$) față de numărul elementelor lanțului, cîte o latură perpendiculară pe dreapta care unește punctul ajutător de forma A_{12} cu centrul de rotație relativ corespunzător P_{12} (instantaneu sau permanent), iar alta perpendiculară pe dreapta care unește două puncte ajutătoare consecutive de forma $A_{12}\ R_{23}$.

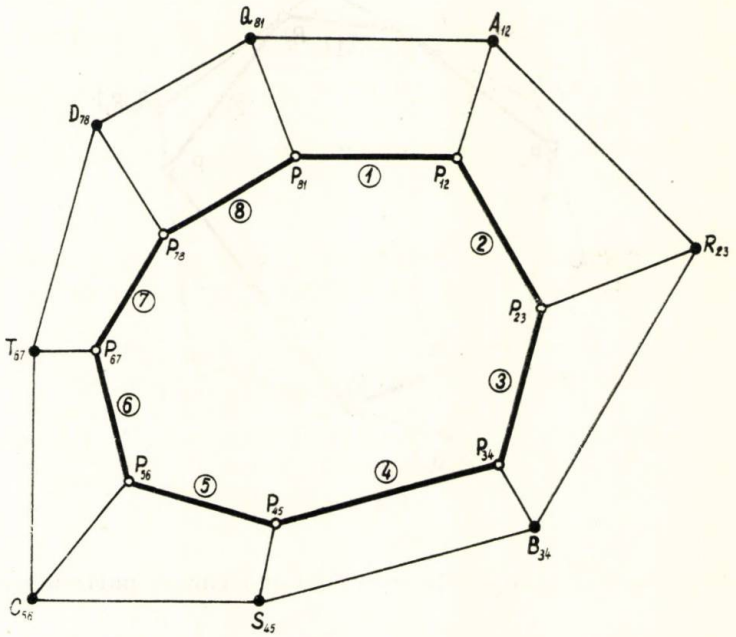


Fig. 9

3.2. Numărul laturilor poligoanelor false se poate reduce la numărul elementelor din lanțul cinematic (n) dacă se grupează convenabil relațiile de mai sus și se aleg punctele ajutătoare în mod corespunzător (fig. 10).

$$
\begin{aligned}
\frac{\bar{v}_{R_2}}{\Delta r_2} &= \frac{\bar{v}_{A_1}}{\Delta a_1} + \frac{\bar{v}_{A_{21}} + \bar{v}_{R_2 A_2}}{\perp A_{12}\, P_{12}\, R_{23}} \\
\frac{\bar{v}_{B_3}}{\Delta b_3} &= \frac{\bar{v}_{R_2}}{\Delta r_2} + \frac{\bar{v}_{R_{32}} + \bar{v}_{B_3 R_3}}{\perp R_{23}\, P_{23}\, B_{34}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\bar{v}_{A_1}}{\Delta a_1} &= \frac{\bar{v}_{Q_8}}{\Delta q_8} + \frac{\bar{v}_{Q_{18}} + \bar{v}_{A_1 Q_1}}{\perp Q_{81}\, P_{81}\, A_{12}}
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

Grupînd vitezele relative de forma $\bar{v}_{A_{21}}$ cu vitezele din rotație de forma $\bar{v}_{R_2 A_2}$ pe aceeași dreaptă, trebuie ca punctele din grupele $A_{12}\, P_{12}\, R_{23}$, $R_{23}\, P_{23}\, B_{34}$, ..., $Q_{81}\, P_{81}\, A_{12}$ etc. să fie separat coliniare (fig. 10). Se

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

permite aplicarea poziţiilor false pentru conturul $A_1 R_2 B_3 \ldots$ convenabil construit, indiferent de natura cuplelor cinematice, adică de poziţia centrelor de rotaţie.

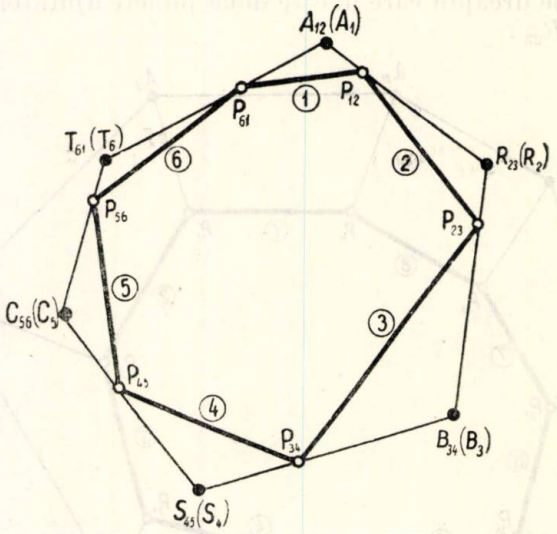


Fig. 10

Restricţiile sînt îndeplinite uşor în două cazuri particulare utile în aplicaţii :

a) punctele ajutătoare A_{12} se confundă cu centrele de rotaţie relative respective P_{12}. Viteza relativă de forma $\overline{v}_{A_{21}} = 0$ este nulă şi ecuaţiile impare se reduc :

$$\overline{v}_{A_2} = \overline{v}_{A_1}, \ \overline{v}_{R_2} = \overline{v}_{R_1}, \ \ldots, \overline{v}_{Q_1} = \overline{v}_{Q_8}. \tag{15}$$

Este cazul obişnuit întîlnit în lanţurile cinematice numai cu cuple de rotaţie (fig. 11) ;

b) punctele ajutătoare $A_{12}, R_{23}, \ldots, Q_{81}$ etc. se confundă într-un singur punct Q (fig. 11). Viteza de rotaţie de forma $\overline{v}_{R_2 A_2} = 0$ este nulă şi ecuaţiile pare se reduc :

$$\begin{aligned}
&\overline{v}_{A_1} = \overline{v}_{R_1} = \overline{v}_{B_1} = \ldots = \overline{v}_{Q_1} \\
&\overline{v}_{A_2} = \overline{v}_{R_2} = \overline{v}_{B_2} = \ldots = \overline{v}_{Q_2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\overline{v}_{A_8} = \overline{v}_{R_8} = \overline{v}_{B_8} = \ldots = \overline{v}_{Q_8},
\end{aligned} \tag{16}$$

astfel că

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{v}_{Q_2}}{\Delta q_2} &= \frac{\bar{v}_{Q_1}}{\Delta q_1} + \frac{\bar{v}_{Q_{21}}}{\perp P_{12}\,Q} \\
\frac{\bar{v}_{Q_3}}{\Delta q_3} &= \frac{\bar{v}_{Q_2}}{\Delta q_2} + \frac{\bar{v}_{Q_{32}}}{\perp P_{23}\,Q} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\bar{v}_{Q_1}}{\Delta q_1} &= \frac{\bar{v}_{Q_8}}{\Delta q_8} + \frac{\bar{v}_{Q_{18}}}{\perp P_{81}\,Q}.
\end{aligned} \tag{17}$$

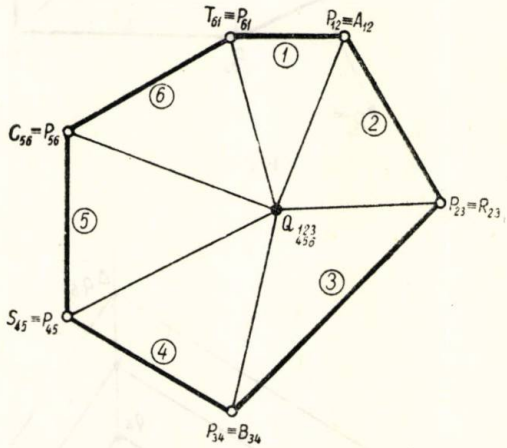


Fig. 11

Dacă punctul comun Q este ales la intersecţia dreptelor pe care se găsesc centre de rotaţie, de exemplu $P_{12}\ P_{23}$ şi $P_{34}\ P_{45}$ (fig. 11), poligoanele auxiliare se reduc cu două laturi.

Cazul anterior (a) presupune că centrele de rotaţie trebuie să se găsească la distanţe finite acceptabile construcţiilor grafice. Acesta poate fi combinat cu cazul general dacă lanţul cinematic are şi cuple de translaţie, păstrînd deci punctele ajutătoare confundate cu centrele de rotaţie finite şi considerînd punctele ajutătoare diferite pentru centrele de rotaţie de la infinit (fig. 6). Prin utilizarea punctelor ajutătoare confundate Q (*b*), metoda se poate aplica indiferent de natura cuplelor din lanţul cinematic.

Se exemplifică reprezentarea poligoanelor auxiliare pentru puncte ajutătoare confundate Q la un contur de clasa VII, care cuprinde şi centre de rotaţie la infinit (fig. 12 şi 13).

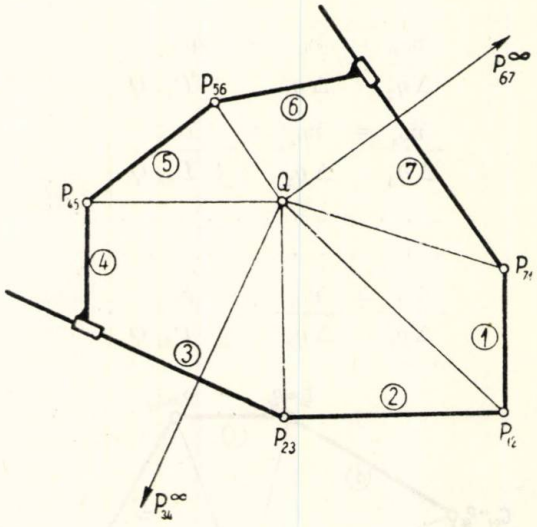

P56
P67∞
6
5
Q
7
P45
4
P71
3
1
2
P23
P12
P34∞

Fig. 12

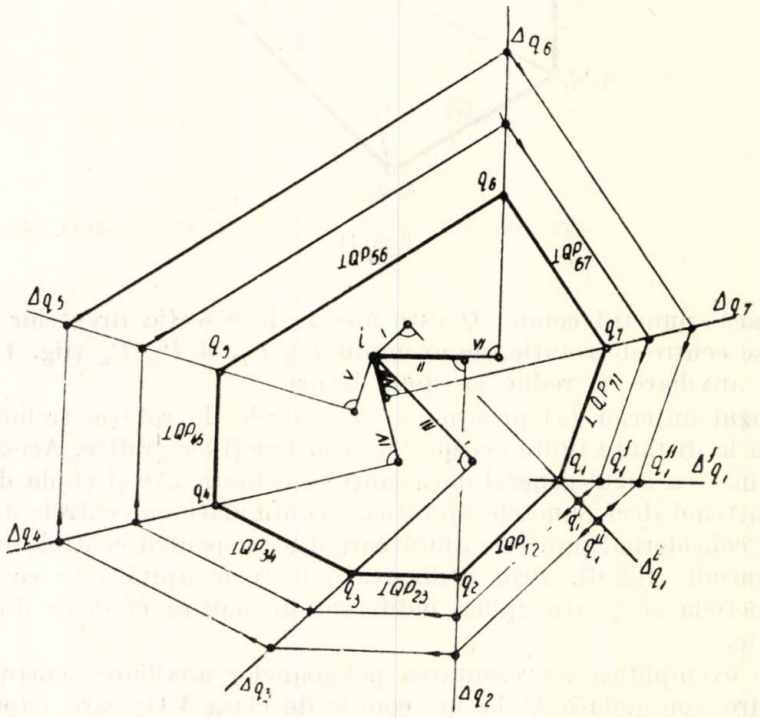

Δq6
q6
∠QP56
∠QP67
Δq5
q5
Δq7
q7
i
I
II
III
IV
V
VI
∠QP71
∠QP65
q1
q1'
q1''
Δ'q1
Δq4
q4
∠QP34
∠QP12
q3
∠QP23
q2
Δq3
Δq2

Fig. 13

3.3. Metoda solidarizării presupune o grupare mai strînsă a necunoscutelor din ecuaţiile vectoriale

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{v}_{B_3}}{\Delta b_3} &= \frac{\bar{v}_{A_1}}{\Delta a_1} + \frac{\bar{v}_{A_{21}} + \bar{v}_{R_2 A_2} + \bar{v}_{R_{32}} + \bar{v}_{B_3 R_3}}{\perp A_{12}\, P_{12}\, R_{23}\, P_{23}\, B_{34}} \\
\frac{\bar{v}_{C_5}}{\Delta c_5} &= \frac{\bar{v}_{R_3}}{\Delta b_3} + \frac{\bar{v}_{B_{33}} + \bar{v}_{S_4 B_4} + \bar{v}_{S_{54}} + \bar{v}_{C_5 S_5}}{\perp B_{34}\, P_{34}\, S_{45}\, P_{45}\, C_{56}} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\bar{v}_{A_1}}{\Delta a_1} &= \frac{\bar{v}_{D_7}}{\Delta d_7} + \frac{\bar{v}_{D_{87}} + \bar{v}_{Q_8 D_8} + \bar{v}_{Q_{18}} + \bar{v}_{A_1 Q_1}}{\perp D_{78}\, P_{78}\, Q_{81}\, P_{81}\, A_{12}}
\end{aligned} \tag{18}$$

Pentru realizarea acestei grupări trebuie ca trei puncte ajutătoare consecutive — $A_{12}\ R_{23}\ B_{34}$ — să se găsească pe dreapta centrelor corespunzătoare (pentru această grupare) indicilor primelor puncte $P_{12}\ P_{23}$ (fig. 14), ceea ce justifică din nou concluziile solidarizării bazate pe proprietăţile de proiecţii. Numărul laturilor poligoanelor false se reduce la jumătate $\frac{n}{2}$, ca şi numărul necesar de proiecţii de viteze cunoscute Δa_1, Δb_3, Δc_5, Δd_7 etc.

Punctele A_{12}, B_{34}, C_{56}, D_{78} se vor găsi la intersecţia dreptelor $P_{12}\,P_{23}$, $P_{34}\,P_{45}$, $P_{56}\,P_{67}$ şi $P_{78}\,P_{81}$ (corespunzînd în metoda solidarizării cu punctele $\bar{A}_1$, $\bar{B}_3$, $\bar{C}_5$, $\bar{D}_7$), iar restul punctelor ajutătoare R_{23}, S_{45}, T_{67}, Q_{81} sînt eliminate, deoarece pot fi alese arbitrar pe dreptele centrelor sus-menţionate (fig. 14).

4. STUDIUL VITEZELOR PRIN EXTINDEREA METODEI SOLIDARIZĂRII

În exemplificarea conturului de clasa VIII (fig. 15), acesta este redus prin metoda solidarizării la conturul de clasa IV, adică la laturile $\Delta\bar{A}_1\bar{B}_3$, $\Delta\bar{B}_3\bar{C}_5$, $\Delta\bar{C}_5\bar{D}_7$ şi $\Delta\bar{D}_7\bar{A}_1$, care se bucură de proprietăţile de proiecţii ale unui solid rigid şi deci lanţul de corpuri poate fi considerat ca rigidizat. În vîrfurile conturului se cunosc proiecţiile de viteze $\bar{v}_{\bar{A}_1}$, $\bar{v}_{\bar{B}_3}$, $\bar{v}_{\bar{C}_5}$, $\bar{v}_{\bar{D}_7}$ egale cu ale vitezelor $\bar{v}_{A_1}$, $\bar{v}_{B_3}$, $\bar{v}_{C_5}$, $\bar{v}_{D_7}$ pe direcţiile $\Delta\bar{A}_1\bar{A}_1$, $\Delta\bar{B}_3\bar{B}_3$, $\Delta\bar{C}_5\bar{C}_5$, şi $\Delta\bar{D}_7\bar{D}_7$. Mai departe, pe baza aceleiaşi proprietăţi de proiecţii din conturul patrulater $\bar{A}_1\,\bar{B}_3\,\bar{C}_5\,D_7$ (fig. 15), se pot extrage conturele cu trei laturi $W\,A_1\,B_3$, $W\,\bar{C}_5\,\bar{D}_7$ sau $V\,\bar{A}_1\,\bar{D}_7$, $V\,\bar{B}_3\,\bar{C}_5$, care prin intermediul punctelor comune W sau V permit din nou aplicarea metodelor simple de determinarea vitezelor.

Spre exemplu (fig. 15), în triunghiul rigidizat $W\,\bar{C}_5\,\bar{D}_7$ din proiecţiile pr $\bar{v}_{C_5}$ şi pr $\bar{v}_{D_7}$ se determină viteza punctului Y de la intersecţia suporturilor respective $\Delta C_5\bar{C}_5$ şi $\Delta D_7\bar{D}_7$, care apoi, proiectată pe direcţia YW, livrează proiecţia din vîrful W al acestui contur. Pentru al doilea triunghi rigidizat $W\,\bar{A}_1\,B_3$ se cunosc acum trei proiecţii de viteze în vîrfu-

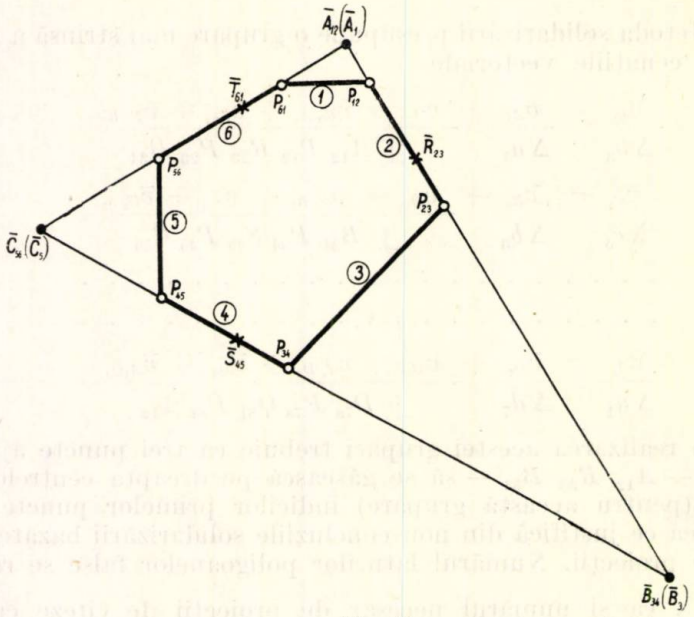

$\bar{A}_{12}(\bar{A}_1)$
$\bar{T}_{61}$
P_{61}
P_{12}
$\bar{R}_{23}$
P_{56}
P_{23}
$\bar{C}_{34}(\bar{C}_3)$
P_{45}
$\bar{S}_{45}$
P_{34}
$\bar{B}_{34}(\bar{B}_3)$

Fig. 14

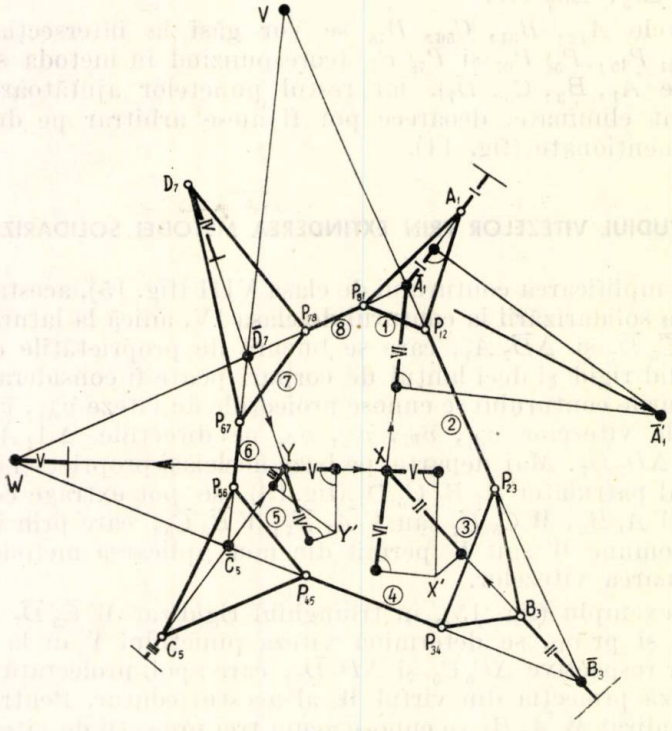

V
D_7
A_1
P_{18}
$\bar{D}_7$
P_{12}
P_{67}
$\bar{A}_1$
W
P_{56}
P_{23}
$\bar{C}_5$
P_{45}
B_3
C_5
P_{34}
$\bar{B}_3$

Fig. 15

rile sale, astfel că se poate utiliza în continuare metoda proiecţiilor, a planelor de viteză sau a poligoanelor auxiliare. Din proiecţiile pr $\overline{v}_W$ = pr $\overline{v}_Y$ şi pr $\overline{v}_{B_3}$ se determină viteza punctului X de la intersecţia suporturilor ΔWY şi $\Delta B_3\overline{B}_3$, care, proiectată pe direcţia $X\overline{A}_1$, livrează a doua proiecţie din vîrful A_1, ceea ce permite determinarea vitezei acestui punct. Se reţine deci că aplicarea metodei proiecţiilor se face pentru conturul patrulater

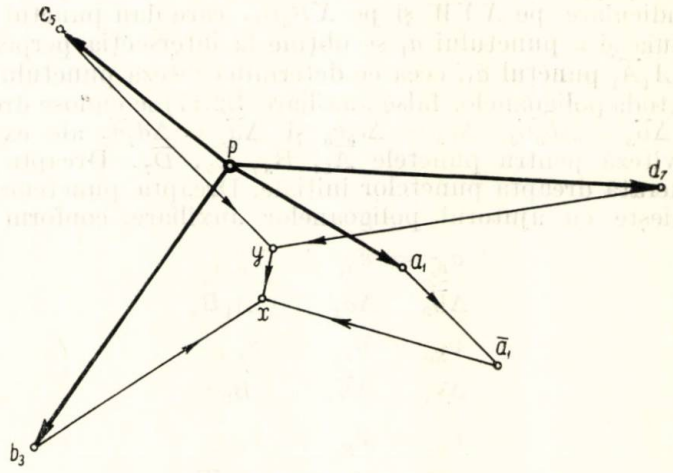


Fig. 16

din aproape în aproape, conform unei succesiuni $\overline{D}_7$, $\overline{C}_5$, $\overline{B}_3$, $\overline{A}_1$ cu condiţia ca puncte intermediare W, Y, X să fie coliniare, ceea ce constituie o anumită condiţie de compatibilitate, căci în patrulaterul considerat ca un rigid sînt patru parametri scalari (proiecţii) cunoscuţi. Această proprietate s-a obţinut pe baza considerării triunghiurilor rigide $W\overline{A}_1B_3\,(X)$ şi $W\overline{C}_5\overline{D}_7\,(Y)$ cu punct comun în W.

În planul vitezelor (fig. 16), schema de calcul se explică pe baza ecuaţiilor vectoriale:

— din triunghiul $W\,\overline{C}_5\,\overline{D}_7\,(Y)$ considerat rigid:

$$\overline{v}_Y = \overline{v}_{\overline{D}_7} + \overline{v}_{Y\overline{D}_7} = \overline{v}_{\overline{C}_5} + \overline{v}_{Y\overline{C}_5}$$

sau

$$\overline{v}_Y = \underbrace{\overline{\overline{v}}_{D_7}}_{\perp YD_7\overline{D}_7} + \underbrace{\overline{v}_{\overline{D}_7D_7} + \overline{v}_{Y\overline{D}_7}}_{\perp YD_7\overline{D}_7} = \underbrace{\overline{\overline{v}}_{C_5}}_{\perp YC_5\overline{C}_5} + \underbrace{\overline{v}_{\overline{C}_5C_5} + \overline{v}_{Y\overline{C}_5}}_{\perp YC_5\overline{C}_5} \tag{19}$$

şi

$$\overline{v}_W = \underbrace{\overline{\overline{v}}_Y}_{\perp YW} + \underbrace{\overline{v}_{WY}}_{\perp YW};$$

— din triunghiul $W\,\overline{A}_1\,\overline{B}_3\,(X)$ considerat rigid:

$$\overline{v}_X = \overline{v}_W + \overline{v}_{XW} = \overline{v}_{\overline{B}_3} + \overline{v}_{X\overline{B}_3}$$

sau

$$\overline{v}_X = \underbrace{\overline{\overline{v}}_Y}_{\perp XYW} + \underbrace{\overline{v}_{WY} + \overline{v}_{XW}}_{\perp XYW} = \underbrace{\overline{\overline{v}}_{B_3}}_{\perp XB_3B_3} + \underbrace{\overline{v}_{\overline{B}_3B_3} + \overline{v}_{X\overline{B}_3}}_{\perp XB_3B_3} \tag{20}$$

și

$$\overline{v}_{\overline{A}_1} = \overline{v}_{\overline{X}} + \underset{\perp \overline{XA}_1}{\overline{v}_{\overline{A}_1 \overline{X}}} = \overline{v}_{\overline{A}_1} + \underset{\perp \overline{A}_1\overline{A}_1}{\overline{v}_{\overline{A}_1\overline{A}_1}}.$$

Deci din punctele c_5 și d_7 (fig. 16) se coboară perpendiculare pe $Y\,C_5\overline{C}_5$ și $YD_7\overline{D}_7$, obținîndu-se la intersecție y. Din acest punct și din b_3 se duc perpendiculare pe XYW și pe $XB_3\overline{B}_3$, care dau punctul x. Cu ajutorul acestuia și a punctului a_1 se obține la intersecția perpendicularelor pe $X\overline{A}_1$ și $A_1\overline{A}_1$ punctul $\overline{a}_1$, ceea ce determină viteza punctului $\overline{A}_1$.

În metoda poligoanelor false-auxiliare (fig.17) se cunosc dreptele $\Delta\overline{a}_1 = \Delta a_1\overline{a}_1$, $\Delta\overline{b}_3 = \Delta b_3\overline{b}_3$, $\Delta\overline{c}_5 = \Delta c_5\overline{c}_5$ și $\Delta\overline{d}_7 = \Delta d_7\overline{d}_7$ ale extremităților vectorilor-viteză pentru punctele $\overline{A}_1$, $\overline{B}_3$, $\overline{C}_5$, $\overline{D}_7$. Dreapta $\Delta\overline{a}_1 = \Delta'\overline{a}_1$ este considerată dreapta punctelor inițiale. Dreapta punctelor finale $\Delta'\overline{a}_1$ se construiește cu ajutorul poligoanelor auxiliare, conform ecuațiilor:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{v}_{\overline{B}_3}}{\Delta\overline{b}_3} &= \frac{\overline{v}_{\overline{A}_1}}{\Delta\overline{a}_1} + \frac{\overline{v}_{\overline{B}_3\overline{A}_1}}{\perp \overline{A}_1B_3} \\
\frac{\overline{v}_{\overline{S}_5}}{\Delta\overline{s}_5} &= \frac{\overline{v}_{\overline{B}_3}}{\Delta\overline{b}_3} + \frac{\overline{v}_{\overline{S}_5\overline{B}_3}}{\perp \overline{B}_3S_5} \\
\frac{\overline{v}_{\overline{D}_7}}{\Delta\overline{d}_7} &= \frac{\overline{v}_{\overline{S}_5}}{\Delta\overline{s}_5} + \frac{\overline{v}_{\overline{D}_7\overline{S}_5}}{\perp S_5\overline{D}_7} \\
\frac{\overline{v}_{\overline{A}_1}}{\Delta\overline{a}_1} &= \frac{\overline{v}_{\overline{D}_7}}{\Delta\overline{d}_7} + \frac{\overline{v}_{\overline{A}_1\overline{D}_7}}{\perp \overline{D}_7\overline{A}_1}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Prin introducerea punctului W comun triunghiurilor rigide $W\overline{C}_5\overline{D}_7$ și $W\overline{A}_1\overline{B}_3$, ecuațiile se separă în

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{v}_{\overline{D}_7}}{\Delta\overline{d}_7} &= \frac{\overline{v}_{\overline{C}_5}}{\Delta\overline{c}_5} + \frac{\overline{v}_{\overline{D}_7\overline{C}_5}}{\perp \overline{C}_5\overline{D}_7} \\
\frac{\overline{v}_W}{\Delta w} &= \frac{\overline{v}_{\overline{C}_5}}{\Delta C_5} + \frac{\overline{v}_{W\overline{C}_5}}{\perp C_5W} \\
\frac{\overline{v}_W}{\Delta w} &= \frac{\overline{v}_{\overline{D}_7}}{\Delta\overline{d}_7} + \frac{\overline{v}_{W\overline{D}_7}}{\perp \overline{D}_7W}
\end{aligned} \tag{22}$$

și

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{v}_{\overline{B}_3}}{\Delta\overline{b}_3} &= \frac{\overline{v}_{\overline{A}_1}}{\Delta\overline{a}_1} + \frac{\overline{v}_{\overline{B}_3\overline{A}_1}}{\perp \overline{A}_1\overline{B}_3} \\
\frac{\overline{v}_W}{\Delta w} &= \frac{\overline{v}_{\overline{B}_3}}{\Delta\overline{b}_3} + \frac{\overline{v}_{W\overline{B}_3}}{\perp \overline{B}_3W} \\
\frac{\overline{v}_{\overline{A}_1}}{\Delta\overline{a}_1} &= \frac{\overline{v}_W}{\Delta w} + \frac{\overline{v}_{\overline{A}_1W}}{\perp W\overline{A}_1}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Din prima serie de ecuații (22) pentru triunghiul $W\overline{C}_5\overline{D}_7$, alegîndu-se diverse puncte $\overline{c}_5$ de pe dreapta Δc_5, se determină punctele $\overline{d}_7$ pe dreapta $\Delta\overline{d}_7$. Din punctele $\overline{c}_5$ și $\overline{d}_7$ se determină punctele w, care determină dreapta Δw. Din considerente de asemănare, această dreaptă Δw trece prin punc-

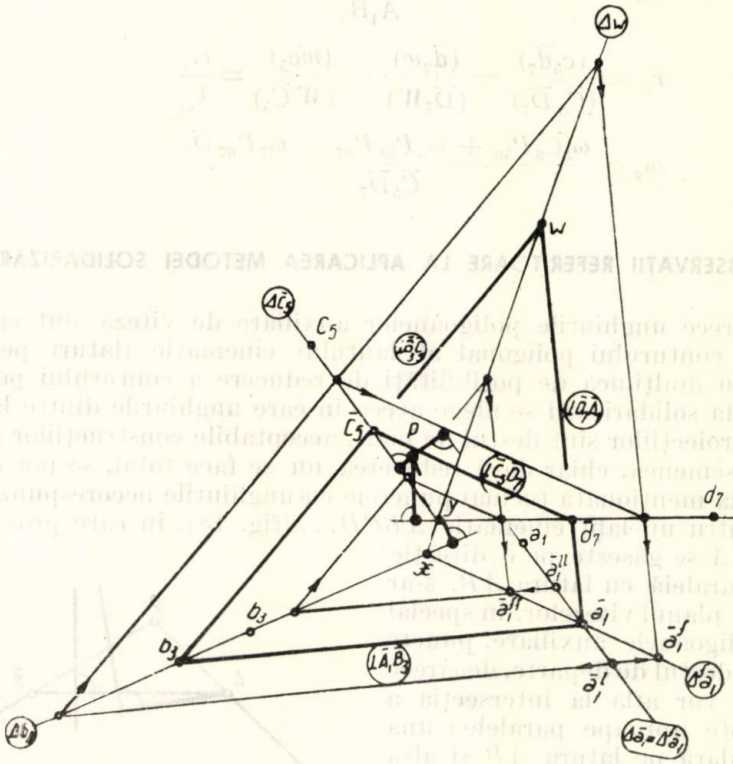


Fig. 17

tul y intersecția dreptelor $\Delta\overline{c}_5$ și $\Delta\overline{d}_7$ și este perpendiculară pe dreapta YW. Cu seria a doua de ecuații (23) se poate proceda în mod obișnuit pentru construcția triunghiurilor auxiliare $\overline{a}_1\overline{b}_3w$, deoarece se cunosc dreptele $\Delta\overline{a}_1$, $\Delta\overline{b}_3$ și Δw. Astfel, din punctele determinate anterior se construiesc punctele $\overline{b}_3$ și apoi din w și $\overline{b}_3$ se determină punctele $\overline{a}_1'$, care se găsesc pe dreapta punctelor finale $\Delta'\overline{a}_1$. Din aceleași considerente de asemănare, această dreaptă $\Delta'\overline{a}_1$ trece prin punctul x intersecția dreptelor Δw și $\Delta\overline{b}_3$ și este perpendiculară pe dreapta $X\overline{A}_1$.

Triunghiurile $W\overline{C}_5\overline{D}_7(Y)$ și $W\overline{A}_{15}\overline{B}_3(X)$ din planul mecanismului sînt separat asemenea cu triunghiurile $w\overline{c}_5\overline{d}_7(y)$ și $w\overline{a}_1\overline{b}_3(x)$ din planul vitezelor.

Rapoartele de asemănare sînt diferite :

$$r_x = \frac{(\vec{a}_1\vec{b}_3)}{(\vec{A}_1\vec{B}_3)} = \frac{(\vec{b}_3 w)}{(\vec{B}_3 W)} = \frac{(w\vec{a}_1)}{(W\vec{A}_1)} = \frac{\omega_x}{k_\omega}$$

$$\omega_x = \frac{\omega_1 \vec{A}_1 P_{12} + \omega_2 P_{12} P_{23} + \omega_3 P_{23} \vec{B}_3}{\vec{A}_1\vec{B}_3} \tag{24}$$

$$r_y = \frac{(\vec{c}_5\vec{d}_7)}{(\vec{C}_5\vec{D}_7)} = \frac{(\vec{d}_7 w)}{(\vec{D}_7 W)} = \frac{(w\vec{c}_5)}{(W\vec{C}_5)} = \frac{\omega_y}{k_\omega}$$

$$\omega_y = \frac{\omega_5 \vec{C}_5 P_{56} + \omega_6 P_{56} P_{67} + \omega_7 P_{67} \vec{D}_7}{\vec{C}_5\vec{D}_7}. \tag{25}$$

5. OBSERVAȚII REFERITOARE LA APLICAREA METODEI SOLIDARIZĂRII

Deoarece unghiurile poligoanelor auxiliare de viteză sînt egale cu unghiurile conturului poligonal al lanțului cinematic (laturi perpendiculare), din mulțimea de posibilități de reducere a conturului poligonal prin metoda solidarizării se alege aceea în care unghiurile dintre laturi și direcțiile proiecțiilor sînt destul de mari, acceptabile construcțiilor grafice.

De asemenea, chiar dacă reducerea nu se face total, se pot elimina prin metoda menționată tocmai punctele cu unghiurile necorespunzătoare. Astfel, pentru un lanț cinematic $ABCD\ldots$ (fig. 18), în care proiecția de viteză din A se găsește pe o direcție aproape paralelă cu latura AB, s-ar produce în planul vitezelor, în special pentru poligoanele auxiliare, puncte (a) situate destul de departe, deoarece acestea se vor afla la intersecția a două drepte aproape paralele : una perpendiculară pe latura AB și alta perpendiculară pe direcția proiecției din A. Prin eliminarea laturii AB, unghiurile construcției rămase pot fi acceptabile.

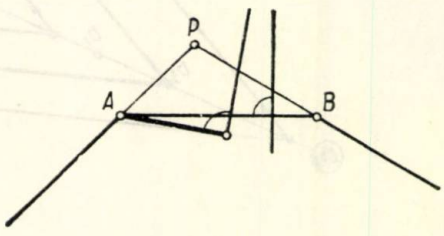


Fig. 18

Totodată, utilizînd metoda solidarizării, se pot căuta ușor punctele de începerea construcțiilor poligoanelor false pentru care, între dreapta punctelor inițiale și dreapta punctelor finale, unghiul este iarăși convenabil.

6. DISCUȚII ȘI SISTEMATIZARI ASUPRA REZOLVĂRII CONTURELOR POLIGONALE DE DIFERITE CLASE

Pentru determinarea distribuțiilor de viteze într-un lanț cinematic simplu închis care cuprinde (n) solide rigide și care are localizate centrele de rotație relative a grupurilor de două corpuri alăturate consecutive,

deci în același număr $c = n$, sînt necesari $p = 3n - 2c = n$ parametri scalari. Avînd în vedere că pentru o suită de (i) corpuri numărul para-

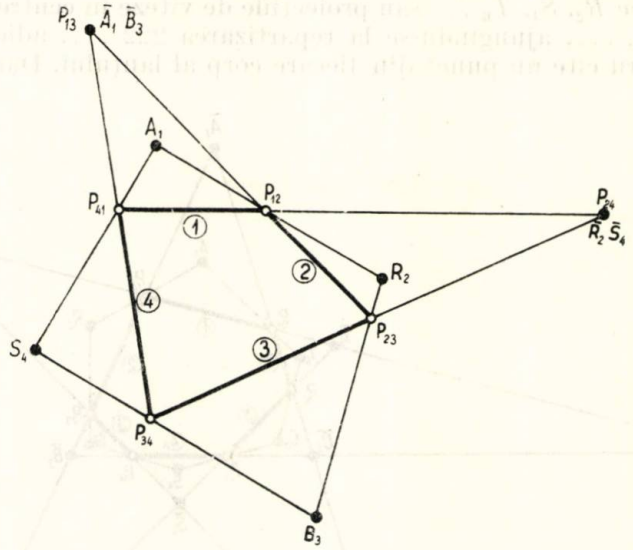


Fig. 19

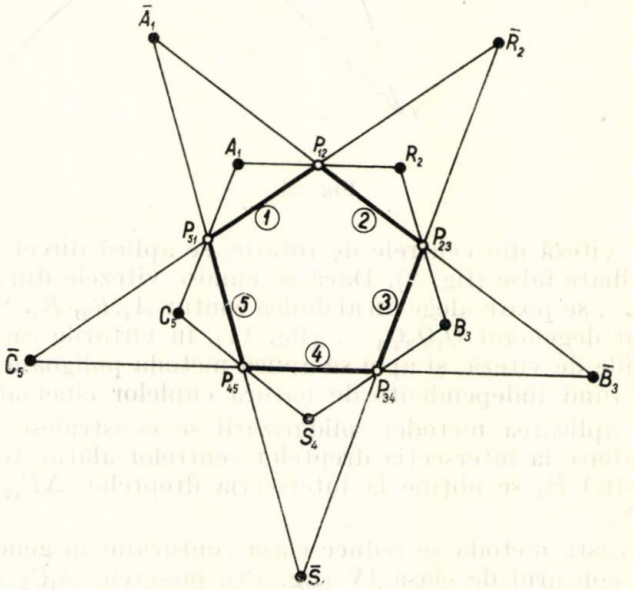


Fig. 20

metrilor cunoscuți trebuie să fie mai mic de $(1 + i)$, repartizarea lor poate avea formele : 202020 ... sau 11111 ....

6.1. Plecînd de la cunoaşterea vitezelor punctelor A_1, B_3, C_5..., adică de la repartizarea 202020 ..., se pot afla vitezele punctelor particulare assurice R_2, S_4, T_6 ... sau proiecţiile de viteze în centrele de rotaţie P_{12}, P_{23}, P_{34}, ..., ajungîndu-se la repartizarea 222 ..., adică se cunosc vitezele pentru cîte un punct din fiecare corp al lanţului. Dacă se cunosc

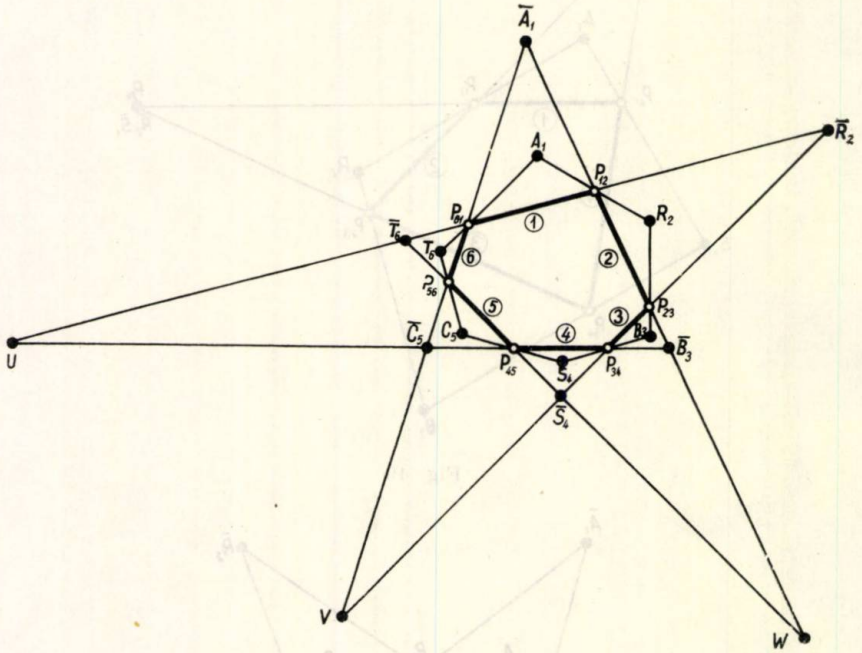


Fig. 21

proiecţiile de viteză din centrele de rotaţie, se aplică direct metoda poligoanelor auxiliare-false (fig. 2). Dacă se cunosc vitezele din punctele A_1, R_2, B_3, S_4, ..., se poate alege un al doilea contur A_1, R_2, B_3, S_4 ... (fig. 10) sau un contur degenerat $Q_1Q_2Q_3$... (fig. 11), în vîrfurile căruia se determină proiecţiile de viteză, şi apoi se aplică metoda poligoanelor auxiliare, construcţiile fiind independente de natura cuplelor cinematice.

Pentru aplicarea metodei solidarizării se construiesc punctele $\overline{A}_1$, $\overline{B}_3$, $\overline{C}_5$, ..., aflate la intersecţia dreptelor centrelor alăturate elementului respectiv. Astfel $\overline{B}_3$ se obţine la intersecţia dreptelor $\Delta P_{12}P_{23} = \Delta_{13}$ şi $\Delta P_{34}P_{45} = \Delta_{35}$.

Prin această metodă se reduce clasa conturului în general la jumătate. Pentru conturul de clasa IV (fig. 19), punctele $\overline{A}_1\overline{C}_3$ şi $\overline{B}_2\overline{D}_4$ sînt separat confundate, reprezentînd de altfel centrele instantanee de rotaţie I_{13} şi I_{24}. La acest contur se cunosc astfel toate centrele de rotaţie relative şi i se pot aplica metodele simple de studiu ale lanţurilor de cîte două corpuri (diade). Pentru conturul de clasa V (fig. 20) există cinci contururi

cu trei laturi: $P_{12}\,B_3\,\overline{C}_5$, $P_{23}\,S_4\,\overline{A}_1$, $P_{34}\,\overline{C}_5\,\overline{R}_2$, $P_{45}\,\overline{A}_1\,\overline{B}_3$ și $P_{51}\,\overline{R}_2\,\overline{S}_4$. La conturul de clasa VI (fig. 21) sînt două contururi cu trei laturi: $\overline{A}_1\overline{B}_3\overline{C}_5$ și $\overline{R}_2\,S_4\,\overline{T}_6$. La conturul de clasa VII (fig. 22) sînt șapte contururi cu patru laturi: $P_{12}\,B_3\,\overline{C}_5\,\overline{D}_7$ $P_{23}S_4\overline{T}_6\overline{A}_1$, $P_{34}\overline{C}_5\overline{D}_7\overline{R}_2$, $P_{45}\overline{T}_6\overline{A}_1\overline{C}_3$, $P_{56}\overline{D}_7\overline{R}_2S_4$, $P_{67}A_1$ $\overline{B}_3\overline{C}_5$ și $P_{71}\overline{R}_2S_4\overline{T}_6$. Pentru conturul de clasa VIII (fig. 23) există două contururi cu patru laturi: $\overline{A}_1\overline{B}_3\overline{C}_5D_7$ și $\overline{R}_2S_4\overline{T}_6\overline{Q}_8$.

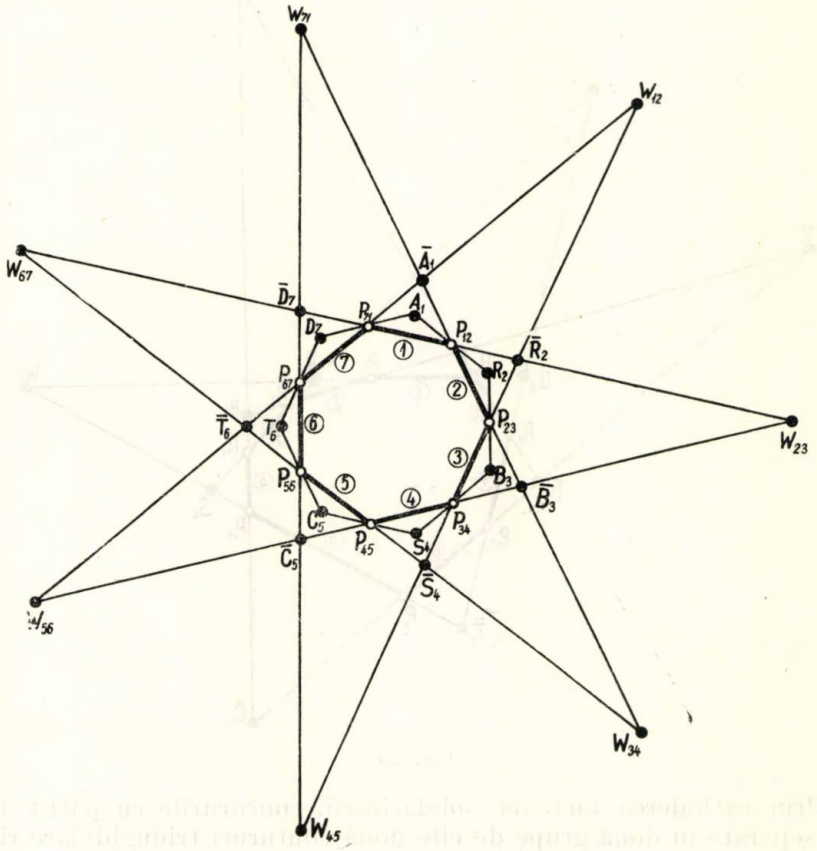


Fig. 22

Dacă prin reducerea conturului se obțin punctele caracteristice la distanțe foarte mari, eventual în afara graficului (de exemplu, în fig. 1, punctul u este la infinit), atunci se poate opri reducerea înainte de a se ajunge la un contur triunghiular.

Contururile cu patru laturi se obțin astfel:

— pentru conturul de clasa IV: un contur $P_{12}\,P_{23}\,P_{34}P_{41}$ și orice contur de forma $A_1R_2B_3S_4$ (fig. 19);

— pentru conturul de clasa V există cinci posibilități (fig. 20); $\overline{A}_1\,P_{23}P_{34}P_{45}$, $\overline{R}_2P_{34}P_{45}P_{51}$, $\overline{B}_3P_{45}P_{51}P_{12}$ $\overline{S}_4P_{51}P_{12}P_{23}$ și $\overline{C}_5P_{12}P_{23}P_{34}$;

— pentru conturul de clasa VI avem nouă posibilităţi (fig. 21) : $P_{12}\overline{B}_3P_{45}\overline{T}_6$, $P_{23}S_4P_{56}\overline{A}_1$, $P_{34}C_5P_{61}R_2$, $P_{12}P_{23}S_4\overline{T}_6$, $P_{23}P_{34}\overline{C}_5A_1$, $P_{34}P_{45}\overline{T}_6\overline{R}_2$, $P_{45}P_{56}A_1B_3$, $P_{56}P_{61}\overline{R}_2S_4$ şi $P_{61}P_{12}B_3\overline{C}_5$;

— pentru contururile de clasa VII şi VIII se obţin direct numai contururi cu patru laturi, avînd respectiv şapte şi două posibilităţi.

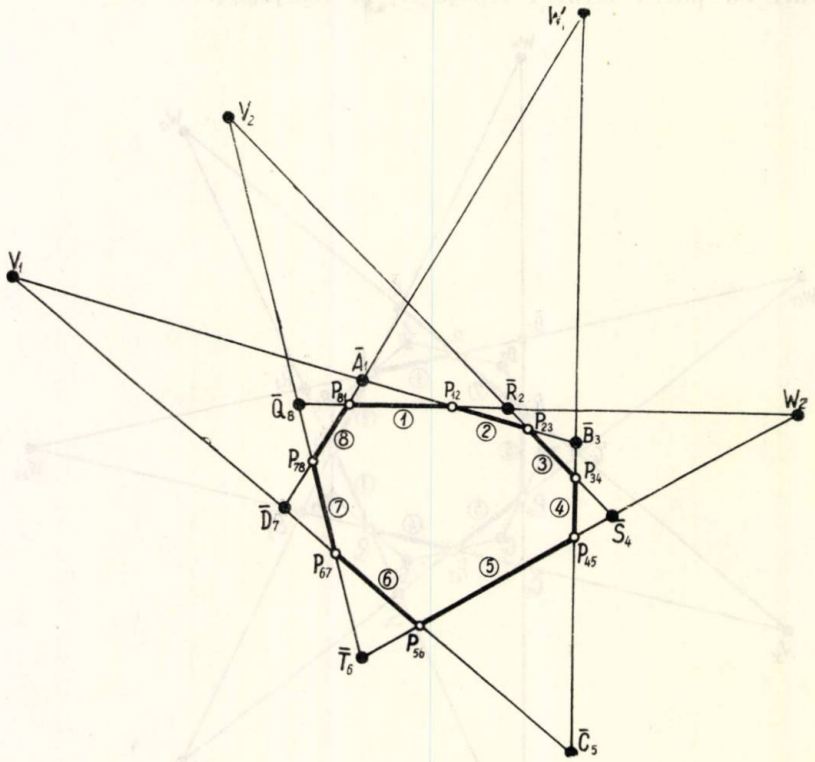


Fig. 23

Prin extinderea metodei solidarizării, contururile cu patru laturi pot fi separate în două grupe de cîte două contururi triunghiulare rigide, care au puncte comune de aceeaşi viteză. Aceste puncte, confundate în W sau V (fig. 23), joacă rolul unor centre instantanee relative pentru cele două contururi triunghiulare (de exemplu $W\overline{A}_1\overline{B}_3$ (X) şi $W\overline{C}_5\overline{D}_7$ (Y), fig. 15 şi 23). Prin aceasta se continuă identitatea dintre conturul redus cu patru laturi (fig. 23) şi conturul normal de clasa IV (fig. 19).

Punctele comune ale contururilor triunghiulare deduse din contururile patrulatere sînt :

— centrele instantanee de rotaţie P_{13} şi P_{24} pentru conturul de clasa IV (fig. 19) ;

— punctele particulare $\overline{A}_1$, $\overline{R}_2$, $\overline{B}_3$, S_4, $\overline{C}_5$ pentru conturul de clasa V (fig. 20). De exemplu pentru conturul $\overline{A}_1 P_{23} P_{34} P_{45}$ se obţine $W \equiv \equiv \overline{B}_3$ şi $V \equiv S_4$;

— punctele U, V, W comune la cîte patru triunghiuri rigide pentru contururile de clasa VI (fig. 21);

— punctele W_{12}, W_{23}, ..., W_{71} comune la cîte trei triunghiuri rigide pentru contururile de clasa VII (fig. 22);

— punctele W_1, V_1 și W_2, V_2 pentru contururile de clasa VIII (fig.23).

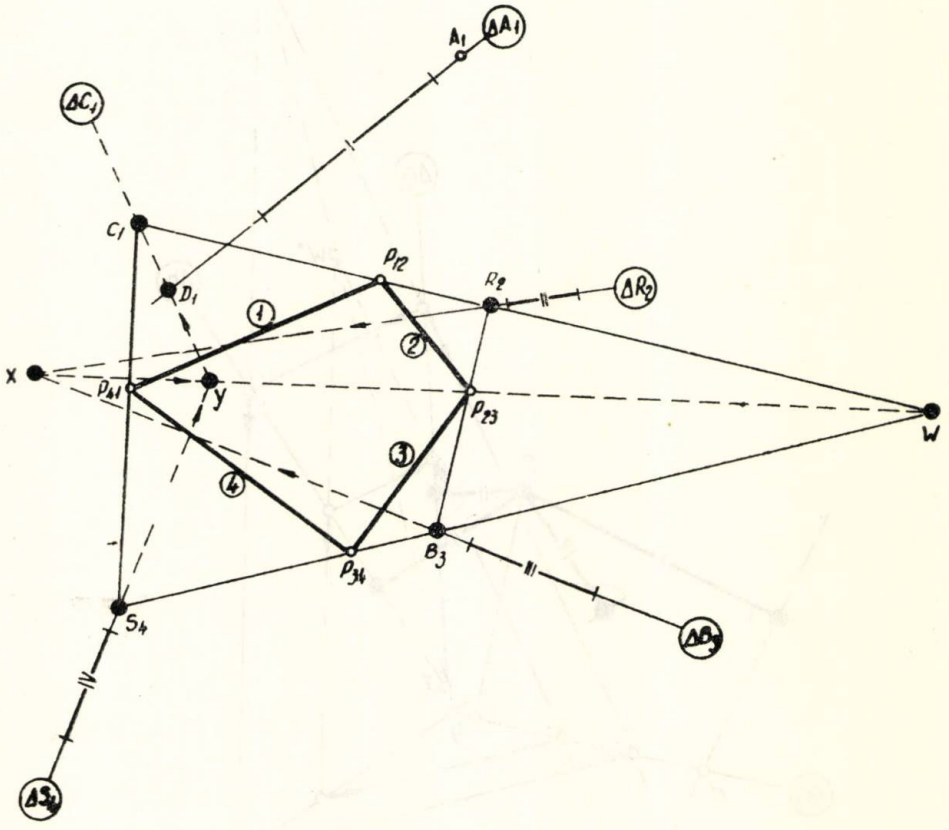


Fig. 24

În contururile triunghiulare considerate rigide se pot aplica metodele de calcul ale unui solid. În special se păstrează proprietățile de asemănare între planul vitezelor și planul mecanismului, ceea ce permite determinarea ușoară a distribuțiilor de viteze. Dacă reducerea se face direct la contururi triunghiulare, așa cum se întîmplă pentru contururi de clasele IV—VI, construcțiile grafice se fac la fel ca pentru mișcarea unui singur solid. Dacă reducerea se face direct la contururi patrulatere, așa cum este cazul pentru contururile de clasele VII—VIII, care pot fi înlocuite cu cîte două contururi triunghiulare, construcțiile grafice se execută ca pentru mișcările relative a două solide rigide legate în punctul comun (diade).

6.2. Pentru cunoașterea parametrilor repartizați sub forma 1.1.1..., adică pentru cunoașterea unei proiecții de viteze în fiecare corp, determinarea distribuției de viteze s-ar putea face căutînd un contur de forma $A_1 R_2 B_3 \ldots$ (fig. 10) care să aibă vîrfurile pe suporturile proiecțiilor.

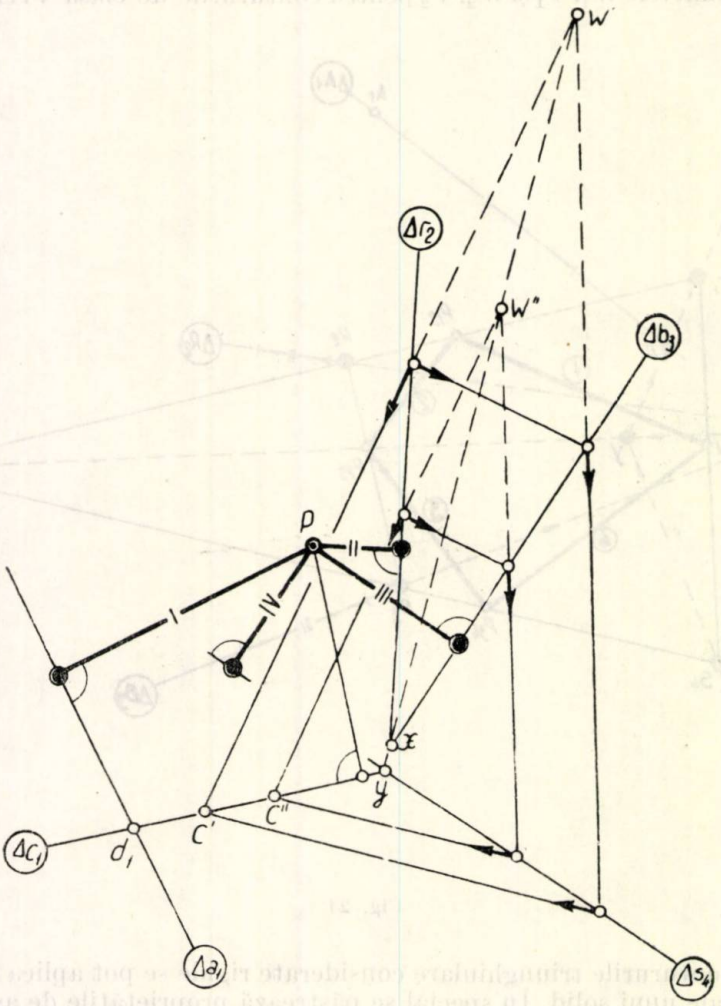


Fig. 25

În general se găsește însă un contur $C_1 R_2 B_3 S_4$ (fig. 24) în care unul din vîrfuri ($C_1 \neq A_1$) nu se găsește pe suportul proiecției respective. Prin metoda construcțiilor auxiliare sau metoda solidarizării, utilizînd proiecțiile sau planele de viteză, se poate găsi proiecția vitezei din punctul C_1, deosebită, desigur, de proiecția cunoscută a vitezei din punctul A_1.

Într-adevăr

$$\frac{\overline{v}_{B_3}}{\Delta b_3} = \frac{\overline{v}_{R_2}}{\Delta r_2} + \frac{\overline{v}_{B_3R_2}}{\perp R_2 B_3}$$

. . . . . (26)

. . . . . .

$$\frac{\overline{v}_{S_4}}{\Delta S_4} = \frac{\overline{v}_{B_3}}{\Delta b_3} + \frac{\overline{v}_{S_4B_3}}{\perp B_3 S_4}$$

$$\overline{v}_{C_1} = \frac{\overline{v}_{S_4}}{\Delta s_4} + \frac{\overline{v}_{C_1S_4}}{\perp S_4 C_1},$$

$$\overline{v}_{C_1} = \frac{\overline{v}_{R_2}}{\Delta r_2} + \frac{\overline{v}_{C_1R_2}}{\perp R_2 C_1}. \qquad (27)$$

Cu ajutorul poligoanelor auxiliare (fig. 25) din primele ecuații, considerînd r_2' cunoscut, se determină s_4'. Apoi din ultimele două ecuații, avînd r_2' și s_4' cunoscuți, se determină c_1'. O nouă construcție pentru o altă valoare arbitrară r_2'' ne conduce la c_1'', ceea ce determină dreapta $\Delta c_1' c_1'' = \Delta c_1$, adică proiecția vitezei din punctul C_1. Intersectînd suporturile proiecțiilor din A_1 și C_1, se găsește punctul D_1, a cărui viteză este determinată.

Prin metoda solidarizării, conturul patrulater $C_1R_2\,B_3S_4$ se descompune în două triunghiuri considerate rigide WR_2B_3 și WC_1S_4 (fig. 24), cu punct comun în W. În acest fel, din proiecțiile de viteze pr $\overline{v}_{R_2}$ și pr $\overline{v}_{B_3}$ se determină viteza punctului X (fig. 24 și 25), care livrează proiecția de direcția XW. Aceasta împreună cu proiecția de viteze pr $\overline{v}_{S_4}$ ne dă viteza punctului Y de pe dreapta XYW, care apoi ne livrează proiecția vitezei punctului r_1 de pe dreapta YC_1, ajungîndu-se și în acest fel la repartiția parametrilor cunoscuți sub forma 2.1.1.1....

Din această situație, utilizarea metodelor simple conduce mai departe la determinarea completă a distribuțiilor de viteze.

Primită la redacție la 18 mai 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Chr. Pelecudi, *Sistematizarea analizei grafice a lanțurilor cinematice simple plane.* St. cerc., mec. apl., **15**, *2* (1964).
2. Chr. Pelecudi, T. V. Hunker, *Studiul analitic al grupelor assurice.* St. cerc. mec. apl., **15**, *3* (1964).
3. Chr. Pelecudi, *Analogia electrică în cinematica mecanismelor plane.* St. cerc. mec. apl. **14**, *6* (1963).
4. — *Metoda acceleraților compuse în lanțurile cinematice plane.* St. cerc. mec. apl., **16**, *2* (1965).

5. Chr. Pelecudi *Metoda accelerațiilor compuse superioare în lanțurile cinematice plane.* St. cerc. mec. apl., **16**, *3* (1965).

6. — *Punctele caracteristice ale accelerațiilor compuse superioare.* St. cerc. mec. apl., **16**, *4* (1965).

7. I. I. Artobolevski, *Teoria mecanismelor și mașinilor*, București, Edit. tehnică, 1955.

8. N. I. Manolescu, I. Erceanu, P. Antonescu, *Domeniul de aplicabilitate a metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate.* St. cerc. mec. apl., **13**, *6*, (1962).

9. D. Mangeron, C. Drăgan, O. Munteanu, *Studiul mecanismelor plane cu cuple inferioare bazat pe metoda accelerațiilor reduse.* Bul. Inst. polit. Iași, **II**, *3—4* (1956).

10. D. Mangeron, Gh. Ciobanu, A. Braier, *Problema distribuției accelerațiilor de ordin oarecare în mișcarea sistemelor materiale.* Bul. Inst. polit. Iași, **II**, *1—2* (1956).

CONTRIBUȚII LA CINETOSTATICA MECANISMELOR CARDANICE

de FL. DUDIȚĂ
Institutul politehnic Brașov

621.01

Înțelegînd prin mecanisme cardanice mecanismele care au la bază articulațiile cardanice, în lucrare se cercetează forțele din cuplele cinematice ale acestor mecanisme și variația lor în timpul unui ciclu cinematic. Se analizează amănunțit articulația cardanică simplă, dublă (articulația bicardanică), cu și fără autocentrare, și cîteva tipuri de transmisii cardanice sincrone. Se studiază, de asemenea, efectul cinetostatic al variabilității unghiurilor între arborii cardanici (forțe de inerție, giroscopice, axiale). În final se stabilește expresia exactă și aproximativă a randamentului articulației cardanice simple.

Prin *mecanism cardanic* se înțelege mecanismul format din *articulații cardanice*. *Mecanismele cardanice* stau la baza *transmisiilor cardanice*, care includ, în plus, arbori de diferite profile, cuplaje elastice — amortizoare, cuplaje de siguranță, amortizoare inerțiale, paliere intermediare de construcție specială etc. și care au o largă utilizare în construcția de mașini [2], [3], [6], [7], [10], [12], [13].

În cazul în care accelerațiile sau masele sînt comparativ mici, forțele de inerție se pot neglija, calculul cinetostatic reducîndu-se astfel la cel static. În cazul în care accelerațiile sau masele sînt mari, deoarece forțele de inerție pot depăși valoarea celorlalte forțe, neglijarea lor este nepermisă. În urma efectuării calculului cinetostatic devin cunoscute reacțiunile din cuple și variația lor în timp, deci se pot stabili legile de variație ale solicitărilor elementelor transmisiei. Calculul cinetostatic este, prin urmare, o etapă necesară, premergătoare calculelor de rezistență.

Notații

A_{01}, A_{12} — axele arborilor furcilor articulației;
f_{11}, f_{12} — furcile, conducătoare și respectiv condusă, ale articulației;
c_1 — crucea cardanică, avînd brațele ortogonale;
φ_{11}, φ_{12} — deplasările unghiulare respective ale furcilor f_{11} și f_{12};

α_1 — unghiul axelor furcilor articulației cardanice (unghiul planelor π_{j1} și π_{12});

P_1 — planul axelor furcilor articulației (planul de referință al deplasărilor unghiulare φ_{11});

π_{11} — planul perpendicular pe furca f_{11}, în care se găsește tot timpul brațul AA al crucii cardanice ($\pi_{11} \perp A_{01}$);

π_{12} — planul perpendicular pe furca f_{12}, în care se găsește tot timpul brațul BB al crucii cardanice ($\pi_{12} \perp A_{12}$);

π_{c1} — planul crucii cardanice, care are poziție variabilă în timpul rotației;

Q_{11} — planul care conține axa furcii f_{11} (A_{01}) și este perpendicular pe planul P_1;

Q_{12} — planul care conține axa furcii f_{12} (A_{12}) și este perpendicular pe planul P_1;

P_{11} — forța cuprinsă în planul π_{11} cu care furca f_{11} acționează asupra brațului AA al crucii cardanice;

P_{12} — forța cuprinsă în planul π_{12} cu care furca f_{12} acționează asupra brațului BB al crucii cardanice;

F_{11} — forța cuprinsă în planul furcii f_{11} cu care aceasta acționează asupra brațului AA al crucii cardanice;

F_{12} forța cuprinsă în planul furcii f_{12} cu care acesta acționează asupra brațului BB al crucii cardanice;

R_1 — rezultanta forțelor P_{11}, F_{11} și respectiv P_{12}, F_{12}, care este cuprinsă în planul crucii cardanice π_{c1};

θ_{11} — unghiul format pe planele π_{11} și π_{c1} (sau de forțele P_{11} și F_{11});

θ_{12} — unghiul format de planele π_{c1} și π_{12} (sau de forțele P_{12} și F_{12});

D — diametrul sferei articulației ($AA = BB = D$);

M^t_{11} — moment de răsucire care acționează asupra furcii f_{11} ($M^t_{11} = P_{11} \cdot AA$);

M^t_{12} — moment de răsucire care acționează asupra furcii f_{12} ($M^t_{12} = P_{12} \cdot BB$);

M^i_{11} — moment de încovoiere care acționează asupra furcii f_{11} ($M^i_{11} = F_{11} \cdot AA$);

M^i_{12} — moment de încovoiere care acționează asupra furcii ($M^i_{12} = F_{12} \cdot AA$).

1. ARTICULAȚIE CARDANICĂ SIMPLĂ

Pornind de la cazul general al patrulaterului sferic [9], păstrînd aceleași notații, prin particularizarea legilor generale găsite pentru cazul articulației cardanice ($\alpha = \beta = \gamma = 90°$, $\delta \to 180° - \delta$, $\varphi_{30} \to -\varphi_{30}$) se obține

$$\varphi_{30} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\cos\delta}\operatorname{tg}\varphi_{10}\right) \tag{1}$$

$$\varphi_{21} = 90° - \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\delta \sin\varphi_{10}) \tag{2}$$

$$\varphi_{32} = \operatorname{arc\,cos}(\sin\delta \cos\varphi_{10}) \tag{3}$$

Adoptînd nolie notaţii introduse (fig. 1), relaţiile necesare în studiul forţelor din articulaţia cardanică devin respectiv $\theta_{11} = 90° - \varphi_{21}$; $\theta_{12} = 90° - \varphi_{32}$; $\alpha_1 = \delta$; $\varphi_{11} = \varphi_{10}$; $\varphi_{12} = \varphi_{30}$)

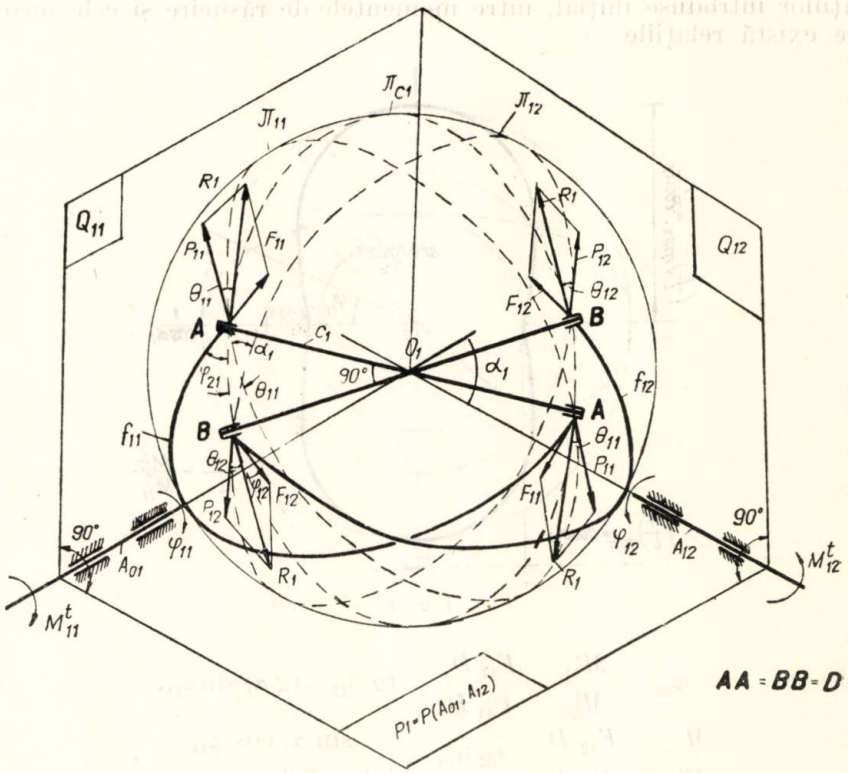


Fig. 1

$$\varphi_{12} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\cos \alpha_1} \cdot \operatorname{tg} \varphi_{11}\right) \tag{4}$$

$$\theta_{11} = \operatorname{arctg}\ (\operatorname{tg}\ \alpha_1 \sin \varphi_{11}) \tag{5}$$

$$\theta_{12} = \arccos\ (\sin \alpha_1 \cos \varphi_{11}). \tag{6}$$

Conform principiului deplasărilor virtuale, între momentele de răsucire $M^t_{11} = P_{11} \cdot D$ şi $M^t_{12} = P_{12} \cdot D$, ţinînd seama de legea de transmitere a articulaţiei cardanice (4), există relaţia (fig. 1)

$$\frac{M^t_{12}}{M^t_{11}} = \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \varphi_{12}} = \frac{1}{i} = \frac{1 - \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \varphi_{11}}{\cos \alpha_1}. \tag{7}$$

Reprezentarea grafică în coordonate polare a acestei relații adimensionale este dată în figura 2. Forțele F_{11} și F_{12}, cuprinse în planele furcilor respective, cauzează momente încovoietoare preluate de palierele furcilor cardanice (fig. 1). Ținînd seama de relațiile (5), (6) și urmărind figura 1, conform notațiilor introduse inițial, între momentele de răsucire și cele încovoietoare există relațiile

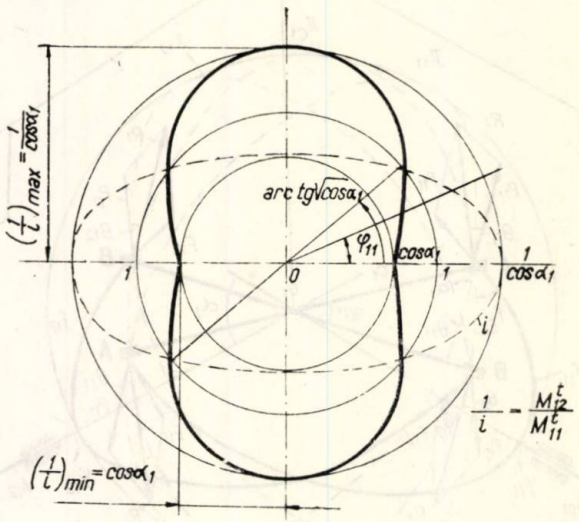


Fig. 2

$$\rho_{11}=\frac{M_{11}^i}{M_{11}^t}=\frac{F_{11}D}{P_{11}D}=\operatorname{tg}\theta_{11}=\operatorname{tg}\alpha_1\sin\varphi_{11}, \tag{8}$$

$$\frac{M_{12}^i}{M_{12}^t}=\frac{F_{12}D}{P_{12}D}=\operatorname{tg}\theta_{12}=\frac{\sin\alpha_1\cos\varphi_{11}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha_1\cos^2\varphi_{11}}}, \tag{9}$$

de unde, ținînd seama de (7), rezultă

$$\rho_{12}=\frac{M_{12}^i}{M_{11}^t}=\operatorname{tg}\alpha_1\cdot\cos\varphi_{11}\sqrt{1-\sin^2\alpha_1\cdot\cos^2\varphi_{11}}. \tag{10}$$

Reprezentarea relațiilor adimensionale (8) și (10), care permit determinarea momentelor încovoietoare din furci în funcție de momentul de răsucire M_{11}^t al furcii conducătoare, este dată în figura 3 în coordonate polare. Pentru o poziție oarecare ($\varphi_{11}\neq 0$)

$$M_{11}^i=M_{11}^t\cdot\rho_{11}=M_{11}^t\cdot ON \tag{11}$$

$$M_{12}^i=M_{11}^t\cdot\rho_{12}=M_{11}^t\cdot OM. \tag{12}$$

Analizînd figura 3, se observă că, atunci cînd momentul încovoietor în furca conducătoare este zero ($\varphi_{11}=0$), în cea condusă are valoarea maximă ($M_{12}^i=M_{11}^t\sin\alpha_1$), iar cînd primul are valoarea maximă ($\varphi_{11}=90°$; $M_{11}^i=$ $=M_{11}^t\cdot\operatorname{tg}\alpha_1$) celălalt este nul (vezi și fig. 7). Aceste cazuri extreme sînt reprezentate în figura 4. Proiecțiile momentelor încovoietoare (M_{11}^i și M_{12}^i)

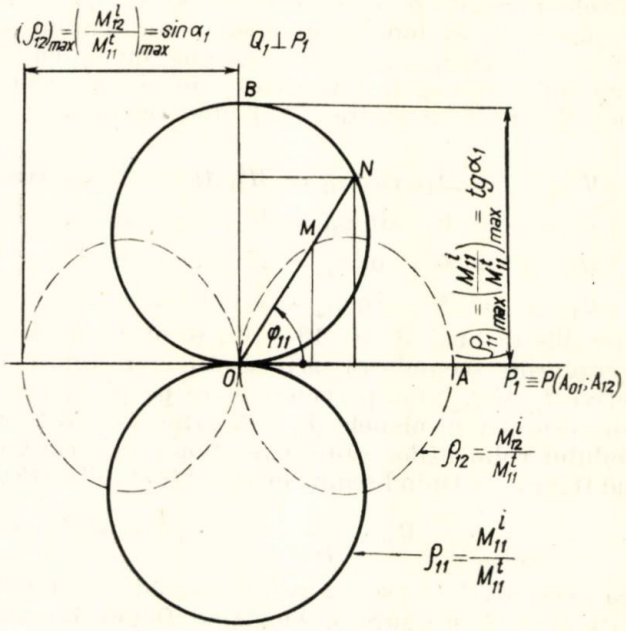

$(\rho_{12})_{max} = \left(\frac{M_{12}^i}{M_{11}^t}\right)_{max} = \sin\alpha_1$
$Q_1 \perp P_1$
B
N
M
φ_{11}
O
A
$P_1 \equiv P(A_{01}; A_{12})$
$\left(\rho_{11}\right)_{max} = \left(\frac{M_{11}^i}{M_{11}^t}\right)_{max} = tg\alpha_1$
$\rho_{12} = \frac{M_{12}^i}{M_{11}^t}$
$\rho_{11} = \frac{M_{11}^i}{M_{11}^t}$

Fig. 3

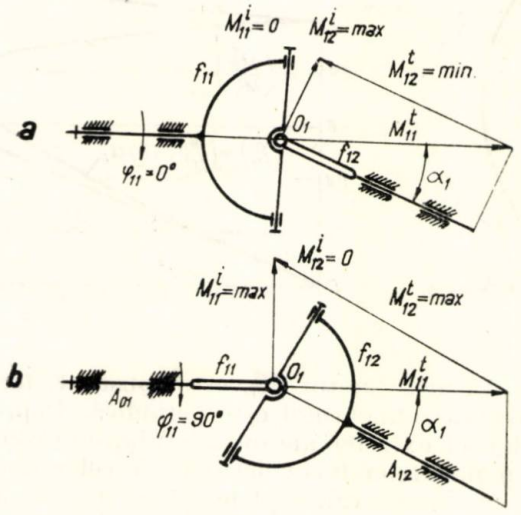

a
$M_{11}^i = 0$
$M_{12}^i = max$
f_{11}
$M_{12}^t = min$
O_1
M_{11}^t
f_{12}
$\varphi_{11} = 0°$
α_1
b
$M_{12}^i = 0$
$M_{11}^i = max$
$M_{12}^t = max$
f_{11}
f_{12}
O_1
M_{11}^t
A_{01}
$\varphi_{11} = 90°$
α_1
A_{12}

Fig. 4

pe planul de referință al articulației $P_1 = P\,(A_{01}, A_{11})$ și pe planele care conțin axele furcilor și sînt normale pe P_1 ($Q_{11} \perp P_1$; $Q_{12} \perp P_1$) se determină observînd că momentul încovoietor (cuplul secundar) M_{11}^i se găsește în planul furcii f_{11}, care formează unghiul φ_{11} cu planul de referință P_1, iar cuplul secundar M_{12}^i se găsește în planul furcii f_{12}, care formează cu planul Q_{12} unghiul φ_{12} (fig. 7). Ținînd seama de (4), (7), (8), (10), rezultă

$$(M_{11}^i)_{P_1} = M_{11}^i \cos\varphi_{11} = M_{11}^t \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \sin\varphi_{11} \cos\varphi_{11} \tag{13}$$

$$(M_{11}^i)_{Q_{11}} = M_{11}^i \sin\varphi_{11} = M_{11}^t \operatorname{tg}\alpha_1 \sin^2\varphi_{11} \tag{14}$$

$$(M_{12}^i)_{Q_{12}} = M_{12}^i \cos\varphi_{12} = M_{11}^t \sin\alpha_1 \cos^2\varphi_{11} \tag{15}$$

$$(M_{12}^i)_{P_1} = M_{12}^i \sin\varphi_{12} = M_{11}^t \operatorname{tg}\alpha_1 \cos\varphi_{11} \sin\varphi_{11}. \tag{16}$$

Analizînd expresiile deduse (8, 10, 13—16), se observă că momentele încovoietoare (cuplurile secundare) M_{11}^i și M_{12}^i au valori maxime cînd furcile respective f_{11} și f_{12} sînt perpendiculare pe planul de referință P_1, adică se găsesc respectiv în planele Q_{11} și Q_{12} (fig. 4). Forța rezultantă R_1, necesară calculului rulmenților sau cuzineților crucii cardanice, se determină urmărind figura 1 și ținînd seama de relațiile stabilite (5), (6), (8), (10);

$$R_1 = \frac{P_{11}}{\cos\theta_{11}} = \frac{P_{12}}{\cos\theta_{12}} = M_{11}^t \cdot \frac{1}{D \cdot \cos\alpha_1} \cdot \sqrt{1 - \sin^2\alpha_1 \cos^2\varphi_{11}}. \tag{17}$$

Reprezentarea acestei relații, scrisă sub formă adimensională, în coordonate polare este arătată în figura 5. Analizînd figura 5, rezultă că, atunci

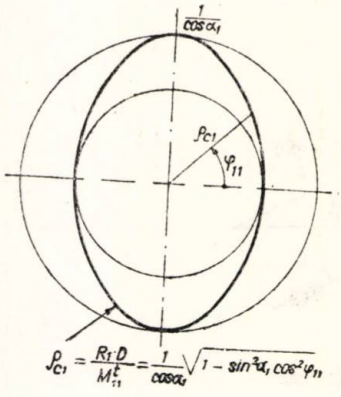


Fig. 5

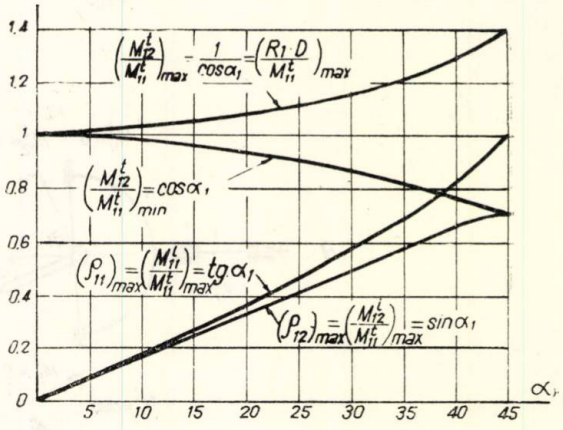


Fig. 6

cînd momentul de răsucire motor M_{11}^t este constant, forța rezultantă R_1 care acționează asupra rulmentului este periodică. Reprezentarea grafică a dependenței valorilor extreme ale momentului de răsucire al furcii conduse M_{12}^t (7), ale momentelor încovoietoare ale celor două furci M_{11}^i, M_{12}^i (8,10) și ale forței rezultante din cuplele articulației R_1 (17) de momentul de răsucire motor M_{11}^t și de unghiul dintre axele furcilor α_1 este dată în figura 6 sub formă adimensională. Se observă că valorile maxime M_{12}^t,

M^i_{11}, M^i_{12} cresc cu creşterea unghiului α_1 dintre axe. Expresiile reacţiunilor din palierele furcilor articulaţiei cardanice se determină, conform

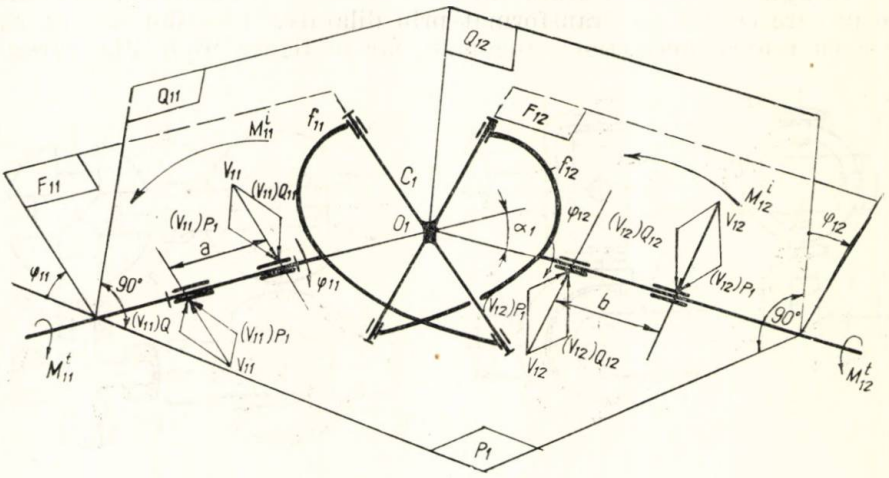


Fig. 7

figurii 7 şi relaţiilor stabilite anterior (13—16), prin metoda proiecţiilor pe plane ortogonale (fig. 1 şi 7):

$$(V_{11})_{P_1} = \frac{1}{a}(M^i_{11})_{P_1} = \frac{1}{a} \cdot M^t_{11} \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 \sin \varphi_{11} \cos \varphi_{11} \tag{18}$$

$$(V_{11})_{Q_{11}} = \frac{1}{a}(M^i_{11})_{Q_{11}} = \frac{1}{a} \cdot M^t_{11} \operatorname{tg} \alpha_1 \sin^2 \varphi_{11} \tag{19}$$

$$(V_{12})_{P_1} = \frac{1}{b}(M^i_{12})_{P_1} = \frac{1}{b} \cdot M^t_{11} \operatorname{tg} \alpha_1 \cos \varphi_{11} \sin \varphi_{11} \tag{20}$$

$$(V_{12})_{Q_{12}} = \frac{1}{b}(M^i_{12})_{Q_{12}} = \frac{1}{b} \cdot M^t_{11} \sin \alpha_1 \cos^2 \varphi_{11} \cdot \tag{21}$$

Reacţiunile rezultante în palierele celor două furci sînt, respectiv (fig 7),

$$V_{11} = \sqrt{(V_{11})^2_{P_1} + (V_{11})^2_{Q_{11}}} = \frac{1}{a} \cdot M^t_{11} \operatorname{tg} \alpha_1 \sin \varphi_{11} \tag{22}$$

$$V_{12} = \sqrt{(V_{12})^2_{P_1} + (V_{12})^2_{Q_{12}}} = \frac{1}{b} \cdot M^t_{11} \operatorname{tg} \alpha_1 \cos \varphi_{11} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \varphi_{11}} \cdot \tag{23}$$

Relaţiile stabilite anterior sînt valabile pentru toate transformările constructive ale articulaţiei cardanice (fig. 8—10).

În figura 8 sînt arătate două variante constructive ale articulației cu inel.

În figura 9 *a* este arătată varianta constructivă a articulației cardanice în care crucea s-a transformat prin dilatarea fusurilor într-un galet sferic cu renuri meridiane ortogonale, iar în figura 9*b* o altă variantă,

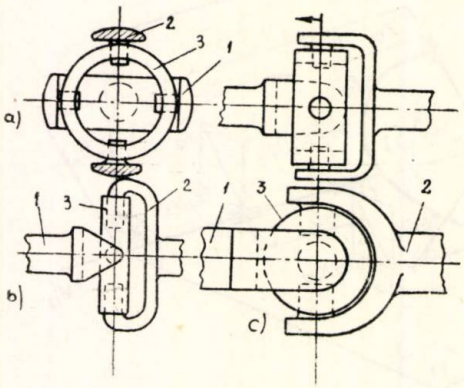


Fig. 8

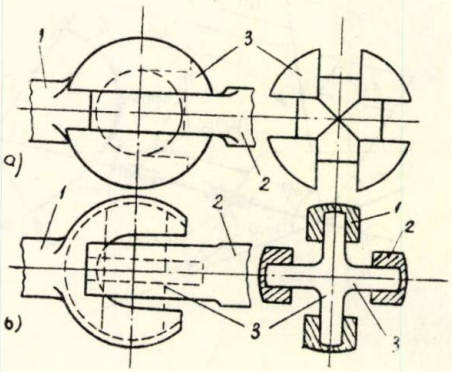


Fig. 9

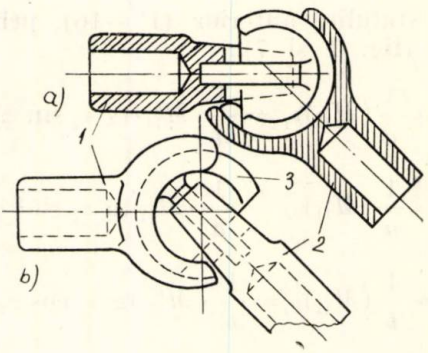


Fig. 10

în care forma de cruce a galetului este vizibilă. În figura 10 este arătată articulația denumită Plank, concepută pe baza schemei din figura 9 *b*.

2. ARTICULAȚIE BICARDANICĂ

Deoarece articulația bicardanică fără autocentrare se poate analiza cinetostatic exact ca transmisia bicardanică (vezi paragr. 1), se va analiza numai cazul articulației bicardanice cu autocentrare [10]. Se vor determina reacțiunile în paliere și în articulația sferică a dispozitivului de autocentrare. Pentru furca motoare f_{11}, furca dublă intermediară și

cea condusă f_{22} se vor adopta ca sisteme de referință perechile de plane ortogonale, respectiv (Q_{11}, P); (Q_{12}, P), (Q_{22}, P) (fig. 11).

Proiecțiile cuplurilor secundare M_{11}^i, M_{12}^i, M_{21}^i, M_{22}^i pe planele alese de proiecție se determină observînd următoarele :

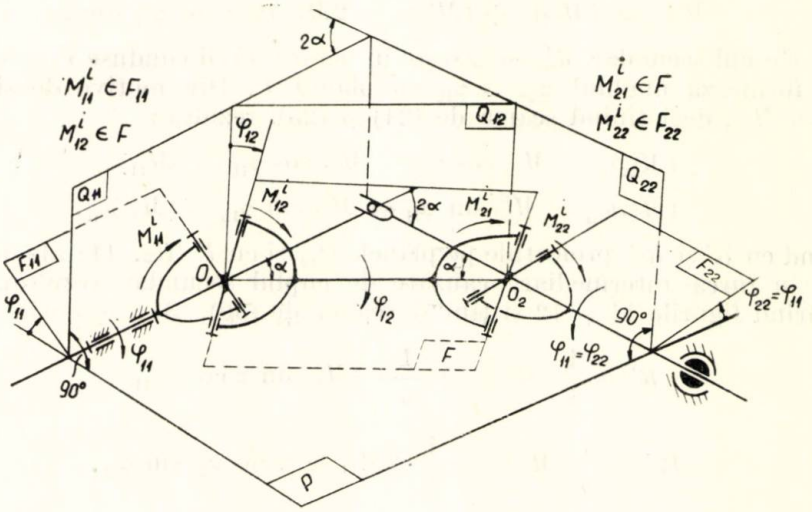


Fig. 11

— axele de rotație ale tuturor furcilor se găsesc în același plan P;
— furcile arborelui intermediar sînt coplanare, formînd planul F;
— unghiurile α fiind egale ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$) conform celor precizate în lucrarea [10], rezultă că $\varphi_{11} = \varphi_{12}$.

Cuplul secundar M_{11}^i se găsește în planul F_{11}, care formează cu planul P unghiul φ_{11}, deci, ținînd seama de (13), (14),

$$(M_{11}^i)_P = M_{11}^i \cos \varphi_{11} = M_{11}^t \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi_{11} \cos \varphi_{11} \tag{24}$$

$$(M_{11}^i)_{Q_{11}} = M_{11}^i \sin \varphi_{11} = M_{11}^t \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \varphi_{11}. \tag{25}$$

Cuplul secundar M_{12}^i se găsește în planul F, care formează cu planul Q_{12} unghiul φ_{12}, deci, ținînd seama de (15), (16), se obține :

$$(M_{12}^i)_{Q_{12}} = M_{12}^i \cos \varphi_{12} = M_{11}^t \sin \alpha \cos^2 \varphi_{11} \tag{26}$$

$$(M_{12}^i)_P = M_{12}^i \sin \varphi_{12} = M_{11}^t \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_{11} \sin \varphi_{11}. \tag{27}$$

Cuplul secundar M_{21}^i se găsește de asemenea în planul F și, datorită simetriei mecanismului (fig. 11), este egal cu M_{12}^i (fig. 12 *a*):

$$(M_{21}^i)_{Q_{12}} = (M_{12}^i)_{Q_{12}} = M_{11}^t \sin \alpha \cos^2 \varphi_{11} \tag{28}$$

$$(M_{21}^i)_P = (M_{12}^i)_P = M_{11}^t \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_{11} \sin \varphi_{11}. \tag{29}$$

Cuplul secundar rezultant M_R^i, care acționează asupra furcii duble intermediare, are în cele două plane de proiecție expresiile

$$(M_R^i)_{Q_{12}} = (M_{12}^i)_{Q_{12}} + (M_{21}^i)_{Q_{12}} = 2M_{11}^i \sin\alpha \cos^2\varphi_{11} \tag{30}$$

$$(M_R^i)_P = (M_{12}^i)_P + (M_{21}^i)_P = 2M_{11}^i \operatorname{tg}\alpha \cos\varphi_{11} \sin\varphi_{11}. \tag{31}$$

Cuplul secundar M_{22}^i se găsește în planul furcii conduse F_{22} (fig. 11), care formează unghiul $\varphi_{22} = \varphi_{11}$ cu planul P. Din motive de simetrie $M_{22}^i = M_{11}^i$, deci ținînd seama de (24) și (25), rezultă :

$$(M_{22}^i)_P = M_{22}^i \cos\varphi_{11} = M_{11}^i \cos\varphi_{11} = (M_{11}^i)_P \tag{32}$$

$$(M_{22}^i)_{Q_{22}} = M_{22}^i \sin\varphi_{11} = M_{11}^i \sin\varphi_{11} = (M_{11}^i)_{Q_{11}}. \tag{33}$$

Notînd cu R' și R'' proiecțiile pe planele Q_{12} și cu P (fig. 11) ale reacțiunilor în furca intermediară cauzate de cuplul secundar rezultant M_R^i, urmărind figurile 11 și 12 și ținînd seama de (30), (31), se obține

$$R' = \frac{1}{b}(M_R^i)_{Q_{12}} = \frac{1}{b} \cdot 2M_{11}^i \sin\alpha \cos^2\varphi_{11} \tag{34}$$

$$R'' = \frac{1}{b}(M_R^i)_P = \frac{1}{b} \cdot 2M_{11}^i \operatorname{tg}\alpha \cos\alpha_{11} \sin\varphi_{11}. \tag{35}$$

Se observă că forța R' (34) încarcă axial rulmenții crucilor cardanice, avînd valoarea maximă pentru $\varphi_{11} = 0°$ (fig. 12 *a*). Notînd cu F' și F'' proiecțiile pe planele Q_{22} și P (fig. 11) ale reacțiunilor interioare din articulația sferică a dispozitivului de autocentrare și ținînd seama de relațiile deduse (30—33), se obține (fig. 12) :

$$F' = \frac{1}{a+c}\left[\frac{c}{b}(M_R^i)_{Q_{12}} + (M_{22}^i)_{Q_{22}}\right] = \frac{M_{11}^i}{a+c}\left(2\frac{c}{b}\sin\alpha\cos^2\varphi_{11} + \operatorname{tg}\alpha\sin^2\varphi_{11}\right) \tag{36}$$

$$F'' = \frac{1}{a+c}\left[\frac{c}{b}(M_R^i)_P + (M_{22}^i)_P\right] = \frac{M_{11}^i}{a+c}\operatorname{tg}\alpha\cos\varphi_{11}\sin\varphi_{11}\left(2\frac{c}{b}+1\right). \tag{37}$$

Forța rezultantă în articulația sferică a dispozitivului de autocentrare se calculează ușor ținînd seama de (36) și (37) :

$$F = \sqrt{(F')^2 + (F'')^2}. \tag{38}$$

Valorile extreme ale forței F se obține pentru $\varphi_{11} = 0°$; $\varphi_{11} = 90°$, deci

$$F_{max} = \frac{2c}{b\,(a+c)} M_{11}^i \sin\alpha \;;\; F_{min} = \frac{1}{a+c} M_{11}^i \operatorname{tg}\alpha, \tag{39}$$

deoarece, pentru unghiuri α uzuale, $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$, iar $2c \gg b$. De această forță trebuie să se țină seama la calculul cuzinetului dispozitivului de autocentrare. În figura 12 sînt reprezentate forțele analizate pentru $\varphi_{11} = 0°$; $\varphi_{11} = 90°$. Reacțiunile din paliere V_{11}', V_{11}'', V_{22}', V_{22}'' (fig. 12) se calculează în mod analog. Ele nu prezintă pericol pentru paliere sau pentru arbore.

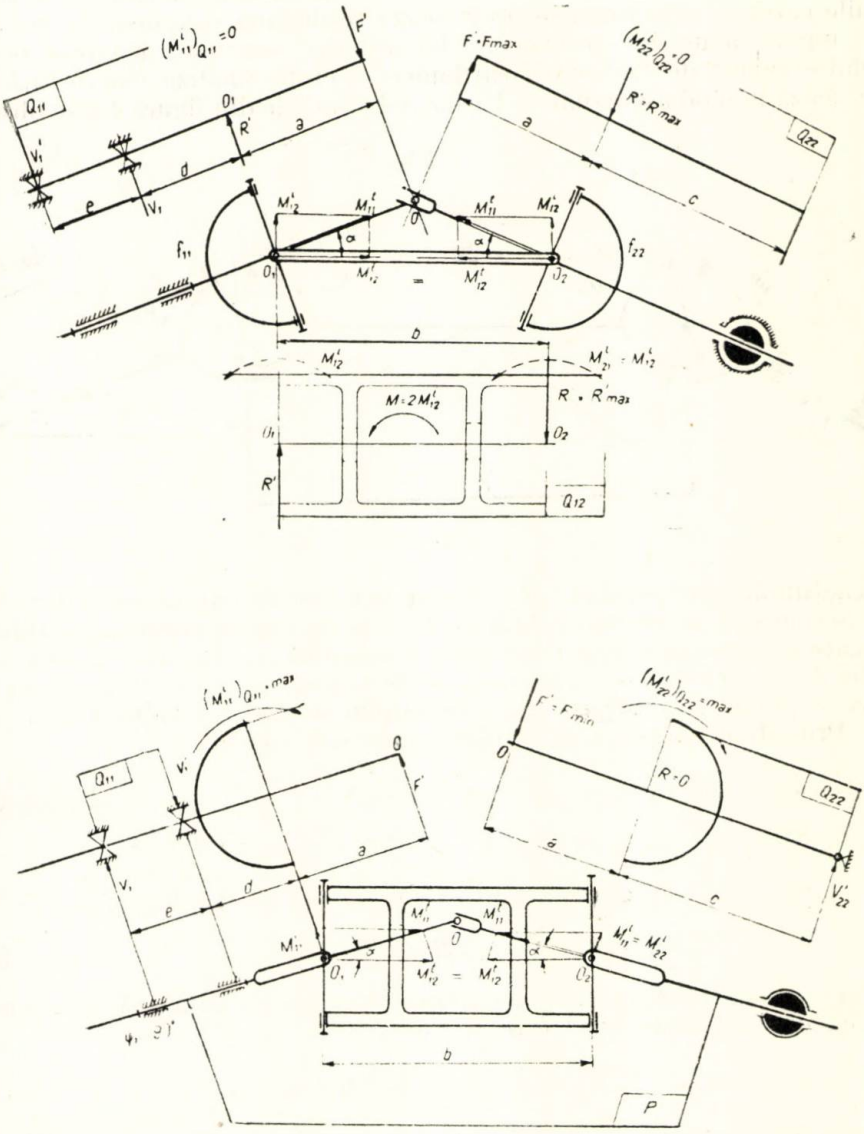


Fig. 12

3. TRANSMISIE BICARDANICĂ SINCRONĂ

Pentru cazul general al transmisiei bicardanice, analiza cinetostatică duce la expresii complicate ale forțelor. În construcția de mașini, transmisiile cardanice de forță se proiectează totdeauna sincrone. Se vor analiza numai cazuri ale transmisiei bicardanice sincrone, deoarece pentru celelalte cazuri de transmisii cardanice sincrone analiza cinetostatică se efectuează în mod asemănător. Urmărind notațiile din figura 13, se observă

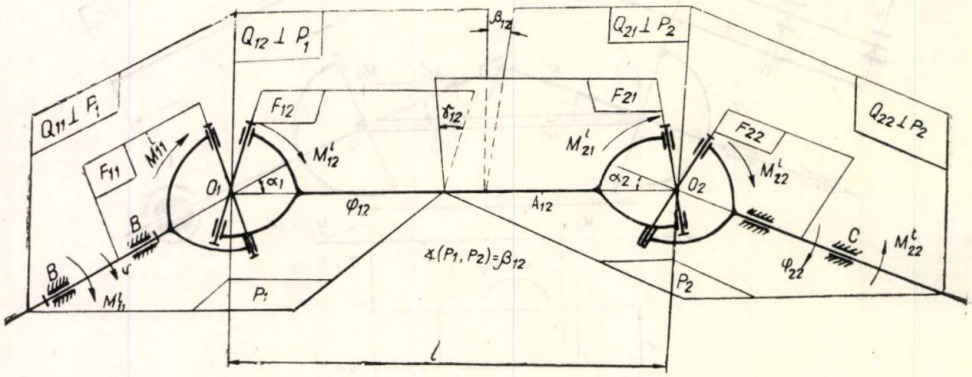


Fig. 13

că reacțiunile din palierele $B-B$ sînt cauzate de cuplul secundar M^i_{11}, care acționează în planul F_{11} ($M^i_{11} \in F_{11}$), și de cuplul secundar rezultant M^i_R, care acționează asupra arborelui intermediar A_{12}. În mod analog, reacțiunile din palierele $C-C$ sînt cauzate de cuplul secundar M^i_{22}, care acționează în planul F_{22} ($M^i_{22} \in F_{22}$), și de cuplul secundar rezultant M^i_R.

Procedînd ca mai sus, se obțin expresiile necesare

$$M^i_{11} = M^t_{11} \operatorname{tg} \alpha_1 \sin \varphi_{11} \; ; \; (M^i_{11} \in F_{11}), \tag{40}$$

$$M^i_{12} = M^t_{11} \operatorname{tg} \alpha_1 \cos \varphi_{11} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_1 \cos^2 \varphi_{11}} \; ; \; (M^i_{12} \in F_{12}), \tag{41}$$

$$M^i_{21} = M^{t1}_{22} \operatorname{tg} \alpha_2 \cos \varphi_{22} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2 \cos^2 \varphi_{22}} \; ; \; (M_{21} \in F_{21}), \tag{42}$$

$$M^i_{22} = M^t_{22} \operatorname{tg} \alpha_2 \sin \varphi_{22} \; ; \; (M^i_{22} \in F_{22}). \tag{43}$$

Cuplul secundar rezultant M^i_R se determină în funcție de M^i_{12} și M^i_{21}, observînd că unghiul între furci este γ_{12}, deci

$$M^i_R = \sqrt{(M^i_{12})^2 + (M^i_{21})^2 + 2 M^i_{12} M^i_{21} \cos \gamma_{12}}. \tag{44}$$

Reacțiunile din palierele $B-B$ și $C-C$ cauzate de M^i_R sînt neglijabile în calculele de rezistență, datorită lungimii mari l a arborelui intermediar (fig. 13). Cuplul secundar rezultant M^i_R nu poate fi neglijat însă în studiul vibrațiilor palierelor arborelui intermediar, deoarece acționează ca factor perturbator. În cazul transmisiei bicardanice spațiale sincrone

($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$; $\gamma_{12} = \beta_{12} \neq 0$), înlocuind în (41), (42), (43) $\varphi_{11} = \varphi_{22}$; $M^i_{11} = M^t_{22}$, cuplul secundar rezultant (44) are expresia

$$M^i_R = \sqrt{2}\, M^t_{11} \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_{11} \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_{11})(1 + \cos \gamma_{12})}. \quad (45)$$

Se observă deci că, în transmisia bicardanică spațială sincronă, asupra arborelui intermediar acționează un cuplu secundar de încovoiere de mărime variabilă, care încarcă axial rulmenții furcilor arborelui intermediar.

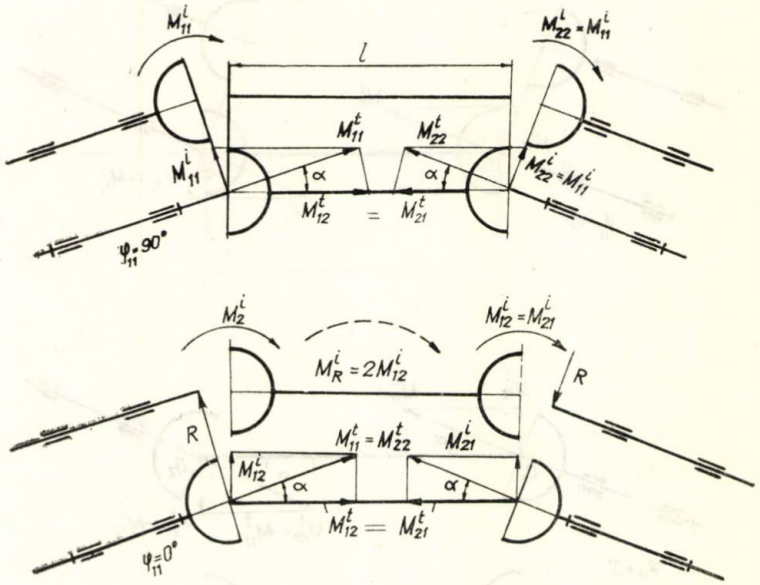


Fig. 14

În cazul transmisiei bicardanice plane, varianta $M(\gamma_{12} = 0)$ (fig. 14), cuplul secundar rezultant care acționează asupra arborelui intermediar în planul furcilor conform cu (45) are expresia

$$M^i_R = 2M^i_{11} \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_{11} \sqrt{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_{11}}, \quad (46)$$

având valoarea maximă $(M^i_R)_{max} = 2M^i_{11} \sin \alpha$. Datorită acestei situații, pentru această variantă (fig. 14) unii autori recomandă utilizarea palierelor suplimentare la arborele intermediar, destinate să preia cuplul secundar rezultant (M^i_R), descărcînd astfel crucile cardanice. Cuplurile secundare din furcile exterioare care acționează în planele furcilor respective au expresia (8)

$$M^i_{11} = M^i_{22} = M^t_{11} \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi_{11}. \quad (47)$$

În figura 14 sînt arătate pozițiile în care cuplurile secundare au valori extreme. Cuplul secundar rezultant care acționează asupra arborelui

intermediar, așa cum rezultă din relația (45), se anulează dacă $\gamma_{12} = 180°$; se obține astfel varianta Z a transmisiei bicardanice sincrone, des utilizată în construcția de mașini (fig. 15).

Cuplurile secundare din furcile exterioare au expresia (47). În figura 15 sînt arătate pozițiile în care cuplurile secundare au valori extreme.

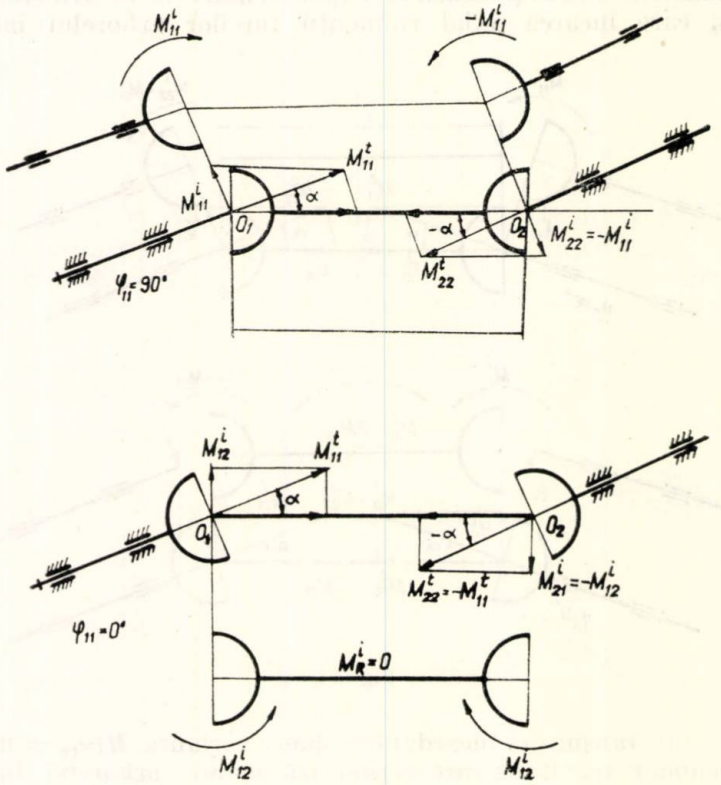


Fig. 15

Din această succintă analiză rezultă că varianta Z a transmisiei bicardanice sincrone este cea mai avantajoasă, deoarece are arborele intermediar descărcat ($M_R^i = 0$).

3.1. *Forțe de inerție.* Oricare dintre variantele transmisiei bicardanice sincrone s-ar alege, arborele intermediar împreună cu furcile sale și crucile cardanice se rotesc neuniform. Forțele de inerție cauzate de mișcarea periodică a crucilor cardanice se neglijează, deoarece momentele lor de inerție polare sînt, comparativ, neglijabile. Cunoscînd accelerația unghiulară [10] și notînd cu J (kgf. m. s^2) momentul de inerție mecanic, momentul forțelor de inerție în modul are expresia $M^i = \varepsilon J$. Pentru arbo-

rele intermediar al transmisiei bicardanice sincrone în cazul particular $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \text{const.}$; $\omega_{11} = \text{const.}$, M^j are, ținînd seama de (4), expresia

$$M^j = \omega_{11}^2 J \frac{4\lambda (1 - \lambda^2) \sin 2\varphi_{11}}{[(1 + \lambda^2) + (1 - \lambda^2) \cos 2\varphi_{11}]^2}, \tag{48}$$

unde $\lambda = 1/\cos \alpha$. În calculele de rezistență, aceste forțe se pot neglija. Din cauza jocurilor inevitabile în cuplele cinematice, momentul forțelor de inerție, schimbînd de semn de două ori în timpul unei rotații, poate provoca în cuple forțe de șoc, deci zgomot. Condiția evitării zgomotului este

$$M_{12}^t - J \cdot \varepsilon \geqslant 0, \tag{49}$$

în care M_{12}^t este momentul de răsucire din arborele intermediar (7), iar ε și J accelerația și momentul de inerție ale aceluiași arbore. Pentru o transmisie dată, cunoscînd valoarea medie a momentului de răsucire transmis (M_{11}^t) și valorile extreme ale accelerației unghiulare, se poate determina o turație critică medie de zgomot, indice prețios pentru aprecierea funcționării transmisiei (49). Apariția zgomotului în transmisiile cardanice, provocat de astfel de cauze, se observă la automobile, la viteze mari de rotație, cînd se întrerupe transmiterea cuplului prin debreiere ($M^t = 0$). În acest caz, nerespectarea inegalității (49) este evidentă.

4. EFECTUL CINETOSTATIC AL VARIABILITĂȚII UNGHIURILOR DINTRE ARBORI

Sînt multiple cazurile cînd în transmisiile cardanice este necesară variabilitatea unghiurilor între arbori. Astfel de cazuri se întîlnesc la mașinile de transport (automobile, locomotive diesel), mașini agricole, laminoare etc. și în general acolo unde transmisia cardanică face legătura între agregate cu poziție relativă variabilă [10]. În asemenea cazuri se utilizează arbori extensibili : arbori cu lungime variabilă sau arbori culisanți.

4.1. *Forțe axiale.* În figura 16 este reprezentată schematic transmisia bicardanică sincronă (homocinetică) cu configurație spațială variabilă. Variabilitatea unghiurilor dintre axe (α) este posibilă datorită deplasărilor relative în cupla de translație (cuplă de clasa a V-a), care poate fi realizată prin caneluri (fig. 16), prin pană, prin profile poligonale (mașini agricole) etc. Cupla de translație trebuie să transmită cuplu de răsucire, să asigure centrarea elementelor sale și să permită deplasări axiale relative. Datorită deplasărilor relative axiale (variația lungimii arborelui) în timpul transmiterii momentului de răsucire, în cupla de translație apare forța axială T (fig. 16 *a*), care are expresia

$$T = 2\mu \frac{M_{12}^t}{d_m}, \tag{50}$$

în care μ este coeficient de frecare, M_{12}^t momentul de răsucire în arborele intermediar culisant, și d_m diametrul mediu al canelurilor.

Determinarea reacțiunilor din cuple se face urmărind transmiterea forței axiale T de la arborele condus la cel conducător prin articulație (fig. 16). Astfel, forța axială T preluată de palierele arborelui conducător are, ținînd seama de (7), (50), expresia

$$T_1 = T \cos \alpha = 2\mu \frac{M_{11}^t}{d_m} (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_{11}), \qquad (51)$$

valoarea maximă obținîndu-se pentru $\varphi_{11} = 90°$.

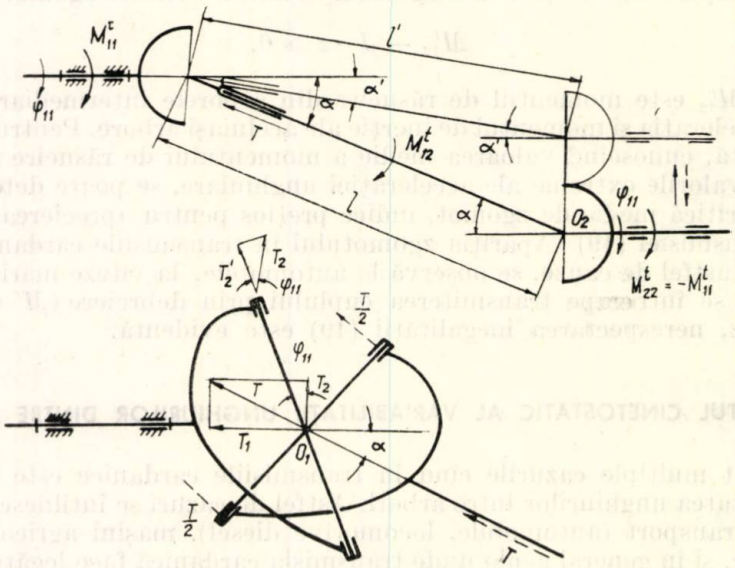


Fig. 16

Componenta T_2 a forței axiale, perpendiculară pe arborele conducător care încarcă radial palierele, are expresia

$$T_2 = T \sin \alpha = 2\mu \frac{M_{11}^t}{d_m} \operatorname{tg} \alpha (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_{11}), \qquad (52)$$

cu o valoare maximă pentru $\varphi_{11} = 90°$.
Componenta T'_2 a forței T_2, care este paralelă cu fusul crucii cardanice pentru o poziție oarecare a crucii, are expresia

$$T'_2 = T_2 \cos \varphi_{11} = 2\mu \frac{M_{11}^t}{d_m} \operatorname{tg} \alpha (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_{11}) \cos \varphi_{11}. \qquad (53)$$

Această forță solicită axial rulmenții cu ace ai articulației și are importanță la proiectarea fixării crucii în furcă. Valoarea maximă se obține pentru $\varphi_{11} = 0°$.

Aplicație : $M'_{11} = 90$ kgfm ; $\alpha = 15°$; $\mu = 0{,}1$; $d_m = 0{,}02$ m. Utilizînd relațiile deduse (51—53), se obține

$$T_{1\max} = 900 \text{ kgf} \; ; \; T_{2\max} = 240 \text{ kgf} \; ; \; T'_{2\max} = 225 \text{ kgf}.$$

Experimental s-a stabilit că, pentru același cuplu de răsucire transmis, în îmbinările telescopice profilate utilizate la arborii cardanici ai mașinilor

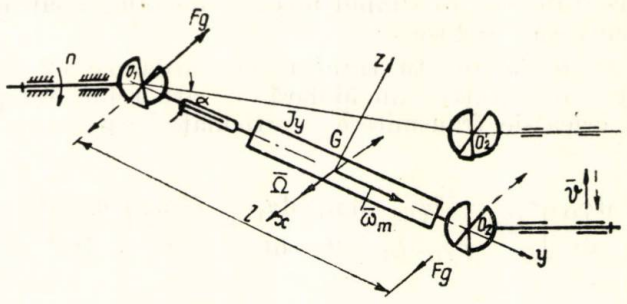


Fig. 17

agricole, forțele axiale sînt aproximativ de două ori mai mari decît în cazul îmbinărilor telescopice cu caneluri. Se observă că forțele cauzate de frecarea în cupla de translație pot căpăta valori mari, ceea ce justifică importanța considerării lor în proiectarea transmisiilor. Astfel, în cazul transmisiei automobilului, forțele T_1 și T_2 sînt preluate prin blocul motor de suspensia motorului. Pentru micșorarea forței axiale se poate mări (în limite raționale) diametrul mediu al canelurilor, se poate reduce frecarea prin prelucrarea fină a suprafețelor și printr-o ungere îngrijită. Reducerea forței axiale nu este prea mare. De aceea s-a recurs la înlocuirea frecării de alunecare cu cea de rostogolire (parțial sau total) prin introducerea corpurilor de rostogolire între suprafețe — bile, role, galeți etc. — sau la adoptarea unor soluții noi constructive : articulații extensibile Bouchard, articulații tripode culisante.

4.2. *Forțe giroscopice.* În transmisiile cardanice cu configurație spațială variabilă apar forțe giroscopice, rotorii, fiind cu poziția axei de simetrie variabilă. Astfel, analizînd figura 17, se observă că, în timpul trecerii de la poziția O_2 la O'_2, rotorul (arborele intermediar), pe lîngă viteza unghiulară ω în jurul axei proprii, are și o viteză unghiulară Ω, perpendiculară pe planul deplasării. Știind că cuplul giroscopic M_g se definește ca produs vectorial

$$\overline{M}_g = J_y \; (\overline{\omega} \times \Omega),$$

deoarece $\overline{\omega} \perp \overline{\Omega}$, forțele giroscopice F_g care se transmit palierelor se determină cu ajutorul următoarelor expresii (fig. 17):

$$F_g \cdot l = J_y \cdot \omega_m \cdot \Omega \; ; \quad \Omega = \frac{v}{l \cos \alpha} \; ; \quad \omega_m = \frac{\pi n}{30} \; , \tag{54}$$

unde J_y este moment de inerție axial, v viteza de deplasare a furcii mobile (în cazul automobilului v este viteza de deplasare verticală a punții motoare), ω_m viteza unghiulară medie a arborelui intermediar și n turația arborelui conducător. Forțele giroscopice devin importante în transmisia cardanică a automobilului la trecerea peste obstacole cu viteza mare la deplasare. În aceste cazuri, datorită impulsului primit, puntea motoare se deplasează rapid, deformînd suspensia. Forțe giroscopice apar, de asemenea, în mașinile de transport în timpul mișcării de tangaj sau de viraj, însă în aceste cazuri sînt reduse.

4.3. *Forțe de inerție.* În transmisiile cardanice cu unghiuri între axe variabile, accelerația unghiulară a arborelui intermediar are, plecînd de la legea de transmitere a articulației cardanice (4), expresia ($\varphi_{11} = \omega_{11} \cdot t$)

$$\varepsilon_{12} = \frac{d^2\varphi_{12}}{dt^2} \cdot \left(\frac{d\varphi_{11}}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial\varphi_{11}\partial\alpha_1} \cdot \frac{d\varphi_{11}}{dt} \cdot \frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{\partial^2\varphi_{12}}{\partial\alpha_1^2}\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2 + \frac{\partial\varphi_{12}}{\partial\alpha_1} \cdot \frac{d^2\alpha_1}{dt^2}. \tag{55}$$

Comparînd expresiile (55) și (48), se observă că pe lîngă cuplul de inerție (48) care apare în arborele intermediar cînd unghiul α rămîne invariabil, în cazul dat (55), datorită variabilității unghiului între arbori $\alpha_1 \left(\frac{d\alpha_1}{dt} = 0,\ \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} \neq 0\right)$, apare un cuplu de inerție suplimentar $M^j\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial t},\ \frac{d^2\alpha_1}{dt}\right)$, adică

$$M^j = M^j(\alpha_1) + M^j\left(\frac{d\alpha_1}{dt},\ \frac{d^2\alpha_1}{dt^2}\right). \tag{56}$$

Rezultă că în arborii intermediari ai transmisiilor cardanice, în cazul configurației spațiale variabile (α_1 = var.), apar forțe de inerție (56) mai mari decît în cazul configurației spațiale invariabile (α_1 = const.) (48).

5. TRANSMISII POLICARDANICE SINCRONE

Analiza cinetostatică a transmisiilor policardanice se face analog cu cea a transmisiei bicardanice. În cazul general, expresiile momentelor de răsucire, cuplurilor secundare încovoietoare și reacțiunilor în reazeme sînt complicate, de aceea pentru fiecare caz separat al transmisiei policardanice trebuie făcută o analiză specială. În cazul transmisiei bicardanice sincrone s-a văzut că numai varianta Z (fig. 15) realizează descărcarea arborelui intermediar de cuplul încovoietor secundar. În cazul transmisiilor policardanice sincrone [10], arborii intermediari nerezemați sînt descărcați de cuplul secundar rezultant (44) numai dacă transmisia respectivă poate fi concepută ca fiind formată din transmisii bicardanice sincrone, varianta Z (fig. 18).

În figura 18 sînt reprezentate schemele transmisiilor tricardanice și tetracardanice sincrone, în care arborii intermediari nerezemați sînt echilibrați, adică cuplurile secundare (44) rezultante respective sînt nule. În

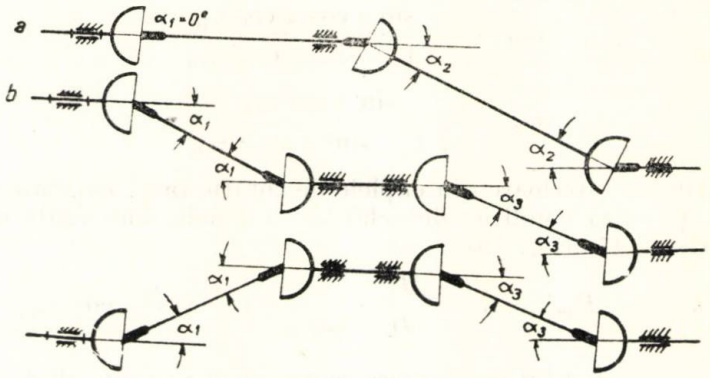


Fig. 18

cazul particular al transmisiilor tetracardanice sincrone (fig. 18 *b*, *c*) cînd $\alpha_1 = \alpha_3$, în schema din fig. 18 *b*, toți arborii intermediari sînt echilibrați.

6. RANDAMENTUL ARTICULAȚIEI CARDANICE

Determinarea randamentului articulației cardanice se face, în ipoteza frecării coulombiene, pentru un ciclu complet de mișcare. Pierderile au loc în cuplele de rotație care leagă furcile cu crucea $A-A$; $B-B$ (fig. 19).

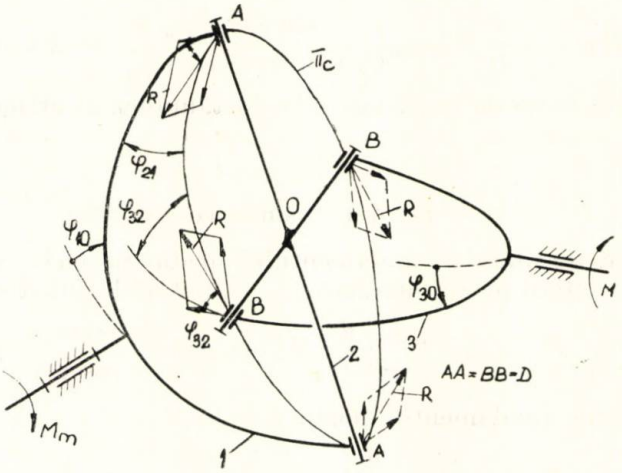


Fig. 19

În figura 19, cu φ_{10}, φ_{30} s-au notat deplasările unghiulare absolute ale elementelor legate la bază, cu φ_{21}, φ_{32} deplasările unghiulare ale crucii

cardanice față de furcă și cu α unghiul dintre axele furcilor. Derivînd expresiile (2) și (3), scrise conform notațiilor din figura 19, se determină vitezele unghiulare relative :

$$\omega_{21} = -\frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos\varphi_{10}}{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi_{10}} \tag{57}$$

$$\omega_{32} = \frac{\sin\alpha\sin\varphi_{10}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi_{10}}}. \tag{58}$$

Reacțiunile interioare din cuplele de rotație fiind cuprinse în planul crucii (π_c), pe baza condiției de echilibru a crucii, sînt egale ca modul, avînd expresia (17) (fig. 19)

$$|R_{21}| = |R_{32}| = R = \frac{M_m}{D}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi_{10}}, \tag{59}$$

unde M_m este momentul de răsucire motor și D distanța dintre reacțiunile din fusuri. Puterea pierdută prin frecare în fusurile $A-A$ și $B-B$ este, respectiv,

$$P_{fA} = 2\mu\frac{d}{2}R\,|\omega_{21}|\ ,\quad P_{fB} = 2\mu\frac{d}{2}R\,|\omega_{32}|, \tag{60}$$

în care μ este coeficient de frecare și d diametrul fusurilor crucii. Coeficientul de frecare μ trebuie să țină seama de frecările din rulment sau cuzinet, frecările pe suprafața frontală a fusului cauzate de forțele axiale din fusuri (53) și de frecările inelelor de etanșare. Ținînd seama de (57), (58), (59) puterea totală instantanee pierdută în fusuri are expresia

$$P_f = P_{fA} + P_{fB} = \mu\frac{d}{D}M_m\,\omega_{10}\left(\frac{\sin\alpha\cos\varphi_{10}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi_{10}}} + \operatorname{tg}\alpha\sin\varphi_{10}\right), \tag{61}$$

de unde rezultă expresia randamentului instantaneu al articulației cardanice :

$$\eta' = 1 - \frac{P_f}{P} = 1 - \mu\frac{d}{D}\left(\frac{\sin\alpha\cos\varphi_{10}}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\cos^2\varphi_{10}}} + \operatorname{tg}\alpha\sin\varphi_{10}\right). \tag{62}$$

Pentru determinarea randamentului mediu pe ciclu, este necesară determinarea puterii medii pierdute pe ciclu. Astfel, ținînd seama de (61)

$$P_{0f} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_f\cdot d\varphi_{10} = 2\frac{\mu}{\pi}\cdot\frac{d}{D}\cdot M_m\cdot\omega_{10}\left(\ln\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right), \tag{63}$$

de unde rezultă randamentul mediu :

$$\eta = 1 - 2\frac{\mu}{\pi}\cdot\frac{d}{D}\left(\ln\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right). \tag{64}$$

Deoarece reacțiunile interioare în cuple (59) au fost determinate în ipoteza neglijării frecării, formula dedusă (64) nu este riguros exactă. Preci-

zarea formulei se face printr-un proces de aproximări succesive. Valorile medii ale randamentului articulațiilor cardanice pentru condiții normale de exploatare fiind în general ridicate (0,985—0,995, fig. 20), formula dedusă dă o imagine suficient de exactă a pierderilor.

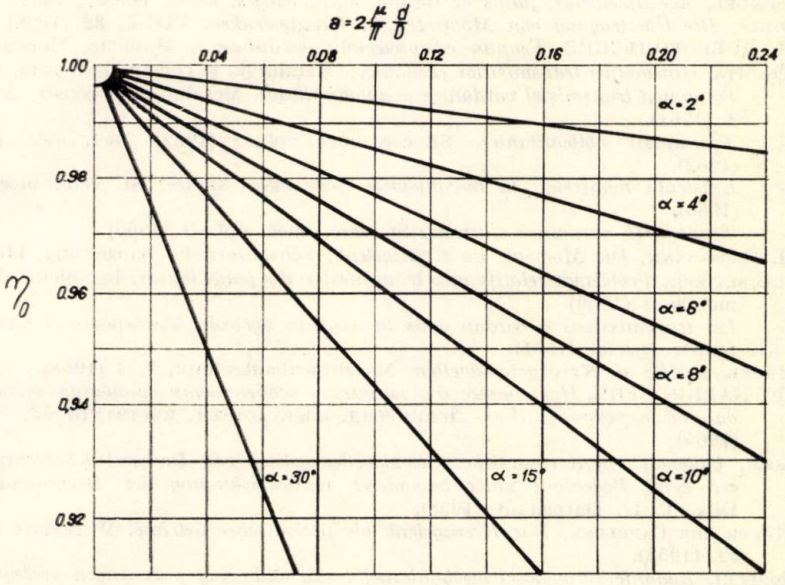


Fig. 20

Din reprezentarea grafică a formulei (64), scrisă sub forma

$$\eta = 1 - a\left(\ln\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right),$$

pentru diferite valori ale parametrilor a și α, rezultă influența acestora asupra randamentului. Pentru unghiuri între arbori (α) care nu depășesc 10°, cu o eroare ce nu depășește 1%, sînt valabile aproximările $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$; $\sin\alpha \approx \alpha$; $\cos\alpha \approx 1$; $l_n(1+\alpha) \approx \alpha$. Formula randamentului articulației cardanice (64) în această ipoteză se simplifică, devenind

$$\eta = 1 - 4\frac{\mu \cdot d \cdot \alpha}{\pi \cdot D}, \qquad (65)$$

formă sub care se întîlnește deseori în literatura de specialitate. Randamentul global al transmisiilor cu articulații universale se determină ținînd seama de pierderile în articulații, în palierele intermediare și în îmbinările telescopice [7], [8].

Primită la redacție la 12 aprilie 1965;
o a doua versiune la 14 mai 1965

BIBLIOGRAFIE

1. R. Bouchard, *De quelques notions peu courantes sur les joints universels.* Journal SIA, Mars (1954).
2. — *Joints de cardan et arbres de transmission.* SIA (CESIA), Paris (1954).
3. J. Brondel, *Accouplements, joints de cardan, encliquetages.* Paris, Dunod, 1961.
4. H. Dietz, *Die Übertragung von Momenten in Kreuzgelenken.* VDI-Z, **82** (1938).
5. В. В. Добровольский, *Теория сферических механизмов*, Машгиз, Москва, 1947.
6. Fl. Dudiță, *Cinematica transmisiilor cardanice.* Metalurgia și constr. de mașini, *9* (1960).
7. — *Dinamica transmisiei cardanice a automobilului.* Metalurgia și constr. de mașini, *2* (1961).
8. — *Transmisii policardanice.* St. cerc. mec. apl., *1* (1962). Rev. méc. appl., *6* (1962).
9. — *Existența manivelei la mecanismele patrulatere sferice.* St. cerc. mec. apl., *2* (1965).
10. — *Transmisii cardanice sincrone.* St. cerc. mec. apl., *1*, (1966).
11. K. H. Grossmann, *Die Momente im Kreuzgelenk.* Schweizerische Bauzeitung, **113** (1939).
12. P. Guimbetiere, *Problèmes relatifs aux transmission des poids lourds.* Ingénieurs de l'automobile, *2* (1959).
13. — *Les transmissions à cardan dans la machine agricole.* Transports et agriculture, număr special (1961).
14. R. Habel, *Kräfte an Kreuzgelenkwellen.* Maschinenbautechnik, **7**, *5* (1958).
15. П. Ф. Карнилович, *Некоторые динамические особенности вращения валов с карданной передачей.* Изв. Ленинград. электротехн. института *53*, 374—390 (1964),
16. R. Koch, *Untersuchungen räumlicher Gelenkwellensysteme von Drehgestell-Schienenfahrzeugen beim Bogenlauf unter besonderer Berücksichtigung der Dreheversatzwinkel.* Diss. T. H. Darmstadt (1958).
17. W. Meyer zur Capellen, *Das Kreuzgelenk als periodisches Getriebe.* Werkstatt u. Betr., *91* (1958).
18. A. Morecki, *Badanie sprawnosci mechanicznej i sity wzdluznej podwojnych prezegubw universalnyck Cardana.* Przegl. mech., **21**, *21* (1962).
19. B. Porter, *The efficiencies of transmissions incorporating Hooke joints.* The Engineer, **213**, 5 553.
20. G. Rabbeno, *Pericoli nascosti nei giunti a snodo cardanico per transmissione di potenza mecanica.* Tecn. ital., **20**, *1—2* (1964).
21. W. Rath, *Massenkräfte bei sphärischen Getrieben.* Klepzig Fachberichte, **69**, *3* (1961).
22. W. Reuthe, *Ausführungsarten, Belastungsgrenzen und Reibungsverluste von Kreuzgelenken.* Konstruktion, *1* (1949).
23. К. Ф. Сасский, *Некоторые вопросы расчета сферических шарнирных механизмов.* Семинар по ТММ, **XX**, *78* (1960).
24. W. Steede, *The Hookes joints.* Automobile engineer, *4* (1957).

RECENZII

C. DRĂGAN, *Utilaj şi proiectări de utilaj din industria confecţiilor din piele*, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1965, 405 p.

O largă utilizare a celor mai diverse mecanisme şi construcţii mecanice se întîlneşte, desigur, în industria confecţiilor din piele, ca de altfel în toate ramurile industriei uşoare. Aici diferitele operaţii, mecanizate sau automatizate, necesită, în construcţia utilajului respectiv, întrebuinţarea unor mecanisme cu legi de mişcare, cu eforturi, gabarite, indici caracteristici etc. foarte variate. De la mecanismele maşinilor de tăiere şi frezare la mecanismele maşinilor de cusut şi de formare, la sistemele de automatizare etc. se întîlnesc atît mecanisme ce efectuează procese asemănătoare, dar mai ales mecanisme cu destinaţie specifică procesului respectiv. Pe de altă parte, avantajele mecanismelor relative la posibilităţile îmbunătăţirilor, proiectarea mecanismelor cu caracteristici superioare şi cu destinaţii diferite etc. măresc şi îmbogăţesc în permanenţă cîmpul de activitate al inginerului din acest domeniu.

În această situaţie, sarcina de a realiza cursul de *Utilaj şi proiectări de utilaj din industria confecţiilor din piele* este foarte dificilă, mai ales pentru că documentaţia este foarte redusă. Realizarea acestui prim curs în ţara noastră evidenţiază munca tov. conf. ing. C. Drăgan, candidat în ştiinţe tehnice, care a îmbinat constructiv atît caracteristicile generale ale mecanismelor, cît şi specificul maşinilor din industria confecţiilor din piele. Aceleaşi observaţii se referă şi la diversele organe ale maşinilor, la studiul amănunţit al tăierii, al frezării, la operaţiile de şlefuire, scămoşare, coasere, îmbinare etc.

S-a asigurat cursului o fundamentare teoretică ridicată şi o aplicabilitate directă, ambele foarte utile inginerilor din această ramură.

Cursul are patru părţi şi cuprinde capitole referitoare la: tăierea prin ştanţare; proiectarea mecanismelor ştanţelor; tăierea la maşini cu funcţionare continuă; frezarea şi utilajul de frezare; şlefuirea şi scămoşarea; utilaj pentru îmbinarea prin coasere; utilaj pentru îmbinarea prin elemente rigide; utilaj pentru formare şi lipire; mecanisme auxiliare; procedee de agregare; sisteme de programare.

Materialul cursului este expus clar, planşele şi formulele fiind bine redate. Deşi cursul se adresează studenţilor, este foarte util inginerilor pentru exploatarea, întreţinerea sau proiectarea maşinilor respective, deoarece le pune la îndemînă un bogat material de probleme şi rezolvări, precum şi de posibilităţi de dezvoltări în sectorul industriei confecţiilor din piele.

Chr. Pelecudi

С. Н. КОЖЕВНИКОВ, Я. И. ЕСИПЕНКО и Я. М. РАСКИН, *Механизмы* (Mecanisme), Москва, Машиностроение, 1965, 1 058 p.

Cartea este un îndreptar prețios ce vine în ajutorul tuturor acelora care lucrează în domeniul construcțiilor de mașini, dar îndeosebi proiectanților. Un merit deosebit al autorilor este faptul că au reușit într-o formă concisă și accesibilă să prezinte 2 030 de scheme de mecanisme cu descrierea lor funcțională în numai 1 058 de pagini.

Una dintre multiplele probleme ce se pun la proiectarea mașinilor, și mai ales a mașinilor automate și a liniilor automate, este alegerea schemelor mecanismelor care intră în componența acestora. Dacă se ține seama de faptul că la îndeplinirea aceleiași funcții al organului de lucru al mașinii se poate folosi o mare diversitate de mecanisme cu structuri diferite, atunci se poate afirma că alegerea unei scheme cît mai adecvate cazului dat este o problemă dificilă. Prin utilizarea cărții *Mecanisme*, o astfel de muncă este mult ușurată, deoarece ea conține cele mai importante mecanisme care au fost aplicate cu succes la mașinile existente și care în timpul exploatării au dat rezultate bune. Trebuie subliniat că o parte din mecanismele ale căror scheme sînt redate în carte au fost studiate și experimentate de către autori în mai mult de trei decenii de activitate științifică.

În scopul de a ușura folosirea cărții, prezentarea mecanismelor se face după criteriul lor funcțional. Astfel, de exemplu, partea a III-a tratează mecanismele cu roți dințate, partea a IV-a mecanismele cu came, partea a V-a mecanismele cu mișcări intermitente. În totalul de 14 părți cît cuprinde lucrarea se mai descriu mecanisme cu curse variabile, mecanisme și mașini vibratoare, mecanisme de alimentare ale mașinilor automate, mecanisme de comandă etc.

La unele mecanisme, pe lîngă scurta lor descriere funcțională, se mai dau și formulele finale necesare la proiectarea acestora.

Mecanismele cuprinse în lucrare sînt foarte bine selecționate și reflectă ultimele realizări ale constructorilor și oamenilor de știință din țările cu tehnică avansată.

Se poate afirma că lucrarea (care se tipărește deja a treia oară) este folositoare și aduce un ajutor esențial în ceea ce privește alegerea judicioasă a schemelor celor mai adecvate mecanisme pentru cazul concret dat, fapt care poate conduce la simplificarea calculelor cinematice și dinamice ale mecanismelor respective și în același timp poate da idei pentru construirea unor mecanisme noi.

I. Székely

W. NOWACKI, *Théorie du fluage* (Teoria fluajului), Paris, Editions Eyrolles, 1965, 220 p.

Problemele puse de corpurile cu proprietăți reologice ocupă un loc din ce în ce mai mare în cercetările de specialitate. Multe din corpurile reale, din materialele frecvente de construcție au proprietăți viscoelastice. În ultimul timp s-au publicat mai multe monografii privind aspecte teoretice sau experimentale ale acestei probleme. Lucrarea prof. Nowacki de la Universitatea din Varșovia are un pregnant caracter matematic, fenomenul fizic fiind însă totdeauna pus în evidență; ea are un caracter aparte, încadrîndu-se în cercetările fundamentale ale școlii poloneze de mecanică a solidelor deformabile.

Cartea se împarte în șase capitole, urmate de un apendice cu completări de interes matematic (un studiu sumar al transformatei lui Laplace, funcțiile Dirac și Heaviside, o introducere sumară în calculul tensorial).

În capitolul I se introduce mediul viscoelastic. Se studiază modelele Voigt și Maxwell, precum și modelele Voigt și Maxwell generalizate. Sînt prezentate legi constitutive atît sub formă diferențială, cît și sub formă integrală. Menționăm și introducerea altor modele de corpuri reale, cuprinzînd mai mult de doi parametri (de exemplu modelul Boltzmann).

Ecuațiile fundamentale ale viscoelasticității sînt stabilite în capitolul al II-lea. Se introduc tensorii tensiune și deformație și se face un studiu al ecuațiilor de echilibru și mișcare. Folosind legea constitutivă a materialului, se obțin ecuațiile de mișcare în deplasări, ceea ce permite o rezolvare în deplasări a problemei. Menționăm în special discutarea analogiei dintre problemele viscoelastice și cele elastice (principiul corespondenței, obținut cu ajutorul transformatei Laplace).

Capitolul al III-lea cuprinde unele probleme cvasistatice ale viscoelasticității. Se consideră problema încovoierii grinzii drepte ca și cazul încovoierii cu forțe axiale; în felul acesta se ajunge și la fenomenul de flambaj. Se dau și unele rezultate privitoare la încovoierea plăcilor plane subțiri. Un paragraf special este dedicat problemelor cvasistatice plane. De asemenea se dă încă o formă a principiului corespondenței menționat mai sus.

Vibrațiile staționare și nestaționare ale barelor și plăcilor sînt studiate în capitolul al IV-lea. Se consideră sistemele cu un număr finit de grade de libertate, precum și sistemele continue. În afara vibrațiilor transversale se studiază și fenomenul de propagare a undelor.

Ultimele două capitole sînt destinate unor probleme speciale. Se consideră astfel propagarea undelor, în cazul general dinamic, pentru spațiul infinit. Cu această ocazie se pun în evidență și undele de suprafață Rayleigh pentru semispațiul elastic. Se introduce și influența unei variații de temperatură, stabilindu-se ecuațiile generale; autorul dă și cîteva exemple de probleme cvasistatice. Rezultate complete sînt date pentru spațiul elastic și pentru semispațiul elastic; pentru aceste domenii se consideră și unele probleme dinamice.

Lucrarea prof. Nowacki este scrisă deosebit de clar și sistematic. Ea cuprinde sub formă monografică atît diferite rezultate din literatura de specialitate, cît și rezultatele personale ale autorului; în felul acesta, cartea poate fi de folos tuturor celor ce sînt interesați în mecanica solidelor deformabile.

P. P. Teodorescu

J. G. LEKKERKERKER, *On the stress distribution in cylindrical shells weakened by a circular hole* (Asupra distribuției de tensiuni în plăci cilindrice subțiri slăbite de un gol circular), Delft, Uitgeverij Waltman, 1965, 100 p.

Problema determinării stării de tensiune și a stării de deformație într-o placă subțire cilindrică a făcut obiectul studiilor multor cercetători, atît cu o formație foarte teoretică, cît și cu o formație tehnică; într-adevăr, problema prezintă un pregnant interes teoretic prin problemele de ordin matematic care se pun, dar și un deosebit interes practic.

Lucrarea inginerului J. G. Lekkerkerker constituie o disertație susținută în februarie 1965 la Delft pentru obținerea titlului de doctor în științe și este dedicată determinării distribuției de tensiuni în cazul în care în placa curbă se efectuează un gol circular.

Lucrarea este împărțită în șapte capitole, urmate de o bibliografie de 19 titluri și un rezumat în limba olandeză.

După o scurtă introducere se prezintă ecuațiile fundamentale și se dă o soluție a acestora cu ajutorul seriilor de funcții Bessel în teorie de încovoiere ; menționăm un studiu interesant al completitudinii soluției. Remarcăm luarea în considerație a unor sarcini locale, care se reduc la o rezultantă sau la un moment. De asemenea autorul demonstrează unicitatea deplasărilor tangențiale.

Un studiu special este întreprins în cazul unui tub elastic cu un gol circular, punîndu-se diferite condiții la limită cu caracter geometric sau dinamic. Se consideră cazuri de încărcare simetrică și antisimetrică, cazul întinderii sau răsucirii simple, ca și cazul unei presiuni interioare.

Un capitol special este destinat evaluării aproximațiilor ce se introduc în calcul.

Pentru cazul tubului elastic supus la întindere sau la răsucire se dau rezultate numerice, calculate cu ajutorul calculatorului digital „Elliott 803" ; ele au ieșit în deplină concordanță cu rezultatele experimentale, obținute prin tensometrie electrică pentru cazuri de încărcare analoge pe modele.

Lucrarea este deosebit de interesantă atît prin caracterul său teoretic, cît și prin rezultatele numerice și experimentale prezentate. Ea poate fi consultată cu succes de cercetătorii din domeniul plăcilor curbe subțiri și de inginerii proiectanți.

P. P. Teodorescu

J. BALAŠ și A. HANUŠKA, *Influence surfaces of skew plates* (Suprafețe de influență ale plăcilor oblice), Bratislava, Vydavatelstvo Slovenskej Akad. Vied, 1964, 368 p. + VIII tab.

Dezvoltarea din ce în ce mai mare a rețelelor de drumuri a făcut necesar ca în unele locuri cursurile de apă să fie trecute pe poduri oblice. De asemenea plăcile oblice intervin și în cazul altor construcții, astfel încît problemele de proiectare practică se pun în mod deosebit.

Lucrarea cercetătorilor slovaci vine să umple un gol resimțit în literatura de specialitate. Cartea este scrisă concomitent în limbile slovacă, rusă și engleză [1]).

În prima parte se prezintă pe scurt problema încovoierii plăcilor plane oblice subțiri (în formă de paralelogram), trecîndu-se în revistă diferite metode de calcul. Această parte este însoțită de o bibliografie bogată (210 titluri).

Accentul se pune mai ales pe metoda diferențelor finite, pe care autorii o folosesc pentru calculul suprafețelor de influență (este pentru prima dată cînd se prezintă asemenea rezultate obținute prin calcul) ; metoda a fost utilizată cu diferite perfecționări (relaxare etc.), iar rezultatele au fost obținute cu ajutorul mașinilor electronice de calcul. Menționăm discuția privind aproximația rezultatelor prezentate, influența coeficientului lui Poisson, modul de calcul al plăcilor oblice continue.

Tabelele cuprind valorile deplasării normale la planul median și ale momentelor de încovoiere și răsucire în 63 de puncte interioare și pe contur pentru diferite plăci plane oblice subțiri (funcție de raportul laturilor și de unghiul ascuțit făcut) ; în total sînt considerate 30

[1]) Noi am dat numai titlul englez al lucrării.

de tipuri de plăci. De asemenea se dau mărimile respective pentru cazul plăcii încărcate cu o sarcină normală uniform distribuită. Cele opt tabele suplimentare cuprind diferite formule utile în calculul practic.

Lucrarea de mai sus, în care rezultatele se dau sub formă de tabele, este deosebit de utilă pentru proiectarea inginerească.

P. P. Teodorescu

HANS OLEAK, *Gasdynamische vorgänge im feuerkugelstadium der meteore* (Fenomene gazodinamice în stadiul de incandescență al meteoriților), Berlin, Veröffentlichungen der Sternwarte Babelsberg, XIV. Band, 6. Heft, Akademie-Verlag, 1964, 67 p.

Lucrarea reprezintă un studiu asupra scurgerii supersonice în jurul unui meteorit incandescent și asupra fenomenelor legate de comportarea meteoriților în timpul mișcării acestora în stratele superioare ale atmosferei.

În prima parte se analizează aspectele mai importante ale scurgerii supersonice a unui continuu gazos în jurul unui corp în stare de incandescență, stabilindu-se schimbările mărimilor de stare în unda de compresie. Apoi, din repartiția presiunii pe corpul meteoritului, autorul stabilește coeficientul de rezistență la înaintare. Autorul stabilește în continuare o relație între entalpie și temperatură, valabilă în domeniul de viteze și înălțimi corespunzătoare apariției meteoriților în stare de incandescență, și se determină repartiția temperaturii pe corpul meteoritului.

Pentru a se putea decide în ce condiții rămîne valabilă ipoteza unei scurgeri continue, se stabilesc criterii de apreciere a proprietăților scurgerii în jurul corpului meteoritic. Aceste criterii arată că se poate conta pe o scurgere continuă la o înălțime mult mai mare decît se considera pînă în prezent.

Partea a doua a lucrării este consacrată studiului comportării meteoritului incandescent pe baza rezultatelor obținute în prima parte a lucrării. Din variația vitezei meteoritului obținută prin observații, se determină masa acestuia, pierderea de masă, coeficientul de evaporare etc.

Pe lîngă faptul că prezintă o serie de aspecte noi ale problemei, lucrarea conține diagrame, tabele, rezultate numerice, ceea ce mărește considerabil utilitatea sa practică.

M. M. Niță

LUCRĂRI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE

L. Moulin, Etude analytique du problème de correction des trajectoires et application à la rentrée d'engins spatiaux dans l'atmosphère terrestre, Liège, 1963.

C. S. Song, Measurements of the unsteady flow on cavitating hydrofoils in a free jet (Technical Paper no. 49/1964 St. Anthony Falls Hydraulic Laboratories).

— Proceedings of the 7-th Japan Congress on testing materials, Kyoto, 1964.

M. L. Booy, On isothermal flow of viscous liquids through screw pumps, Delft, 1964.

B. Bartolozzi, Progetto e costruzione di una attrezzatura per ricerche su cuscinotti di spinta a lubrificazione forzata (Pubblicazioni della Facolta d'Ingegneria dell'Università di Pisa, nr. 1055).

M. Marini, Studio di un getto supersonico assiale in corrente supersonica (Pubblicazioni della Facolta d'Ingegneria dell'Università di Pisa, nr. 1045).

M. Marini, Sulla interferenza tra un getto supersonico assiale e superfici ad esso prossime in una corrente supersonica (Pubblicazioni della Facolta d'Ingegneria dell'Università di Pisa, nr. 1046).

M. Marini, Studio di un getto disposto ad incidenza non nulla in una corrente supersonica (Pubblicazioni della Facolta d'Ingegneria dell'Università di Pisa, nr. 1047).

P. A. T. Christopher, The stability of the short-period motion of an airframe having non-linear aerodynamic characteristics subject to a sinusoidal elevator oscillation (CoA Report Aero no. 176).

— Laboratoires d'Hydraulique et de mécanique des fluides. Travaux et publications des années 1963 et 1964.

M. Masak, On the lateral instabilities of aircraft due to parametric excitations (UTIAS Technical Note no. 86/1965).

D. J. Marsden, The measurement of energy transfer in gas-solid surface interactions using electron beam excited emission of light (UTIAS Report no. 101/1964).

I. I. Glass, Shock and combustion-wave dynamics in an implosiondriven hypervelocity launcher (UTIAS Review nr. 25/1965).

K. Burg, Die Berechnung der Überschallströmung um einen Tragflügel mit zwei Unterschall-Vorderkanten, Karlsruhe, 1964.

U. Müller, Untersuchungen an rotationssymmetrischen Zellularkonvektionsströmungen, Karlsruhe, 1964.

A. Rauber, Wärmeübergang bei unterkühlten Verdampfen an im Ringspalt aufwärts strömendes Wasser für höhere Systemdrücke und Heizflächenbelastungen, Karlsruhe, 1964.

H. KREMER, Zur Ausbereitung inhomogener turbulenter Freistrahlen und turbulenter Diffusionsflammen, Karlsruhe, 1964.

R. RAUTMANN, Ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für ein nichtlineares Randwertproblem der Turbinentheorie, Karlsrhue, 1964.

T. E. MORSY, Zum thermischen und kalorischen Verhalten realer fluider Stoffe, Karlsruhe, 1963.

W. D. GRAEBER, Untersuchungen über Mischrohre zur Schubverstärkung bei Strahlantrieben, Karlsruhe, 1964.

W. HAUCK, Zur Berechnung von eingespannten Platten mit einspringenden Ecken, Karlsruhe, 1964.

A. RUPP, Längsschwingungen in Schiffswellensystemen, Karlsruhe, 1964.

P. ČOLAK-ANTIČ, Dreidimensionale Instabilitätserscheinungen des laminar-turbulenten Umschlages bei freier Konvektion längs einer vertikalen geheizten Platte, Karlsruhe, 1964.

W. W. HASSAN-DJALALIAN, Messung der Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten mit einer stationären Hitzdrahmethode, Karlsruhe, 1964.

H. SCHADE, Einführung in die nichlineare hydrodynamische Stabilitätstheorie (DVL-DLR Forschungsbericht 64—35/1964).

F. R. SCHEIBE, Studies of the flow characteristics of a compressible, bubbly mixture about supercavitating bodies and in a converging-diverging nozzle (Technical Paper nr. 48/1964, Series B, St. Anthony Falls Hydraulic Laboratories).

T. N. STEVENSON, Experiments on Injection into an Incompressible Turbulent Boundary Layer (CoA Report Aero no. 177, oct. 1964).

Ş. E. MIKELADZE, Reşenie Cislennih upravnenii, Tbilisi, 1965.

A. RUSSO SPENA, Compatibilità delle equazioni specifiche e globale per il moto di corrente (Pubblicazione nr. 5, Istituto di Idraulica della Università di Palermo).

A. RUSSO SPENA, Correnti a superficie libera permanenti gradualmente variate (Pubblicazione no. 6, Istituto di Idraulica della Università di Palermo).

A. RUSSO SPENA, Moti di filtrazione a superficie libera attraverso di strati filtranti di permeabilità diverse (Pubblicazione no. 8, Istituto di Idraulica della Università di Palermo).

A. RUSSO SPENA, Correnti di strato limite lungo lastere acclivi (Pubblicazione nr. 11, Istituto di Idraulica della Università di Palermo).

D. SURRY, Characteristic of a Rectangular Wing with a Peripherial Jet in Ground Effect (UTIAS Technical Note nr. 77/1964).

Z. A. WALENTA, Analogue Networks for High Heat-Transfer Rate Measurements (UTIAS Technical Note nr. 84/1964).

T. MEHUS, An Experimental Investigation into the Shape of Thrust Augmenting Surfaces in Conjunction with Coanda-deflected Jet Sheets (Part II, UTIAS Technical Note no. 79/1965).

YAT-YUNG CHAN, Integral Methods in Compressible Laminar Boundary Layers and their Application to Hypersonic Pressure Interactions (UTIAS Report nr. 104/1965).

H. E. JMBACH, Die Berechnung der kompressiblen, reibungsfreien Unterschallströmung durch räumliche Gitter aus Schaufeln auch grosser Dicke und starker Wölbung, Zürich, 1964.

P. ANAND PARANJPE, Monte Carlo Approach to the Flow Problems of Turbomachinery, Zürich, 1963.

R. Wolfensberger, Traglast und optimale Bemessung von Platten, Zürich, 1964.

K. Lange, Analyse der Bewegungsverhältnisse und mechanischen Beanspruchungen zweier räumlicher Fünfgelenkgetriebe mit Hilfe verschiedener Verfahren, Aachen, 1963.

H. Rosenberg, Instationäre Strömungsvorgänge in Leitungssystemen mit flexibel-elastischen Rohrwänden, Aachen, 1963.

A. Heyser & W. Wyborny, Entwicklung und Justierung eines Stosswellenwindkanals mit freifliegenden Kolben für hypersonische Geschwindigkeiten (Deutsche Luf und. Raumfahrt, Forschungsbericht nr. 34/1964).

Th. Dahlem & D. Paffrath, Über einige Mothoden der Durchsatzmessung an Schwebstoffabscheidern für Messflüge in grossen Höhen in der freien Atmosphäre (Deutsche Luft – und Raumfahrt Forschungsbericht no. 33/1964).

Pitter Gräff, Über die Parametrisierung der Lösungen der Vlasov-Gleichung, Aachen, 1964.

H. Kinz, Beitrag zur experimentellen Untersuchung von zylindrischen Gleitlagern, Karlsruhe, 1964.

G. Rotondi, Sulla „riposta" di un aliante ad una brusca manovra dei diruttori (Pubblicazone no. 74/1964, Istituto di Aeronautica, Politecnico di Milano).

G. Rotondi, Sul volo di un aereo rimbalzante (Pubblicazione nr. 72/1964, Istituto di Aeronautica, Politecnico di Milano).

G. Rotondi, Sul volo in spirale degli alianti (Pubblicazione nr. 68/1963, Istituto di Aeronautica, Politecnico di Milano).

G. Rotondi, Alcune misure di portanza su un'ala in regime non stazionario (Pubblicazione nr. 73/1964, Istituto di Aeronautica, Politecnico di Milano).

V. Giavotto, Studio degli organi di atterraggio per mezzo del calcolo analogico (Pubblicazione nr. 70/1963, Istituto di Aeronautica, Politecnico di Milano).

Lars Sonnerup, Stress Reversals in Connection with Primary Creep (Transactions of Chalmers University of Technology nr. 295/1965, Gothenburg, Sweden).

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 20, nr. 6 1965

SUMAR

TUDII

Pag.

OROVEANU, Cîteva considerații asupra dezlocuirii fluidelor miscibile în medii poroase 1269

H. PASCAL şi F. MUNTEANU, Curgerea tranzitorie a gazelor printr-un mediu poros în regim turbulent 1283

DAN PAVELESCU, Aspecte ale evoluției uzurii legate de caracterul statistic al metodei de măsură cu izotopi radioactivi 1305

V. N. CONSTANTINESCU şi GH. MARIN, Unele studii de laborator privind lubrificația cu gaze 1323

CHR. PELECUDI, Metoda solidarizării pentru lanțurile cinematice închise II 1335

N. I. MANOLESCU, Sistematizarea şi clasificarea mecanismelor-motor plane articulate cu două grade de mobilitate „total" ($M_3 = 2$) şi „parțial" ($M_3^p = 2$) 1355

VIRGILIU FLORIAN, Contribuții privind calculul diafragmelor cu goluri, al diafragmelor cuplate şi al cadrelor-diafragme. I 1401

LIVIU LIBRESCU, Flutterul neliniar al panourilor elastice, subțiri, eterogene, ortotrope 1433

C. AVRAM, I. FILIMON şi R. MARTINOV, Aspecte privind plasticizarea parțială a elementelor încovoiate din beton şi microbeton 1463

VALERIU PETCU, Calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat rezemate pe tot conturul, solicitate de încărcări de tip hidrostatic 1475

NOTE

I. CREȚU, Posibilitatea luării în considerare a debitului variabil la cercetarea sondelor prin schimbarea debitului în trepte 1499

RECENZII 1509

LUCRĂRI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE 1511

INDEX ALFABETIC 1965 1513

St. cerc. mec. apl., Tom. 20, Nr. 6, p. 1267—1516, Bucureşti, 1965

CÎTEVA CONSIDERAȚII ASUPRA DEZLOCUIRII FLUIDELOR MISCIBILE ÎN MEDII POROASE [1)]

de T. OROVEANU
Institutul de mecanica fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

Se consideră problema dezlocuirii într-un mediu poros a unui fluid de către un altul miscibil cu el în cazul în care viteza de dezlocuire este variabilă în timp. Se studiază numai cazul dezlocuirii liniare şi se admite o dependenţă cu caracter destul de general a coeficientului de dispersie de viteza de dezlocuire. Printr-un procedeu simplu de schimbare de variabile în ecuaţia diferenţială, problema poate fi redusă la cazul în care viteza de dezlocuire este constantă. Acest procedeu poate fi aplicat pentru o lege oarecare de variaţie în timp a vitezei de dezlocuire. În continuare se studiază cîteva probleme pentru care pot fi adaptate soluţii cunoscute, găsite pentru cazul în care viteza de dezlocuire este constantă. Prin comparaţie se pune în evidenţă influenţa pe care variaţia în timp a vitezei de dezlocuire o are asupra fenomenului, considerîndu-se cîteva cazuri particulare.

1. **Introducere.** Problema dezlocuirii unui fluid aflat într-un mediu poros de către un altul miscibil cu el a fost mult studiată, datorită interesului pe care îl prezintă într-o serie de aplicaţii. Atît cercetările teoretice, cît şi cele experimentale au pus în evidenţă dependenţa coeficienţilor de dispersie longitudinală şi transversală de viteza medie a fluidelor. Dacă această viteză este constantă atît în timp, cît şi în fiecare punct al mediului poros, dependenţa semnalată mai sus nu constituie o sursă de dificultăţi în rezolvarea matematică a problemei. Complicaţii apar însă atunci cînd scurgerea nu mai este liniară, ceea ce face ca viteza medie să fie o funcţie de punct sau, chiar în cazul scurgerii liniare, dacă viteza medie este variabilă în timp. În cele ce urmează ne vom ocupa de acest ultim caz, considerînd

[1)] Publicată şi în „Rev. roum. sci. teh. — Mécanique Appliquée", **10**, *6* (1965) (în limba franceză).

ST. CERC. MEC. APLIC. TOM 20 Nr. 6 P. 1269–1281 Bucureşti 1965

numai dispersia longitudinală și presupunînd că fluidele au aceeași masă specifică și aceeași viscozitate.

2. **Transformarea ecuației diferențiale.** Cu ipotezele menționate în cele ce precedă, ecuația diferențială pe care o satisface concentrația C în fluid de dezlocuire, în cazul scurgerii lineare, este

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \overline{w}_1 \frac{\partial C}{\partial x_1} = K_1 \frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2}, \tag{1}$$

unde $\overline{w}_1$ este viteza de dezlocuire (viteza medie reală), care se obține împărțind viteza de filtrare la porozitate, și K_1 coeficientul de dispersie longitudinală. Deoarece presupunem că $\overline{w}_1$ este funcție de timp, acest coeficient, care depinde de viteza de dezlocuire, va fi, la rîndul său, variabil în timp.

Relația dintre K_1 și $\overline{w}_1$ apare în literatura de specialitate sub diferite forme. Astfel, din considerațiile teoretice ale lui A. E. Scheidegger [10] rezultă

$$K_1 = \alpha \overline{w}_1, \tag{2}$$

α fiind o constantă caracteristică a mediului poros. R. R. Rumer jr. [8] utilizează o relație similară, și anume

$$K_1 = \alpha \overline{w}_1^n. \tag{3}$$

în care exponentul n are o valoare apropiată de unitate, sau

$$K_1 = D + \alpha \overline{w}_1^n, \tag{4}$$

D fiind coeficientul efectiv de difuziune moleculară într-un mediu poros. Această ultimă formulă se aplică în cazul în care viteza de dezlocuire este foarte mică, ceea ce face ca difuziunea moleculară să devină importantă.

Pe de altă parte, din considerațiile teoretice ale lui G. Taylor [11], precum și în cadrul unui procedeu utilizat tot de A. E. Scheidegger [10], coeficientul de dispersie longitudinală apare proporțional cu pătratul vitezei de dezlocuire.

Cercetările experimentale întreprinse de E. A. Ebach și R. R. White [4] au condus la relația

$$\frac{\rho K_1}{\mu} = 1{,}92 \left(\frac{\rho \overline{w}_1 d_p}{\mu} \right)^{1{,}06}, \tag{5}$$

în care d_p este diametrul granulelor mediului poros, ρ masa specifică a fluidelor și μ viscozitatea acestora. O formulă similară, și anume

$$\frac{\rho K_1}{\mu} = \beta_1 \left(\frac{\rho \overline{w}_1 d_p}{\mu} \right)^{n_1}, \tag{6}$$

a fost dată de D. R. F. Harleman, P. F. Mehlhorn și R. R. Rumer jr. [5] Tot pe baza datelor experimentale, D. R. F. Harleman și R. R. Rumer

[6] dau valoarea 0,66 pentru coeficientul β_1, în timp ce n_1 are valoarea 1,2. Cu aceste valori numerice, formula este aplicabilă atunci cînd numărul lui Reynolds $\frac{\rho \overline{w}_1 d_p}{\mu}$ are o valoare mai mică decît 10. Dacă acest număr este mai mare, exponentul n_1 scade.

În loc de a se introduce numărul lui Reynolds în relaţia dintre coeficientul de dispersie longitudinală şi viteza de dezlocuire, se poate utiliza numărul lui Péclet de difuziune moleculară. Astfel au procedat R. J. Blackwell, J. R. Rayne şi W. M. Terry [3], care au stabilit pe cale experimentală formula

$$\frac{K_1}{D_0} = 8{,}8 \left(\frac{\overline{w}_1 a_p}{D_0} \right)^{1{,}17}, \tag{7}$$

în care D_0 este coeficientul de difuziune moleculară şi a_p raza granulelor mediului poros. Numărul lui Péclet de difuziune moleculară are în cazul acesta expresia $\frac{\overline{w}_1 a_p}{D_0}$.

O încercare de sistematizare a fost efectuată de H. O. Pfannkuch [7] prin distingerea mai multor regimuri la care corespund relaţii diferite între K_1 şi $\overline{w}_1$. Astfel, în regimul de difuziune moleculară pură, care nu ne interesează, K_1 este egal cu coeficientul efectiv de difuziune moleculară în mediu poros. În regimul de suprapunere în care amestecul datorit difuziunii moleculare are acelaşi ordin de mărime cu amestecul prin difuziune mecanică, se poate accepta relaţia care rezultă din consideraţiile teoretice ale lui P. G. Saffman [9], şi anume

$$\frac{K_1}{D_0} = \frac{2}{3} + \frac{1}{15} \left(\frac{\overline{w}_1 d_p}{D_0} \right)^2, \tag{8}$$

numărul lui Péclet de difuziune moleculară fiind definit cu ajutorul diametrului d_p al granulelor. Precizăm că această formulă, care dă valori mai mici decît cele experimentale, este scrisă pentru mediile poroase neconsolidate, la care raportul $\frac{D}{D_0}$ are valoarea $\frac{2}{3}$.

Pentru regimul în care difuziunea mecanică este dominantă, dar există o interferenţă cu difuziunea moleculară, se poate utiliza formula

$$\frac{K_1}{D_0} = \alpha_d \left(\frac{\overline{w}_1 d_p}{D_0} \right)^n, \tag{9}$$

în care $\alpha_d \approx 0{,}5$, iar exponentul n are valoarea 1,2. În sfîrşit, în regimul de difuziune mecanică pură este valabilă formula

$$\frac{K_1}{D_0} = \beta_d \frac{\overline{w}_1 d_p}{D_0}, \tag{10}$$

cu $\beta_d = 1{,}8 \pm 0{,}4$, care este de aceeaşi formă cu (2).

Într-un studiu asupra problemei de care ne ocupăm, R. B. Banks și S. Jerasate [2] au adoptat relația (5), în care au admis însă că exponentul este egal cu unitatea, ceea ce dă

$$K_1 = 1{,}92\, \overline{w}_1\, d_p. \tag{11}$$

Observăm că în felul acesta se ajunge, de fapt, la o relație între coeficientul de dispersie longitudinală și viteza de dezlocuire de aceeași formă cu (2). Particularizarea a fost efectuată pentru a se putea utiliza în rezolvarea problemei ecuația (1). Este însă posibil să se efectueze o schimbare de variabile prin care această ecuație este adusă la o formă care nu mai face necesară alegerea unei anumite relații între K_1 și $\overline{w}_1$. În acest scop vom considera o valoare constantă $\overline{w}_1^{(0)}$, determinată în mod potrivit, a vitezei $\overline{w}_1$ la care corespunde o valoare de asemenea constantă $K_1^{(0)}$ a coeficientului de dispersie longitudinală. Dacă efectuăm schimbarea de variabile

$$\tau = \int_0^t \frac{K_1}{K_1^{(0)}}\, dt \quad , \quad \xi_1 = x_1 - \int_0^t \overline{w}_1\, dt, \tag{12}$$

ecuația (1) ia forma

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = K_1^{(0)} \frac{\partial^2 C}{\partial \xi_1^2} \tag{13}$$

și problema se reduce astfel la aceea în care coeficientul de dispersie longitudinală este constant. Observăm că pentru ca schimbarea de variabile (12) să fie posibilă este suficient ca funcțiile $\overline{w}_1(t)$ și $K_1(t)$ să fie continue.

Ecuația (13) are coeficienții constanți și, prin urmare, soluțiile corespunzătoare la diverse condiții inițiale și la limită pot fi găsite, cel puțin în anumite cazuri particulare, prin simpla adaptare a celor cunoscute.

3. **Dezlocuirea într-un mediu poros infinit.** O problemă care a fost studiată printre primele datorită simplității ei este aceea în care distribuția inițială a concentrației este în formă de treaptă, și anume

$$t = 0, \quad C = 0 \tag{14}$$

pentru $x_1 > 0$, respectiv

$$t = 0, \quad C = C_0 \tag{15}$$

pentru $x_1 < 0$. Mediul poros este presupus infinit, iar injecția fluidului se efectuează continuu la $t > 0$.

Pentru ecuația (13), cu noile variabile introduse prin (12), condițiile precedente rămîn aceleași, și anume

$$\tau = 0, \quad C = 0 \tag{16}$$

pentru $\xi_1 > 0$ și

$$\tau = 0, \quad C = C_0 \tag{17}$$

pentru $\xi_1 < 0$.

Soluţia are forma cunoscută

$$C = \frac{C_0}{2}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_1}{2\sqrt{K_1^{(0)}\tau}}\right)\right] \tag{18}$$

sau, dacă revenim la variabilele iniţiale,

$$C = \frac{C_0}{2}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x_1 - \int_0^t \overline{w}_1\,\mathrm{d}t}{2\sqrt{\int_0^t K_1\,\mathrm{d}t}}\right)\right]. \tag{19}$$

Putem determina acum lungimea l_0 a zonei în care concentraţia variază de la 0,9 la 0,1 C_0. Rezultatul este

$$l_0 = 3{,}6248\sqrt{\int_0^t K_1\,\mathrm{d}t} \tag{20}$$

şi se obţine în acelaşi mod ca şi în cazul în care viteza de dezlocuire este constantă [1].

Dacă presupunem că dezlocuirea se efectuează cu viteza constantă $\overline{w}_1^{(0)}$, formula precedentă ia forma cunoscută

$$l_0^{(0)} = 3{,}6248\sqrt{K_1^{(0)}t}. \tag{21}$$

Avem, aşadar,

$$\frac{l_0}{l_0^{(0)}} = \sqrt{\frac{\int_0^t K_1\,\mathrm{d}t}{K_1^{(0)}t}} = \sqrt{\frac{\tau}{t}} \tag{22}$$

dacă ţinem seama de prima formulă (12).

Funcţia $K_1(t)$ fiind considerată continuă în orice interval $[0, t]$, putem scrie

$$\frac{1}{t}\int_0^t K_1(t)\,\mathrm{d}t = K_1^{(m)}(t), \tag{23}$$

media $K_1^{(m)}$ fiind, evident, funcţie de timp. Obţinem astfel în loc de (22)

$$\frac{l_0}{l_0^{(0)}} = \sqrt{\frac{K_1^{(m)}(t)}{K_1^{(0)}}}, \tag{24}$$

de unde se observă că valoarea raportului $\frac{l_0}{l_0^{(0)}}$ la un anumit moment depinde atît de legea de variaţie a vitezei $\overline{w}_1$ în timp, cît şi de modul în care a fost definită constanta $K_1^{(0)}$.

Pentru exemplificare vom considera legile de variaţie a vitezei $\overline{w}_1$ utilizate în [2], şi anume o variaţie exponenţială şi o alta liniară. În ceea

ce privește relația dintre K_1 și $\overline{w}_1$ vom adopta forma (4), care, din punctul de vedere admis, este cea mai generală, bineînțeles dacă admitem că exponentul n poate lua valori cuprinse între 1 și 2. Ca un caz particular se poate lua relația (3), care, în conformitate cu terminologia introdusă în [7], este valabilă în regimul de interferență, cu n diferit de unitate, și în regimul de difuzie mecanică pură, cu n egal cu unitatea.

Considerînd deci variația exponențială în timp a vitezei $\overline{w}_1$, și anume

$$\overline{w}_1 = \overline{w}_1^{(0)} \, e^{-at}, \tag{25}$$

cu $a>0$, din (4) rezultă imediat expresia corespunzătoare a coeficientului de dispersie longitudinală, precum și valoarea constantă $K_1^{(0)}$ care corespunde la $\overline{w}_1 = \overline{w}_1^{(0)}$, respectiv $t = 0$. Cu ajutorul formulelor precedente se poate transcrie cu ușurință soluția (19) pentru acest caz particular. Avem astfel

$$C = \frac{C_0}{2}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x_1 - \dfrac{\overline{w}_1^{(0)}}{a}(1 - e^{-at})}{2\sqrt{Dt + \dfrac{\alpha\,(\overline{w}_1^{(0)})^n}{an}(1 - e^{-ant})}}\right)\right] \tag{26}$$

și

$$K_1^{(m)} = D + \frac{\alpha\,(\overline{w}_1^{(0)})^n}{ant}(1 - e^{-ant}), \tag{27}$$

astfel că formula (24) ne dă

$$\frac{l_0}{l_0^{(0)}} = \sqrt{\frac{D + \dfrac{\alpha\,(\overline{w}_1^{(0)})^n}{ant}(1 - e^{-ant})}{D + \alpha\,(\overline{w}_1^{(0)})^n}}. \tag{28}$$

Se observă că atunci cînd t se apropie de zero, l_0 tinde către $l_0^{(0)}$. Pe măsură ce timpul crește, l_0 se micșorează față de $l_0^{(0)}$; la limită, cînd timpul tinde către infinit, rezultă

$$\frac{l_0}{l_0^{(0)}} = \sqrt{\frac{D}{D + \alpha\,(\overline{w}_1^{(0)})^n}}. \tag{29}$$

În cazul în care se poate aplica relația (3), se constată că raportul $\dfrac{l_0}{l_0^{(0)}}$ tinde către zero dacă timpul crește foarte mult. Într-adevăr, în această ultimă situație, $l_0^{(0)}$ crește indefinit o dată cu timpul, în timp ce l_0 se apropie de valoarea-limită

$$l_0 = 3{,}6248\sqrt{\frac{\alpha\,(\overline{w}_1^{(0)})^n}{an}}. \tag{30}$$

Dacă relaţia dintre K_1 şi $\overline{w}_1$ este dată de (3), distribuţia concentraţiei tinde să devină staţionară, cu valoarea 0,5 C_0, în punctul $x_1 = \frac{\overline{w}_1^{(0)}}{a}$. Este de observat însă că, deoarece la valori mari ale timpului $\overline{w}_1$ tinde către zero, numărul lui Péclet de difuziune moleculară devine de asemenea foarte mic şi efectul difuziunii moleculare nu mai poate fi neglijat. Aşadar, o distribuţie practic staţionară a concentraţiei nu se realizează pentru valori finite, dar destul de mari, ale timpului.

Atunci cînd viteza $\overline{w}_1$ variază liniar cu timpul după legea

$$\overline{w}_1 = \overline{w}_1^{(0)} (1 - bt) \tag{31}$$

cu $b > 0$, rezultă

$$C = \frac{C_0}{2}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x_1 - \overline{w}_1^{(0)}\left(t - \frac{b}{2}t^2\right)}{2\sqrt{Dt + \frac{\alpha(\overline{w}_1^{(0)})^n}{b(n+1)}[1 - (1 - bt)^{n+1}]}}\right)\right] \tag{32}$$

şi

$$K_1^{(m)} = D + \frac{\alpha(\overline{w}_1^{(0)})^n}{b(n+1)t}[1 - (1 - bt)^{n+1}], \tag{33}$$

ceea ce ne dă

$$\frac{l_0}{l_0^{(0)}} = \sqrt{\frac{D + \frac{\alpha(\overline{w}_1^{(0)})^n}{b(n+1)t}[1 - (1 - bt)^{n+1}]}{D + \alpha(\overline{w}_1^{(0)})^n}}. \tag{34}$$

Şi în acest caz, aşa cum este de altfel normal atunci cînd t tinde către zero, valoarea raportului $\frac{l_0}{l_0^{(0)}}$ se apropie de unitate. Dacă timpul atinge valoarea $\frac{1}{b}$, pentru care viteza $\overline{w}_1$ se anulează, avem

$$\frac{l_0}{l_0^{(0)}} = \sqrt{\frac{D + \frac{\alpha(\overline{w}_1^{(0)})^n}{n+1}}{D + \alpha(\overline{w}_1^{(0)})^n}}. \tag{35}$$

Se observă că, dacă difuziunea moleculară poate fi neglijată, acest raport tinde către o valoare independentă de $\overline{w}_1^{(0)}$, şi anume $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Ţinînd însă seama de faptul că atunci cînd $\overline{w}_1$ tinde către zero difuziunea moleculară devine importantă, observaţia precedentă nu are o semnificaţie deosebită.

Remarcăm cu acest prilej că dacă se consideră legi de variaţie în timp ale vitezei $\overline{w}_1$ de felul celor precedente, în care $\overline{w}_1$ tinde către zero

atunci cînd timpul crește, neglijarea efectului difuziunii moleculare, așa cum au făcut autorii lucrării citate mai înainte [2], nu este justificată și poate conduce la erori.

În afară de cele două exemple precedente mai pot fi date și altele, dar considerăm că este mai interesant să ne ocupăm și de probleme în care distribuția inițială a concentrației este diferită. Astfel, dacă în momentul inițial ($t = 0$, respectiv $\tau = 0$) se injectează instantaneu în origine ($x_1 = 0$, respectiv $\xi_1 = 0$) o cantitate anumită din fluidul de dezlocuire, distribuția concentrației la un moment oarecare următor este

$$C = \frac{1}{2\sqrt{\pi K_1^{(0)}\tau}}\, e^{-\frac{\xi_1^2}{4K_1^{(0)}\tau}}, \tag{36}$$

cantitatea de solvent injectată inițial fiind considerată egală cu unitatea.

Revenind la variabilele inițiale, avem

$$C = \frac{1}{2\sqrt{\pi\int_0^t K_1\,dt}}\, e^{-\frac{\left(x_1 - \int_0^t \overline{w}_1 dt\right)^2}{4\int_0^t K_1\,dt}} \tag{37}$$

și se observă că, la un timp oarecare t, în punctul $x_1 = \int_0^t \overline{w}_1\,dt$ concentrația are valoarea maximă

$$C_{max} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\int_0^t K_1\,dt}}. \tag{38}$$

Dacă dezlocuirea se efectuează cu o viteză constantă $\overline{w}_1^{(0)}$, avem

$$C_{max}^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi K_1^{(0)}\,t}} \tag{39}$$

și

$$\frac{C_{max}}{C_{max}^{(0)}} = \sqrt{\frac{K_1^{(0)}\,t}{\int_0^t K_1\,dt}} = \sqrt{\frac{t}{\tau}}, \tag{40}$$

rezultat la care se ajunge cu ajutorul primei formule (12). Putem și de data aceasta să introducem valoarea medie în timp a coeficientului de dispersiune longitudinală, definită prin (23), ajungînd astfel la relația

$$\frac{C_{max}}{C_{max}^{(0)}} = \sqrt{\frac{K_1^{(0)}}{K_1^{(m)}(t)}}. \tag{41}$$

Variația în timp a vitezei de dezlocuire modifică deci valoarea maximă a concentrației la un moment oarecare t. În ceea ce privește abscisele punctelor în care concentrația are valoarea C_{max}, respectiv $C^{(0)}_{max}$, acestea nu coincid decît atunci cînd $\overline{w}_1^{(0)}$ este egală cu viteza medie din intervalul $[0,t]$.

Vom considera de data aceasta un singur exemplu, și anume acela în care viteza $\overline{w}_1$ variază după legea exponențială (25). Găsim astfel

$$C = \frac{1}{2\sqrt{\pi\left[Dt + \frac{\alpha(\overline{w}_1^{(0)})^n}{an}(1 - e^{-ant})\right]}} e^{-\frac{\left[x_1 - \frac{\overline{w}_1^{(0)}}{a}(1-e^{-at})\right]^2}{4\left[Dt + \frac{\alpha(\overline{w}_1^{(0)})^n}{an}(1-e^{-ant})\right]}} \tag{42}$$

și

$$\frac{C_{max}}{C^{(0)}_{max}} = \sqrt{\frac{D + \alpha(\overline{w}_1^{(0)})^n}{D + \frac{\alpha(\overline{w}_1^{(0)})^n}{ant}(1 - e^{-ant})}} \tag{43}$$

dacă relația dintre K_1 și $\overline{w}_1$ este dată în (4).

Concluziile pe care le putem trage din examinarea formulei (43) sînt similare cu acelea la care ne-a condus formula (28). Se observă astfel că la valori foarte mici ale timpului C_{max} tinde către $C^{(0)}_{max}$. Astfel, pentru $ant \leqslant 0{,}133$, eroarea pe care o facem punînd

$$e^{-ant} \approx 1 - ant \tag{44}$$

este mai mică de 1%.

Atunci cînd timpul crește foarte mult, raportul concentrațiilor maxime se apropie de valoarea-limită

$$\frac{C_{max}}{C^{(0)}_{max}} = \sqrt{\frac{D + \alpha(\overline{w}_1^{(0)})^n}{D}}. \tag{45}$$

Dacă se neglijează efectul difuziunii moleculare, din (42) rezultă că pentru valori foarte mari ale timpului distribuția concentrației tinde să devină staționară, cu maximul în punctul $x_1 = \frac{\overline{w}_1^{(0)}}{a}$. Concentrația maximă are o valoare-limită finită, care se poate obține imediat din (42), punînd $D = 0$, în timp ce raportul $\frac{C_{max}}{C^{(0)}_{max}}$ tinde către infinit, deoarece $C^{(0)}_{max}$ este nulă la limită. După cum am mai spus însă, atunci cînd timpul crește foarte mult, respectiv $\overline{w}_1^{(0)}$ se apropie de zero, nu este corect să se neglijeze efectul difuziunii moleculare; prin urmare, distribuția concentrației nu devine staționară și raportul concentrațiilor maxime are valoarea dată de formula (45).

În sfîrșit, vom mai examina și cazul în care se injectează o cantitate de fluid de dezlocuire sub forma unui impuls dreptunghiular. Condiția inițială are forma

$$t = 0, \quad C = 0 \tag{46}$$

pentru $|x_1| > l$ și

$$t = 0, \quad C = C_0 \tag{47}$$

pentru $|x_1| < l$.

Pentru ecuația (13), aceste condiții rămîn aceleași după ce introducem, în loc de t și x_1, noile variabile τ și ξ_1, definite prin (12). Soluția problemei astfel puse este cunoscută, și anume

$$C = \frac{C_0}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{\xi_1 + l}{2\sqrt{K_1^{(0)}\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_1 - l}{2\sqrt{K_1^{(0)}\tau}}\right)\right] \tag{48}$$

sau, dacă revenim la variabilele inițiale,

$$C = \frac{C_0}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x_1 + l - \int_0^t \overline{w}_1\,dt}{2\sqrt{\int_0^t K_1\,dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_1 - l - \int_0^t \overline{w}_1\,dt}{2\sqrt{\int_0^t K_1\,dt}}\right)\right]. \tag{49}$$

Și în acest caz, la un moment oarecare t, concentrația are valoarea maximă în punctul $x_1 = \int_0^t \overline{w}_1\,dt$. Așadar,

$$C_{\max} = C_0 \operatorname{erf}\left(\frac{l}{2\sqrt{\int_0^t K_1\,dt}}\right), \tag{50}$$

iar dacă timpul crește foarte mult, putem utiliza dezvoltarea în serie a funcției *erf* pentru valori mici ale argumentului, care ne dă

$$C_{\max} \approx \frac{C_0 l}{\sqrt{\pi \int_0^t K_1\,dt}}. \tag{51}$$

Pe de altă parte, atunci cînd dezlocuirea se efectuează cu viteza constantă $\overline{w}_1^{(0)}$, avem în mod asemănător

$$C_{\max}^{(0)} \approx \frac{C_0\, l}{\sqrt{\pi K_1^{(0)} t}} \tag{52}$$

și, dacă facem raportul concentrațiilor maxime, regăsim formula (40) și concluziile care rezultă din examinarea acesteia în cazul particular al legii de variație exponențială a vitezei $\overline{w}_1$. Bineînțeles, de data aceasta raționamentele sînt valabile numai pentru valori foarte mari ale timpului.

În cazul în care timpul are valori foarte mici, putem utiliza dezvoltarea asimptotică a funcției *erfc* pentru valori mari ale argumentului, care ne dă

$$C_{\max} \approx C_0 \left[1 - \frac{2}{l} \sqrt{\frac{\int_0^t K_1 \, dt}{\pi}} \, e^{-\frac{l^2}{4\int_0^t K_1 \, dt}} \right]. \tag{53}$$

Calculînd apoi în mod asemănător $C_{\max}^{(0)}$, găsim

$$\frac{C_{\max}}{C_{\max}^{(0)}} \approx \frac{1 - \frac{2}{l} \sqrt{\frac{\int_0^t K_1 \, dt}{\pi}} \, e^{-\frac{l^2}{4\int_0^t K_1 \, dt}}}{1 - \frac{2}{l} \sqrt{\frac{K_1^{(0)} t}{\pi}} \, e^{-\frac{l^2}{4K_1^{(0)} t}}}, \tag{54}$$

raport care se apropie de unitate atunci cînd t tinde către zero.

Pentru valori intermediare ale timpului, la care nici una dintre cele două formule aproximative precedente nu mai este valabilă, trebuie să se utilizeze formula exactă

$$\frac{C_{\max}}{C_{\max}^{(0)}} = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{l}{2\sqrt{\int_0^t K_1 \, dt}} \right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{l}{2\sqrt{K_1^{(0)} t}} \right)} = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{l}{2\sqrt{K_1^{(0)} \tau}} \right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{l}{2\sqrt{K_1^{(0)} t}} \right)}, \tag{55}$$

care se mai poate scrie

$$\frac{C_{\max}}{C_{\max}^{(0)}} = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{l}{2\sqrt{K_1^{(m)} t}} \right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{l}{2\sqrt{K_1^{(0)} t}} \right)}. \tag{56}$$

Ca și în cazul precedent, abscisele punctelor în care concentrația are valorile maxime nu coincid decît dacă $\overline{w}_1^{(0)}$ este egală cu viteza medie în intervalul $[0,t]$. Este însă foarte util să remarcăm că în acest caz coeficientul de dispersie longitudinală are o valoare constantă, pe care o notăm cu $K_1^{(0m)}$, care diferă de $K_1^{(m)}$ definit prin relația (23). Astfel, dacă relația dintre K_1 și $\overline{w}_1$ este (4), din (23) rezultă

$$K_1^{(m)} = D + \alpha \int_0^t \overline{w}_1^n \, dt, \tag{57}$$

iar pe de altă parte avem

$$K_1^{(0m)} = D + \alpha\,(\overline{w}_1^{(m)})^n = D + \alpha\left(\frac{1}{t}\int_0^t \overline{w}_1\,\mathrm{d}t\right)^n. \tag{58}$$

În toate cazurile studiate, distribuția concentrației la timpul oarecare t este aceea care s-ar obține într-o dezlocuire cu viteza constantă $\overline{w}_1^{(m)}$ coeficientul de dispersie longitudinală avînd valoarea constantă $K_1^{(m)}$.

4. **Concluzii.** Prin procedeul pe care l-am indicat se poate rezolva în principiu orice problemă de dezlocuire cu fluide miscibile într-un mediu poros infinit. Într-adevăr, se poate scrie soluția ecuației (13) pentru orice distribuție inițială a concentrației, problemele pe care le-am studiat fiind cazuri particulare. După cum se știe, în cazul general soluția se construiește cu ajutorul funcției lui Green pentru ecuația difuziunii.

Admițîndu-se că mediul poros este infinit, se poate introduce în calcule, așa cum am precizat, orice relație între coeficientul de dispersie longitudinală K_1 și viteza de dezlocuire $\overline{w}_1$. Pentru cazurile în care $\overline{w}_1$ este o funcție descrescătoare de timp, considerarea unei relații cu caracter general între K_1 și $\overline{w}_1$ este utilă, deoarece permite să se aprecieze corect fenomenul pe toată durata lui.

Pentru cazul în care mediul poros este semiinfinit sau finit apar unele dificultăți, deoarece trebuie introduse și condiții la limită. Prin schimbarea de variabile (12), domeniul în care urmează să se găsească soluția are frontiere mobile, astfel că problema se complică destul de mult. Dacă se recurge însă la relația particulară (2) dintre K_1 și $\overline{w}_1$, dificultatea semnalată dispare și problemele se rezolvă la fel ca atunci cînd viteza $\overline{w}_1$ este constantă, așa cum s-a făcut în [2] pentru unul din cazurile particulare, pe care le-am considerat și în această lucrare.

Primită la redacție la 10 august 1965

BIBLIOGRAFIE

1. J. S. Aronofsky, J. P. Heller, *A diffusion model to explain mixing of flowing miscible fluids in porous media*, Transactions AIME, **210** (1957).
2. Robert B. Banks, Somsakdi Jerasate, *Dispersion in unsteady porous-media flow*, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, **88**, *3*, 1 (1962).
3. R. J. Blackwell, J. R. Rayne, W. M. Terry, *Factors influencing the efficiency of miscible displacement*, Transactions AIME, **216** (1959).
4. Earl A. Ebach, Robert R. White, *Mixing of fluids flowing through beds of packed solids*, AIChE Journal, **4**, *2* (1958).
5. D. R. F. Harleman, P. F. Mehlhorn and R. R. Rumer Jr., *Dispersion-permeability correlation in porous media*, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the Ame ican Society of Civil Engineers, **89**, *2*, 1 (1963).
6. D. R. F. Harleman[r] R. R. Rumer, *Longitudinal and lateral dispersion in an isotropic porous mediu*[m], Journal of Fluid Mechanics, **16**, *3* (1963).

7. H. O. Pfannkuch, *Contributions à l'étude des déplacements de fluides miscibles dans un milieu poreux*, Revue de l'Institut Francais du Pétrole et Annales des combustibles liquides, **XVIII**, 2 (1963).
8. Ralph R. Rumer Jr., *Longitudinal dispersion in steady and unsteady flow*, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, **88**, HY 4, 1 (1962).
9. P. G. Saffman, *Dispersion due to molecular diffusion and macroscopic mixing in flow through a network of capillaries*, Journal of Fluid Mechanics, **7**, 2 (1960).
10. A. E. Scheidegger, *Statistical hydrodynamics in porous media*, Journal of Applied Physics, **25**, 8 (1954).
11. Geoffrey Taylor, *Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube*, Proceedings of the Royal Society, Series A, Mathematical and Physical Sciences, 225, 1 163 (1954).

CURGEREA TRANZITORIE A GAZELOR PRINTR-UN MEDIU POROS ÎN REGIM TURBULENT[1]

de H. PASCAL şi F. MUNTEANU
Institutul de mecanica fluidelor „Traian Vuia" al Academiei Republicii Socialiste România
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

532

Într-o lucrare anterioară [1] s-a studiat curgerea tranzitorie a gazelor printr-un mediu poros, în cazul regimului laminar, respectiv în ipoteza validităţii legii lui Darcy.

În practica exploatării zăcămintelor de gaze, se constată în majoritatea cazurilor o abatere de la legea lui Darcy, care apare datorită existenţei unui regim de curgere turbulent. Rezultatele obţinute la sondele de gaze arată de asemenea nevalabilitatea legii lui Darcy, chiar pentru debite relativ mici, dacă mediul poros prezintă fisuri, respectiv spaţii mari de curgere.

În lucrarea de faţă se studiază curgerea tranzitorie a gazelor printr-un mediu poros omogen şi izotrop, în cazul regimului turbulent, pentru cîteva probleme care prezintă interes practic în exploatarea zăcămintelor de gaze.

NOTAŢII

p — presiunea;
x — distanţa;
v — viteza de curgere a gazelor prin mediul poros;
ρ — masa specifică;
k — permeabilitatea mediului poros;
η — viscozitatea dinamică a gazelor;
β — coeficientul care depinde de structura mediului poros;
m — porozitatea mediului poros;

[1]) Publicată în „Rev, roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **10**, *5* (1965) (în lb. franceză).

q — debitul masic pe unitatea de secţiune;
q_0 — valoarea debitului masic pe unitatea de secţiune în regim staţionar;
Z — factorul de abatere de la legea Bayle-Mariotte;
T — temperatura absolută;
$p_0(x)$ — distribuţia presiunii în regim staţionar;
p_0 — valoarea presiunii în punctul $x = 0$;
p_k — valoarea presiunii în punctul $x = l$;
$H(p)$ — funcţia de presiune;
H_k — valoarea funcţiei $H(p)$ la presiunea p_k, respectiv în punctul $x = l$;
θ — timpul adimensional;
l — lungimea mediului poros;
q_{med} — valoarea medie a debitului masic pe unitatea de secţiune;
p_{med} — valoarea medie a presiunii în regim staţionar;
F — valoarea secţiunii de curgere a mediului poros;
Re — cifra lui Reynolds;
g — acceleraţia gravităţii.

I. ECUAŢIILE FUNDAMENTALE

Ca punct de plecare pentru descrierea matematică a curgerii gazelor, în cazul nevalabilităţii legii lui Darcy, se consideră relaţia dintre gradientul de presiune şi viteză sub forma [2]

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\eta}{k} v + \beta \rho v^2. \tag{I.1}$$

Dacă vitezele de curgere sînt mici, termenul neliniar devine neglijabil comparativ cu cel liniar şi, în consecinţă, relaţia (I.1) reprezintă legea lui Darcy.

Ecuaţia (I.1) este utilizată în prezent pentru determinarea permeabilităţii mediului poros în cazul curgerii staţionare, iar rezultatele obţinute confirmă valabilitatea acesteia pentru Re > 2, ceea ce corespunde regimului turbulent.

Introducînd notaţia $q = \rho v$, debitul masic pe unitatea de secţiune, şi admiţînd că evoluţia termodinamică este izotermică, atunci curgerea tranzitorie a gazelor printr-un mediu poros, omogen şi izotrop, este descrisă de sistemul de ecuaţii

$$\begin{gathered} -\frac{1}{2}\frac{\partial p^2}{\partial x} = \frac{\eta}{kb} q + \frac{\beta q^2}{b} \\ \frac{\partial q}{\partial x} = -mb\frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{şi} \quad \rho = bp, \end{gathered} \tag{I.2}$$

unde $b = \dfrac{Z_a}{Z}\dfrac{T_a}{T}\dfrac{\rho_a}{p_a}$, indicele a referindu-se la condiţiile standard.

Din (I.2) este ușor de observat că stabilitatea distribuției debitului masic și a presiunii la anumite momente de timp reclamă rezolvarea unui sistem de ecuații neliniare de tip parabolic, cu condițiile la limită și inițiale care apar în practică. Datorită acestui fapt, rezolvarea analitică a problemelor întîlnite în practică conduce în cazul regimului turbulent la dificultăți matematice foarte mari. Deoarece mijloacele matematice nu permit obținerea soluției exacte a sistemului (I.2), apare necesar să recurgem la utilizarea metodelor aproximative. Aplicarea acestora ne obligă să procedăm cu destulă prudență pentru a evita introducerea unor erori care, din punct de vedere calitativ, ar putea deforma aspectul fizic al problemei studiate. Printre metodele aproximative care permit liniarizarea sistemului (I.2), există unele care dau o satisfacție din acest punct de vedere atunci cînd intervalele de variație a parametrilor curgerii nu depășesc anumite limite [3].

Un asemenea procedeu, cunoscut sub denumirea de metoda perturbațiilor, va fi aplicat la studiul curgerii tranzitorie a gazelor prin medii poroase în regim turbulent.

Pentru a putea obține pe cît posibil o formă cît mai simplă a soluției sistemului (I.2) care să poată permite stabilirea influenței turbulenței asupra particularităților curbei de variație a presiunii în timp într-o sondă după închiderea sau deschiderea acesteia, ne vom limita la cazul monodimensional. Într-o lucrare ulterioară va fi studiată și curgerea plan-radială.

Dacă în sistemul (I.2) introducem funcțiile $f(x, t)$ și $g(x, t)$, definite de relațiile

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_0(x) + f(x, t) \\ q(x, t) &= q_0 + g(x, t), \end{aligned} \tag{I.3}$$

atunci rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_0^2}{\partial x} + 2\frac{\partial (p_0 f)}{\partial x} + \frac{\partial f^2}{\partial x} &= -2\left[\frac{\eta}{bk}(q_0 + g) + \frac{\beta}{b}(q_0 + g)^2\right] \\ \frac{\partial q_0}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} &= -mb\left(\frac{\partial p_0}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}\right), \end{aligned} \tag{I.4}$$

unde $p_0(x)$ și q_0 reprezintă distribuția presiunii, respectiv a debitului masic pe unitatea de secțiune în regim staționar.

Pe de altă parte, în cazul curgerii staționare, debitul masic este constant și, în consecință, funcția $p_0(x)$ satisface următoarele ecuații :

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial p_0^2}{\partial x} = \frac{\eta}{bk} q_0 + \frac{\beta}{b} q_0^2; \quad \frac{\partial p_0}{\partial t} = -\frac{1}{mb}\frac{\partial q_0}{\partial x} = 0. \tag{I.5}$$

Din prima ecuație a sistemului (I.5) rezultă pentru distribuția presiunii în regim staționar

$$p_0^2(x) = -2\left[\frac{\eta}{bk} q_0 + \frac{\beta}{b} q_0^2\right] x + p_0^2(0), \tag{I.6}$$

$p_0(0)$ fiind valoarea presiunii corespunzătoare punctului $x = 0$. Ţinînd seama de relaţiile (I.5) şi notînd $\pi = p_0(x) f$, sistemul (I.4) devine acum

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\pi}{p_0(x)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi}{p_0(x)}\right) = -\left(\frac{\eta}{bk} + 2\frac{\beta}{b} q_0\right) g - \frac{\beta}{b} g^2$$
$$\frac{mb}{p_0(x)} \frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\partial g}{\partial x}. \tag{I.7}$$

În conformitate cu metoda perturbaţiilor, putem considera pentru funcţiile $\pi(x, t)$ şi $g(x, t)$ următoarele dezvoltări în serii de puteri :

$$\pi(x, t) = \mu \pi_1(x, t) + \mu^2 \pi_2(x, t) + \ldots + \mu^n \pi_n(x, t) + \ldots$$
$$g(x, t) = \mu g_1(x, t) + \mu^2 g_2(x, t) + \ldots + \mu^n g_n(x, t) + \ldots, \tag{I.8}$$

unde μ este un parametru auxiliar.

Introducînd relaţiile (I.8) în (I.7) şi identificînd coeficienţii după puterile parametrului μ, se obţine următorul sistem de ecuaţii pentru $n = 2$:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial x} = -cg_1; \quad \frac{\partial \pi_1}{\partial t} = -\frac{p_0(x)}{mb} \frac{\partial g_1}{\partial x}$$
$$\frac{\partial \pi_2}{\partial x} + cg_2 = \Phi_2(x, t); \quad \frac{\partial \pi_2}{\partial t} = -\frac{p_0(x)}{mb} \frac{\partial g_2}{\partial x}, \tag{I.9}$$

unde prin $\Phi_2(x, t)$ şi c s-a notat

$$\Phi_2(x, t) = -\frac{\pi_1}{p_0(x)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\pi_1}{p_0}\right) - \frac{\beta}{b} g_1^2,$$
$$c = \frac{\eta}{bk} + 2\frac{\beta}{b} q_0. \tag{I.10}$$

Sistemul (I.9) permite determinarea funcţiilor π_1, π_2 şi g_1, g_2, respectiv distribuţia debitului masic şi a presiunii la anumite momente de timp, pentru anumite condiţii la limită şi iniţialele întîlnite în practica exploatării zăcămintelor de gaze.

Deoarece avem $f = \dfrac{\pi}{p_0(x)}$, termenul liber al ecuaţiei neomogene mai poate fi scris sub forma

$$\Phi_2(x, t) = -f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\beta}{b} g_1^2 \text{ unde } f_1 = \frac{\pi_1}{p_0(x)} \tag{I.11}$$

şi, în general, după identificarea coeficienţilor lui μ^n rezultă

$$\frac{\partial \pi_n}{\partial x} + cg_n = \Phi_n(x, t); \quad \frac{\partial \pi_n}{\partial t} = -\frac{p_0(x)}{mb} \frac{\partial g_n}{\partial x}, \tag{I.12}$$

unde

$$\Phi_n(x, t) = -\sum_{k=1}^{n-1} f_k \frac{\partial f_{n-k}}{\partial x} - \frac{\beta}{b} \sum_{k=1}^{n-1} g_k g_{n-k}. \tag{I.13}$$

În felul acesta, studiul curgerii tranzitorii a gazelor în regim turbulent s-a redus, cu ajutorul metodei perturbațiilor, la rezolvarea unui sistem de ecuații liniare neomogene de tip parabolic, cu coeficienții variabili.

Chiar în cazul unor condiții la limită și inițiale relativ simple, este ușor de observat că pentru rezolvarea analitică a sistemului (I.12), admițînd $p_0(x) = p_{med}$, apar dificultăți matematice foarte mari, care depind mai ales de forma termenului liber.

Din acest motiv, rezolvarea sistemului (I.12) pentru $n = 2,3\ldots$ trebuie efectuat prin metode numerice, după cum s-a arătat în lucrarea [4].

Sînt unele cazuri, întîlnite în practică destul de frecvent, cînd exploatarea sondelor de gaze se efectuează la diferențe de presiune care permit să aproximăm starea termodinamică a gazelor printr-o funcție exponențială, astfel încît eroarea să fie acceptabilă [5]. Această situație apare mai ales în cazul zăcămintelor de gaze care au în jurul găurii de sondă o permeabilitate mare și de aceea curgerea poate fi turbulentă chiar la diferențe de presiune relativ mici. Astfel, ecuația de stare termodinamică poate fi scrisă pentru evoluția izotermică sub forma

$$\rho = b\,[p_k - (p_k - p)] = bp_k\left[1 - \frac{p_k - p}{p_k}\right] \tag{I.14}$$

sau

$$\rho = \rho_k\left[1 - \frac{p_k - p}{p_k}\right].$$

Dacă presiunea dinamică în sondă diferă puțin de cea de pe conturul de alimentare, atunci ecuația (I.14) devine

$$\rho \cong \rho_k e^{-\frac{p_k - p}{p_k}}, \tag{I.15}$$

și, în consecință, în locul ecuației $\rho = bp$ putem utiliza cu o bună aproximație relația exponențială (I.15).

A. Houpeurt [5] a arătat că, în general, eroarea rezultată din această aproximare este acceptabilă pentru majoritatea cazurilor întîlnite în exploatarea zăcămintelor de gaze.

Pe de altă parte, o aproximare mai bună se obține dacă în locul relației (I.15) se consideră ecuația

$$\rho = Ke^{\alpha p}, \tag{I.16}$$

unde coeficienții K și α se determină, după cum se arată în figura 1, din condiția ca în punctele $p = p_0$ și $p = p_k$ masele specifice determinate de ecuațiile $\rho = bp$ și (I.16) să fie egale.

Scriind această condiţie, vom avea

$$bp_0 = K\,e^{\alpha p_0} \text{ şi } bp_k = K\,e^{\alpha p_k}, \tag{I.17}$$

de unde

$$\alpha = \frac{\ln \dfrac{p_k}{p_0}}{p_k - p_0} \text{ şi } K = bp_k e^{-\alpha p_k}. \tag{I.18}$$

Coeficienţii α şi K mai pot fi de asemenea determinaţi şi din schema arătată în figura 2, unde putem utiliza condiţia ca în intervalul $p_0 < p <$

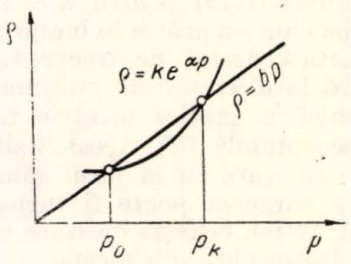


Fig. 1

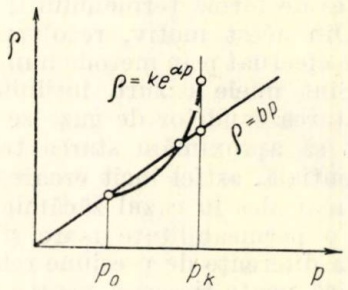


Fig. 2

$< p_k$ suprafeţele delimitate de curbă şi dreaptă să fie egale, precum şi din condiţia ca în punctul $p = p_0$ masele specifice să fie egale. Rezultă deci în acest caz

$$b\int_{p_0}^{p_k} p\,\mathrm{d}p = K\int_{p_0}^{p_k} e^{\alpha p}\mathrm{d}p \tag{I.19}$$

şi

$$bp_0 = e^{\alpha p_0}, \tag{I.20}$$

de unde se obţine

$$\alpha = \frac{\ln \dfrac{bp_0}{K}}{p_0} \text{ şi } K = \frac{\dfrac{b\alpha}{2}(p_k^2 - p_0^2)}{e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p_0}}. \tag{I.21}$$

Introducînd funcţia $H(p) = \int_{p_0}^{p} \rho\mathrm{d}p$ şi ţinînd seama de ecuaţia de stare (I.16), avem următoarele relaţii:

$$H(p) = \frac{K}{\alpha}(e^{\alpha p} - e^{\alpha p_0}); \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}p} = \rho; \quad \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p} = \alpha\rho \tag{I.22}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \alpha\rho\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha\frac{\partial H}{\partial t} \tag{I.23}$$

și, prin urmare, sistemul de ecuații (I.2) va fi în acest caz

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = aq + \beta q^2 \text{ și } -\frac{\partial q}{\partial x} = m\alpha\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{I.24}$$

Pentru a transforma sistemul (I.24) astfel încît acesta să fie independent de proprietățile fizice și geometrice ale mediului poros, vom introduce următoarele mărimi adimensionale :

$$\overline{H} = \frac{H}{H_k};\ \overline{q} = \frac{q}{q_0};\ \xi = \frac{x}{l} \text{ și } \theta = \frac{q_0 t}{m\alpha H_k l}. \tag{I.25}$$

Cu mărimile adimensionale (I.25), sistemul (I.24) devine

$$-\frac{\partial \overline{H}}{\partial \xi} = a_1\overline{q} + \beta_1\overline{q}^2;\ \frac{\partial \overline{q}}{\partial \xi} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial \theta}, \tag{I.26}$$

unde

$$a_1 = \frac{q_0 a l}{H_k} \text{ și } \beta_1 = \frac{\beta q_0^2 l}{H_k}, \tag{I.27}$$

l fiind o lungime de referință, care în acest caz este lungimea mediului poros.

Introducînd, ca și în cazul precedent, funcțiile $\pi(\xi, \theta)$ și $f(\xi, \theta)$ definite de relațiile

$$\overline{H}(\xi, \theta) = \overline{H}_0(\xi, \theta) + \pi(\xi, \theta) \text{ și } \overline{q}(\xi, \theta) = 1 + f(\xi, \theta), \tag{I.28}$$

se obține din (I.26) următorul sistem :

$$-\frac{\partial \overline{H}_0}{\partial \xi} - \frac{\partial \pi}{\partial \xi} = a_1 + \beta_1 + \lambda f + \beta_1 f^2;\ \frac{\partial f}{\partial \xi} = -\frac{\partial H_0}{\partial \theta} - \frac{\partial \pi}{\partial \theta}, \tag{I.29}$$

unde $\lambda = a_1 + 2\beta_1$.

În regim staționar avem $q = q_0$, respectiv $\overline{q} = 1$, și de aceea din (I.26) rezultă

$$\frac{\partial \overline{H}_0}{\partial \xi} = -(a_1 + \beta_1);\ \frac{\partial \overline{H}_0}{\partial \theta} = 0, \tag{I.30}$$

precum și

$$\overline{H}_0(\xi) = -(a_1 + \beta_1)\xi + \overline{H}_0(0). \tag{I.30'}$$

Prin urmare, sistemul (I.29) devine acum

$$-\frac{\partial \pi}{\partial \xi} = \lambda f + \beta_1 f^2 \text{ și } \frac{\partial f}{\partial \xi} = -\frac{\partial \pi}{\partial \theta}, \tag{I.31}$$

iar soluția acestuia poate fi de asemenea obținută prin metoda perturbațiilor.

Considerînd pentru funcţiile $\pi(\xi, \theta)$ şi $f(\xi, \theta)$ dezvoltările în serii de puteri avînd aceleaşi forme cu cele date de relaţia (I.8), atunci, după cîteva calcule simple, se obţine din (I.31) sistemul de ecuaţii liniare

$$-\frac{\partial \pi_1}{\partial \xi} = \lambda f_1 ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial \pi_1}{\partial \theta}$$

$$-\frac{\partial \pi_2}{\partial \xi} = \lambda f_2 + \beta_1 f_1^2 ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial \xi} = -\frac{\partial \pi_2}{\partial \theta} \tag{I.32}$$

$$-\frac{\partial \pi_3}{\partial \xi} = \lambda f_3 + 2\beta_1 f_1 f_2 ; \quad \frac{\partial f_3}{\partial \xi} = -\frac{\partial \pi_3}{\partial \theta}.$$

Din combinarea ecuaţiilor (I.32) rezultă pentru determinarea funcţiilor necunoscute π_1 şi π_2

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \xi^2} = \lambda \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial^2 \pi_2}{\partial \xi^2} = \lambda \frac{\partial \pi_2}{\partial \theta} - 2\beta_1 f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi}, \tag{I.33}$$

unde termenul liber al ecuaţiei neomogene mai poate fi scris sub forma

$$2\beta_1 f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi} = \frac{2\beta_1}{\lambda} \frac{\partial \pi_1}{\partial \xi} \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta}. \tag{I.34}$$

În afară de cazul examinat mai sus, în anumite situaţii efectul turbulenţei βq^2 poate fi aproximat prin termenul liniar $\beta q_{med}\, q$. În acest caz, sistemul (I.2) capătă următorul aspect :

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial p^2}{\partial x} = (a + \beta q_{med})\frac{q}{b} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -mb\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{I.35}$$

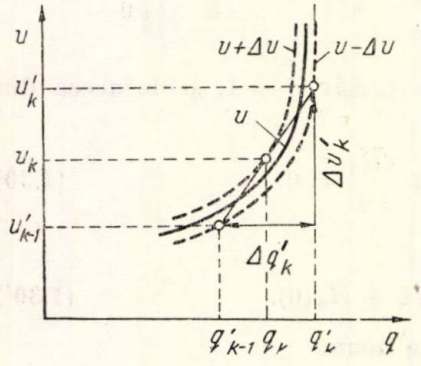


Fig. 3

care conduce pentru determinarea distribuţiei presiunii la ecuaţia neliniară

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} = 2(a + \beta q_{med})\, m \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{I.36}$$

Vom arăta în cele ce urmează o schemă, redată în figura 3, cu ajutorul căreia se poate obţine liniarizarea termenului pătratic βq^2 datorită turbulenţei [7].

În acest scop admitem că prin aproximarea funcţiei $u = \beta q^2$ printr-o variaţie liniară avem eroarea $\pm \Delta u$. Problema constă acum în a determina intervalul de variaţie al debitului masic q astfel încît eroarea rezultată să nu depăşească limitele formate din curbele $u + \Delta u$ şi $u - \Delta u$, respectiv $\beta q^2 + \Delta u$ şi $\beta q^2 - \Delta u$.

Este uşor de arătat că în cazul parabolei, respectiv pentru funcţia $u = \beta q^2$, dreapta trebuie să fie tangentă la curba $\beta q^2 + \Delta u$. Prin urmare, ecuaţia tangentei la curba $u = \beta q^2 + \Delta u$ în punctul (u_k, q_k) va fi

$$u = u'(q_k)(q - q_k) + u_k, \tag{I.37}$$

iar funcţia $u(q)$ devine

$$u(q) = 2\beta q_k q - \beta q_k^2 + \Delta u. \tag{I.38}$$

Cu ajutorul ecuaţiei $u = \beta q^2 - \Delta u$ şi a celei date de (I.38) se obţine pentru coordonatele punctelor (u'_k, q'_k) şi (u'_{k-1}, q'_{k-1}) următoarele relaţii

$$\beta q^2 - 2\beta q_k q + \beta q_k^2 = 2\Delta u \tag{I.39}$$

sau

$$(q - q_k)^2 = \frac{2\Delta u}{\beta},$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} q'_k &= q_k + \sqrt{\frac{2\Delta u}{\beta}} \\ u'_k &= \beta\left[q_k + \sqrt{\frac{2\Delta u}{\beta}}\right]^2 - \Delta u \\ q'_{k-1} &= q_k - \sqrt{\frac{2\Delta u}{\beta}} \\ u'_{k-1} &= \beta\left[q_k - \sqrt{\frac{2\Delta u}{\beta}}\right]^2 - \Delta u. \end{aligned} \tag{I.40}$$

Proiecţiile pe axele u şi q vor fi

$$\Delta q_k = q'_k - q'_{k-1} = 2\sqrt{\frac{\Delta u}{\beta}}; \quad \Delta u_k = u'_k - u'_{k-1} = 2q_k\sqrt{2\beta\Delta u}. \tag{I.41}$$

Pe de altă parte, primul segment de dreaptă are coordonatele

$$u'_0 = 0 \text{ şi } q'_0 = \left(\frac{2\Delta u}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

şi, în consecinţă, coordonatele care determină segmentele de dreaptă de ordinul k vor fi

$$\begin{aligned} q_k &= [1 + (2k - 1)\sqrt{2}]\sqrt{\frac{2\Delta u}{\beta}}; \quad u_k = [(1 + (2k - 1)\sqrt{2})^2 + 1]\Delta u \\ q'_k &= (1 + 2k\sqrt{2})\sqrt{\frac{2\Delta u}{\beta}}; \quad u'_k = [(1 + 2k\sqrt{2})^2 - 1]\Delta u. \end{aligned} \tag{I.42}$$

În acest mod, eroarea rezultată din aproximarea curbei reale printr-un număr k de segmente de dreaptă se determină din relaţia

$$\Delta u = \frac{\beta q_k'^2}{2[1 + 2k\sqrt{2}]^2}. \tag{I.43}$$

Prin urmare, pentru limitele de variaţie ale debitului masic care apar la curgerea tranzitorie a gazelor printr-un mediu poros, se poate stabili eroarea de aproximare. Dacă $k \to \infty$, atunci $\Delta u \to 0$ şi ecuaţia (I.38) devine

$$u = 2\beta q_k q - \beta q_k^2. \tag{I.44}$$

Ţinînd seama de rezultatele arătate mai sus, sistemul de ecuaţii (I.2) poate fi scris sub forma

$$-\frac{\partial p^2}{\partial x} = \lambda_1 q + \lambda_0 \text{ şi } \frac{\partial q}{\partial x} = -mb\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{I.45}$$

unde s-a notat

$$\lambda_1 = \frac{2}{b}\left(\frac{\eta}{k} + 2\beta q_k\right) \text{ şi } \lambda_0 = (\Delta u - \beta q_k^2)\frac{2}{b}.$$

Dacă în sistemul (I. 45) introducem funcţiile

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p_0(x) + \pi(x, t) \\ q(x, t) &= q_0 + g(x, t), \end{aligned} \tag{I.46}$$

atunci se obţine

$$\frac{\partial}{\partial x}(p_0\pi) + \pi\frac{\partial \pi}{\partial x} = -\frac{\lambda_1}{2}g \text{ şi } \frac{\partial q}{\partial x} = -mb\frac{\partial \pi}{\partial t}, \tag{I.47}$$

unde $p_0(x)$ şi q_0 reprezintă distribuţia presiunii şi a debitului masic în regim staţionar, care se obţin din relaţiile

$$-\frac{\partial p_0^2}{\partial x} = \lambda_1 q_0 + \lambda_0;\ q = q_0 = \text{const.}, \tag{I.48}$$

respectiv $p_0^2(x) = -(\lambda_1 q_0 + \lambda_0)x + p_0^2(0)$.

Pentru liniarizarea sistemului (I.47) putem considera pentru funcţiile $\pi(x, t)$ şi $g(x, t)$ dezvoltările în serii de puteri date de relaţiile (I.8). Rezultă, în cazul numai al primilor doi termeni, următorul sistem de ecuaţii :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(p_0\pi_1)}{\partial x} = -\frac{\lambda_1}{2}g_1;\ \frac{\partial g_1}{\partial x} = -mb\frac{\partial \pi_1}{\partial t}, \\ &\frac{\partial(p_0\pi_2)}{\partial x} + \pi_1\frac{\partial \pi_1}{\partial x} = -\frac{\lambda_1}{2}g_2;\ \frac{\partial g_2}{\partial x} = -mb\frac{\partial \pi_2}{\partial t}, \end{aligned} \tag{I.49}$$

care, după introducerea funcției $u_n = \pi_n p_0(x)$, conduce la

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\lambda_1 mb}{2p_0(x)} \frac{\partial u_1}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{\lambda_1 mb}{2p_0(x)} \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_1}{p_0(x)}\right)^2\right]. \quad \text{(I.50)}$$

După cum se observă, în acest caz aplicarea metodei perturbațiilor ne-a condus la un sistem de ecuații liniare neomogene cu coeficienți variabili. Într-o primă aproximație se poate admite pentru distribuția presiunii în regim staționar o valoare medie ponderată după lungime, definită de relația

$$p_{med} = \frac{1}{l}\int_0^l p_0(x)\,dx = \frac{2}{3}\left(p_k + \frac{p_0^2}{p_0 + p_k}\right). \quad \text{(I.51)}$$

II. EXPLOATAREA SONDEI LA DEBIT CONSTANT (CURGEREA MONODIMENSIONALĂ)

Rezultatele expuse mai sus vor fi aplicate la studiul unei probleme bine cunoscute, și anume determinarea modului de creștere în timp a presiunii într-o sondă după închiderea acesteia [5], utilizînd sistemul de ecuații (I.33). În acest scop vom considera pentru condiția inițială, ca și în cazul studiat în ipoteza valabilității legii lui Darcy, că înaintea închiderii sondei curgerea gazelor prin mediul poros era staționară [6]. În ceea ce privește condițiile la limită, admitem că pe conturul de alimentare, care se găsește la distanța $x = l$, presiunea rămîne constantă după închiderea sondei [6]. Rezultă deci în acest caz următoarele condiții la limită și inițiale pe care trebuie să le satisfacă funcția $H(\xi, \theta)$:

$$\theta > 0 \begin{cases} H(1, \theta) = H_k; & \overline{H}(1, \theta) = 1 \\ q(0, \theta) = 0; & \left.\dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = 0 \end{cases} \quad \text{(II.1)}$$

$$\theta = 0;\ q = q_0 \text{ și } \overline{H}(\xi, 0) = -(a_1 + \beta_1)\xi + \overline{H}_0(0).$$

Ținînd seama de relațiile (I.28), condițiile (II.1) vor fi pentru funcția

$$\theta > 0 \begin{cases} \pi_1(1, \theta) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial \pi_1}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = -\dfrac{1}{\mu}(a_1 + \beta_1) \end{cases} \quad \text{(II.2)}$$

$$\theta = 0,\ \pi_1(\xi, 0) = 0,$$

iar pentru funcțiile

$$\theta > 0 \begin{cases} \pi_n(1, \theta) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial \pi_n}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = 0 \end{cases} \quad \text{(II.3)}$$

$$\theta = 0,\ \pi_n(\xi, 0) = 0 \text{ pentru } n = 2, 3, \ldots$$

După cum s-a arătat în lucrarea [6], rezolvarea problemei restabilirii presiunii într-o sondă după închiderea acesteia poate fi obţinută cu ajutorul principiului superpoziţiei dacă cunoaştem soluţia problemei în cazul exploatării sondei la debit constant din starea de repaus, respectiv la punerea acesteia în producţie. Din acest motiv, în cele ce urmează va fi studiat cazul exploatării sondei la debit constant, avînd pe conturul de alimentare aferent zonei de drenaj o presiune constantă şi egală cu cea corespunzătoare momentului iniţial [6]. În această situaţie, presiunea va scădea în timp de la valoarea avută în momentul iniţial, cînd gazele se aflau în stare de repaus, pînă la valoarea corespunzătoare regimului staţionar, unde $q = q_0$ şi $p = p_0$.

Ţinînd seama de cele arătate mai sus, condiţiile la limită şi iniţiale vor fi acum

$$\theta > 0 \begin{cases} H(1, \theta) = H_k; & \overline{H}(1, \theta) = 1 \\ q(0, \theta) = q_0 & \left.\dfrac{\partial \overline{H}}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = -(a_1 + \beta_1); \end{cases} \qquad \theta = 0 \begin{cases} H(\xi, 0) = H_k \\ \overline{H}(\xi, 0) = 1 \end{cases} \tag{II.4}$$

iar pentru funcţiile $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots$

$$\theta > 0 \begin{cases} \pi_1(1,\theta) = \dfrac{1}{\mu}[1 - \overline{H}_0(1)] = 0 \\ \left.\dfrac{\partial \pi_1}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = 0, \end{cases} \tag{II.5}$$

$$\theta = 0, \ \pi_1(\xi, 0) = \frac{1}{\mu}[1 - \overline{H}_0(\xi)]$$

$$\theta > 0 \begin{cases} \pi_n(1, \theta) = 0 \\ \left.\dfrac{\partial \pi_n}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = 0 \end{cases} \tag{II.6}$$

şi $\theta = 0, \ \pi_n(\xi, 0) = 0$ pentru $n = 2, 3, \ldots$

Soluţia primei ecuaţii a sistemului (I.33) va fi în cazul condiţiilor (II.5)

$$\pi_1(\xi, \theta) = \frac{1 - \overline{H}_0(\xi)}{\mu} + \tag{II.7}$$

$$+ \frac{(a_1 + \beta_1)}{\mu}\left[1 - \xi - \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)\dfrac{\pi}{2}\xi}{(2m+1)^2} e^{-(2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{\lambda}}\right],$$

iar pentru determinarea funcției $\pi_2(\xi, \theta)$, care reprezintă cea de-a doua aproximație, trebuie să rezolvăm ecuația neomogenă

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial \xi^2} = \lambda \frac{\partial \pi_2}{\partial \theta} - 2\beta_1 f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \tag{II.8}$$

cu condițiile la limită și inițiale (II.6) cînd $n = 2$.

Din (II.7) obținem pentru termenul liber $\Phi(\xi, \theta) = -2\beta_1 f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi}$ următoarea relație

$$\Phi(\xi, \theta) = \frac{16\beta_1(a_1 + \beta_1)^2}{\pi\lambda^3\mu^2}\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)\frac{\pi}{2}}{2m+1} e^{-\frac{(2m+1)^2\pi^2}{4}\frac{\theta}{\lambda}} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2m+1)\frac{\pi}{2}\xi e^{-\frac{(2m+1)^2\pi^2}{4}\frac{\theta}{\lambda}}\right]. \tag{II.9}$$

În conformitate cu rezultatele stabilite în lucrarea [8], soluția ecuației (II.8) care satisface condițiile (II.6) pentru $n = 2$, poate fi scrisă sub forma

$$\pi_2(\xi, \theta) = \int_0^{\theta}\int_0^1 \Phi(u, \tau) G(\xi, \theta, u, \tau)\, du d\tau, \tag{II.10}$$

unde $G(\xi, \theta, u, \tau)$ reprezintă funcția lui Green, care în acest caz are forma

$$G(\xi, \theta, u, \tau) = 2\sum e^{-\frac{(2m+1)^2\pi^2}{4\lambda}(\theta-\tau)} \cos(2m+1)\frac{\pi}{2}u \cos(2m+1)\frac{\pi}{2}\xi. \tag{II.11}$$

Pe de altă parte, se poate remarca cu destulă ușurință că seria (II.7) este rapid convergentă, astfel încît în aplicațiile practice ne putem limita cu o bună aproximație numai la primul termen. Rezultă deci din (II.9)

$$\Phi(\xi, \theta) = \frac{16\beta_1(a_1 + \beta_1)^2}{\pi\lambda^3\mu^2} \sin\frac{\pi}{2}\xi \cos\frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi^2}{2}\frac{\theta}{\lambda}}. \tag{II.12}$$

Din același motiv se poate considera, de asemenea, într-o primă aproximație numai primul termen al seriei (II.11) și, în consecință, după efectuarea integralelor din II.10 se obține pentru funcția

$$\pi_2(\xi, \theta) = \frac{256}{3\pi^4} \frac{\beta_1(a_1 + \beta_1)^2}{\lambda^2\mu^2} e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{\lambda}}\left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{\lambda}}\right)\cos\frac{\pi}{2}\xi. \tag{II.13}$$

Dacă ținem seama că în regim staționar avem relația

$$1 - \frac{H_0}{H_k} = -(a_1 + \beta_1), \tag{II.14}$$

atunci funcţiile π_1 şi π_2 mai pot fi scrise în punctul $\xi = 0$ sub forma

$$\pi_1(0, \theta) = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{H_0}{H_k}\right)\frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{\lambda}}, \tag{II.15}$$

$$\pi_2(0, \theta) = \frac{256\,\beta H_k\left(1 - \frac{H_0}{H_k}\right)^2}{3\pi^4\mu^2 l(a + 2\beta q_0)^2} e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{\lambda}}\left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{\lambda}}\right).$$

Prin urmare, în cazul cînd ne limităm numai la cele două aproximaţii π_1 şi π_2 ale seriei (I.8), atunci din relaţia (I.28) rezultă pentru variaţia presiunii

$$\frac{H - H_0}{H_k - H_0} = \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{\lambda}} + \frac{256}{3\pi^4}\frac{\beta(H_k - H_0)}{l(a + 2\beta q_0)^2} e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{\lambda}}\left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{\lambda}}\right), \tag{II.16}$$

unde

$$\frac{H - H_0}{H_k - H_0} = \frac{e^{\alpha p} - e^{\alpha p_0}}{e^{\alpha p_k} - e^{\alpha p_0}} \text{ şi } \frac{\theta}{\lambda} = \frac{t}{m\alpha l^2\left(\frac{\eta}{k} + 2\beta q_0\right)}. \tag{II.17}$$

În cazul cînd $\beta = 0$, este uşor de remarcat din II.16 că $\pi_2 = 0$ şi, în consecinţă, obţinem relaţia binecunoscută din literatură [5], stabilită în ipoteza validităţii legii lui Darcy.

Ecuaţia (II.16) poate permite să stabilim într-o primă aproximaţie influenţa termenului neliniar βq^2, care apare datorită turbulenţei, asupra variaţiei în timp a presiunii. În acest scop apare necesar să studiem în prealabil comportarea asimptotică a funcţiilor $\pi_1(0,\theta)$ şi $\pi_2(0,\theta)$ pentru valori mari şi mici ale timpului adimensional.

Astfel, din relaţiile (II.15) avem

$$\frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{256}{23\pi^2} C\left(1 - e^{-\frac{\pi^2}{4}\frac{\theta}{\lambda}}\right), \tag{II.18}$$

unde prin constanta C s-a notat $C = \dfrac{\beta(H_k - H_0)}{l\left(\frac{\eta}{k} + 2\beta q_0\right)^2}$. Pe de altă parte, termenul βq_0 poate fi determinat din relaţia

$$\frac{H_k - H_0}{l} = \frac{\eta}{k} q_0 + \beta q_0^2, \tag{II.19}$$

corespunzătoare regimului staţionar.

În figura 4 s-a redat variaţia raportului $\frac{\pi_2}{\pi_1}$ în funcţie de timpul adimensional $\frac{\theta}{\lambda}$, pentru valorile $C = 0{,}05$ şi $C = 0{,}1$.

Din figura 4 se observă că, pentru o anumită valoare a lui C, raportul $\frac{\pi_2}{\pi_1}$ crește o dată cu creșterea parametrului $\frac{\theta}{\lambda}$, de unde rezultă că π_2 poate avea valori comparabile cu π_1. Asta înseamnă că într-o diagramă semilogaritmică variația lui $\frac{H-H_0}{H_k-H_0}$ în funcție de $\frac{\theta}{\lambda}$ nu mai este liniară, ca în cazul regimului laminar, respectiv în domeniul validității legii lui Darcy, unde $\beta = 0$, decît numai pînă la un anumit timp de la deschiderea sondei, care depinde de valorile lui η, k, β, H_k, H_0 și l.

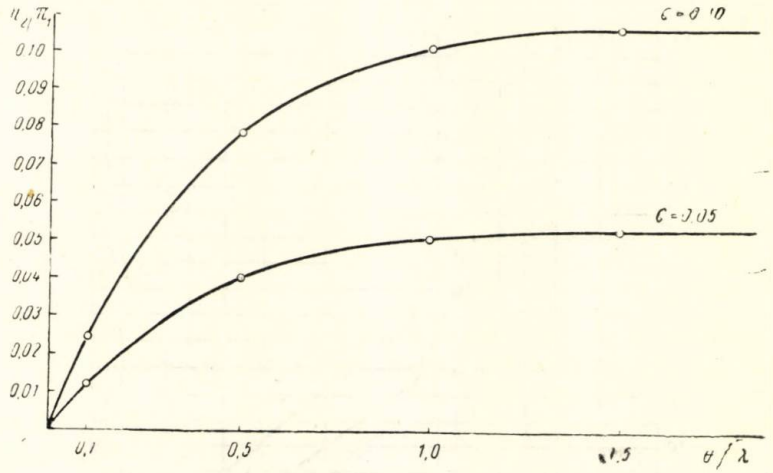


Fig. 4

În figura 5 s-au redat valorile raportului $\frac{H-H_0}{H_k-H_0}$ în funcție de timpul adimensional, de unde se remarcă, cînd $C = 1$, că variația acestuia nu mai este liniară pentru $\frac{\theta}{\lambda} > 0{,}6$. În cazul cînd $C = 0{,}1$, variația lui $\frac{H-H_0}{H_k-H_0}$ rămîne liniară și, în consecință, funcția π_2 devine practic neglijabilă, influența acesteia apărînd pentru valori mari ale lui $\frac{\theta}{\lambda}$, comparativ cu cazul $C = 1$.

Dacă ne referim la situația închiderii sondei, respectiv la condițiile (II.1), atunci influența turbulenței asupra creșterii în timp a presiunii se manifestă imediat după închiderea sondei și de aceea reprezentarea variației acesteia într-o diagramă semilogaritmică nu va mai fi liniară într-un anumit interval de timp după închiderea sondei. În acest caz, valoarea timpului după care variația $\frac{H-H_0}{H_k-H_0}$ devine liniară va depinde, de

asemenea, de valorile coeficienţilor η, k, β, H_k, H_0 şi l, întrucît influenţa termenului neliniar va apărea în faza iniţială a creşterii presiunii după închiderea sondei. Faţă de cele arătate mai sus, urmează ca determinarea corectă a caracteristicilor fizice ale mediului poros după curba de restabilire a presiunii în timp, obţinută la sondă, necesită închiderea acesteia un timp mult mai mare decît cel corespunzător regimului laminar, astfel

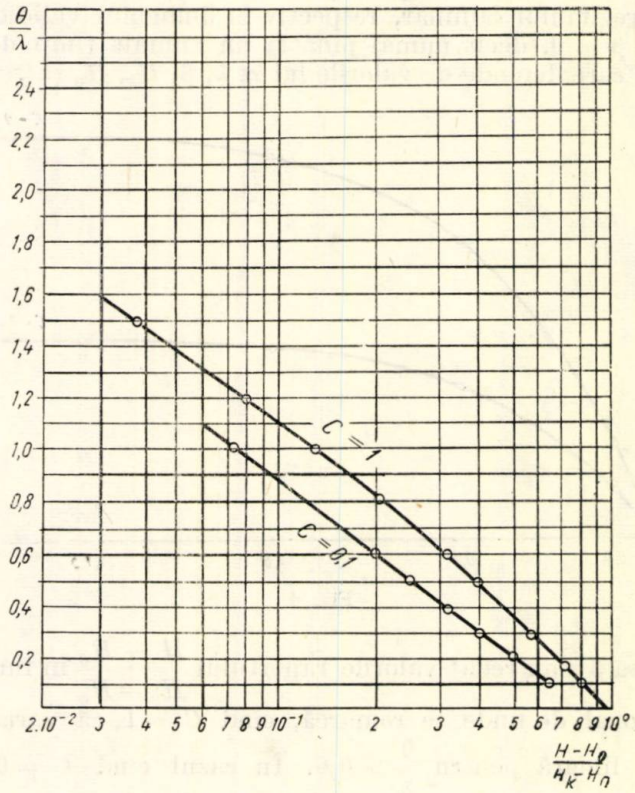


Fig. 5

încît influenţa lui π_2 să devină neglijabilă comparativ cu π_1. În acest caz se obţine pentru variaţia presiunii în timp o dreaptă, într-o diagramă semilogaritmică (fig. 5), avînd panta

$$i = \frac{\pi^2}{4m\alpha l^2\left(\frac{\eta}{k} + 2\beta q_0\right)}. \qquad \text{(II.20)}$$

În felul acesta, cunoscînd curba de creştere în timp a presiunii într-o sondă după închiderea acesteia, se poate determina valoarea pantei i, respectiv valoarea permeabilităţii mediului poros, întrucît coeficientul βq_0 se obţine din relaţia (II.19).

Spre deosebire de cazul curgerii laminare, panta dreptei depinde acum de coeficientul β şi de debitul masic q_0 în regim staţionar pe care sonda îl producea înaintea închiderii acesteia. Pe de altă parte, trebuie menţionat faptul că valorile coeficientului C, întîlnite de obicei în practica exploatării zăcămintelor de gaze, conduce în general la valori ale lui π_2 neglijabile comparativ cu π_1. Din acest motiv, după un timp relativ mic de la deschiderea sondei, termenul neliniar βq^2 poate fi considerat într-o primă aproximaţie printr-o valoare medie. Rezultă deci că soluţia sistemului (I.24) poate fi scrisă în acest caz sub forma

$$\frac{H}{H_k} = \frac{H_0(\xi)}{H_k} + \pi_1(\xi, \theta). \tag{II.21}$$

Dacă se consideră în (I.26), pentru termenul neliniar, relaţia $\beta_1 \overline{q}^2 = \beta_1 \overline{q}_{med} \overline{q}$, atunci vom avea

$$-\frac{\partial \overline{H}}{\partial \xi} = (a_1 + \beta_1 \overline{q}_{med})\,\overline{q}\,; \quad \frac{\partial \overline{q}}{\partial \xi} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \tag{II.22}$$

care după eliminarea lui q capătă forma

$$\frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial \xi^2} = (a_1 + \beta_1 \overline{q}_{med}) \frac{\partial \overline{H}}{\partial \theta}. \tag{II.23}$$

Introducînd relaţia (II.21) în (II.23), se obţine

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial \xi^2} = (a_1 + \beta_1 \overline{q}_{med}) \frac{\partial \pi_1}{\partial \theta}, \tag{II.24}$$

care este identică cu prima ecuaţie a sistemului (I.33) dacă considerăm $q_{med} = q_0$, respectiv $\overline{q}_{med} = 1$.

III. PREVEDEREA CANTITĂŢII DE GAZE EXISTENTE ÎN ZĂCĂMÎNT

Rezultatele obţinute mai sus permit să prevedem cantitatea de gaze existente în mediul poros, la anumite momente de timp, în cazul curgerii tranzitorii în regim turbulent.

Astfel vom avea

$$\Delta G(t) = q_0 F g \int_0^t [\overline{q}(1, \tau) - \overline{q}(0, \tau)]\, d\tau, \tag{III.1}$$

iar din ecuaţia de continuitate, respectiv din a doua ecuaţie a sistemului (II.26), rezultă

$$\overline{q}(1, \theta) - \overline{q}(0, \theta) = -\int_0^t \frac{\partial \overline{H}}{\partial \theta}\, d\xi. \tag{III.2}$$

Prin urmare, cantitatea de gaze va fi

$$\Delta G(t) = -\frac{q_0 g}{\lambda} F \int_0^t \left[\int_0^1 \frac{\partial H}{\partial \tau} \mathrm{d}\xi \right] \mathrm{d}\tau = \frac{q_0 g F}{\lambda} \int_0^1 [\overline{H}(\xi, 0) - \overline{H}(\xi, \theta)] \, \mathrm{d}\xi, \tag{III.3}$$

unde funcţia $\overline{H}(\xi, \theta)$ se obţine, în cazul exploatării la debit constant, din (II.7) şi din (II.13).

IV. EXPLOATAREA SONDEI LA DEBIT VARIABIL

După cum s-a arătat în paragraful precedent, permeabilitatea mediului poros poate fi stabilită, în ipoteza neglijării funcţiei π_2, după panta curbei de scădere în timp a presiunii obţinute într-o sondă după deschiderea acesteia, în cazul exploatării la un debit constant din stare de repaus.

În condiţiile reale de exploatare, debitul sondei este în general variabil în timp şi de aceea, în acest caz, vom obţine presiunea cumulativă şi nu cea corespunzătoare unui debit constant.

Deoarece pînă la un anumit timp de la deschiderea sondei curgerea tranzitorie a gazelor prin medii poroase poate fi descrisă cu ajutorul sistemului (II.22) care este liniar, atunci pentru stabilirea variaţiei presiunii la talpa sondei, în cazul exploatării sondei la debit variabil, putem aplica principiul superpoziţiei.

În conformitate cu principiul superpoziţiei vom avea

$$\Delta H = \left(\frac{\eta}{k} + \beta q_{\text{med}} \right) l \left[q_0 f(t) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}q(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} f(t - \lambda) \, \mathrm{d}\lambda \right], \tag{IV.1}$$

care mai poate fi scrisă sub forma

$$\Delta H = \left(\frac{\eta}{k} + \beta q_{\text{med}} \right) l \left[q_0 f(t) - \int_0^t \frac{\mathrm{d}q(t - \lambda)}{\mathrm{d}\lambda} f(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda \right], \tag{IV.2}$$

unde $\Delta H = H_k - H(x, t)$, iar $f(t)$ reprezintă funcţia care dă variaţia în timp a presiunii într-o sondă exploatată la debit constant.

În relaţia (IV.1) primul termen reprezintă căderea de presiune la debit constant, iar al doilea apare datorită variaţiei debitului.

Dat fiind că debitul nu se anulează într-un interval de timp $0 < t < T$, atunci, introducînd notaţiile

$$\varphi_0(t) = \frac{\Delta H}{q_0 l \left(\frac{\eta}{k} + \beta q_{\text{med}} \right)} \quad \text{şi} \quad \varphi_1(t - \lambda) = + \frac{1}{q_0} \frac{\mathrm{d}q(t - \lambda)}{\mathrm{d}\lambda}, \tag{IV.3}$$

ecuaţia (IV.2) devine

$$f(t) = \varphi_0(t) + \int_0^t \varphi_1(t - \lambda) f(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda. \tag{IV.4}$$

În felul acesta, variația presiunii în timp după deschiderea sondei, corespunzătoare exploatării la debit constant, necesară determinării permeabilității mediului poros și a presiunii dinamice aferente zonei de drenaj poate fi obținută în cazul exploatării sondei la un debit variabil din rezolvarea ecuației integrale (IV.4) de tip Volterra de-a doua speță.

În practică, variația în timp a presiunii și cea a debitului se stabilesc cu ajutorul aparatelor înregistratoare și, în consecință, graficele funcțiilor $\varphi_0(t)$ și $\varphi_1(t-\lambda)$ pot fi cunoscute. Dacă acestea pot fi aproximate prin funcții analitice relativ simple, utilizînd în acest scop procedeele cunoscute, atunci soluția ecuației (IV.4) se determină prin metoda aproximațiilor succesive, considerînd pentru $f(t)$ seria

$$f(t) = f_0(t) + f_1(t) + \ldots + f_n(t) + \ldots, \qquad \text{(IV.4')}$$

unde $f_0(t), \ldots, f_n(t), \ldots$ sînt aproximațiile succesive care se obțin din relațiile

$$f_0(t) = \varphi_0(t) \text{ și } f_n(t) = \int_0^t \varphi_1(t-\lambda) f_{n-1}(\lambda)\, d\lambda. \qquad \text{(IV.5)}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

Pe de altă parte, aplicînd transformata lui Laplace funcțiilor $f(t)$, $\varphi_0(t)$ și $\varphi_1(t-\lambda)$, rezultă din ecuația (IV.4)

$$\bar{f}(s) = \frac{\bar{\varphi}_0(s)}{1 - \bar{\varphi}_1(s)}, \qquad \text{(IV.6)}$$

unde

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt; \quad \bar{\varphi}_0(s) = \int_0^\infty \varphi_0(t)\, e^{-st} dt \qquad \text{(IV.7)}$$

$$\bar{\varphi}_1(s) = \int_0^\infty \varphi_1(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau; \quad \tau = t - \lambda. \qquad \text{(IV.8)}$$

Trebuie să ținem seama că în general funcțiile $\varphi_0(t)$ și $\varphi_1(t-\lambda)$ pot fi cunoscute, la anumite momente de timp, prin valorile lor discrete după curbele obținute în sondă cu aparatele înregistratoare: manometru și debitmetru. Din acest motiv, rezolvarea ecuației integrale (IV.4) trebuie efectuată prin metode numerice, astfel încît problema să fie redusă la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice liniare, care în prezent este ușor de efectuat cu ajutorul mașinilor electronice de calcul digitale.

Dacă se consideră o rețea de noduri (N), $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < T$, și scriem ecuația (IV.4) pentru valorile lui t din nodurile rețelei, atunci avem sistemul de ecuații

$$f(t_1) = \varphi_0(t_1) + \int_0^{t_1} \varphi_1(t_1 - \lambda) f(\lambda)\, d\lambda$$

$$f(t_2) = \varphi_0(t_2) + \int_0^{t_1} \varphi_1(t_2 - \lambda) f(\lambda)\, d\lambda + \int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t_2 - \lambda) f(\lambda)\, d\lambda$$

. . . . . (IV.9)

$$f_n(t_n) = \varphi_0(t_n) + \int_0^{t_1} \varphi_1(t_n - \lambda) f(\lambda)\, d\lambda + \int_{t_1}^{t_2} \varphi_1(t_n - \lambda) f(\lambda)\, d\lambda +$$

$$+ \ldots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \varphi_1(t_n - \lambda) f(\lambda)\, d\lambda.$$

Aplicînd tuturor integralelor de mai sus formule de cvadratură cu noduri exterioare, stabilite în lucrarea [9], şi ţinînd seama că $f(0) = \varphi_0(0)$, se obţine

$$f_1(t_1) - \sum_{k=0}^{n} A_k^{(1)} \varphi_1(t_1 - t_k) f(t_k) = \varphi_0(t_1) + R_1^{(1)}$$

$$f_2(t_2) - \sum_{k=0}^{n} A_k^{(2)} \varphi_1(t_2 - t_k) f(t_k) = \varphi_0(t_2) + R_1^{(2)} + R_2^{(2)} \qquad \text{(IV.10)}$$

. . . . . .

$$f(t_n) - \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} \varphi_1(t_n - t_k) f(t_k) = \varphi_0(t_n) + R_1^{(n)} + R_2^{(n)} + \ldots + R_n^{(n)},$$

unde coeficienţii $A_k^{(i)}$, pentru $k = 1, 2, \ldots, n$ şi $i = 1, 2, \ldots, n$, se determină din sistemul de ecuaţii

$$A_0^{(i)} + A_1^{(i)} + \ldots + A_n^{(i)} = t_i$$

$$A_1^{(i)} t + \ldots + A_n^{(i)} t_n = \frac{1}{2} t_i^2 \qquad \text{(IV.11)}$$

. . . . . .

$$A_1^{(i)} t + \ldots + A_n^{(i)} t_n^n = \frac{1}{n+1} t_i^{n+1}.$$

Notînd cu

$$I_k = \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} t(t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_n)\, dt \right|$$

şi

$$M_{n+1} = \max \left| \frac{d^{n+1} \varphi_1 (t - \lambda) f(\lambda)}{d\lambda^{n+1}} \right| \qquad \text{(IV.12)}$$

resturile $R_k^{(i)}$ din relaţia (IV.10) se pot estima din relaţia

$$| R_k^{(i)} | \leqq \frac{M_{n+1} I_k}{(n+1)!}. \qquad \text{(IV.13)}$$

Într-o primă aproximație putem neglija resturile $R_k^{(i)}$ din sistemul (IV.10) și, în consecință, obținem în acest caz valorile aproximative ale funcției $f(t)$ pe nodurile $t_1, t_2, \ldots, t_n$, pe care le notăm cu $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Este ușor de observat că rezolvarea sistemului obținut din (IV.10) prin neglijarea resturilor depinde de alegerea nodurilor. O primă condiție care se pune asupra nodurilor este ca acestea să fie astfel alese încît sistemul (IV.10) să aibă o soluție unică, adică determinatul coeficienților necunoscutelor $f_1, f_2, \ldots, f_n$ să fie diferit de zero. Eroarea cu care soluția sistemului (IV.10) aproximează pe nodurile (N) soluția ecuației (IV.4) o vom nota astfel:

$$\rho_i = f(t_i) - f_i. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{IV.14}$$

Din definirea numerelor $f(t_i)$ și f_i se observă că $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ este soluția sistemului

$$\begin{aligned}
&\rho_1 - \sum_{k=1}^{n} A_k^{(1)} \varphi_1(t_1 - t_k)\, \rho_k = R_1^{(1)} \\
&\rho_2 - \sum_{k=1}^{n} A_k^{(2)} \varphi_1(t_2 - t_k)\, \rho_k = R_1^{(2)} + R_2^{(2)} \\
&\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\rho_n - \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} \varphi_1(t_n - t_k)\, \rho_k = R_1^{(n)} + R_2^{(n)} + \ldots + R_n^{(n)}.
\end{aligned} \tag{IV.15}$$

Dacă se notează cu Φ_1 marginea superioară a funcției $\varphi_1(t - \lambda)$ pe intervalul $[0, T]$, iar nodurile rețelei sînt astfel alese încît să avem inegalitatea $1 - \Phi_1 A > 0$, atunci în cazul nodurilor echidistante se obține pentru delimitarea erorii

$$\rho_n \leqq \frac{M_{n+1} I' h^{n+2}}{(n+1)!\,(1 - \Phi_1 A)}, \tag{IV.16}$$

unde

$$\rho = \max_i |\rho_i|; \quad A = \max_i \sum_{k=1}^{n} |A_k^{(i)}|; \quad I' = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{k-1}^{k} u(u-1)\ldots(u-n)\,du \right|$$

h fiind pasul rețelei.

Primită la redacție la 2 aprilie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. H. Pascal, *Sur l'étude des données de pression et de débit fournies par l'écoulement transitoire de gaz dans un gisement, sans interruption de l'exploitation du puits.* Rev. méc. appl., *1* (1964).

2. G. W. Swift, O. G. Kiel, *The prediction of gaz well performance including the effect of non Darcy flow.* Journal of Petroleum Technology, *7* (1962).
3. I. Maugis, M. Kahane, M. Renourad, *Méthode de calcul numérique pour l'écoulement d'un gaz en régime variable.* Association technique de l'industrie du gaz en France, Congrès 1964.
4. H. Pascal, F. Munteanu, *Résolution numérique des équations de l'écoulement non-stationnaire des gaz par des conduites (pipe-line).* Rev. méc. appl., *3* (1965).
5. A. Houpeurt, *Sur l'écoulement des gaz dans les milieux poreux.* Revue de l'Institut français du pétrole, *11* (1959).
6. — *Eléments de mécanique des fluids dans les milieux poreux.* Paris, 1958.
7. П. А. Гладких, С. А. Хачиатурян, *Предупреждение и устранение колебаний нагнетательных установок.* Москва, 1964.
8. Tihonov, Samarski, *Ecuaţiile fizicii matematice.* Bucureşti, Edit. tehnică, 1956.
9. D. V. Ionescu, *Formule de cvadratură cu noduri exterioare.* St. cerc. mat., Cluj, *1—4* (1958).

ASPECTE ALE EVOLUȚIEI UZURII LEGATE DE CARACTERUL STATISTIC AL METODEI DE MĂSURĂ CU IZOTOPI RADIOACTIVI [1)]

de DAN PAVELESCU
Centrul de mecanica solidelor al Academiei Republicii Socialiste România

Lucrarea prezintă unele aspecte ale corelării legilor dinamice și statistice ale evoluției fenomenului uzurii la frecarea de alunecare prin prisma reproductibilității rezultatelor, bazate pe determinări, experimentale efectuate cu instalații diferite.

I. SITUAȚIA PE PLAN MONDIAL ȘI SCOPUL LUCRĂRII

Cercetările asupra evoluției fenomenului complex al uzurii se înscriu printre problemele cu tradiție științifică pe plan mondial, în ultimele decenii accentuîndu-se atît ca volum, cît și ca metodică de măsură. Deși s-a pus accentul pe sensibilitatea și precizia aparaturii de măsură (mecanică, optică, electronică, radiometrică etc.), relativ puține lucrări au acordat atenția cuvenită studiului reproductibilității determinărilor experimentale în cazul uzurii, și aspectului statistic al evoluției acesteia.

Cattaneo și Starkman [1] sesizează în 1948 caracterul aleator al uzurii unor segmenți și obțin variații între $3-5\times$ în determinările gravimetrice respective, în cazul unui singur motor monocilindric. Ei recomandă încercările pe un motor cu mai mulți cilindri, și deci evaluarea unei viteze de uzură medii pe un interval de timp dat.

Rabinowicz [2], cu zece ani mai tîrziu, arată că „încercările de uzură sînt notoriu nereproductibile. Încercările repetate dau adesea viteze de uzură care diferă prin factorii 2 sau 3 și uneori chiar 10. Această situație poate fi produsă, în parte, de erori sistematice nedescoperite

[1)] Publicată și în „Rev. roum. sci. teh. — Mécanique Appliquée", **10**, *6* (1965) (în limba engleză).

în condițiile de încercare, dar este de asemenea produsă de natura inerent aleatorie a procesului de uzură".

Dintre metodele clasice pentru măsurarea uzurii mașinilor care au ajuns pînă în uzine, menționăm metoda din categoria „amprentelor", elaborată de M. M. Hrușciov [3].

În ultimii zece ani s-a extins cu repeziciune în activitatea de cercetare, la diferite nivele, urmărirea evoluției uzurii cu ajutorul trasorilor radioactivi.

Gumbleton [4], folosind metoda trasorilor radioactivi, este de părere că media uzurii mai multor cilindri aparținînd unui motor nu poate ascunde totuși împrăștierea rezultatelor respective, iar viteza de uzură medie dobîndită pentru o scurtă perioadă de timp nu este reprezentativă pentru uzura mașinii respective pe o perioadă mai lungă de funcționare. El subliniază totodată anumite „limitări practice" în cazul utilizării acestei metode.

Într-o lucrare anterioară [5], abordînd problema erorilor statistice și de măsură — în cazul studiului uzurii pe modele cu izotopi radioactivi — generalizam unele concluzii, exprimate simultan de J. J. Gumbleton, privind uzura unor motoare cu ardere internă.

În continuare, pe baza cercetărilor efectuate mai mulți ani pe modele și instalații industriale, ne-am propus să subliniem anumite aspecte care privesc atît evoluția fenomenului, cît și particularitățile metodei în ceea ce privește corelarea unor legi dinamice și statistice specifice, insistînd totodată și asupra principalilor factori care determină fluctuațiile statistice și erorile metodei și deci reproductibilitatea.

II. MĂRIMEA PRINCIPALĂ ÎN MĂSURAREA UZURII

În general, orice măsurătoare care operează asupra unei mărimi tinde să se apropie cît mai mult de o „valoare reală", fiind afectată totuși de o anumită eroare absolută ; în cazul uzurii este necesar de precizat în primul rînd care este „mărimea" principală. În această privință considerăm că simpla determinare a cantității produselor uzate dintr-un anumit moment nu este concludentă ; nu poate fi caracteristică decît evoluția fenomenului în ansamblu sau o mărime „dinamică" caracteristică acestei evoluții. Sîntem de părere că, uzura fiind prin efectul său fizic un fenomen cumulativ, mărimea care o caracterizează nu poate fi decît *viteza de uzură* (exprimată, de exemplu, în mg/h, imp/min/h. etc.) și, desigur, dependența ei de alți parametri (temperatură, viscozitate, sarcină, viteză de alunecare etc.) [5].

Privind astfel problema, obiectul măsurării (și al studiului nostru) se deplasează de la corespondentul pierderii în greutate într-un anumit moment (cantitatea de produse ale uzurii) la curba care materializează șirul de astfel de situații, definită de viteza de uzură, și care ilustrează *legea de evoluție a fenomenului* respectiv. Este necesar deci ca modul de experimentare să poată asigura *reproductibilitatea acestei funcții în*

ansamblul ei și, desigur, a funcțiilor complementare, ca, de pildă, evoluția coeficientului de frecare, evoluția temperaturii cuplul de frecare etc.

După cum se știe, atît partea mecanică, cît și cea electrică a unui sistem de măsură sînt afectate de erori sistematice și întîmplătoare. În studiul uzurii cu metoda izotopilor radioactivi, fenomenul de dezintegrare radioactivă este „grefat" pe fenomenul de uzură pentru a-l pune în evidență; predomină caracterul întîmplător al unor fluctuații și al unor erori de măsură. Fluctuațiile care apar în general în măsurătorile de uzură nu se datoresc numai caracterului statistic al acestui fenomen sau fenomenului de măsurare în sine, ci totodată și fenomenului statistic de dezintegrare a nuclidelor radioactive.

Deoarece nu există o terminologie unanim acceptată, facem precizarea că, referindu-ne la fluctuațiile statistice ale uzurii și ale dezintegrărilor, vom utiliza termenul de abatere sau eroare statistică, iar referindu-ne la fluctuațiile de măsurare vom utiliza termenul de eroare de măsură.

III. APARATURA EXPERIMENTALĂ

În aprecierile pe care le facem ne vom referi în special la șapte tipuri de instalații experimentale, utilizate progresiv în studiile noastre privind uzura la frecarea de alunecare.

Instalația din figura 1 [6] conține caracteristicile generale cerute în cazul studiului cu trasori radioactivi, printre care menționăm:

— cuplul de frecare: sabot iradiat pe un ax de oțel, și sistemul mecanic de încărcare;

— circuitul de ulei, cu pompa de recirculare;

— sistemul de termostatare și de variere a temperaturii;

— sistemul radiometric de măsură cu mai multe traductoare și aparatele necesare de numărare și de înregistrare.

Ea a permis studii asupra sensibilității și preciziei de măsură prin: montarea diferită a contorilor G.M. (serie, paralel, în imersiune sau izolat etc.) cu și fără filtru; varierea raportului între volumul de ulei măsurat și volumul total din circuit (între 1/5—1/35); utilizarea fie a unor știfturi radioactive, fie a piesei-sabot, integral iradiată cu activități diferite. S-au realizat diferite condiții experimentale, privind materialele, sarcina, viteza relativă de frecare, temperatura, lubrifiantul, regimul de ungere etc.

În figura 2 [7], instalația respectivă, care a permis de asemenea modelarea unei frecări de alunecare, diferă prin tipul cuplului de frecare (piesă fixă cu suprafață plană și bucșă în mișcare de rotație), sistemul de ungere (fără recirculare) și metodica propriu-zisă de măsură.

Realizarea unui anumit tip de traductor G. M. în imersiune permite măsurarea periodică a întregii cantități de ulei din cuva experimentală cu un coeficient geometric maxim. Totodată, straturile de argint sau zinc, depuse pe cale electrolitică pe piesa-sabot de cupru, au condus după activare la activități specifice ridicate pe suprafața de frecare și deci la o sensibilitate de măsură sporită.

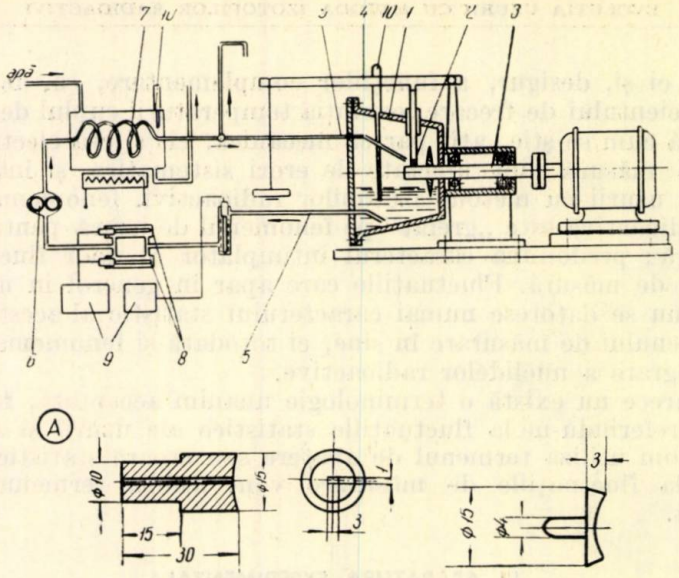


Fig. 1.— Schiţa instalaţiei experimentale cu recirculareа uleiului :

1 — cameră experimentală ; *2* — piesă-sabot fixă ; *3* — ax de oţel ; *4* — sistemul de încărcare ; *5* — circuitul de ulei ; *6* — pompă ; *7* — sistemul termostat şi de variere a temperaturii ; *8* — sistem de contoare G.M. ; *9* — numărătoare ; *10* — termometru electric. A_1 — detaliu ; piese-sabot studiate ; *a* — cu ştift radioactiv ; *b* — integral iradiată.

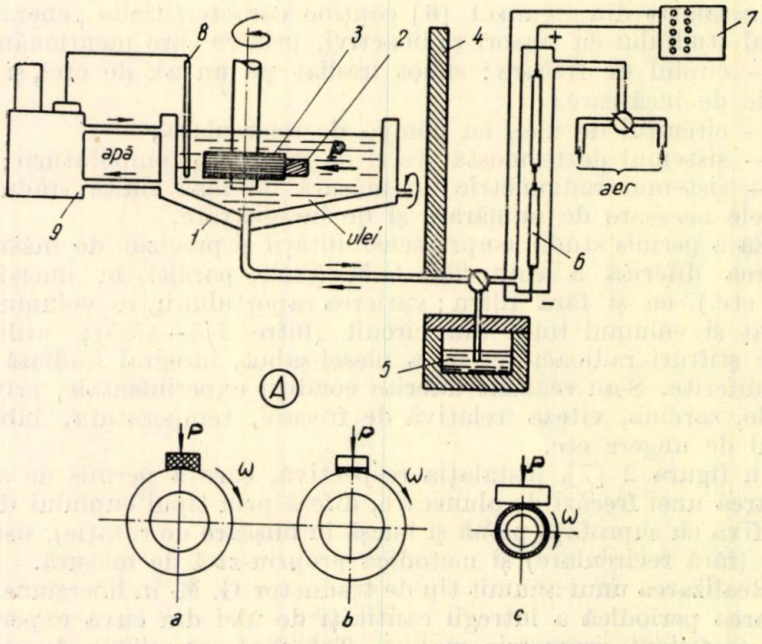


Fig. 2. — Schiţa instalaţiei experimentale fără recirculare :

1 — cuvă de ulei cu pereţi dubli pentru circulaţia apei ; *2* — piesă-sabot fixă ; *3* — piesă mobilă ; *4* — perete de plumb ; *5* — recipient pentru ulei radioactiv ; *6* — traductor cu două contoare G. M. în imersie ; *7* — numărător. *A* — detaliu ; diferite cupluri de frecare studiate : *a* — contact pe o suprafaţă cilindrică ; *b* — contact „liniar" piesa fixă cu strat activat ; *c* — piesă mobilă cu strat activat.

Menținînd tipul cuplului de frecare și valoarea maximă a raportului dintre cantitatea de ulei măsurat și uleiul în circuit, instalația din figura 3 [8] a înlesnit un studiu comparativ asupra influenței depunerilor radioactive prin eliminarea acestora; determinarea radiometrică

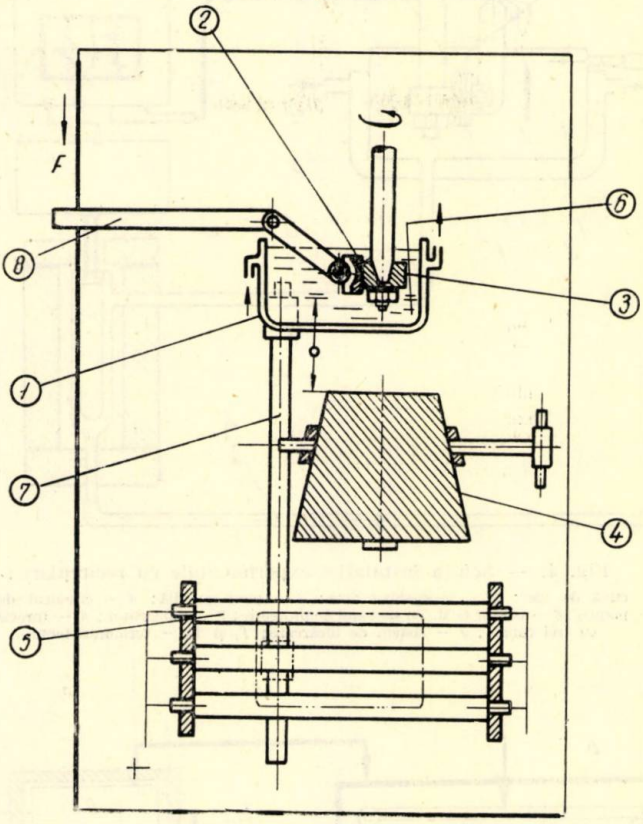


Fig. 3. — Schița instalației experimentale fără recirculare și măsurarea directă a cuvei:

1 — cuvă de ulei cu pereți dubli; *2* — piesă-sabot fixă; *3* — piesă mobilă; *4* — bloc de plumb; *5* — sistem traductor cu șase contoare G.M.; *6* — termometru electric; *7* — tijă de culisare a cuvei; *8* — sistem de încărcare.

s-a efectuat direct asupra cuvei de ulei. Piesa cu duritate mai mare este piesa fixă cu suprafața plană.

Pentru a pune în evidență anumite fenomene tranzitorii care apar în timpul procesului de frecare și care pot ilustra modul intim de evoluție al uzurii, s-a utilizat instalația experimentală din figura 4 [9]. Ea include anumite avantaje ale metodelor precedente, inclusiv urmărirea simultană a trei parametri importanți: uzura piesei mobile, temperatura piesei fixe și cea a uleiului. Remarcăm sensibilitatea de măsură de ordinul 10^{-7} g de metal pe cm^3 de ulei.

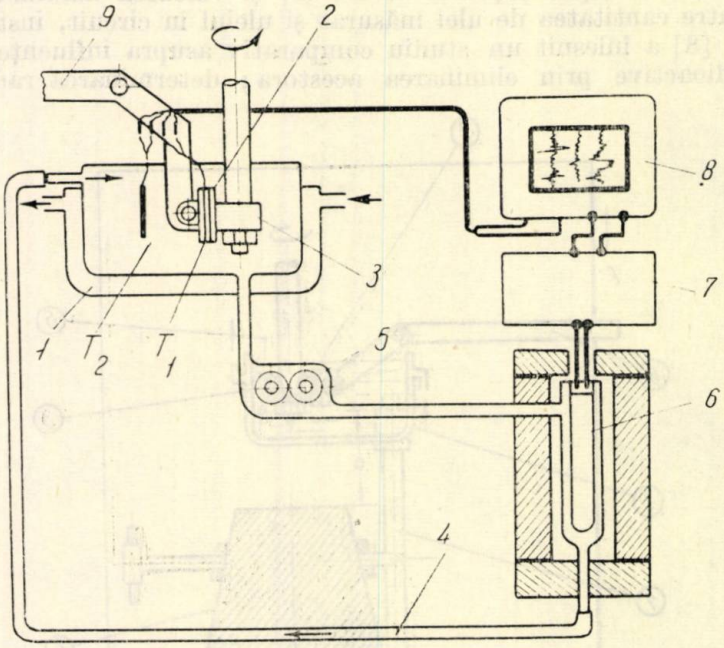


Fig. 4. — Schița instalației experimentale cu recirculare :

1 — cuvă de ulei ; *2* — piesă-sabot fixă ; *3* — piesă mobilă ; *4* — circuitul de ulei ; *5* — pompă ; *6* — contor G.M. cu sistemul de protecție ; *7* — numărător ; *8* — înregistrator cu trei canale ; *9* — sistem de încărcare ; T_1 și T_2 — termorezistențe.

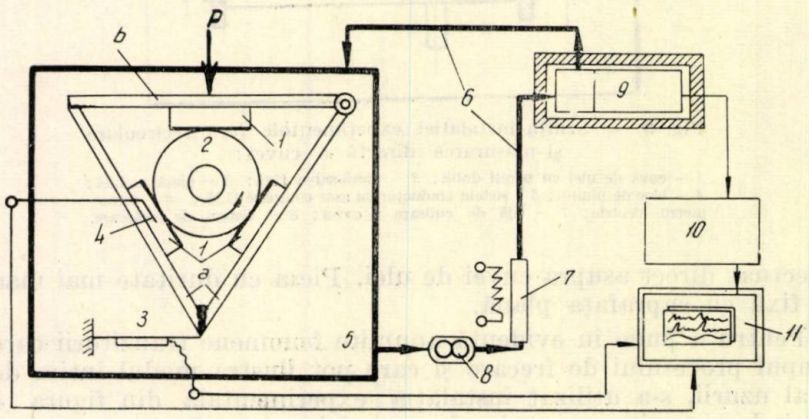


Fig. 5. — Schița instalației pentru studiul coeficientului de frecare :

1 — piesa fixă : *a* — părțile rigide ; *b* — partea articulată ; *2* — piesa mobilă ; *3* — piesa cu marca tensometrică pentru măsurarea coeficientului de frecare ; *4* — termorezistență ; *5* — cuvă de ulei ; *6* — circuit de ulei ; *7* — termostat ; *8* — pompă ; *9* — traductor-scintilator ; *10* — numărător ; *11* — înregistrator.

Studierea variațiilor coeficientului de frecare, de asemenea, în perioade de timp scurte, aspect la care ne vom referi, a fost pus în evidență cu o instalație prezentată schematic în figura 5 și care face obiectul altei lucrări [10]. Spre deosebire de cuplurile de frecare precedente, este vorba de frecare simultană pe trei suprafețe plane cu contact tot pe o fîșie („liniar").

Instalația prezentată în figura 6 este caracterizată atît printr-un tip diferit de cuplu de frecare (două suprafețe plane în mișcare de alu-

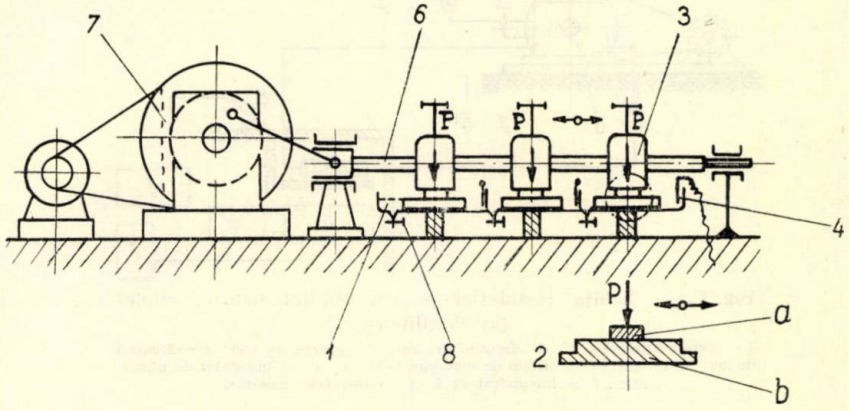


Fig. 6. — Schița instalației cu mișcare alternativă :
1 — cuvă de ulei cu trei compartimente ; *2* — cuplul de frecare: *a* — pastilă de Bz ; *b* — placă de fontă ; *3* — sistem de încărcare ; *4* — termorezistență ; *6* — sistemul de transmitere a mișcării alternative.

necare de du-te-vino), cît și prin posibilitatea de urmărire simultană a evoluției uzurii a trei perechi de eprubete asemănătoare (pastile de Bz iradiate, pe plăci de fontă sau oțel), situație propice studiilor cu caracter statistic.

Din punct de vedere radiometric, sistemul de măsură este de tipul fără circulație de ulei, determinările efectuîndu-se prin extragerea periodică a probelor radioactive și măsurarea separată la o stație automată cu un cristal de scintilație de mare sensibilitate (75 ∅, de tip U).

În sfîrșit, pentru compararea unor rezultate obținute pe modelele menționate cu rezultatele ce se obțin în exploatarea curentă, s-a utilizat instalația prezentată în figura 7 [11], în care s-a preferat un cuplu de frecare larg răspîndit (piston-cilindru) ; în acest scop s-a utilizat un compresor cu doi cilindri (de tip frigorific), însă în sarcină de aer comprimat. El a permis experimentarea a diferite raporturi privind starea micro-și macrogeometriei segmenților și cămășilor de cilindru. Măsurarea continuă a uzurii a fost asigurată printr-un sistem de recirculare ca în unele din sistemele anterioare.

Observație. Deși dispunem și de posibilitatea urmăririi evoluției simultane a uzurii ambelor suprafețe a cuplului (metoda celor doi trasori radioactivi), în lucrarea de față am preferat să nu intervenim și cu această

metodă, dat fiind anumite erori specifice care precumpănesc pe cele ale fenomenului de bază (evoluţia uzurii); ne referim în special la necesitatea selectării ponderilor uzurii prin analiza spectrelor de radiaţii şi la erorile

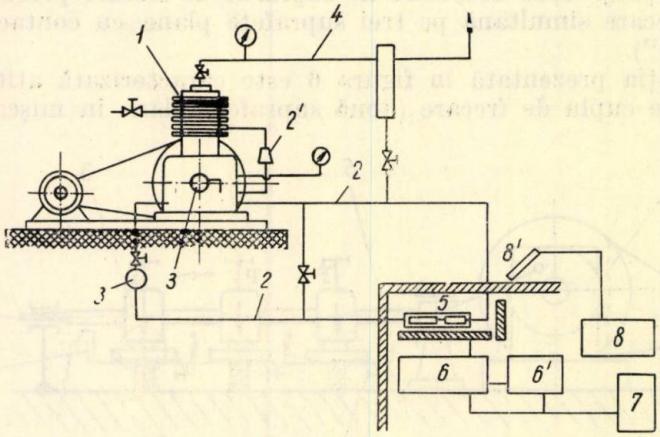


Fig. 7. — Schiţa instalaţiei pentru studiul uzurii; cuplul piston-cilindru :

1 — corpul cilindrilor; *2—2'* circuitul de ulei; *3* — pompă de ulei; *4* — circuitul de aer comprimat; *5* — sistem de contoare G.M.; *6—6'* — instalaţie de numărare; *7* — înregistrator; *8—8'* — instalaţie monitor.

care apar datorită anumitor zone de difuziune, comune celor două spectre radioactive, şi care rezultă şi din lucrările altor autori [12], [13].

IV. REZULTATE ŞI CONCLUZII

1. Dintre factorii care pot influenţa în mod deosebit evoluţia uzurii, în urma studiilor experimentale efectuate indicăm pe următorii în ordinea importanţei lor : geometria şi principiul cuplului de frecare, prezenţa anumitor aditivi chimici activi, starea de suprafaţă şi condiţiile locale ale suprafeţelor de frecare temperatură, presiunea şi viteza de alunecare. Intervenţia acestor factori generează fenomene tranzitorii, fluctuaţii şi erori care se traduc în scăderea preciziei şi a reproductibilităţii. Pe baza determinărilor cu instalaţiile arătate mai sus putem face următoarele observaţii asupra factorilor menţionaţi :

a) Nu trebuie subapreciată cu nimic geometria cuplului de frecare; din literatura de specialitate rezultă însă că sînt utilizate şi recomandate sisteme de măsură la care însuşi principiul cuplului de frecare respectiv devine principalul factor de eroare.

Astfel, la sistemele la care frecarea se realizează pe o suprafaţă mai mare de contact, în anumite condiţii apare într-o măsură mai mare, independent de voinţa experimentatorului, posibilitatea de schimbare a regimului de ungere prin trecerea de la ungerea limită şi semifluidă la ungerea hidrodinamică, şi astfel se maschează evoluţia normală a uzurii;

uzurile create prilejuiesc de asemenea modificarea regimului de ungere și, prin schimbarea suprafeței de contact, variază presiunea specifică.

O astfel de situație a fost pusă în evidență cu cuplul de frecare utilizat în instalația din figura 1. Acesta este, de altfel, destul de des întîlnit și în literatura de specialitate (la instalațiile de frecare cu unul sau doi saboți), fără a se remarca însă aspectul esențial sesizat. La situații asemănătoare am constatat că se poate ajunge însă și în cazul unui cuplu de frecare de tip „Timken", experimentat cu instalația din figura 2, prin uzarea pronunțată locală a straturilor de duritate mai redusă (aluminiu, argint, indiu etc.), depuse pe placa cu suprafață plană.

Examinarea urmei de contact pe o piesă-sabot de oțel cu suprafață plană ne arată că fîșia de contact are o formă neregulată, imaginea ei din figura 9 ilustrînd fluctuații ale suprafeței de contact, presiunii specifice, temperaturii de contact și uzurii. La mașina clasică „cu 4 bile", care impune schimbarea repetată a cuplului de frecare și aprecierea uzurii în funcție de „gripare" sau după dimensiunea „petei" de contact, s-au remarcat fluctuații mai mari ale rezultatelor. Pentru a fi micșorate, unii cercetători au adus anumite îmbunătățiri acestui sistem [14], [15].

b) În afară de geometria locală a suprafeței, variația „stării de suprafață" (microgeometria și straturile „superficiale" cu grosimi de ordinul micronilor), distrugerea și refacerea ei, produc diferite viteze de uzură; trecerea de la o situație la alta (ca în figura 8, înainte de introducerea aditivului) este funcție de factori diferiți : mecanici, chimici, schimbarea condițiilor de ungere și de temperatură etc.

c) Printr-un studiu recent [11] am subliniat acțiunea preponderentă a anumitor aditivi de extremă presiune asupra condițiilor de suprafață; unii aditivi acționînd în mod diferențiat cu proprietăți de „antiuzură" și „antigripant", pot evita griparea unor suprafețe deteriorate și favoriza, în același timp, viteze de uzură foarte reduse. Intervenția unor astfel de aditivi (ca, de exemplu, parafina clorurată 6%, naftenatul de plumb 1% etc.) este arătată în figura 8, curbele fiind obținute cu instalația din figura 4; s-au obținut reduceri ale vitezei de uzură de 28× și atenuarea fluctuațiilor de uzură și de temperatură.

d) Unii autori [16], [17] consideră temperatura ca factor esențial prin influența ei asupra viscozității, schimbării stării de suprafață chiar factor de compensare sau însumare a erorilor [20] etc. Din determinările noastre anterioare asupra variației viscozității și grosimii peliculei de ulei rezultă o influență covîrșitoare a factorului temperatură care predomină asupra naturii lubrifiantului [18]. În regiunea temperaturilor ridicate este dificilă diferențierea calității unor lubrifianți după criteriul de viscozitate sau peliculă de ulei, dată fiind împrăștierea statistică a rezultatelor și întrepătrunderea zonei de abatere.

În schimb, studiul asupra comportării la uzură a anumitor aditivi în anumite condiții de temperatură ridicată [19] a pus totuși în evidență menținerea calităților de antiuzură a unor aditivi de extremă presiune și a unor uleiuri puțin vîscoase.

În ceea ce privește evoluția temperaturii în procesul de frecare, după cum rezultă din figura 8 (curba 3 față de curba 2), efectele ei tranzitorii sînt atenuate de sistemul de termostatare, care are inerție mare, însă fără să poată preveni totdeauna schimbările stării de suprafață.

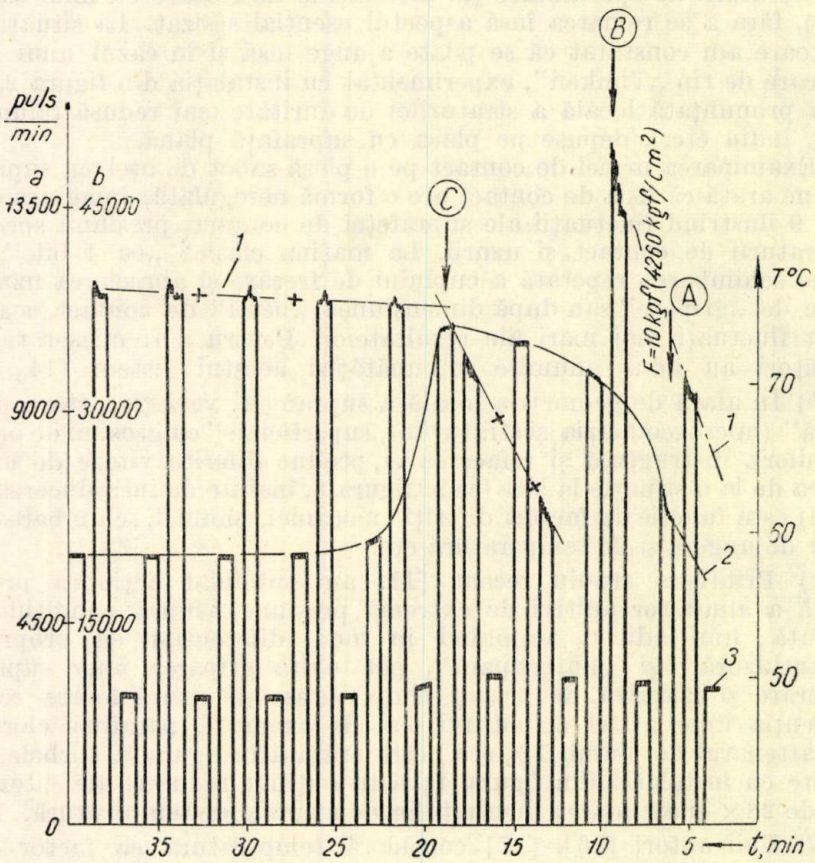


Fig. 8. — Diagrama evoluției tranzitorii a vitezei de uzură și temperatură în funcție de sarcină:

1 — curba vitezei de uzură; *2* — curba de variație a temperaturii piesei fixe; *3* — curba de variație a uleiurilor din cuvă. *A* — momentul schimbării sarcinii; *B* — momentul schimbării scării de măsură; *C* — introducerea aditivului.

În figura 10 sînt reprezentate, pentru același sistem de cuplu de frecare, curbele diferenței de temperatură $\Delta T = T$ pastilă - Tulei, funcție de sarcină, pentru două materiale (Bz t și Bz 14) [9]. Constatăm că apariția zonelor de mari fluctuații este condiționată atît de material, cît și de regimul de sarcină, limitînd precizia de măsură a instalației experimentale. La sarcini relativ reduse, ΔT este proporțional cu încărcarea, ceea ce presupune și un coeficient de frecare constant.

Cu ajutorul instalației din figura 5 s-a obținut pe oscilograf imaginea evoluției reale a coeficientului de frecare în scurte perioade de timp (fig. 11).

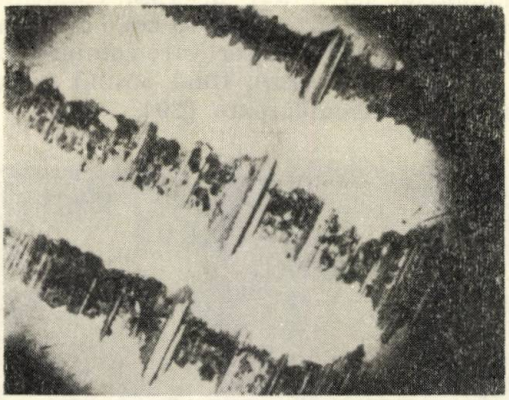


Fig. 9. — Fotografia uzurii suprafeței piesei fixe de oțel în cazul contactelor „liniare".

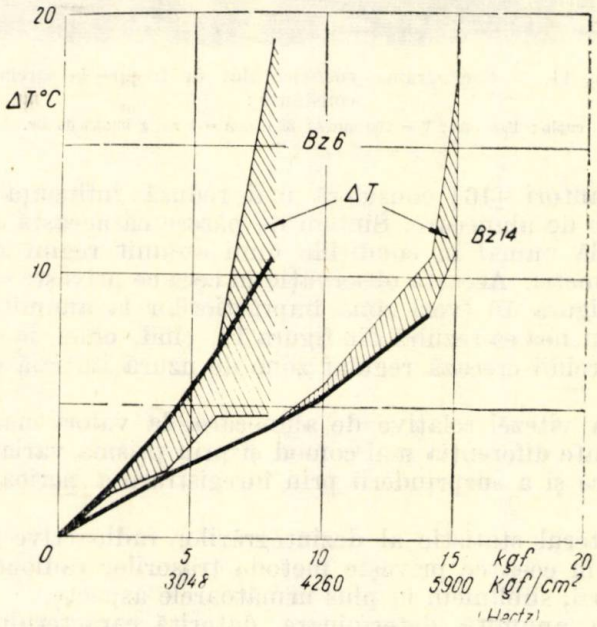


Fig. 10. — Diagrama variației diferenței de temperatură ΔT în funcție de sarcină în cazul cuplului de frecare din figura 4 :

$\Delta T = T$ – placă de oțel – T ulei pentru bucșă Bz 6 și Bz 14 (+1% In).

Se surprind fenomene tranzitorii de genul celor întîlnite în cazul celorlalți parametri menționați, situație de altfel concordantă. Remarcăm în scurte perioade de timp variații procentuale de $\sim \pm 7\%$ în valoarea coefi-

cientului de frecare, care, desigur, se datoresc schimbărilor de suprafață (eventual unor efecte adezive și apoi a ruperii microsudurilor).

În cazul motoarelor cu ardere internă, variațiile de temperatură în cursul ciclurilor respective și în diferite zone ale camerii de ardere cu diferite regimuri de ungere, devin factori care complică lanțul de fenomene fizice și chimice, precum și de erori, fiind posibil să compenseze sau să însumeze anumite efecte întîmplătoare [20].

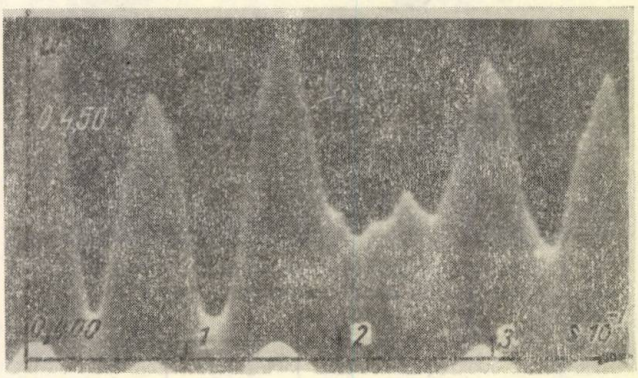


Fig. 11. — Oscilograma coeficientului de frecare la sarcină constantă :
cuplu ; Bz6 oțel ; V = 200 mm/s ; 32,6 mm = 1 rot a bucșei de Bz.

e) Unii autori [16] consideră mai redusă influența sarcinii și a vitezei relative de alunecare. Sîntem de părere că această apreciere este riguros valabilă numai în condițiile unui anumit regim de intervenție a acestor parametri. Această observație în ceea ce privește sarcina rezultă, evident, din figura 10 (vezi zona împrăștierilor la anumite sarcini mai mari). De asemenea ea rezultă din figura 12, cînd, chiar la sarcini reduse, schimbarea sarcinii creează regulat zone de uzură inițială cu fluctuațiile inerente.

Influența vitezei relative de alunecare, la valori mari și mici ale acesteia, se poate diferenția mai comod și prin prisma variației coeficientului de frecare și a surprinderii prin înregistrare a perioadelor de fluctuație.

2. Caracterul statistic al dezintegrărilor radioactive ca atare este studiat [21] ; în ceea ce privește metoda trasorilor radioactivi utilizată în studiul uzurii, subliniem în plus următoarele aspecte.

Pentru o anumită determinare, datorită caracterului statistic al dezintegrărilor radioactive — care pun în evidență o anumită cantitate de produse ale uzurii —, abaterea sau eroarea statistică este funcție de activitatea respectivă și de timpul de măsură ; ea scade cu creșterea acestora.

Dacă stabilirea unui timp de măsură mai mare este practic realizabilă (totuși limitat în instalațiile de înregistrare automată) [5], în schimb în regim dinamic variația cantității de produse ale uzurii are un caracter statistic, după cum rezultă din figura 13 (o familie de curbe de

uzură a segmenților a două pistoane, obținută cu instalația din figura 7 și cu metoda clasică gravimetrică). Acest caracter statistic rezultă și la înregistrarea unei singure curbe după un singur segment iradiat (fig. 13 *a*).

În cazul în care s-a utilizat metoda radiometrică, abaterea relativă variază de-a lungul fiecărei curbe de uzură, în funcție de creșterea con-

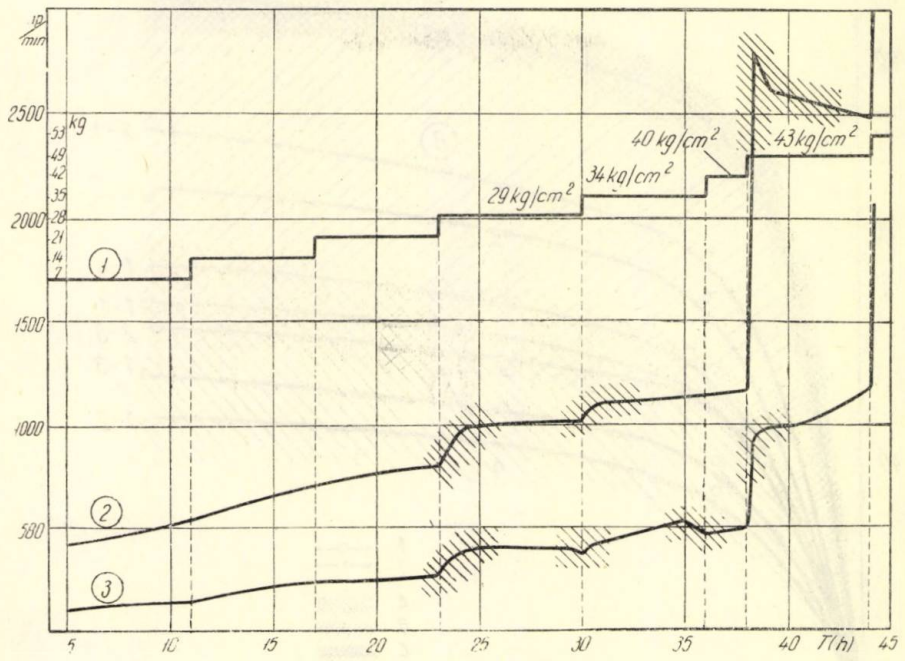


Fig. 12. — Diagrama evoluției uzurii funcție de schimbările de sarcină; cuplul de frecare: fontă pe oțel;

1 — diagrama încărcărilor; *2* — evoluția uzurii în sistem de contoare G.M. în imersie; *3* — evoluția uzurii în filtru cu 50 μ Ø.

tinuă a activității produselor uzurii din lubrifiant. Totodată, evoluția uzurii în timp, fiind caracterizată printr-o variație aleatorie provocînd aceeași variație a activității respective, va „modula" în acest fel procesul statistic menționat al produselor radioactive, influențînd abaterea relativă respectivă.

Este vorba de *dependența a două procese aleatorii de proveniență diferită și la scări microscopice diferite* (datorită unor particule de uzură de ordinul micronului, precum și a unora dintre nuclidele atomice a elementelor acestor particule). În plus, în anumite cazuri (studiate cu sistemele din figurile 1, 2 și 7) există posibilitatea ca depunerile radioactive din circuitul de ulei (baia de ulei, pompă, conducte, traductor) să creeze în mod întîmplător neomogenități în uleiurile radioactive („nori de particule de uzură").

MOSZTAKI KÖZPONTI KÖNYVTÁR BUDAPEST 1845

Studiindu-se gradul fluctuațiilor provenite din depuneri cu instalația din figura 6, se constată că acestea au valori însemnate ; după 24 de ore s-au înregistrat, de exemplu, diferențe pînă la $\pm 45\%$. Ele fac parte din categoria erorilor de măsură, ca și în cazul utilizării unui

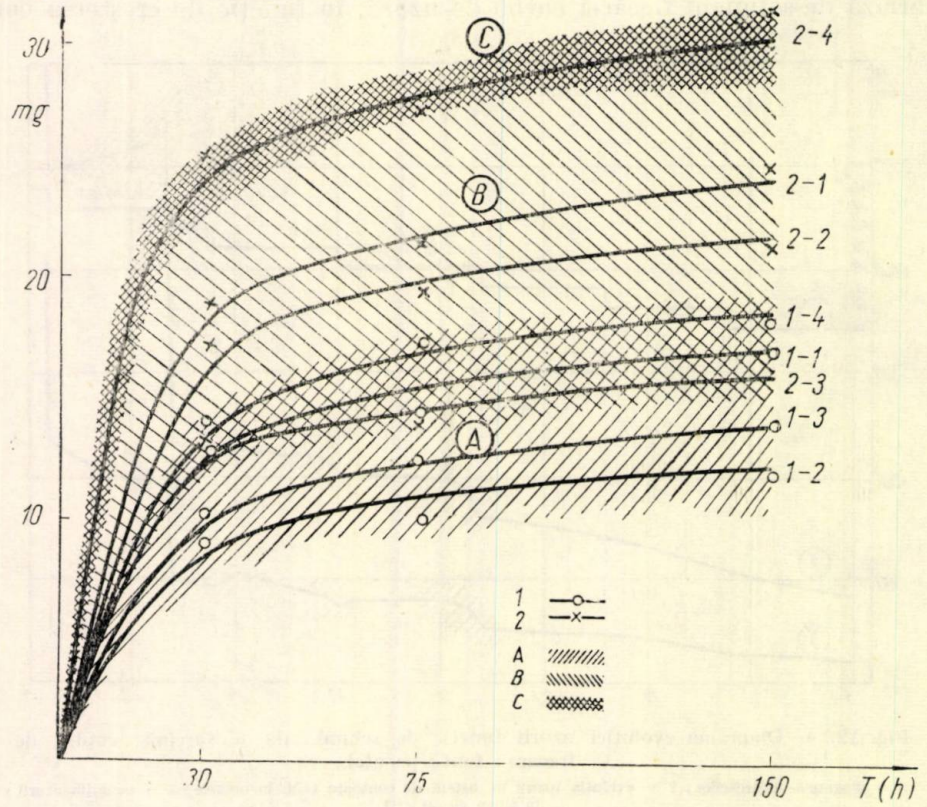


Fig. 13. — Diagrama de evoluție a uzurii segmenților de fontă :
A și *B* — zonele de împrăștiere a uzurii grupelor de cîte patru segmenți ale pistoanelor 1 și 2 ; *C* — zona de împrăștiere pentru un singur segment.

cuplu de frecare principial neadecvat, al menținerii unui regim de vibrații etc. Astfel de erori se pot însă reduce substanțial.

3. Față de cele de mai sus, privind comparativ o instalație de modelare cu o alta cu caracter industrial, din punctul de vedere al reproductibilității determinărilor, desprindem următoarele aspecte :

a) În cazul unei insatalații de modelare s-au dovedit necesare în principal următoarele măsuri :

— studierea și adoptarea unui anumit cuplu de frecare, ținînd seama de condiția de menținere a regimului de ungere și a suprafeței de referință, de eliminarea vibrațiilor etc.

— eliminarea influenței depunerilor radioactive.

Astfel, la instalația din figura 3 s-a ajuns ca valorile maxime ale abaterilor față de medie să reprezinte $\pm 25\%$, iar abaterea standard $\pm 8\%$.

b) În instalația industrială de felul celei din figura 7 s-au studiat împrăștierile punctelor experimentale privind uzura segmenților în diferite situații (între segmenții aceluiași piston, între segmenții pistoanelor

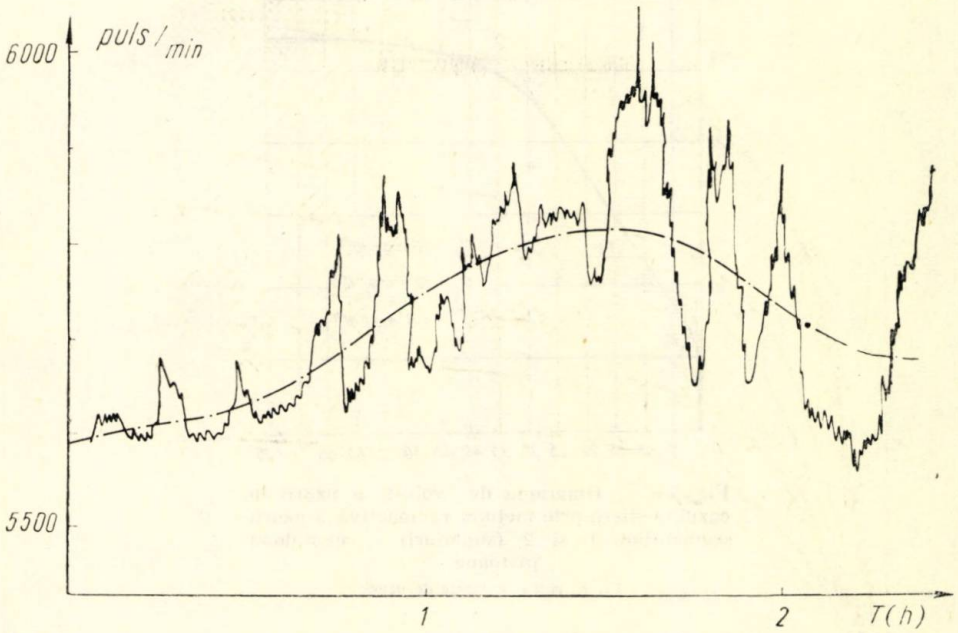


Fig. 13 *a*. — Porțiune din diagrama înregistrată a uzurii unui singur segment și media fluctuațiilor.

aceluiași bloc compresor, în condiții variate de micro- și macrogeometrie etc.).

De cele mai multe ori s-au obținut zone separate de uzură pentru fiecare piston (cilindru) care depind de raportul dintre micro- și macrogeometrie ; abaterile relative maxime (ale unui segment) față de medie ale curbelor de uzură prezintă valori mari (pînă la $\pm 65\%$) ; în cazul unei curbe medii de uzură a cîte doi segmenți radioactivi ai fiecărui piston (fig. 14), situație care permite totuși detalierea distinctă a unor zone caracteristice de evoluție a uzurii, abaterea relativă maximă prezintă valori mai reduse ($\pm 36\%$).

Precizăm că în valorile abaterilor menționate sînt incluse atît erorile datorită fluctuațiilor proprii fenomenului de uzură, a celui de dezintegrare, precum și fluctuațiile de măsură.

În lucrarea de față nu au fost analizate erorile de măsură introduse de sistemul traductor + lanțul electronic, care în general nu depășesc o abatere relativă de $\pm 6\%$ față de medie (în special semnalăm erorile

datorită traductoarelor de scintilaţie, integratoarelor şi înregistratoarelor). Şi în acest caz se manifestă fenomene cu caracter statistic, ca, de pildă, acela din traductoare care generează impulsurile în mod aleatoriu.

În concluzie, studiul uzurii cu metoda izotopilor radioactivi trebuie să aibă în vedere existenţa mai multor procese aleatorii (dintre care două

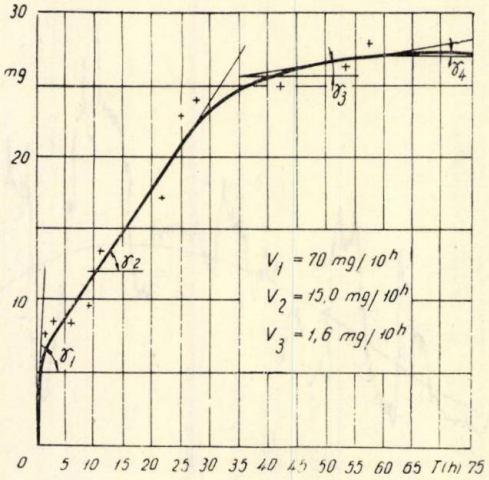


Fig. 14. — Diagrama de evoluţie a uzurii în cazul medierii prin metoda radioactivă a uzurii segmenţilor 1 şi 2 (superiori) a celor două pistoane :

V_1, V_2 şi V_3 — viteze de uzură.

principale) la scări microscopice diferite, situaţie care antrenează erori statistice cu pondere mai mare decît a erorilor de măsură.

Raportate la sistemul macroscopic simplificat a două corpuri în frecare şi privite sub efectul lor global calitativ, funcţiile care reflectă evoluţia uzurii sau a vitezei acesteia faţă de sarcină sau de temperatură, ori o anumită evoluţie a coeficientului de frecare corelat cu viteza relativă, regimul de ungere etc. au caracterul unor „legi dinamice".

Privite prin prisma reproductibilităţii lor în ansamblu şi a elementelor intime care generează o anumită evoluţie a acestor fenomene, rezultă evident caracterul statistic, aleatoriu a acestor legi. Acest caracter, considerăm că aparo din însăşi natura molecular-mecanică, duală, a frecării exterioare, condiţionată atît de învingerea forţelor de adeziune, cît şi de învingerea rezistenţei microsudurilor [22] sau a celei de deformare a materialelor, elastică sau plastică [16]; de asemenea, el apare din natura unică, moleculară a frecării interioare, legată de transmiterea cantităţii de mişcare de la strat la strat. Desigur el provine şi din contactul de natură discretă a suprafeţelor, datorită ondulării şi rugozităţii, sau prin efectul de asemenea aleator de abraziune.

Din această cauză, legile dinamice care privesc sistemul macroscopic al suprafeţelor cuplului de frecare sînt de fapt medieri ale unor

legi statistice la diferite scări microscopice, generate de natura dual㠹 a procesului de frecare exterioară (privind contactul și ruperea microasperităților, frecarea moleculară a microsuprafețelor în contact) și natura unică a frecării interne (moleculare) a sistemelor, precum și de natura statistică a dezintegrărilor nucleelor atomice a elementelor particulelor uzate (în cazul metodei radiometrice).

Cu toate că metoda radiometrică intervine și cu alte fluctuații și cauze de erori, totuși prin caracteristicile de simultaneitate, sensibilitate și complexitate (de pildă posibilitatea de urmărire și a transferului de metal), ea să impune ca o metodă clasică a studiului uzurii.

Primită la redacție la 9 august 1965

BIBLIOGRAFIE

1. A. G. Cattaneo, E. S. Starkman, *Fuels and Lubrication Factors in Piston Ring and Cylinder Wear.* Mechanical Wear, Proceedings of a Summer Conf. June 1948, Cambridge, Editor Burwell, J. J. Jr.
2. E. Rabinowicz, *New Coefficients Predict Wear of Metal Parts*, Product Engr., **29**, *25*, 71 (1958).
3. M. M. Хрущов, Е. С. Беркович, *Определение износа деталей машин методом искусственных баз*, Издат. Акад. наук СССР, Москва, 1959, p. 156; 1961, 141—208.
4. J. J. Gumbleton, *Piston Ring and Cylinder Wear Measurements illustrated the potention and limitation of the radioactive tehnic*, SAE Transactions, *70*, New York, 333—349 (1962).
5. D. Pavelescu, *On the Measurement Errors and their Magnitude in the Case of the Examination of Wear with Radioactive Isotopes*, Rev. Méc. Appliquée, **VIII**, *4*, 655—673 (1963).
6. D. Pavelescu, I. Iliuc și colab., *Methode zur Untersuchung des Lagerverschleissmittels radioaktiver Isotopen*, Rev. Méc. Appliquée, **VI**, *1*, 77—90 (1961).
7. D. Pavelescu, I. Iliuc, S. Barbul, *Study on a Radioactive Method for Estimating the Lubricating Qualities of Compound Oils by Using the Wear of Surfaces*, Rev. Méc. Appliquée, **VI**, *4*, 539—547 (1961).
8. — *Исследование радиоактивного метода для оценки смазочных качеств масел с присадками по износу поверхностей*, II, Rev. Méc. Appliquée, **VII**, *2*, 381—389 (1962).
9. D. Pavelescu, I. Iliuc, *On the evolution of Wear and Temperature of some Radioactive Bronze-Steel Friction Pairs*, Rev. Méc. Appliquée, **VIII**, *3*, 433—439 (1963).
10. I. Iliuc, *Evoluția coeficientului de frecare la un cuplu cu trei contacte liniare.* Conferința de mecanică aplicată, București, septembrie 1965.
11. D. Pavelescu, *On the Dependence of the Initial Wear on the Mechanical and Chemical Factors in the Case of Semifluid or Boundary Sliding Friction*, Rev. Méc. Appliquée, **X**, *3* (1965).
12. A. H. Eliava, *Metode și instalații pentru studiul uzurii pieselor de mașini cu ajutorul indicatorilor radioactivi*, Tehnica nucleară, **6**, *10*, 587 (1963).
13. D. Blănariu, *Tehnica spectrometriei gama cu scintilații*, St. cerc. științifice, Fizică și științe tehnice, **XIII**, *2*, 259 (1962).
14. I. G. Turcan, G. V. Vinogradov, *O nouă mașină cu patru bile pentru aprecierea proprietăților de antiuzură ale uleiurilor lubrifiante* (trad. din l. rusă), I.D.T., București.
15. M. R. Mustafa, *Considerații asupra determinării temperaturii de rupere a filmului de lubrifiant*, Conferința de mecanică aplicată, București, septembrie 1965.
16. И. В. Кражелский, *Трение и износ*, Машгиз, Москва, 1962, p. 7—10, 34, 285—286.

17. N. Tipei, *Hidroaerodinamica lubrificației*, Edit. Acad. R.P.R., București, 1957, p. 12—18, p. 49—52.
18. D. Pavelescu, I. Iliuc, *Radioactive Methods for Determining the Influence of Viscosity upon the Lubricant film Thickness*, Rev. Méc. Appliquée, **3**, *3*, 299—312 (1958).
19. D. Pavelescu, I. Iliuc, S. Barbul, *Aspecte privind proprietățile de antiuzură ale unor aditivi de extremă presiune la temperaturi ridicate*, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *6*, 1 479—1 484 (1963).
20. F. A. Kirigin, *A new Approach to the Lubricating Problems of Internal Combustion Engines*, Lubric. Engineering, 169, 315 (1960).
21. F. Ciorascu, M. Oncescu, *Detectarea și măsurarea radiațiilor nucleare*, Edit. Acad. R.P.R., București, 1964, 149, 153, 163.
22. F. P. Bowden, D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solids*, vol. II, Oxford, 1964, 103, 365—367.

UNELE STUDII DE LABORATOR PRIVIND LUBRIFICAȚIA CU GAZE

de V. N. CONSTANTINESCU și GH. MARIN
Institutul de mecanica fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

533 : 621.89

Sînt prezentate unele realizări de laborator privind studii experimentale asupra lagărelor radiale, axiale și plane lubrificate cu gaze în regim hidrodinamic și hidrostatic, ca și unele aplicații de laborator de aparate funcționînd pe principiul lubrificației cu gaze.

Perspectivele de viitor ale dezvoltării tehnicii noi impun lagărelor de alunecare condiții de funcționare și de durabilitate pe care lubrificația clasică nu le poate satisface integral. Sînt de aceea necesare studii ample în vederea realizării practice a unor sisteme de lubrificație care, în condiții normale, să poată acoperi un cîmp larg de utilizări ale lagărelor funcționînd de la viteze foarte reduse pînă la viteze de sute de metri pe secundă sau în condiții de precizie, temperatură exterioară etc., deosebit de severe.

Una dintre soluțiile preconizate este, după cum se știe [1], [2], lubrificația cu gaze. În acest sens, în continuarea lucrărilor începute [3], în cadrul Institutului de mecanică aplicată s-au efectuat în intervalul 1960—1964 unele lucrări experimentale orientate în două direcții : funcționale și aplicații practice. Experiențele funcționale au urmărit comportarea în regim hidrodinamic și hidrostatic a unor tipuri mai importante de lagăre.

LAGĂRE RADIALE FUNCȚIONÎND ÎN REGIM HIDRODINAMIC ȘI HIDROSTATIC

Pentru studiul lagărelor radiale s-a folosit un stand experimental (fig. 1) la care se pot obține șase trepte de viteze, cuprinse între 5 000 și 45 000 rot/min. Standul este pus în funcțiune de motorul electric (*1*)

de 7 kW şi 2 800 rot/min, prin intermediul a două curele trapezoidale (*2*) şi două şaibe interschimbabile (*3*) cu cîte trei trepte. În continuare, axul (*4*) este cuplat cu un amplificator de viteză (*5*) cu raportul de ampli-

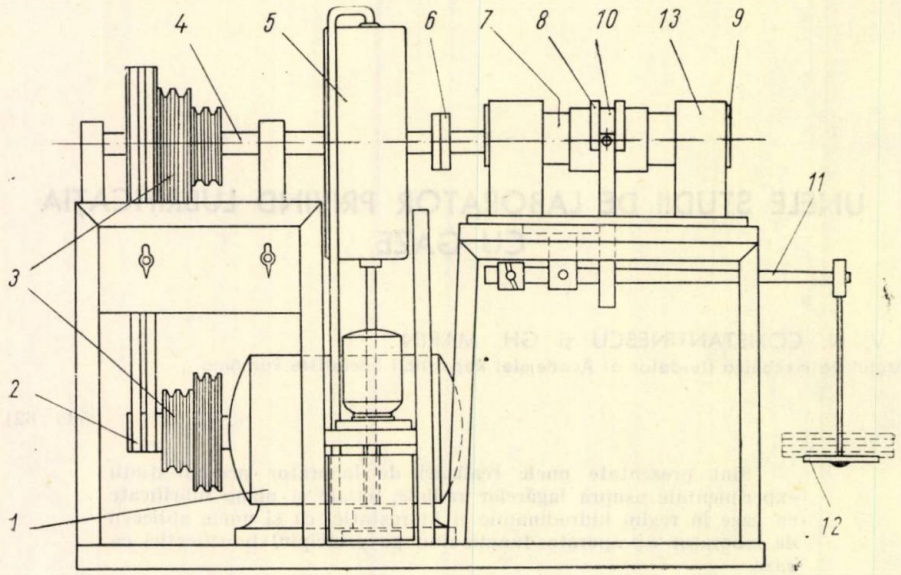


Fig. 1. — Stand pentru studiul lagărelor radiale experimentale cu gaze: *1* — motor; *2* — curele trapezoidale; *3* — şaibe interschimbabile; *4* — axă; *5* — amplificator de viteză cu raportul 10: 1; *6* — disc de cuplaj; *7* — fus experimental; *8* — lagăre radiale; *9* — lagăre axiale; *10* — lagăr experimental; *11* — pîrghie de încărcare; *12* — disc pentru greutăţi; *13* — jug de încărcare.

ficare 10 : 1. Mai departe mişcarea de rotaţie este transmisă discului (*6*), care se cuplează cu fusul experimental (*7*) prin intermediul unei lame elastice care rezistă momentului de pornire, dar se distruge în cazul unui accident, decuplînd astfel lagărul experimental de sistemul de antrenare. Fusul (*7*) este construit din oţel obişnuit, cu diametrul de 100 mm, lungimea de 500 mm şi tratat termic la circa 40—45 unităţi HRc. În primele experienţe, fusul experimental a fost sprijinit la capete pe rulmenţi; ulterior s-au realizat fusuri care se sprijină la capete pe două lagăre radiale, lubrificate de asemenea cu aer (*13*), prevăzute în flancuri cu cîte un lagăr axial (*9*) pentru asigurarea limitării deplasărilor axiale. În mijlocul fusului este plasat lagărul experimental (*10*), care poate avea alungiri şi jocuri radiale diferite.

Încărcarea lagărelor experimentale se face cu ajutorul pîrghiei (*11*), prevăzută la extremitate cu o tijă cu disc (*12*), unde sînt aplicate greutăţile de încărcare. Legătura dintre pîrghia de încărcare şi lagăr se face cu ajutorul jugului (*8*), plasat direct pe lagărul experimental. Pentru evitarea oricăror desimetrii la încărcarea lagărului, s-a prevăzut de asemenea şi posibilitatea încărcării directe, cu greutăţi plasate pe fire, benzi flexibile sau pe şuruburi plantate direct pe lagăr în partea inferioară.

Pentru determinarea eventualului contact dintre lagărul experimental și fus, s-a folosit o instalație de curent de 1,5 V, prevăzută cu un bec electric al cărui circuit a fost astfel realizat încît să se aprindă numai la contactul dintre lagăr și fus. La acest stand s-au făcut experimentări cu lagăre funcționînd în regim hidrodinamic și alimentate sub presiune.

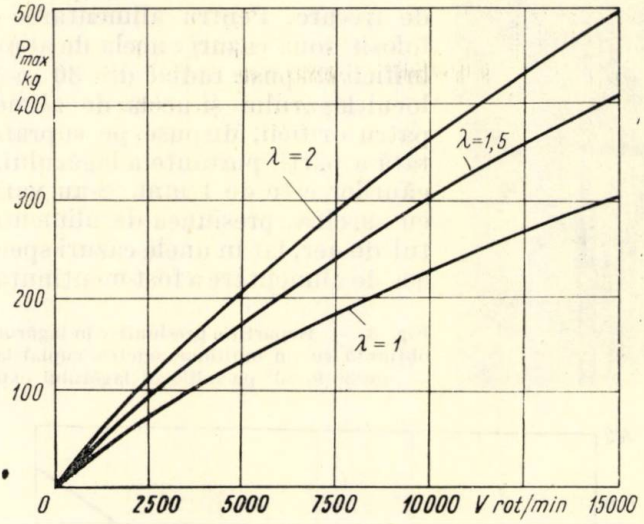


Fig. 2. — Sarcina maximă suportată de lagărele experimentale de alungiri diferite în funcție de sarcină.

În primul caz s-au făcut măsurători pentru determinarea rezultantei presiunilor și repartiției acestora în lagăr, în funcție de viteză (între 5 000 și 15 000 rot/min), joc radial (între 0,5 și $1^0/_{00}$) și alungire (între 1 și 2), iar pentru cel de-al doilea caz s-au făcut măsurători privind variația sarcinii în funcție de presiunea de alimentare cu aer și debit pentru aceleași jocuri și alungiri ca mai sus. Sarcina maximă a lagărelor experimentale s-a considerat ca fiind cea corespunzătoare momentului în care becul sistemului electric de control începe să se aprindă. Încărcarea s-a făcut în trepte cu ajutorul unor greutăți de 10 kg.

În figura 2 se redau un grup de curbe privind sarcina maximă suportată în funcție de turație, pentru lagăre de alungiri diferite.

Repartiția presiunilor în lagărele experimentale a fost măsurată cu ajutorul unui multimanometru cu 13 coloane de mercur, montate pe un panou. Din cele 13 coloane ale multimanometrului, 12 au fost cuplate cu 12 orificii din cuzinet cu diametrul de 1 mm, dispuse din 30 în 30° la mijlocul lagărului, iar ultima coloană a fost conectată cu mediul înconjurător ca martor.

În figura 3 este redat un aspect al curbelor presiunilor în lagăr, realizat prin fotografiere directă.

Cu ajutorul unui aparat [4] s-a urmărit variația temperaturii în lagăr pe tot timpul funcționării lor. S-a constatat că, dacă între supra-

feţele în mişcare relativă nu există contact metalic, încălzirile acestora sînt foarte reduse, temperatura crescînd cu numai 3—4°C.

Pentru studiul lagărelor alimentate sub presiune s-au folosit aceleaşi lagăre ca în prima grupă de experienţe, urmărindu-se de asemenea momentul atingerii suprafeţelor de frecare. Pentru alimentarea cu aer s-au folosit două cazuri : acela de alimentare prin orificii dispuse radial din 30 în 30° pe mijlocul lagărului şi acela de alimentare prin patru orificii, dispuse pe suprafaţa proiectată a părţii portante a lagărului. Diametrul găurilor este de 1 mm. S-au variat, o dată cu sarcina, presiunea de alimentare şi debitul de aer, iar în unele cazuri speciale presiunea de alimentare a fost menţinută constantă.

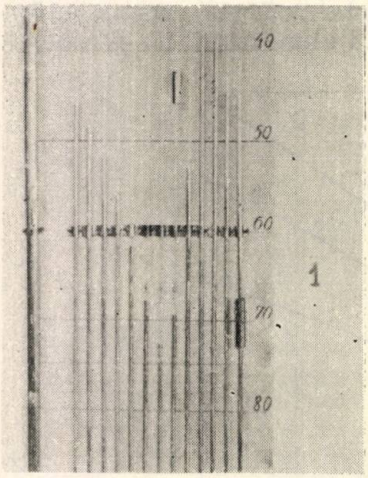


Fig. 3. — Repartiţia presiunilor în lagărul experimental, obţinută cu un multimanometru cuplat la prize dispuse din 30 în 30° pe mijlocul lagărului experimental.

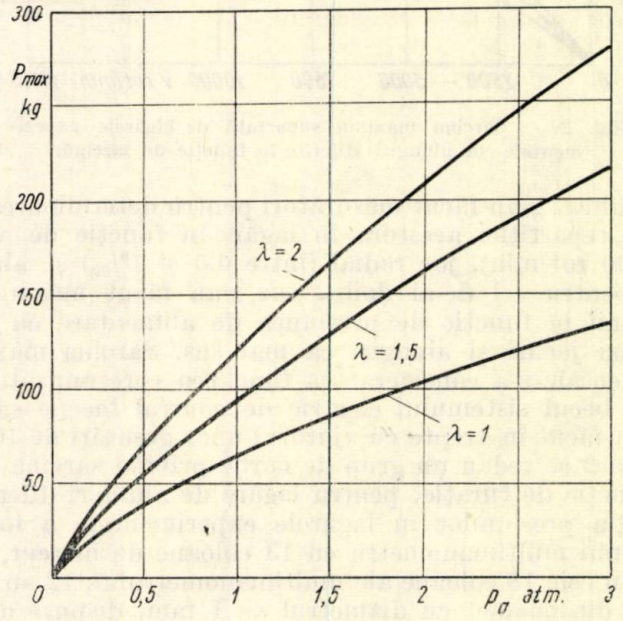


Fig. 4. — Capacitatea portantă a lagărelor circulare de alungiri diferite în funcţie de presiunea de alimentare cu aer.

În figura 4 este reprezentată o familie de curbe a sarcinii în funcţie de presiunea de alimentare pentru lagăre de alungiri diferite.

LAGĂRE AXIALE FUNCȚIONÎND ÎN REGIM HIDRODINAMIC

Acestea au fost experimentate pe un stand (fig. 5) unde motorul (*1*), cu turație între 3 000 și 8 000 rot/min, antrenează axul (*2*) prin intermediul unei lame elastice (*3*). Pe partea superioară a axului (*2*) este plasat lagărul axial mobil (*4*) pe care se reazemă partea imobilă (*5*) a lagărului axial. Deplasările radiale și de rotație ale acestuia sînt limitate cu ajutorul unor știfturi din material izolant, astfel că nu-i rămîne decît libertatea de deplasare axială. Încărcarea lagărului axial se face prin aplicarea unor greutăți pe discul (*6*), de unde, prin tija (*7*), se transmite părții imobile a lagărului. O instalație electrică indică momentul în care se produce contact metalic între suprafețe.

Au fost încercate diferite tipuri de lagăre (fig. 6 *a*, *b* și *c*) în vederea realizării unor capacități de încărcare cît mai mari. Lagărele folosite au aceleași dimensiuni constructive, iar suprafețele lor au fost rectificate cu o mașină obișnuită.

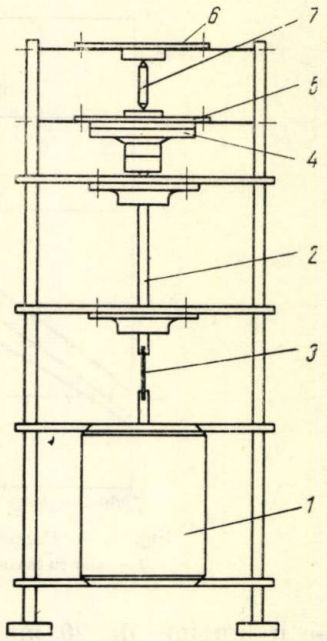


Fig. 5. — Stand pentru studiul lagărelor experimentale axiale:
1 — motor; *2* — axă; *3* — lamă elastică; *4* — lagăr axial mobil; *5* — lagăr axial fix; *6* — disc de încărcare; *7* — tijă.

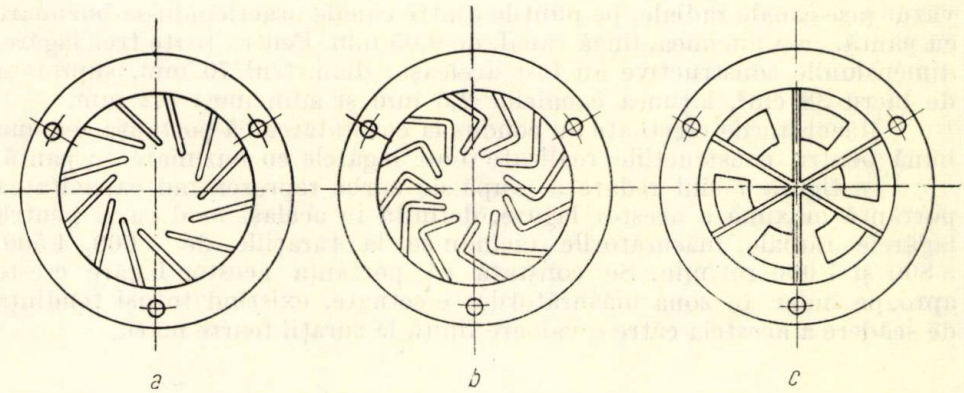


Fig. 6. — Tipuri de lagăre axiale:
a — lagăr cu canale înclinate la 20° față de rază; *b* — lagăr cu canale în unghi de 90°; *c* — lagăr cu șase buzunare în pantă.

Lagărele „*a*" și „*b*" au fost realizate folosind ideea [5]. Din păcate, lipsa unor condiții tehnice a făcut imposibilă realizarea corectă a cana-

lelor, realizînd canale drepte în loc de canale elicoidale. Probabil aşa se explică performanţele ceva mai slabe obţinute cu aceste tipuri de lagăre. Lagărul „*a*" are practicate 12 canale, înclinate cu 20° faţă de rază, în sensul de rotire a părţii mobile a lagărului. În lagărul „*b*" s-au practicat tot 12 canale, în unghi de 45° faţă de rază în aceeaşi direcţie,

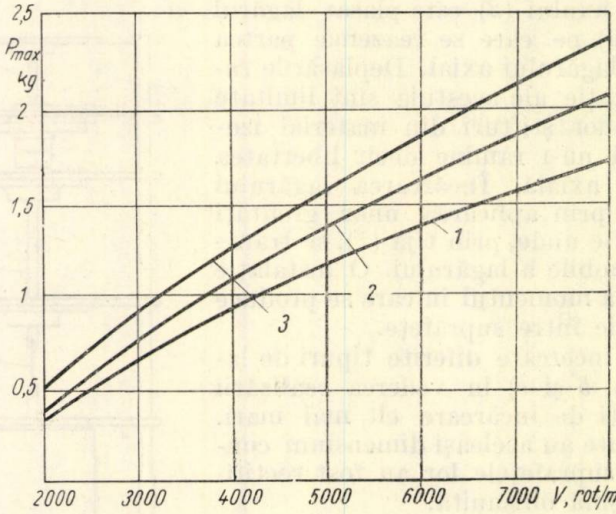


Fig. 7. — Capacitatea portantă maximă a lagărelor axiale: *1* — lagăr cu canale drepte; *2* — lagăr cu canale în unghi de 90°; *3* — lagăr cu buzunare.

pe o lungime de 20 mm, după care, făcînd un unghi de 90°, parcurg aceeaşi lungime în sensul invers al rotaţiei. Pentru lagărul „*c*" s-au prevăzut şase canale radiale, pe punţile dintre canale practicîndu-se buzunare cu pantă, cu adîncimea, lîngă canal, de 0,05 mm. Pentru toate trei lagăre, dimensiunile constructive au fost aceleaşi: diametrul 70 mm, suprafaţa de lucru 38 cm², lăţimea canalelor 2,5 mm şi adîncimea 0,2 mm.

Măsurătorile efectuate au condus la constatarea că portanţa cea mai bună pentru construcţiile realizate o au lagărele cu buzunare în pantă.

În figura 7 sînt redate o grupă de curbe reprezentînd capacitatea portantă maximă a acestor lagăre, definită în acelaşi mod ca şi pentru lagărele radiale, măsurătorile făcîndu-se la turaţiile de 3 000, 4 500, 5 800 şi 7 000 rot/min. Se constată că portanţa acestor lagăre creşte aproape liniar în zona măsurătorilor efectuate, existînd totuşi tendinţa de scădere a acesteia către o valoare finită la turaţii foarte mari.

LAGĂRE PLANE ALIMENTATE SUB PRESIUNE

S-a construit un grup de trei lagăre plane (fig. 8) în vederea stabilirii relaţiilor dintre micro- şi macrogeometria suprafeţelor de frecare, presiunea de alimentare cu aer, numărul şi diametrul orificiilor de ali-

mentare, precum și forma geometrică și mărimea buzunarelor. În acest scop, la unul dintre lagăre s-a păstrat forma inițială plană, la al doilea

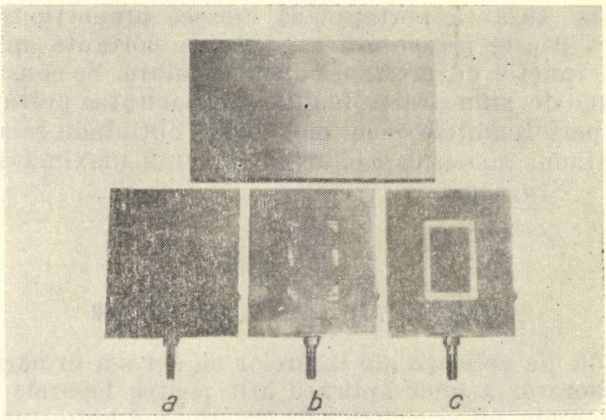


Fig. 8. — Lagăre plane alimentate sub presiune :
a — lagăr plan prevăzut cu șase găuri de alimentare cu aer ; *b* — lagăr plan prevăzut cu canale întrerupte ; *c* — lagăr plan prevăzut cu buzunar (canal) continuu ; *d* — suport metalic.

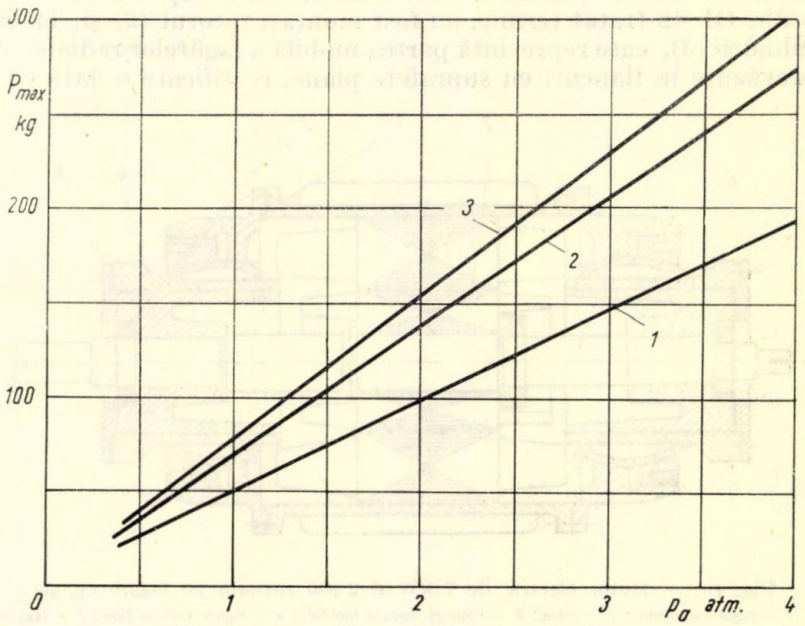


Fig. 9. — Capacitatea portantă a lagărelor plane alimentate sub presiune :
1 — lagăr fără canale ; *2* — lagăr cu canal întrerupt ; *3* — lagăr cu canal continuu.

s-au practicat buzunare întrerupte, iar la al treilea un buzunar continuu (canal), trecînd prin cele șase orificii de alimentare cu aer. Mărimea plă-

cilor este de 120 ×150 mm, totalizînd 180 cm². Canalele au lăţimea de 6 mm şi adîncimea de 0,2 mm, iar găurile de alimentare au fost iniţial de 0,8 mm. Mărirea ulterioară a găurilor de alimentare a condus la o mărire de debit fără ca portanţa să crească proporţional.

În figura 9 este prezentată capacitatea portantă maximă a celor trei lagăre în funcţie de presiunea de alimentare. Se constată că, pentru aceeaşi presiune de alimentare, debitul şi capacitatea portantă a acestora sînt diferite, performanţele cele mai bune obţinîndu-se cu lagărul cu buzunar continuu, unde capacitatea portantă maximă se apropie de valoarea $P_e = \frac{S(p_a - p_0)}{2}$.

APLICAŢII ALE LAGĂRELOR CU AER

În studiile de aplicaţii ale lagărelor cu aer s-a urmărit realizarea în stadiul de laborator a unor aplicaţii atît pentru lagărele funcţionînd în regim hidrodinamic, cît şi pentru cele funcţionînd hidrostatic şi combinat.

Ca o utilizare a lagărelor funcţionînd în regim hidrodinamic s-a construit un motor electric (fig. 10) de 7 kW şi 2 800 rot/min, utilizîndu-se un motor de fabricaţie curentă, de serie, la care s-au făcut modificările necesare pentru a fi utilizat în acest scop. Pe fusul (*1*), construit din OL 42 tratat termic, au fost montaţi rotorul (*2*) şi, la extremităţi, cilindrii (*3*), care reprezintă partea mobilă a lagărelor radiale. Acestea sînt prevăzute în flancuri cu suprafeţe plane, rectificate o dată cu partea

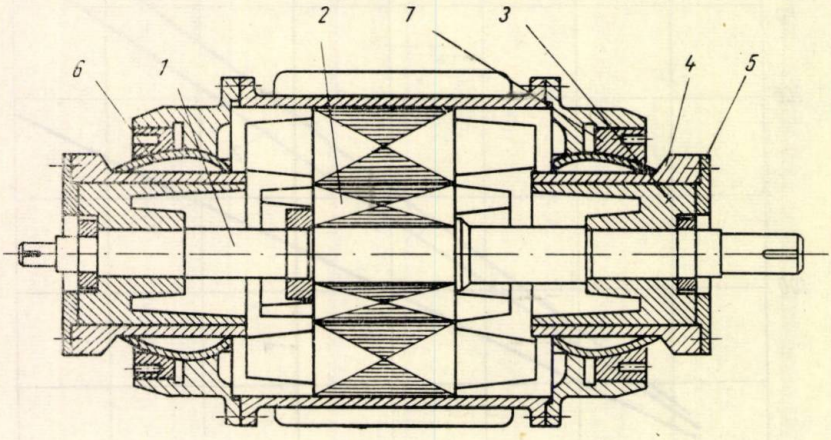


Fig. 10. — Motor electric de 7 kW şi 2 800 rot/min pe lagăre cu aer:
1 — fusul motorului; *2* — rotor; *3* — cilindri (lagăre mobile); *4* — lagăre radiale fixe; *5* — lagăre axiale fixe; *6* — sector sferic extensibil; *7* — piuliţă de fixare.

cilindrică, care reprezintă partea mobilă a lagărelor axiale. Lagărele, atît radiale (*4*), cît şi axiale (*5*), sînt construite din fontă Fc24, cu dimensiunile interioare de 135 mm, alungire de 1,25 şi joc radial de 0,8 ‰,

iar cele axiale cu suprafața portantă de 125 cm². Pe suprafețele portante ale lagărelor axiale au fost practicate șase buzunare în pantă pentru fiecare lagăr. În vederea așezării în poziție axială a lagărelor, motorul a fost prevăzut cu un sector sferic (*6*) extensibil, care blochează în poziția dorită lagărul radial cu ajutorul piuliței (*7*). Pentru evitarea frecărilor uscate la porniri și opriri și pentru a micșora cuplul de pornire a motorului, lagărele radiale au fost prevăzute cu cîte patru găuri cu diametrul de 0,8 mm, dispuse simetric pe suprafețele de frecare, în partea inferioară, pentru alimentarea cu aer sub presiune din exterior.

Sistemul de alimentare cu aer folosește cu bune rezultate și la montarea motorului. Astfel, pentru o presiune de 7—9 atm, rotorul este împins în partea superioară a lagărului cu o forță (conform celor arătate mai sus) de aproximativ $\frac{S(p_a - p_0)}{2}$, adică, înlocuind valorile, circa 500—600 kgf. Aceasta face ca lagărele să se așeze în poziție axială cu fusul, după care se blochează.

Pentru verificarea continuă a bunei funcționări a lagărelor motorului s-a folosit aceeași instalație electrică cu bec de 1,5 V, aprinderea becului de control avînd loc numai la contactul metalic dintre fusul motorului și lagăre. În aceste condițiuni se pot depista din vreme și eventualele defecțiuni înainte de a se produce accidente.

Punerea în funcțiune a motorului în această primă etapă se face introducînd între suprafețele de frecare ale lagărelor aer sub presiunea de 0,35 atm, presiune suficientă pentru ca cele două suprafețe să nu mai fie în contact direct, rotorul „plutind" în spațiul său de funcționare. În acest fel, pornirea și oprirea motorului întîmpină numai rezistența rezultată din inerția motorului. După atingerea turației de regim, alimentarea cu aer din exterior este întreruptă, funcționarea avînd loc în regim pur hidrodinamic. S-au făcut unele încercări de anduranță și de urmărire a temperaturii în lagărele motorului.

Pentru ambele cazuri, motorul s-a comportat în bune condiții. După circa 200 de ore de funcționare, motorul a fost demontat și s-au făcut verificări comparative ale suprafețelor de frecare față de calitatea inițială a acestora. Nu s-au găsit urme de defecțiuni evidente, aceasta demonstrînd buna funcționare a motorului pe această perioadă. După verificare motorul a fost remontat și pus în funcționare.

De o construcție asemănătoare cu cea descrisă mai sus a mai fost realizat un alt motor electric, funcționînd pe verticală, cu puterea de 60 W și antrenat cu curent electric de 400 Hz la 22 000 rot/min.

Ca aplicație a lagărelor alimentate sub presiune au fost realizate două machete de lagăre plane (fig. 11); unul circular, avînd libertate de deplasare în orice direcție pe orizontală, și unul dreptunghiular, care se poate deplasa numai în lungul suportului.

Macheta lagărului circular reprezintă posibilitatea de construcție a unor vehicule de transportat piese mari și grele, sau calde, fie pe o cale metalică, fie pe o cale de beton sclivisit.

Sistemul are avantajul de a necesita o energie minimă pentru deplasări orizontale şi, în plus, permite schimbări de direcţie, rotiri la orice unghi etc.

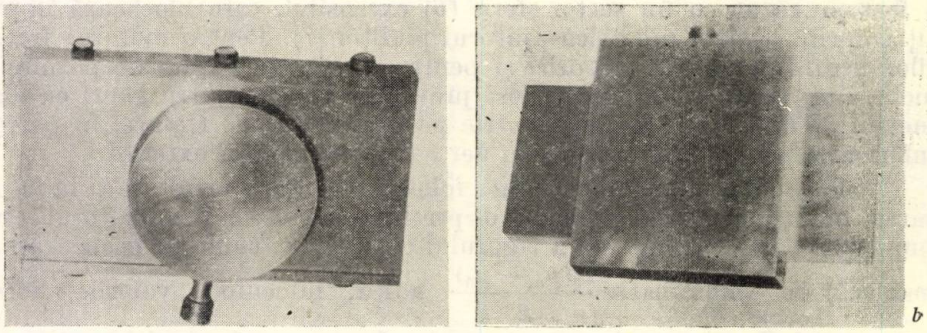


Fig. 11. — Machete de aplicaţii ale lagărelor plane alimentate sub presiune : *1* — lagăr circular ; *2* — lagăr dreptunghiular.

Macheta dreptunghiulară reprezintă posibilitatea utilizării unor astfel de construcţii la unele maşini-unelte, monoraiuri, transportoare etc.

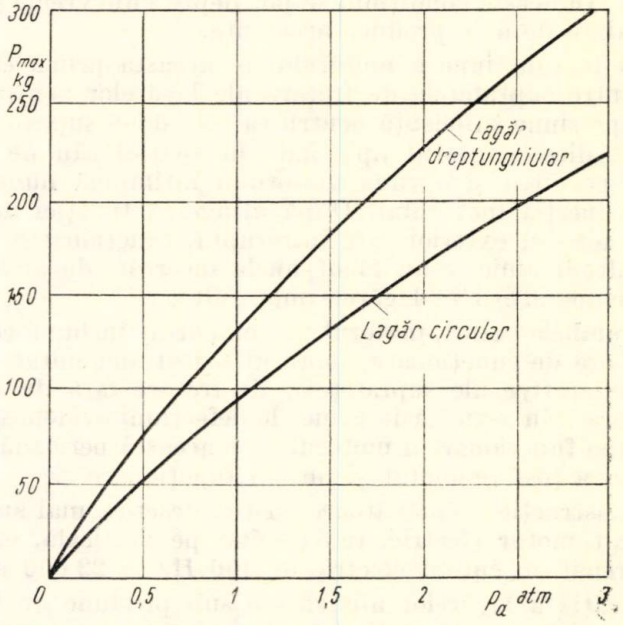


Fig. 12. — Capacitatea portantă a machetelor de lagăre plane în funcţie de presiunea de alimentare cu aer : *1* — lagăr circular ; *2* — lagăr dreptunghiular.

Dimensiunile lagărului circular sînt : diametrul 145 mm şi suprafaţa portantă de 165 cm², iar ale lagărului dreptunghiular : 160 × ×130 mm şi suprafaţa portantă de 208 cm².

Ambele machete au fost prevăzute pe suprafața portantă cu cîte șase găuri de alimentare cu aer cu diametrul de 1 mm , fără alte construcții de îmbunătățire a portanței (canale, buzunare etc.), iar la lagărul dreptunghiular au mai fost practicate în plus cîte trei găuri, cu același diametru pe ghidajele laterale. Valoarea capacității portante maxime a acestor lagăre este dată în figura 12, în funcție de presiunea de alimentare cu aer.

Rezultatele obținute atît cu lagărele experimentale, cît și cu motorul și machetele de lagăre plane scot în evidență faptul că din punct de vedere funcțional lagărele cu aer pot fi utilizate cu succes pentru construirea unor serii de agregate funcționînd de la turații foarte mari pînă la viteze mici sau chiar zero.

Primită la redacție la 7 iulie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Lubrificația cu gaze*, Edit. Acad. R.P.R., București, 1963.
2. W. A. Gross, *Gas Film Lubrication*, John Wiley & Sons, New York, 1962.
3. V. N. Constantinescu, Gh. Marin, *Motor pneumatic cu lagăre cu aer*, St. cerc. mec. apl., **XI**, *1* (1960).
4. Gh. Marin, *Aparat pentru măsurat temperaturi*, St. cerc. mec. apl., **X**, *4* (1959).
5. G. W. K. Ford, D. M. Harris, D. Pantall, *Principles and Applications of Hidrodynamic Type Gas Bearings*, Proc. of Mech. Eng., Londra, 1957.

METODA SOLIDARIZĂRII PENTRU LANȚURILE CINEMATICE ÎNCHISE. II[1])

de CHR. PELECUDI
Centrul de mecanica solidelor al Academiei Republicii Socialiste România

531.1

La determinarea acceleraţiilor în lanţurile cinematice, metoda solidarizării continuă să-şi păstreze avantajele semnalate la determinarea vitezelor [11]. Această metodă se bazează pe proprietăţile de proiecţii ale acceleraţiilor pentru lanţurile formate din cîte trei corpuri, ceea ce reduce numărul de laturi din construcţia poligoanelor auxiliare (false) şi poate determina direct dreapta punctelor finale din aceeaşi construcţie. Se obţine astfel mărirea preciziei în determinările acceleraţiilor.

Proprietăţile metodei sînt exemplificate pe lanţuri cinematice cu contururi de diferite clase. Se remarcă reducerea claselor IV—VI direct la contururi de clasa III, iar a claselor VII—VIII la contururi de clasa IV, care se pot înlocui în final prin două contururi de clasa III.

Pentru determinarea acceleraţiilor în sistemele de solide cu legături, metodele de calcul sînt ceva mai dificile decît cele ale vitezelor, din cauza complicaţiilor ecuaţiilor vectoriale cu termenii suplimentari. Aceşti termeni, ca $\overline{a}^n_{BA}$—acceleraţia normală din rotaţia punctului B faţă de punctul A; $\overline{a}^c_{B_{21}}$ — acceleraţia Coriolis din mişcarea punctului B_2 faţă de primul element; $\overline{a}^r_{I_{21}}$ — acceleraţia relativă din centrul instantaneu al vitezelor a punctului I_2 faţă de elementul întîi, sînt cunoscuţi pentru că depind numai de vectorii de viteză. Dar numărul laturilor poligoanelor auxiliare este dublu faţă de numărul laturilor poligoanelor auxiliare pentru viteze. Desigur, dreapta punctelor finale Δ' din construcţia acceleraţiilor este paralelă cu aceea din construcţia vitezelor, ceea ce permite construcţia unui singur poligon auxiliar (fals) şi a poli-

[1]) Publicată şi în „Rev. roum. sci. teh. — Mécanique Appliquée", **10**, *6* (1965) (în limba franceză).

gonului real. Totuși, reducerea numărului de laturi prin utilizarea metodei solidarizării mărește precizia calculelor și reduce volumul de lucru, permițînd direct construcția finală.

1. STUDIUL ACCELERAȚIILOR PENTRU LANȚURILE SIMPLE ÎNCHISE CU CUPLE DE ROTAȚIE

1.1. *Metoda poligoanelor auxiliare.* Proiecțiile de accelerații din vîrfurile conturului poligonal (lanț închis) sînt date pentru exemplul considerat (fig. 1) pe direcțiile $\Delta\ A_1P_{16}$ și $\Delta\ A_1P_{12}$, $\Delta\ B_3P_{32}$ și $\Delta\ B_3P_{34}$, $\Delta\ C_5P_{54}$ și $\Delta\ C_5P_{56}$. În planul accelerațiilor (fig. 2), extremitățile finale ale accelerațiilor $\bar{a}_{P_{1,2}}$, $\bar{a}_{P_{2,3}}, \ldots, \bar{a}_{P_{6,1}}$ se găsesc pe dreptele

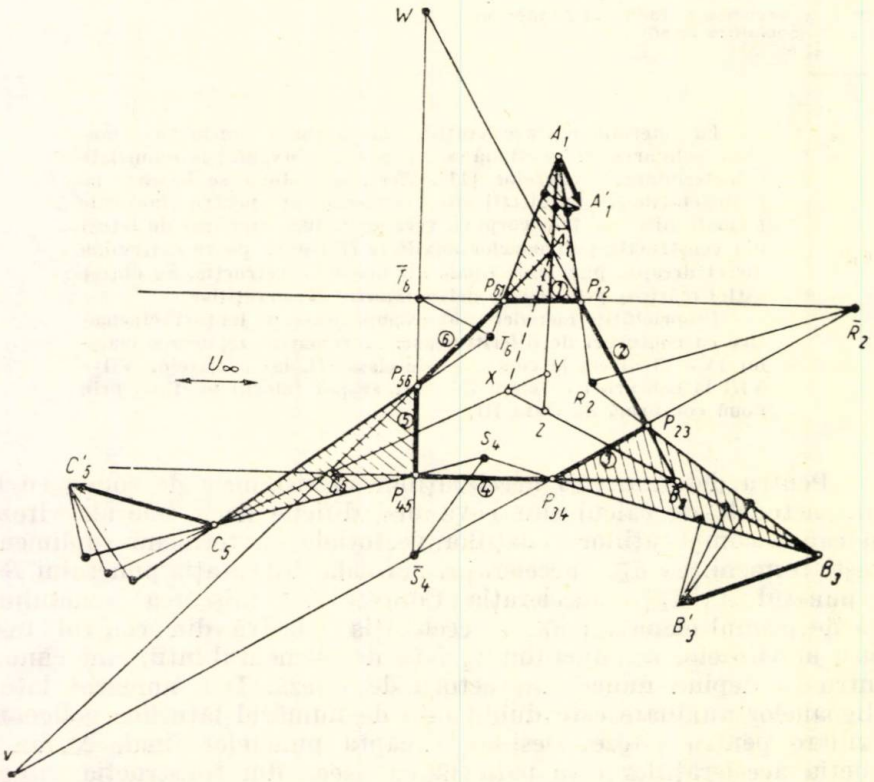


Fig. 1

Δp_{12}, $\Delta p_{23}, \ldots, \Delta p_{61}$, perpendiculare pe direcțiile proiecțiilor în extremitățile acestora și care diferă de cele ale accelerațiilor cunoscute ale punctelor A_1, B_3, C_5 prin termenii accelerațiilor normale de rotație.

Pentru această situație se obțin ecuațiile

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{a}_{P_2^3}}{\Delta p_{23}} &= \frac{\bar{a}_{P_2^1}}{\Delta p_{12}} + \frac{\bar{a}^n_{P_2^3 P_2^1}}{\| P_{12} P_{23}} + \frac{\bar{a}^t_{P_2^3 P_2^1}}{\perp P_{12} P_{23}} \\
\frac{\bar{a}_{P_3^4}}{\Delta p_{34}} &= \frac{\bar{a}_{P_3^2}}{\Delta p_{23}} + \frac{\bar{a}^n_{P_3^4 P_3^2}}{\| P_{23} P_{34}} + \frac{\bar{a}^t_{P_3^4 P_3^2}}{\perp P_{23} P_{34}} \\
\frac{\bar{a}_{P_4^5}}{\Delta p_{45}} &= \frac{\bar{a}_{P_5^3}}{\Delta p_{34}} + \frac{\bar{a}^n_{P_4^5 P_4^3}}{\| P_{34} P_{45}} + \frac{\bar{a}^t_{P_4^5 P_4^3}}{\perp P_{34} P_{45}} \\
\frac{\bar{a}_{P_5^6}}{\Delta p_{56}} &= \frac{\bar{a}_{P_5^4}}{\Delta p_{45}} + \frac{\bar{a}^n_{P_5^6 P_5^4}}{\| P_{45} P_{56}} + \frac{\bar{a}^t_{P_5^6 P_5^4}}{\perp P_{45} P_{56}} \\
\frac{\bar{a}_{P_6^1}}{\Delta p_{16}} &= \frac{\bar{a}_{P_6^5}}{\Delta p_{56}} + \frac{\bar{a}^n_{P_6^1 P_6^5}}{\| P_{56} P_{61}} + \frac{\bar{a}^t_{P_6^1 P_6^5}}{\perp P_{56} P_{61}} \\
\frac{\bar{a}_{P_1^2}}{\Delta p_{12}} &= \frac{\bar{a}_{P_1^6}}{\Delta p_{16}} + \frac{\bar{a}^n_{P_1^2 P_1^6}}{\| P_{61} P_{12}} + \frac{\bar{a}^t_{P_1^2 P_1^6}}{\perp P_{61} P_{12}}
\end{aligned} \tag{1}$$

în care

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_{P_2^1} = \bar{a}_{P_1^2}\,; \quad \bar{a}_{P_3^2} = \bar{a}_{P_2^3}\,; \quad \bar{a}_{P_4^3} = \bar{a}_{P_3^4} \\
&\bar{a}_{P_5^4} = \bar{a}_{P_4^5}\,; \quad \bar{a}_{P_6^5} = \bar{a}_{P_5^6}\,; \quad \bar{a}_{P_1^6} = \bar{a}_{P_6^1}
\end{aligned} \tag{2}$$

pentru centre de rotație permanente sau ($P \equiv I$)

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{I_2^1} &= \bar{a}_{I_1^2} + \bar{a}^r_{I_{21}} \\
\bar{a}_{I_3^2} &= \bar{a}_{I_2^3} + \bar{a}^r_{I_{32}} \\
\bar{a}_{I_4^3} &= \bar{a}_{I_3^4} + \bar{a}^r_{I_{43}} \\
\bar{a}_{I_5^4} &= \bar{a}_{I_4^5} + \bar{a}^r_{I_{54}} \\
\bar{a}_{I_6^5} &= \bar{a}_{I_5^6} + \bar{a}^r_{I_{65}} \\
\bar{a}_{I_1^6} &= \bar{a}_{I_6^1} + \bar{a}^r_{I_{16}}
\end{aligned} \tag{3}$$

pentru centre de rotație instantanee. În fiecare ecuație din sistemul (1) sînt numai trei parametri necunoscuți. Prin metoda poligoanelor auxi-

liare (poziţii false), din cauza termenilor cunoscuţi care nu variază pentru diferitele construcţii auxiliare, se obţin dreptele $\Delta\alpha_{12} \| \Delta p_{12}$, $\Delta\alpha_{23} \| \Delta p_{23}$, $\Delta\alpha_{34} \| \Delta p_{34}$, $\Delta\alpha_{45} \| \Delta p_{45}$, $\Delta\alpha_{56} \| \Delta p_{56}$, $\Delta\alpha_{61} \| \Delta p_{61}$, între care se duc per-

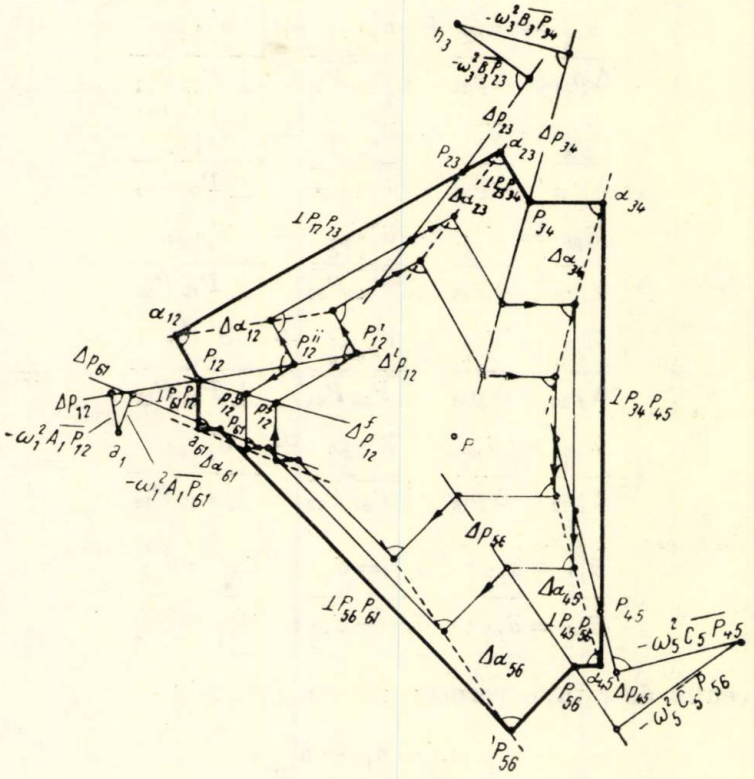


Fig. 2

pendicularele pe dreptele conturului poligonal al lanţului închis (fig. 1 şi 2). Pornind de la punctele iniţiale p_{12}^i, se obţin punctele finale p_{12}^f pentru diferitele poligoane auxiliare la intersecţia primei şi ultimei laturi, exceptîndu-se latura termenului cunoscut. Dreptele punctelor iniţiale $\Delta^i p_{12}$ şi ale punctelor finale $\Delta^f p_{12}$ sînt paralele cu cele din construcţia vitezelor, şi la intersecţia lor se găseşte, desigur, punctul real p_{12}.

1.2. Metoda solidarizării se bazează, ca şi în cazul vitezelor, pe proprietăţile proiecţiilor pentru acceleraţiile punctelor dreptei care trece prin centrele relative de rotaţie a trei corpuri în mişcare plană : *proiecţiile acceleraţiilor punctelor de pe dreapta centrelor pe această dreaptă, indiferent cărui corp aparţin punctele, se pot deduce direct unele din altele, pentru că diferă prin termeni cunoscuţi* ($\overline{a}^n_{BA}$, $\overline{a}^c_{B_{21}}$ sau $\overline{a}^r_{I_{21}}$).

Dacă pentru viteze avem

$$pr._{\Delta}\,\bar{v}_{C_1} = pr._{\Delta}\,\bar{v}_{C_2} = pr._{\Delta}\,\bar{v}_{C_3}, \tag{4}$$

la accelerații, din ecuația compunerii în mișcarea relativă

$$\bar{a}_{C_2} = \bar{a}_{C_1} + \bar{a}^{c}_{C_{21}} + \bar{a}^{r}_{C_{21}} =$$

$$= \bar{a}_{C_1} + \bar{a}^{c}_{C_{21}} + \bar{a}^{r}_{I_{21}} + \bar{a}^{rn}_{C_{21}I_{21}} + \bar{a}^{rt}_{C_{21}I_{21}},$$

se obține

$$pr._{\Delta}\,\bar{a}_{C_2} = pr._{\Delta}\,\bar{a}_{C_1} + pr._{\Delta}\,\bar{\Phi}_{C_{21}},$$

în care termenul $\bar{\Phi}_{C_{21}}$ este cunoscut:

$$\bar{\Phi}_{C_{21}} = \bar{a}^{r}_{I_{21}} + \bar{a}^{rn}_{C_{21}I_{21}} + \bar{a}^{c}_{C_{21}}$$

cu

$$\bar{\alpha}_{C_{21}} = \bar{a}^{rn}_{C_{21}I_{21}} + \bar{a}^{c}_{C_{21}},$$

care pentru centre de rotație la distanță finită are valoarea

$$\bar{\alpha}_{C_{21}} = (\omega_1^2 - \omega_2^2)\,\overline{I_{21}C},$$

iar pentru centre de rotație la infinit ($\omega_2 = \omega_1$) are valoarea

$$\bar{\alpha}_{C_{21}} = 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{21} = \bar{a}^{c}_{21}, \qquad \bar{a}^{rn}_{C_{21}I_{21}} = 0.$$

Dacă centrul de rotație este permanent,

$$\bar{\Phi}_{C_{21}} = \bar{\alpha}_{C_{21}},$$

relațiile de proiecții devin

$$\begin{aligned} pr._{\Delta}\,\bar{a}_{C_2} &= pr._{\Delta}\,\bar{a}_{C_1} + \alpha_{C_{21}} \\ pr._{\Delta}\,\bar{a}_{C_3} &= pr._{\Delta}\,\bar{a}_{C_2} + \alpha_{C_{32}} \\ pr._{\Delta}\,\bar{a}_{C_1} &= pr._{\Delta}\,\bar{a}_{C_3} + \alpha_{C_{13}}. \end{aligned} \tag{5}$$

1.2.1. Datorită acestor proprietăți ale accelerațiilor, metoda pozițiilor false, se poate aplica conturului redus ($n/2$) triunghiular A_1, B_3, C_5, în vîrfurile căruia se cunosc proiecțiile de accelerații $pr.\,\bar{a}_{\bar{A}_1}$, $pr.\,\bar{a}_{\bar{B}_3}$ și $pr.\,\bar{a}_{\bar{C}_5}$ pe direcțiile $\Delta A_1\bar{A}_1$, $\Delta B_3\bar{B}_3$ și $\Delta C_5\bar{C}_5$ deduse din proiecțiile accelerațiilor $\bar{a}_{A_1}$, $\bar{a}_{B_3}$ și $\bar{a}_{C_5}$ pe aceeași direcție, dar de care diferă prin termenii accelerațiilor normale de rotație (fig. 3). În planul accelerațiilor, vîrfurile vectorilor $\bar{a}_{\bar{A}_1}$, $\bar{a}_{\bar{B}_3}$, $\bar{a}_{\bar{C}_5}$ se găsesc pe dreptele $\Delta\,\bar{a}_1$,

$\Delta\overline{b}_3$, $\Delta\overline{c}_5$, perpendiculare pe direcţiile proiecţiilor în extremităţile lor. Cu ajutorul ecuaţiilor

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{a}_{\overline{B}_3}}{\Delta\overline{b}_3} &= \frac{\overline{a}_{\overline{A}_1}}{\Delta\overline{a}_1} + \frac{\overline{a}^{n}_{\overline{B}_3\overline{A}_1}}{\| \overline{A}_1\overline{B}_3} + \frac{\overline{a}^{t}_{\overline{B}_3\overline{A}_1}}{\perp \overline{A}_1\overline{B}_3} \\
\frac{\overline{a}_{\overline{C}_5}}{\Delta\overline{c}_5} &= \frac{\overline{a}_{\overline{B}_3}}{\Delta\overline{b}_3} + \frac{\overline{a}^{n}_{\overline{C}_5\overline{B}_3}}{\| \overline{B}_3\overline{C}_5} + \frac{\overline{a}^{t}_{\overline{C}_5\overline{B}_3}}{\perp \overline{B}_3\overline{C}_5} \qquad (6) \\
\frac{\overline{a}_{\overline{A}_1}}{\Delta\overline{a}_1} &= \frac{\overline{a}_{\overline{C}_5}}{\Delta\overline{c}_5} + \frac{\overline{a}^{n}_{\overline{A}_1\overline{C}_5}}{\| \overline{C}_5\overline{A}_1} + \frac{\overline{a}^{t}_{\overline{A}_1\overline{C}_5}}{\perp \overline{C}_5\overline{A}_1},
\end{aligned}$$

care au termenii complet cunoscuţi

$$\begin{aligned}
\overline{a}^{n}_{\overline{B}_3\overline{A}_1} &= \overline{a}^{n}_{P_1^2\overline{A}_1} + \overline{a}^{n}_{P_2^3P_2^1} + \overline{a}^{n}_{\overline{B}_3P_3^2} \\
\overline{a}^{n}_{\overline{C}_5\overline{B}_3} &= \overline{a}^{n}_{P_3^4\overline{B}_3} + \overline{a}^{n}_{P_4^5P_3^4} + \overline{a}^{n}_{\overline{C}_5P_5^4} \qquad (7) \\
\overline{a}^{n}_{\overline{A}_1\overline{C}_5} &= \overline{a}^{n}_{P_5^6\overline{C}_5} + \overline{a}^{n}_{P_6^1P_5^6} + \overline{a}^{n}_{\overline{A}_1P_1^6}
\end{aligned}$$

şi termenii cunoscuţi numai în direcţie

$$\begin{aligned}
\overline{a}^{t}_{\overline{B}_3\overline{A}_1} &= \overline{a}^{t}_{P_1^2\overline{A}_1} + \overline{a}^{t}_{P_2^3P_2^1} + a^{t}_{\overline{B}_3P_3^2} \\
\overline{a}^{t}_{\overline{C}_5\overline{B}_3} &= \overline{a}^{t}_{P_3^4\overline{B}_3} + \overline{a}^{t}_{P_4^5P_3^4} + \overline{a}^{t}_{\overline{C}_5P_5^4} \qquad (8) \\
\overline{a}^{t}_{\overline{A}_1\overline{C}_5} &= \overline{a}^{t}_{P_5^6\overline{C}_5} + \overline{a}^{t}_{P_6^1P_5^6} + \overline{a}^{t}_{\overline{A}_1P_{16}},
\end{aligned}$$

se construiesc poligoanele auxiliare. Pentru termenii cunoscuţi se obţin dreptele $\Delta\alpha_1 \| \Delta\overline{a}_1$; $\Delta\beta_3 \| \Delta\overline{b}_3$ şi $\Delta\gamma_5 \| \Delta\overline{c}_5$ (fig. 3), iar în vîrfurile poligoanelor auxiliare de pe aceste drepte unghiurile laturilor sînt egale cu $\frac{\Pi}{2}$. Dacă se elimină laturile cunoscute, respectiv termenii care reprezintă acceleraţii normale de rotaţie, şi se prelungesc laturile corespunzătoare acceleraţiilor tangenţiale de rotaţie, respectiv $\alpha_1\,\overline{b}_3$, $\beta_3\,\overline{c}_5$, $\gamma_5\,\overline{a}_1$, se obţine în planul acceleraţiilor triunghiul $\Delta\,\overline{\overline{a}}_1\,\overline{\overline{b}}_3\,\overline{\overline{c}}_5$, care este asemenea cu triunghiul din planul lanţului cinematic $\Delta\,\overline{A}_1\,\overline{B}_3\,\overline{C}_5$, pentru că au laturi perpendiculare şi cu triunghiul corespunzător din planul vitezelor cu care are laturi paralele.

1.2.2. Pe baza acelorași proprietăţi de asemănare, poligoanele auxiliare triunghiulare vor avea vîrfurile pe dreptele $\Delta\, x\, \overline{\overline{a}}_1$, $\Delta\, x\, \overline{\overline{b}}_3$, $\Delta\, x\, \overline{\overline{c}}_5$ concurente în x, paralele cu dreptele corespunzătoare din triunghiul vitezelor şi perpendiculare pe dreptele $X\,\overline{A}_1$, $X\,\overline{B}_3$ şi $X\,\overline{C}_5$ din triunghiul lanţului cinematic.

Se obține, desigur, aceeași direcție a dreptei punctelor finale Δ' ca și pentru viteze, respectiv $\Delta\, x\, \bar{\bar{a}}_1 \perp \Delta\, X\, \bar{A}_1$.

Poziția acesteia este determinată de un singur punct final $\bar{a}_1'$, pe baza construcției unui singur poligon auxiliar sau a unui patrulater format cu punctele $\bar{a}_1^i$ α_1^i $\bar{\bar{a}}_1^i$ și $\bar{a}_1'$ dacă se cunoaște poziția dreptei $x\, \bar{\bar{a}}_1$. În acest scop se pot construi triunghiurile $\bar{b}_3\ \beta_3\ \bar{\bar{b}}_3$ și $\bar{c}_5\ \gamma_5\ \bar{\bar{c}}_5$ pe laturile cunoscute $\bar{b}_3\ \beta_3$ și $\bar{c}_5\ \gamma_5$, ceea ce permite trasarea dreptelor

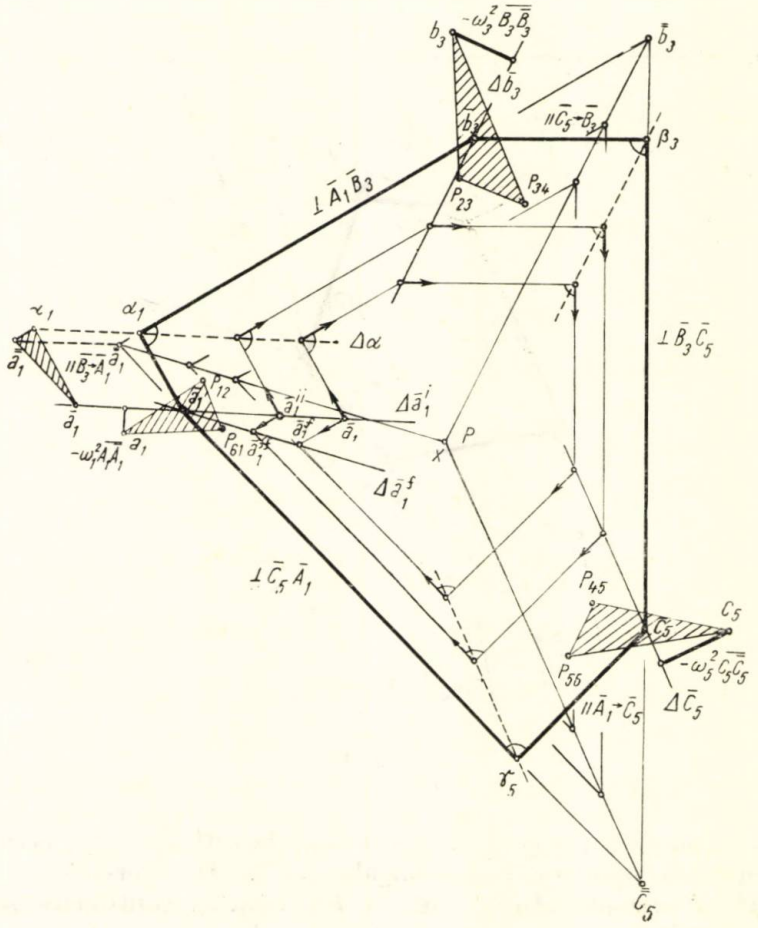


Fig. 3

$\Delta\bar{\bar{b}}_3 \parallel \Delta\bar{b}_3 \parallel \Delta\beta_3$ și $\Delta\bar{\bar{c}}_5 \parallel \Delta\bar{c}_5 \parallel \Delta\gamma_5$ care se intersectează în punctul x. Acesta, împreună cu direcția perpendiculară la dreapta $\Delta\, X\, \bar{A}_1$, poziționează dreapta $\Delta\, x\, \bar{\bar{a}}_1$.

2. STUDIUL ACCELERAȚIILOR PENTRU LANȚURILE SIMPLE ÎNCHISE CU CUPLE DE TRANSLAȚIE

2.1. Pentru un lanț deformabil compus din cinci elemente legate prin trei cuple de rotație P_{51}, P_{23} și P_{34} și două cuple de translație pentru care centrele sînt la infinit $P_{12\infty}$ și $P_{45\infty}$, se cunosc accelerațiile punc-

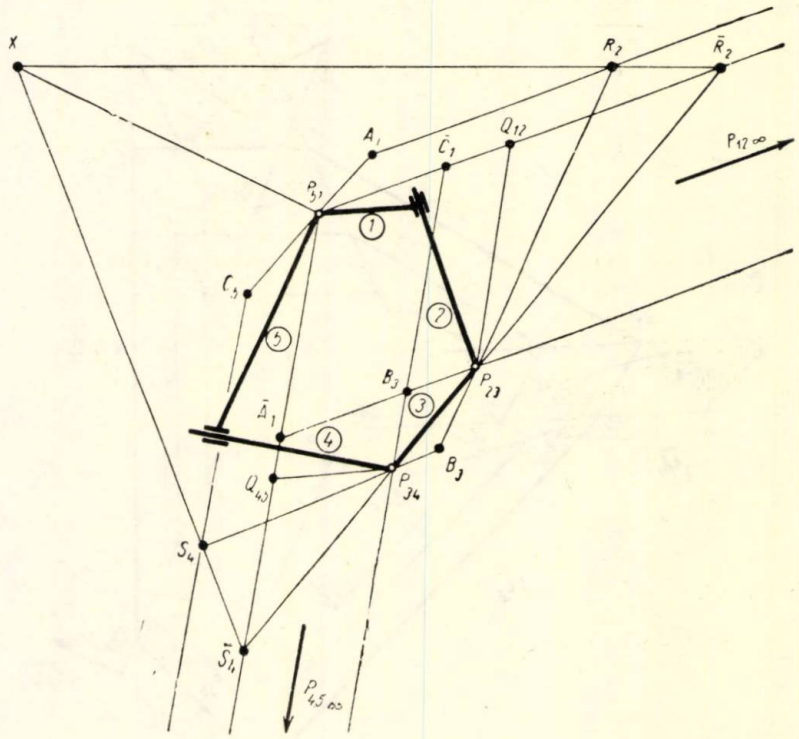


Fig. 4

telor A_1 și B_3 și o proiecție de accelerație în ultimul corp, ceea ce permite obținerea accelerațiilor punctului C_5 de la intersecția suportului proiecției cu dreapta $A_1 P_{51}$ (fig. 4). Se obțin în continuare și accelerațiile punctelor R_2 și S_4 prin metoda punctelor particulare, ceea ce permite cunoașterea proiecțiilor de accelerații pentru toate punctele de pe dreptele care le leagă cu punctele de accelerații cunoscute (fig. 4). Pentru determinarea accelerațiilor se aleg în locul centrelor de la infinit $P_{12\infty}$ și $P_{45\infty}$ punctele Q_{12} și Q_{45}, în care sînt confundate punctele Q_1 și Q_2 sau Q_4 și Q_5 cu accelerații diferite. Metoda pozițiilor false se aplică

urmărind ecuaţiile

$$\begin{array}{lllll}
\dfrac{\bar{a}_{P_2^3}}{\Delta p_{23}} = \dfrac{\bar{a}_{Q_2^1}}{\Delta q_2} + \dfrac{\bar{a}^n_{P_2^3 Q_2^1}}{\| Q_{12} P_{23}} + \dfrac{\bar{a}^t_{P_2^3 Q_2^1}}{\perp Q_{12} P_{23}} \\
\dfrac{\bar{a}_{P_3^4}}{\Delta p_{34}} = \dfrac{\bar{a}_{P_3^2}}{\Delta p_{23}} + \dfrac{\bar{a}^n_{P_3^4 P_3^2}}{\| P_{23} P_{34}} + \dfrac{\bar{a}^t_{P_3^4 P_3^2}}{\perp P_{23} P_{34}} \\
\dfrac{\bar{a}_{Q_4^5}}{\Delta q_4} = \dfrac{\bar{a}_{P_4^3}}{\Delta p_{34}} + \dfrac{\bar{a}^n_{Q_4^5 P_4^3}}{\| P_{34} Q_{45}} + \dfrac{\bar{a}^t_{Q_4^5 P_4^3}}{\perp P_{34} Q_{45}} \\
\dfrac{\bar{a}_{P_5^1}}{\Delta p_{51}} = \dfrac{\bar{a}_{Q_5^4}}{\Delta q_5} + \dfrac{\bar{a}^n_{P_5^1 Q_5^4}}{\| Q_{45} P_{51}} + \dfrac{\bar{a}^t_{P_5^1 Q_5^4}}{\perp Q_{45} P_{51}} \\
\dfrac{\bar{a}_{Q_1^2}}{\Delta q_1} = \dfrac{\bar{a}_{P_1^5}}{\Delta p_{15}} + \dfrac{\bar{a}^n_{Q_1^2 P_1^5}}{\| P_{51} Q_{12}} + \dfrac{\bar{a}^t_{Q_1^2 P_1^5}}{\perp P_{51} Q_{12}}
\end{array} \tag{9}$$

la care se adaugă ecuaţiile de compunere a acceleraţiilor din mişcare relativă pentru punctele Q_{12} şi Q_{45}

$$\begin{array}{lllll}
\dfrac{\bar{a}_{Q_2^1}}{\Delta q_2} = \dfrac{\bar{a}_{Q_1^2}}{\Delta q_1} + \dfrac{\bar{a}^c_{21}}{\perp \Delta \text{transl.}} + \dfrac{\bar{a}^r_{21}}{\| \Delta \text{transl.}} \\
\dfrac{\bar{a}_{Q_5^4}}{\Delta q_5} = \dfrac{\bar{a}_{Q_4^5}}{\Delta q_4} + \dfrac{\bar{a}^c_{54}}{\perp \Delta \text{transl.}} + \dfrac{\bar{a}^r_{54}}{\| \Delta \text{transl.}}
\end{array} \tag{10}$$

iar

$$\bar{a}_{P_3^2} = \bar{a}_{P_2^3}; \quad \bar{a}_{P_4^3} = \bar{a}_{P_3^4}; \quad \bar{a}_{P_1^5} = \bar{a}_{P_5^1} \tag{11}$$

pentru centre de rotaţie permanente.

Alegerea convenabilă a punctelor ajutătoare Q_{12} şi Q_{45} păstrează numărul laturilor poligoanelor false egal cu clasa conturului de corpuri. Dacă se alege Q_{12} pe dreapta P_{51}, $P_{12\infty}$, iar punctul Q_{45} pe dreapta $P_{51}\, P_{45\infty}$, ecuaţiile vectoriale rămîn la forma

$$\begin{array}{lllll}
\dfrac{\bar{a}_{Q_2^1}}{\Delta q_2} = \dfrac{\bar{a}_{P_1^5}}{\Delta p_{51}} + \dfrac{\bar{a}^n_{Q_2^1 P_1^5}}{\| P_{51} Q_{12}} + \dfrac{\bar{a}^t_{Q_2^1 P_1^5}}{\perp P_{51} Q_{12}} \\
\dfrac{\bar{a}_{P_2^3}}{\Delta p_{23}} = \dfrac{\bar{a}_{Q_2^1}}{\Delta q_2} + \dfrac{\bar{a}^n_{P_2^3 Q_2^1}}{\| Q_{12} P_{23}} + \dfrac{\bar{a}^t_{P_2^3 Q_2^1}}{\perp Q_{12} P_{23}} \\
\dfrac{\bar{a}_{P_3^4}}{\Delta p_{34}} = \dfrac{\bar{a}_{P_3^2}}{\Delta p_{23}} + \dfrac{\bar{a}^n_{P_3^4 P_3^2}}{\| P_{23} P_{34}} + \dfrac{\bar{a}^t_{P_3^4 P_3^2}}{\perp P_{23} P_{34}} \\
\dfrac{\bar{a}_{Q_4^5}}{\Delta q_4} = \dfrac{\bar{a}_{P_4^3}}{\Delta p_{34}} + \dfrac{\bar{a}^n_{Q_4^5 P_4^3}}{\| P_{34} Q_{45}} + \dfrac{\bar{a}^t_{Q_4^5 P_4^3}}{\perp P_{34} Q_{45}} \\
\dfrac{\bar{a}_{P_5^1}}{\Delta p_{51}} = \dfrac{\bar{a}_{Q_4^5}}{\Delta q_4} + \dfrac{\bar{a}^n_{P_5^1 Q_4^5}}{\| Q_{45} P_{51}} + \dfrac{\bar{a}^t_{P_5^1 Q_4^5}}{\perp Q_{45} P_{51}},
\end{array} \tag{12}$$

în care avem

$$\begin{aligned}
\bar{a}^n_{Q_2^1 P_1^5} &= \bar{a}^n_{Q_1^2 P_1^5} + \bar{a}^c_{21} \\
\bar{a}^t_{Q_2^1 P_1^5} &= \bar{a}^t_{Q_1^2 P_1^5} + \bar{a}^r_{21} \\
\bar{a}^n_{P_5^1 Q_4^5} &= \bar{a}^n_{P_5^1 Q_5^4} + \bar{a}^c_{54} \\
\bar{a}^t_{P_5^1 Q_4^5} &= \bar{a}^t_{P_5^1 Q_5^4} + \bar{a}^r_{5.4}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Datorită termenilor cunoscuți în construcția poligoanelor auxiliare, se obțin dreptele $\Delta\alpha_{51} \parallel \Delta p_{51}$; $\Delta\alpha_2 \parallel \Delta q_2$, $\Delta\alpha_{23} \parallel \Delta p_{23}$; $\Delta\alpha_{34} \parallel \Delta p_{34}$; $\Delta\alpha_4 \parallel \Delta q_4$, iar pentru poligonul real (fig. 5) punctul p_{51} se găsește la intersecția dreptelor inițială $\Delta^i p_{51}$ și finală $\Delta^f p_{51}$.

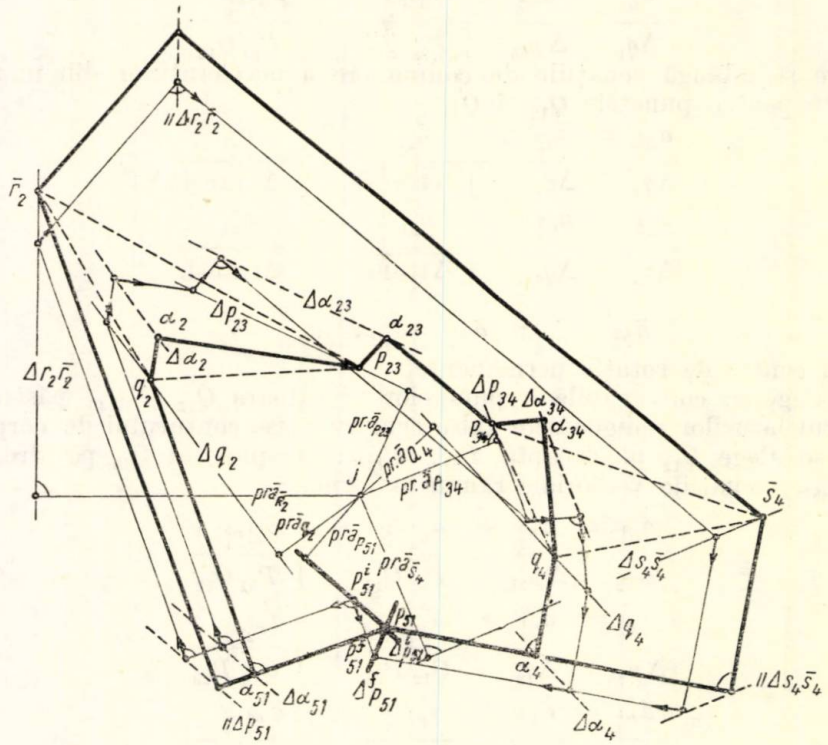


Fig. 5

2.2. Pentru aplicarea metodei solidarizării se extrage conturul triunghiurilor P_{51} S_2 R_4, în vîrfurile căruia se cunosc proiecțiile de accelerații (fig. 4) și ale cărui laturi, trecînd prin centrele de rotație, se bucură de proprietățile metodei proiecțiilor. Conturul triunghiular ales corespunde situației în care punctele ajutătoare Q_{12} și Q_{45} se confundă res-

pectiv cu $\bar{R}_2$ și $\bar{S}_4$, ceea ce atrage construcția poligoanelor auxiliare pentru ecuațiile

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{a}_{\bar{R}_2}}{\Delta\bar{r}_2} &= \frac{\bar{a}_{P_1^5}}{\Delta p_{51}} + \frac{\bar{a}^n_{\bar{R}_2 P_1^5}}{\| P_{51}\bar{R}_2} + \frac{\bar{a}^t_{\bar{R}_2 P_1^5}}{\perp P_{51}\bar{R}_2} \\
\frac{\bar{a}_{\bar{S}_4}}{\Delta_{\bar{s}4}} &= \frac{\bar{a}_{\bar{R}_2}}{\Delta\bar{r}_2} + \frac{\bar{a}^n_{\bar{S}_4\bar{R}_2}}{\| \bar{R}_2 S_4} + \frac{\bar{a}^t_{\bar{S}_4\bar{R}_2}}{\perp \bar{R}_2 S_4} \\
\frac{\bar{a}_{P_5^1}}{\Delta p_{51}} &= \frac{\bar{a}_{\bar{S}_4}}{\Delta_{\bar{s}4}} + \frac{\bar{a}^n_{P_5^1\bar{S}_4}}{\| S_4 P_{51}} + \frac{\bar{a}^t_{P_5^1\bar{S}_4}}{\perp S_4 P_{51}},
\end{aligned} \tag{14}$$

în care

$$\begin{aligned}
\bar{a}^n_{\bar{R}_2 P_1^5} &= \bar{a}^n_{\bar{R}_1 P_1^5} + \bar{a}^c_{21} \\
\bar{a}^n_{\bar{S}_4\bar{R}_2} &= \bar{a}^n_{\bar{S}_4 P_4^3} + \bar{a}^n_{P_3^4 P_3^2} + \bar{a}^n_{P_2^3\bar{R}_2} \\
\bar{a}^n_{P_5^1\bar{S}_4} &= \bar{a}^n_{P_5^1\bar{S}_5} + \bar{a}^c_{5.4}
\end{aligned} \tag{15}$$

și

$$\begin{aligned}
\bar{a}^t_{\bar{R}_2 P_1^5} &= \bar{a}^t_{\bar{R}_1 P_1^5} + \bar{a}^r_{21} \\
\bar{a}^t_{\bar{S}_4\bar{R}_2} &= \bar{a}^t_{\bar{S}_4 P_4^3} + \bar{a}^t_{P_3^4 P_3^2} + \bar{a}^t_{P_2^3\bar{R}_2} \\
\bar{a}^t_{P_5^1\bar{S}_4} &= \bar{a}^t_{P_5^1\bar{S}_5} + \bar{a}^r_{54}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Prin eliminarea laturilor cunoscute ale poligoanelor auxiliare, cuprinse între dreptele $\Delta\alpha_1 \| \Delta\bar{a}_1$, $\Delta\beta_3 \| \Delta\bar{b}_3$, $\Delta\gamma_5 \| \Delta\bar{c}_5$, se obțin la intersecția laturilor necunoscute punctele $\bar{p}_{51}$ $\bar{r}_2$ și $\bar{s}_4$, care formează triunghiul din planul accelerațiilor asemenea cu cel din planul mecanismului $P_{51}\ \bar{R}_2\ S_4$ și cu cel corespunzător din planul vitezelor. Prelungind asemănarea triunghiurilor se obțin dreptele $\Delta x\bar{r}_2 \perp \Delta XR_2\bar{R}_2$, $\Delta x\bar{s}_4 \perp \Delta XS_4S_4$, care determină punctul x, astfel că direcția dreptei $\Delta x\bar{p}_{51} \perp \Delta XP_{51}$ corespunde cu direcția dreptei finale Δp_{51} din construcția poligoanelor auxiliare (fig. 5).

3. STUDIUL GENERAL AL ACCELERAȚIILOR ÎN LANȚURILE SIMPLE ÎNCHISE CU CUPLE INFERIOARE (CUPLE DE TRANSLAȚIE ȘI CUPLE DE ROTAȚIE)

3.1. Utilizînd punctele ajutătoare A_{12}, R_{23}, B_{34}, S_{45}, C_{56}, T_{67}, D_{78}, Q_{81} (fig. 6), în care se găsesc confundate punctele materiale legate de corpurile arătate prin indicii respectivi, și considerînd că se cunosc

proiecţiile de acceleraţii pentru toate punctele $A_1A_2\ R_2R_3\ B_3B_4\ S_4S_5\ C_5C_6\ T_6T_7\ D_7D_8\ Q_8Q_1$, se pot scrie ecuaţiile

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{a}_{A_2}}{\Delta a_2} &= \frac{\bar{a}_{A_1}}{\Delta a_1} + \frac{\bar{\alpha}^n_{A_{21}}}{\parallel P_{21}A} + \frac{\bar{\alpha}^t_{A_{21}}}{\perp P_{21}A} \\
\frac{\bar{a}_{R_2}}{\Delta r_2} &= \frac{\bar{a}_{A_2}}{\Delta a_2} + \frac{\bar{a}^n_{R_2A_2}}{\parallel AR} + \frac{\bar{a}^t_{R_2A_2}}{\perp AR} \\
\frac{\bar{a}_{R_3}}{\Delta r_3} &= \frac{\bar{a}_{R_2}}{\Delta r_2} + \frac{\bar{\alpha}^n_{R_{32}}}{\parallel P_{23}R} + \frac{\bar{\alpha}^t_{R_{32}}}{\perp P_{23}R}
\end{aligned} \tag{17}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{a}_{Q_1}}{\Delta q_1} &= \frac{\bar{a}_{Q_n}}{\Delta q_n} + \frac{\bar{\alpha}^n_{Q_1n}}{\parallel P_{n1}Q} + \frac{\bar{\alpha}^t_{Q_1n}}{\perp P_{n1}Q} \\
\frac{\bar{a}_{A_1}}{\Delta a_1} &= \frac{\bar{a}_{Q_1}}{\Delta q_1} + \frac{\bar{a}^n_{A_1Q_1}}{\parallel QA} + \frac{\bar{a}^t_{A_1Q_1}}{\perp QA},
\end{aligned}$$

pentru care se reprezintă poligoanele auxiliare cu $(2n)$ laturi determinate şi $(2n)$ laturi nedeterminate. Dintre ultimele laturi, (n) sînt perpendiculare pe razele punctelor ajutătoare care pornesc din centrul de rotaţie respectiv ($\perp P_{12}\ A_{12}$), celelalte (n) fiind perpendiculare pe laturile formate de punctele ajutătoare consecutive ($\perp AR$).

Printr-o astfel de rezolvare se elimină caracterul cuplelor inferioare, ecuaţiile fiind valabile atît pentru centre de rotaţie aşezate la infinit, cît şi pentru centre de rotaţie aşezate la distanţă finită.

3.2. Dacă punctele ajutătoare sînt alese astfel ca grupurile de două puncte consecutive împreună cu centrul de rotaţie respectiv să fie coliniare (fig. 7), numărul ecuaţiilor şi deci numărul laturilor poligoanelor auxiliare se reduc la jumătate (n) :

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{a}_{R_2}}{\Delta r_2} &= \frac{\bar{a}_{A1}}{\Delta a_1} + \frac{\bar{a}^n_{R_2A_1}}{\parallel AR} + \frac{\bar{a}^t_{R_2A_1}}{\perp AR} \\
\frac{\bar{a}_{B3}}{\Delta b_3} &= \frac{\bar{a}_{R_2}}{\Delta r_2} + \frac{\bar{a}^n_{B_3R_2}}{\parallel RB} + \frac{\bar{a}^t_{B_3R_2}}{\perp RB}
\end{aligned} \tag{18}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{\bar{a}_{A_1}}{\Delta a_1} = \frac{\bar{a}_{Q_n}}{\Delta q_n} + \frac{\bar{a}^n_{A_1Q_n}}{\parallel QA} + \frac{\bar{a}^t_{A_1Q_n}}{\perp QA},$$

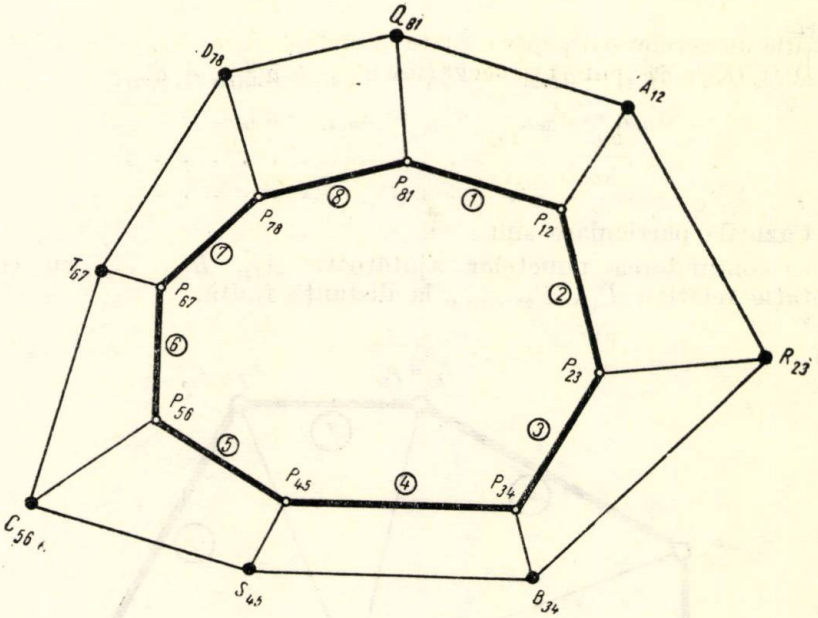

Q_{81}
D_{78}
A_{12}
P_{81}
P_{78}
P_{12}
T_{67}
P_{67}
P_{23}
R_{23}
P_{56}
P_{45}
P_{34}
C_{56}
S_{45}
B_{34}
1
2
3
4
5
6
7
8

Fig. 6

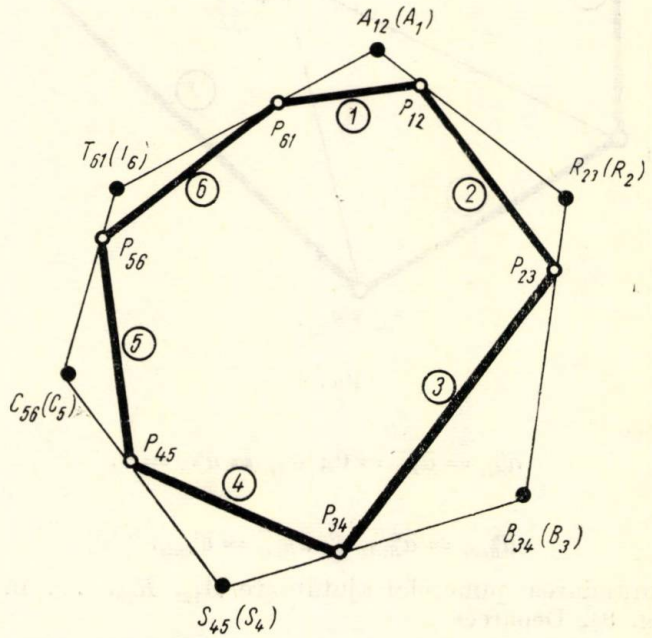

$A_{12}(A_1)$
P_{61}
P_{12}
$T_{61}(T_6)$
$R_{23}(R_2)$
P_{56}
P_{23}
$C_{56}(C_5)$
P_{45}
P_{34}
$B_{34}(B_3)$
$S_{45}(S_4)$
1
2
3
4
5
6

Fig. 7

în care

$$\begin{aligned} \bar{a}^n_{R_2A_1} &= \bar{a}^n_{R_2A_2} + \bar{\alpha}^n_{A_{21}} = \bar{a}^r_{R_2A_2} + \bar{a}^{rn}_{A_{21}P_{21}} + \bar{a}^c_{A_{21}} \\ \bar{a}^t_{R_2A_1} &= \bar{a}^t_{R_2A_2} + \bar{\alpha}^t_{A_{21}} = \bar{a}^t_{R_2A_2} + \bar{a}^{rt}_{A_{21}P_{21}} \end{aligned} \tag{19}$$

. . . . . .

. . . . . .

Cazurile particulare sînt :

a) confundarea punctelor ajutătoare A_{12}, R_{23}, ... cu centrele de rotație relative P_{12}, P_{23}, ... la distanță finită.

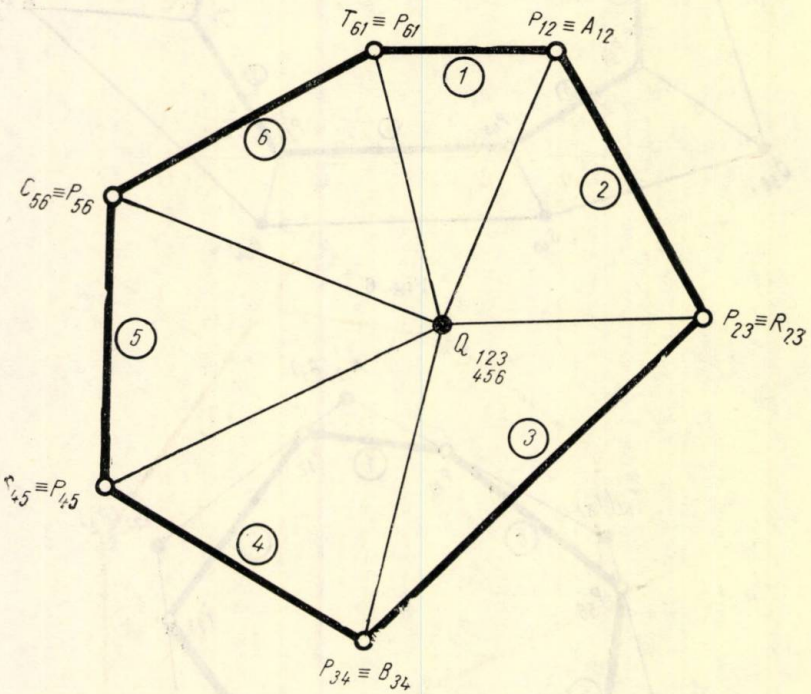


Fig. 8

Deoarece

$$\bar{a}^c_{A_{21}} = \bar{a}^c_{P_{21}} = 0 \; ; \; \bar{a}^r_{A_{21}} = \bar{a}^r_{P_{21}} = 0, \tag{20}$$

rămîne

$$\bar{a}^n_{R_2A_1} = \bar{a}^n_{R_2A_2} \text{ și } \bar{a}^t_{R_2A_1} = \bar{a}^t_{R_2A_2}.$$

b) Confundarea punctelor ajutătoare A_{12}, R_{23}, ... într-un singur punct Q (fig. 8). Deoarece

$$\bar{a}^n_{R_2A_2} = 0 \text{ și } \bar{a}^t_{R_2A_2} = 0,$$

rămîne

$$\bar{a}^n_{R_2A_1} = \bar{\alpha}^n_{A_{21}} = \bar{a}^{rn}_{A_{21}P_{21}} + \bar{a}^c_{A_{21}}$$
$$\bar{a}^t_{R_2A_1} = \bar{\alpha}^t_{A_{21}} = \bar{a}^{rt}_{A_{21}P_{21}}, \tag{21}$$

astfel că avem

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{a}_{Q2}}{\Delta q_2} &= \frac{\bar{a}_{Q1}}{\Delta q_1} + \frac{\bar{\alpha}^n_{Q_{21}}}{\parallel P_{12}Q} + \frac{\bar{\alpha}^t_{Q_{21}}}{\perp P_{12}Q} \\
\frac{\bar{a}_{Q_3}}{\Delta q_3} &= \frac{\bar{a}_{Q_2}}{\Delta q_2} + \frac{\bar{\alpha}^n_{Q_{32}}}{\parallel P_{23}Q} + \frac{\bar{\alpha}^t_{Q_{32}}}{\perp P_{23}Q} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\bar{a}_{Q_1}}{\Delta q_1} &= \frac{\bar{a}_{Q_n}}{\Delta q_n} + \frac{\bar{\alpha}^n_{Q_{1n}}}{\parallel P_{n1}Q} + \frac{\bar{\alpha}^n_{Q_{1n}}}{\perp P_{n1}Q}.
\end{aligned} \tag{22}$$

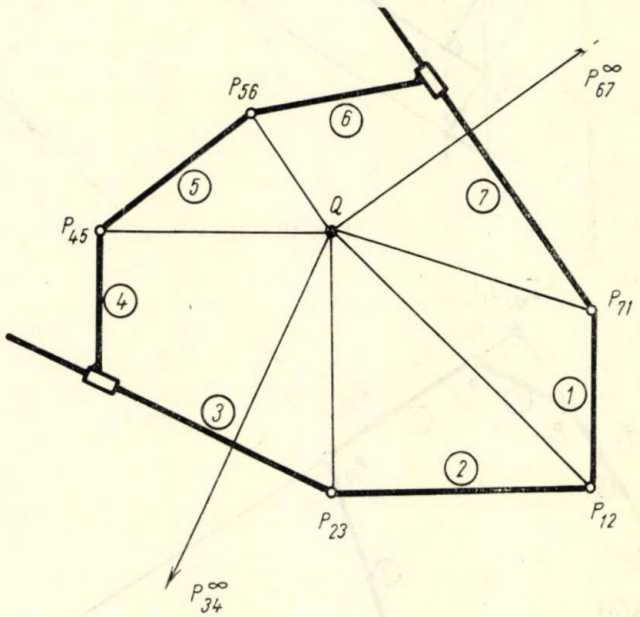
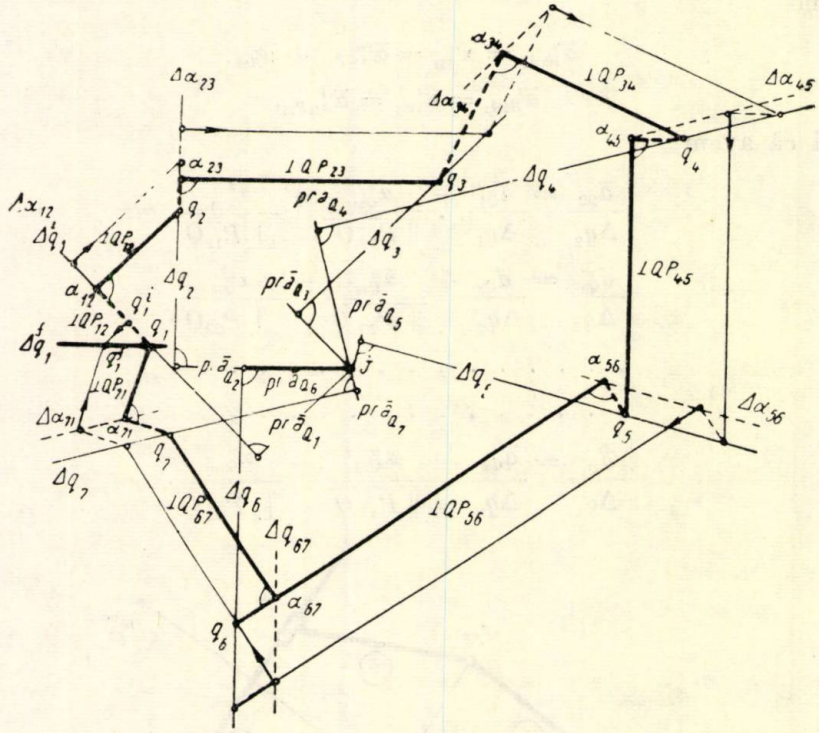


Fig. 9

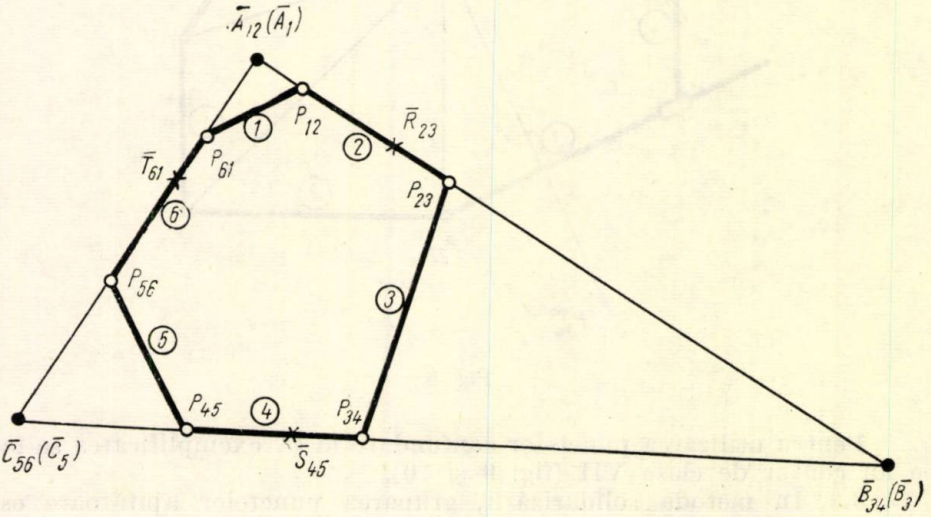
Pentru utilizarea punctelor confundate în Q, exemplificarea se face pe un contur de clasa VII (fig. 9 și 10).

3.3. În metoda solidarizării, gruparea punctelor ajutătoare este prelungită, astfel ca să se obțină trei puncte ajutătoare consecutive coli-



$\Delta\alpha_{23}$
α_{34}
$\Delta\alpha_{34}$
$\perp QP_{34}$
$\Delta\alpha_{45}$
α_{45}
q_4
α_{23}
$\perp QP_{23}$
q_3
Δq_4
$pr\bar{a}_{Q_4}$
$\Delta\alpha_{12}$
q_2
Δq_3
Δq_1^i
$\perp QP_{12}$
Δq_2
$pr\bar{a}_{Q_3}$
$\perp QP_{45}$
α_{12}
q_1^i
$pr\bar{a}_{Q_5}$
$\perp QP_{12}$
q_1
Δq_1^f
q_1^f
$p.\bar{a}_{Q_2}$
$pr\bar{a}_{Q_6}$
j
Δq_1
α_{56}
$\perp QP_{71}$
$\Delta\alpha_{56}$
$\Delta\alpha_{71}$
α_{71}
$pr\bar{a}_{Q_1}$
$pr\bar{a}_{Q_7}$
q_5
q_7
Δq_7
$\perp QP_{67}$
Δq_6
$\perp QP_{56}$
Δq_{67}
α_{67}
q_6

Fig. 10



$\bar{A}_{12}(\bar{A}_1)$
P_{12}
$\bar{R}_{23}$
1
2
$\bar{T}_{61}$
P_{61}
P_{23}
6
P_{56}
3
5
P_{45}
4
P_{34}
$\bar{C}_{56}(\bar{C}_5)$
$\bar{S}_{45}$
$\bar{B}_{34}(\bar{B}_3)$

Fig. 11

niare cu două centre de rotaţie intermediare (fig. 11). În acest fel se ajunge din nou la ecuaţiile care justifică metoda solidarizării :

$$\begin{aligned} \bar{a}_{B_3} &= \bar{a}_{A_1} + \bar{a}^n_{B_3A_1} + \bar{a}^t_{B_3A_1} \\ \bar{a}_{C_5} &= \bar{a}_{B_3} + \bar{a}^n_{C_5B_3} + \bar{a}^t_{C_5B_3} \\ \bar{a}_{A_1} &= \bar{a}_{C_5} + \bar{a}^n_{A_1C_5} + \bar{a}^t_{A_1C_5}, \end{aligned} \tag{23}$$

în care

$$\bar{a}^n_{B_3A_1} = \bar{a}^n_{B_3R_2} + \bar{a}^n_{R_2A_1}$$

şi (24)

$$\bar{a}^t_{B_3A_1} = \bar{a}^t_{B_3R_2} + \bar{a}^t_{R_2A_1}.$$

Punctele ajutătoare intermediare R, S şi T sînt eliminate, poziţiile lor pe dreptele centrelor fiind arbitrare.

STUDIUL LANŢURILOR CINEMATICE CU CONTURURI SUPERIOARE

Pentru conturul de clasa VIII (fig. 12) se obţine, prin metoda solidarizării, conturul de clasa IV, format cu laturile $\Delta\, \bar{A}_1 \bar{B}_3$, $\Delta\, \bar{B}_3 \bar{C}_5$, $\Delta\, \bar{C}_5 \bar{D}_7$

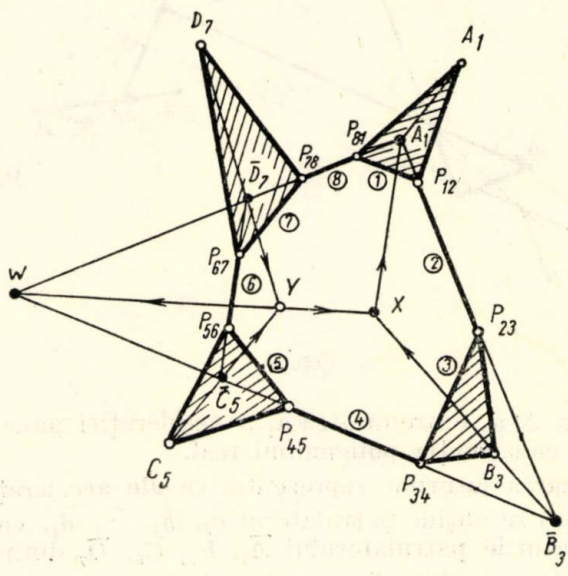


Fig. 12

şi $\Delta\, \bar{D}_7 \bar{A}_1$, care se bucură de proprietăţile proiecţiilor de acceleraţii. În vîrfurile conturului $\bar{A}_1$, $\bar{B}_3$, $\bar{C}_5$, $\bar{D}_7$ se cunosc proiecţiile acceleraţiilor pe direcţiile $\Delta\, A_1 \bar{A}_1$, $\Delta\, B_3 \bar{B}_3$, $\Delta\, C_5 \bar{C}_5$ şi $\Delta\, D_7 \bar{D}_7$, ceea ce permite ca în planul acceleraţiilor (fig. 13) să se cunoască suporturile $\Delta\bar{a}_1$, $\Delta\bar{b}_3$, $\Delta\bar{c}_5$,

$\Delta\bar{d}_7$ ale extremităţilor finale ale acceleraţiilor. Urmînd metoda expusă se poate construi un singur poligon auxiliar redus, obţinîndu-se punctul final $\bar{a}_1'$. Prin acesta trece dreapta punctelor finale $\Delta' \bar{a}_1$, de direcţie cunoscută din construcţia vitezelor, care poziţionează la intersecţia cu dreapta

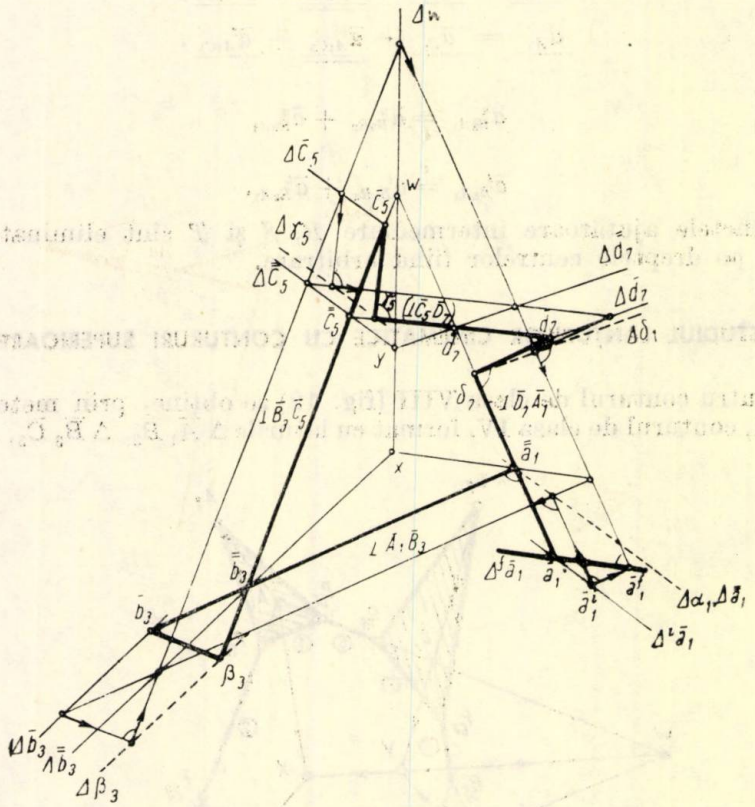


Fig. 13

punctelor iniţiale $\Delta^i \bar{a}_1$ extremitatea $\bar{a}_1$ a acceleraţiei punctului $\bar{A}_1$, ceea ce permite apoi construcţia poligonului real.

Prin eliminarea laturilor reprezentative ale acceleraţiilor normale cunoscute (fig. 13) se obţine patrulaterul $\bar{\bar{a}}_1$, $\bar{\bar{b}}_3$, $\bar{\bar{c}}_5$, $\bar{\bar{d}}_7$, cu laturile perpendiculare pe laturile patrulaterului $\bar{A}_1$, $\bar{B}_3$, $\bar{C}_5$, $\bar{D}_7$ din planul lanţului cinematic. Acesta apoi poate fi redus la triunghiurile $w\,\bar{\bar{c}}_5\,\bar{\bar{d}}_7$ şi $w\,\bar{\bar{a}}_1\,\bar{\bar{b}}_3$, asemenea cu triunghiurile $W\,\bar{C}_5\,\bar{D}_7$ şi $W\,\bar{A}_1\,\bar{B}_3$, şi în continuare, pe baza proprietăţilor geometrice ale figurilor, avem dreapta $w\,x\,y \perp W\,X\,Y$, dreapta $y\,\bar{\bar{c}}_5 \perp Y\,\bar{C}_5$, dreapta $y\,\bar{\bar{d}}_7 \perp Y\,\bar{D}_7$, dreapta $x\,\bar{\bar{b}}_3 \perp \times\,\bar{B}_3$ şi dreapta $x\,\bar{\bar{a}}_1 \perp X\,\bar{A}_1$, ultima avînd aceeaşi direcţie ca şi dreapta punctelor finale $\Delta^f \bar{a}_1$.

Se prelungeşte în felul acesta simetria cu calculele pentru determinarea vitezelor [11].

Într-adevăr (fig. 14), se construiesc triunghiurile $\bar{a}_1\alpha_1\bar{\bar{a}}_1$, $\bar{b}_3\,\beta_3\,\bar{\bar{b}}_3$, $\bar{c}_5\,\gamma_5\,\bar{\bar{c}}_5$, $\bar{d}_7\,\delta_7\,\bar{\bar{d}}_7$, pe laturile cunoscute $\bar{a}_1\alpha_1$, $\bar{b}_3\beta_3$, $\bar{c}_5\gamma_5$, $\bar{d}_7\delta_7$, şi se obţin

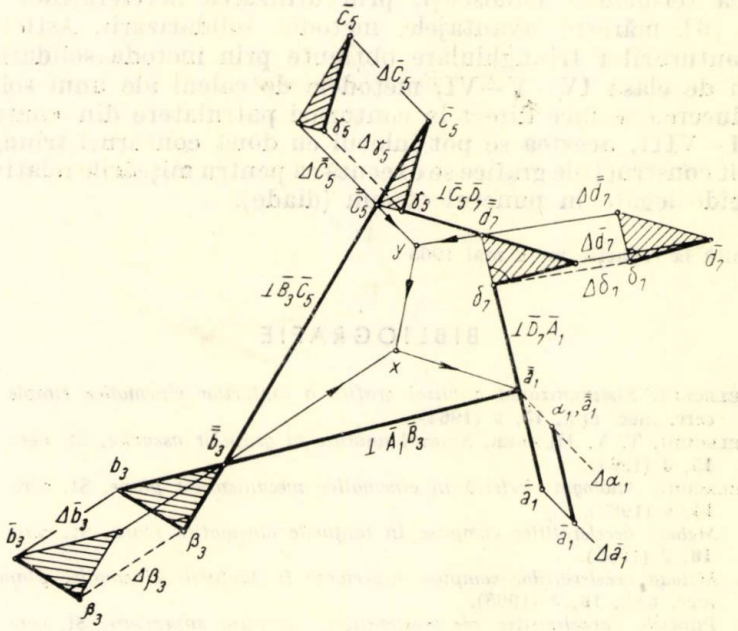


Fig. 14

prin punctele $\bar{\bar{a}}_1$, $\bar{\bar{b}}_3$, $\bar{\bar{c}}_5$, $\bar{\bar{d}}_7$ dreptele $\Delta\bar{\bar{a}}_1 \parallel \Delta\,\bar{a}_1 \parallel \Delta\alpha_1$ $\Delta\bar{\bar{b}}_3 \parallel \Delta\,\bar{b}_3 \parallel \Delta\,\beta_3$, $\Delta\,\bar{\bar{c}}_5 \parallel \Delta\,\bar{c}_5 \parallel \Delta\,\gamma_5$ şi $\Delta\,\bar{\bar{d}}_7 \parallel \Delta\,\bar{d}_7 \parallel \Delta\,\delta_7$. La intersecţia dreptelor $\Delta\,\bar{\bar{c}}_5$ şi $\Delta\,\bar{\bar{d}}_7$ se găseşte punctul y, astfel că se poate trasa dreapta $w\,x\,y \perp W\,X\,Y$. Aceasta, intersectată cu dreapta $\Delta\,\bar{\bar{b}}_3$, poziţionează punctul x, din care apoi se duce dreapta $\Delta\,x\,\bar{\bar{a}}_1 \perp \Delta\,X\,\bar{A}_1$, care împreună cu dreapta $\Delta\,\bar{\bar{a}}_1$ poziţionează punctul $\bar{\bar{a}}_1$.

5. OBSERVAŢII CU PRIVIRE LA APLICAREA METODEI SOLIDARIZĂRII LA CALCULUL ACCELERAŢIILOR

La fel ca în cazul calculului de viteze, metoda solidarizării prezintă marele avantaj că reduce numărul laturilor poligoanelor auxiliare, ceea ce măreşte precizia construcţiilor grafice.

Desigur că, faţă de viteze, construcţiile acceleraţiilor, ca în orice metodă de calcul, apar mai complicate din cauza termenilor suplimentari cunoscuţi care depind numai de viteze. Eliminarea formală a acestor termeni conduce din nou la construcţii simple ca pentru viteze, fie prin metoda planelor de acceleraţii, fie prin metoda proiecţiilor. De asemenea eliminarea termenilor cunoscuţi, prin utilizarea acceleraţiilor compuse [4], [5], [6], măreşte avantajele metodei solidarizării. Astfel se pot aplica contururilor triunghiulare obţinute prin metoda solidarizării din contururi de clasa IV—V—VI, metodele de calcul ale unui solid rigid. Dacă reducerea se face direct la contururi patrulatere din contururi de clasa VII—VIII, acestea se pot înlocui cu două contururi triunghiulare, astfel încît construcţiile grafice se execută ca pentru mişcările relative a două solide rigide legate în punctul comun (diade).

Primită la redacţie la 18 mai 1965

BIBLIOGRAFIE

1. CHR. PELECUDI, *Sistematizarea analizei grafice a lanţurilor cinematice simple plane*, St. cerc. mec. apl., **15**, *2* (1964).
2. CHR. PELECUDI, T. V. HUNKER, *Studiul analitic al grupelor assurice*, St. cerc. mec. apl., **15**, *3* (1964).
3. CHR. PELECUDI, *Analogia electrică în cinematica mecanismelor plane*, St. cerc. mec. apl., **14**, *6* (1963).
4. — *Metoda acceleraţiilor compuse în lanţurile cinematice plane*, St. cerc. mec. apl., **16**, *2* (1965).
5. — *Metoda acceleraţiilor compuse superioare în lanţurile cinematice plane*, St. cerc. mec. apl., **16**, *3* (1965).
6. — *Punctele caracteristice ale acceleraţiilor compuse superioare*. St. cerc. mec. apl., **16**, *4* (1965).
7. I. I. ARTOBOLEVSKI, *Teoria mecanismelor şi maşinilor*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1955.
8. N. I. MANOLESCU, I BERCEANU, P. ANTONESCU, *Domeniul de aplicabilitate a metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate*, St. cerc. mec. apl., **13**, *6* (1962).
9. D. MANGERON, C. DRĂGAN, O. MUNTEANU, *Studiul mecanismelor plane cu cuple inferioare bazat pe metoda acceleraţiilor reduse*, Buletinul Inst. politehnic Iaşi, **II**, *3—4* (1956).
10. D. MANGERON, GH. CIOBANU, A. BRAIER, *Problema distribuţiei acceleraţiilor de ordin oarecare în mişcarea sistemelor materiale*, Buletinul Inst. politehnic Iaşi, **II**, *1—2* (1956).
11. CHR. PELECUDI, *Metoda solidarizării pentru lanţurile cinematice închise*. I, St. cerc. mec. apl., **16**, *5* (1965).

SISTEMATIZAREA ŞI CLASIFICAREA MECANISMELOR-MOTOR PLANE ARTICULATE CU DOUĂ GRADE DE MOBILITATE „TOTAL" ($M_3 = 2$) ŞI „PARŢIAL" ($M_3^p = 2$)[1]

de N. I. MANOLESCU
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

531.1

După prezentarea principiilor de alcătuire a lanţurilor cinematice folosind noţiunea de grupă assurică, se stabilesc 10 teoreme privind definiţia lanţurilor cinematice cu grad de libertate „total" ($L_3 = 5$), „parţial" ($L_3^p = 5$) şi „fracţionat" ($L_3^{fr} = 5$), a mecanismelor cu grad de mobilitate total ($M_3 = 2$), „parţial-total" ($M_3^{pt} = 2$) şi „parţial" ($M_3^p = 2$), a mecanismelor-motor cu grad de mobilitate „total" sau „parţial" şi, în continuare, regulile privind modul de alegere a elementelor conducătoare ale unui mecanism cu grad de mobilitate „parţial-total" pentru obţinerea acestora.

Ultimele două teoreme privesc mecanismele care rezultă din lanţurile cinematice cu grad de libertate „fracţionat" şi regulile de precizare a elementelor conducătoare ale mecanismelor pentru obţinerea de mecanisme-motor.

Toate mecanismele şi mecanismele-motor alcătuite pe baza acestor teoreme au fost grupate în 5 tabele după numărul total e de elemente.

§ 1. INTRODUCERE

1.1. Problema alcătuirii mecanismelor plane articulate cu un singur grad de mobilitate se poate considera astăzi, după părerea noastră, ca rezolvată atît din punctul de vedere al principiilor care stau la baza alcătuirii lor, cît şi în ceea ce priveşte numărul de variante distincte structural corespunzătoare unui număr de elemente e dat.

[1]) Publicată în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **10**, *4* (1965) (în lb. franceză).

1.2. Un principiu de alcătuire a lor este determinarea în prealabil a lanțurilor cinematice plane articulate ca variante distincte structural, din care, prin fixarea succesivă a unuia din elementele lanțului, se obține — după eliminarea variantelor care se repetă — toate mecanismele plane articulate corespunzătoare lanțului respectiv.

Problema de bază la aplicarea acestui principiu constă în determinarea prealabilă a lanțurilor plane articulate.

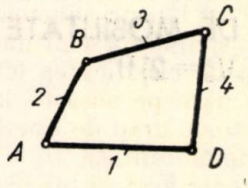


Fig. 1. — Lanțul cinematic plan articulat cu $e = 4$; $c_5 = 4$; $L_3 = 4$.

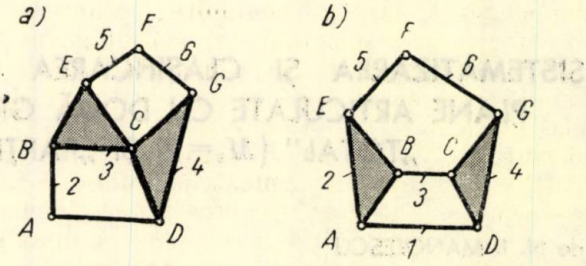


Fig. 2. — Lanțurile cinematice plane articulate cu $e = 6$; $c_5 = 7$; $L_3 = 4$: a — tip Watt; b — tip Stephenson.

Pentru cele cu număr mic de elemente ($e = 4$, $c_5 = 4$ și $L_3 = 4$), precizarea lor nu a constituit o problemă pentru a cărei rezolvare să fi fost necesare anumite formule matematice ajutătoare.

Aceste lanțuri: $e = 4$, $c_5 = 4$ (lanțul plan articulat cu patru elemente figura 1) și cele două cu $e = 6$, $c_5 = 7$, $L_3 = 4$ (lanțul tip Watt și tip Stephenson din figura 2*a*, respectiv *b*), se cunosc cu mult înainte de a se pune bazele științei teoriei mecanismelor.

Numărul total al celor 16 variante — independente structural — ale lanțurilor cinematice articulate cu $e = 8$, $c_5 = 10$ și $L_3 = 4$ nu a fost găsit decît în 1953 [1]. La baza construirii lor nu au existat, după cum se știe, decît numărul și „rangul" [2]) elementelor componente ale lanțului.

În lucrările [2] și [3], K. Hain și Zielstorff au definitivat sistematizarea atît a lanțurilor cinematice plane articulate cu 8 elemente ($e = 8$, $c_5 = 10$, $L_3 = 4$), cu articulații simple sau multiple, cît și a mecanismelor care rezultă din acestea, prin fixarea succesivă a unuia din elementele lor și a eliminării variantelor care se repetă. Autorii citați mai sus au regăsit cele 71 de mecanisme plane cu articulații simple (din cele 16 lanțuri menționate), cît și 259 de mecanisme plane cu articulații multiple (rezultate din cele 44 de lanțuri plane cu articulații multiple, alcătuite pe baza regulii indicate de autorii lucrării [2]).

[2]) Prin „rang" se va denumi numărul de articulații (simple) aflate la un element. Astfel un element cu două articulații este de „rangul doi", iar numărul elementelor dintr-un lanț care au acest rang se va nota cu n_2; la fel n_3 va fi numărul elementelor de rangul trei, n_4 de rangul patru etc., astfel că numărul total de elemente ale unui lanț cinematic plan articulat va fi:

$$e = n_2 + n_3 + n_4 + \ldots + n_j = \sum_{j=2}^{j} n_j. \qquad (1)$$

1.3. În lucrarea [4] am arătat cum, folosind metoda alcătuirii mecanismelor cu ajutorul grupelor assurice, se pot găsi cele 71 de mecanisme plane articulate cu 8 elemente, indicîndu-se cu această ocazie și metoda de cercetare cinematică cea mai eficientă în funcție de clasificarea structurală propusă de I. I. Artobolevski.

Din aceste 71 de mecanisme, 59 au rezultat din lungirea sau amplificarea succesivă a mecanismului de bază (compus din elementul conducător și cel fix sau batiu), cu grupe assurice pînă la completarea numărului de elemente, iar 12 (denumite mecanisme caracteristice independente) din lungirea mecanismului de bază pin grupe assurice, cu $e' = 6$, $c_5' = 9$ [3]).

1.4. În lucrarea [5] am arătat, de asemenea, că prin folosirea noțiunii de grupă assurică se pot alcătui imediat cele 16 lanțuri cinematice plane articulate cu $e = 8$, $c_5 = 10$, $L_3 = 4$ (tabela 3) și apoi, în continuare, și lanțurile cu $e = 10$, $c_5 = 13$, fără a ne preocupa de clasificarea lor în funcție de „rangul" elementelor. Mergînd în continuare pe această idee, am alcătuit toate lanțurile cinematice plane articulate cu grad de libertate $L_3 = 5$ (din care rezultă mecanisme cu două grade de mobilitate $M_3 = 2$), determinînd numărul de variante independente structural și precizînd pentru fiecare în parte felul gradului de libertate („total", „parțial" sau „fracționat").

Am găsit astfel :

Nr. crt.	Caracteristicile lanțului	Număr total	Numărul și felul gradului de libertate		
			Număr	Felul gradului	
1.	$e = 5$, $c_5 = 5$	1	1 lanț	$L_3 = 5$	total
2.	$e = 7$, $c_5 = 8$	4	1 lanț	$L_3 = 5$	total
			2 lanțuri	$L_3^p = 5$	parțial
			1 lanț	$L_3^{fr} = 5$	fracționat
3.	$e = 9$, $c_5 = 11$	40	6 lanțuri	$L_3 = 5$	total
			29 lanțuri	$L_3^p = 5$	parțial
			5 lanțuri	$L_3^{fr} = 5$	fracționat

Scoaterea în evidență a lanțurilor cu grad de libertate „fracționat" a fost posibilă numai datorită metodei de alcătuire a lanțurilor propusă de noi în lucrarea menționată [5].

Aceste lanțuri nu pot avea, după cum am arătat, o importanță teoretică sau o aplicație practică, deoarece mecanismele cu grad de mobilitate parțial care ar rezulta din ele prin fixarea unora din elemente nu sînt variante independente, iar restul — prin fixarea elementului de „rangul" cel mai superior (n_4 pentru lanțul cu $e = 7$ sau n_5 pentru lanțul

[3]) Pentru diferențiere s-a convenit ca numărul elementelor și a cuplelor cinematice ale unei grupe assurice să se noteze cu „prim", astfel cum s-a arătat mai sus.

cu $e = 9$) — se transformă în cîte două mecanisme independente cu o bază comună (elementul considerat fix).

1.5. În concluzie, pentru alcătuirea lanţurilor cinematice plane articulate de diferite grade de libertate ($L_3 \geqslant 4$) există astăzi două metode :

a) Prima se bazează pe determinarea în prealabil a numărului de elemente de diferite „ranguri" (n_2, n_3, n_4,...) care intră în structura unui lanţ a cărei formulă structurală este dată de

$$L_3 = 3e - 2c_5, \tag{1}$$

în care

$$e = n_2 + n_3 + n_4 + \ldots + n_j = \sum_{j=2}^{j} n_j \tag{2}$$

şi

$$2c_5 = 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \ldots + jn_j = \sum_{j=2}^{j} jn_j. \tag{3}$$

„Rangul" cel mai mare al elementului care intră în structura unui anumit lanţ cinematic plan articulat este determinat de formula :

$$j = \frac{1}{2}(e_{\min} + 1 - M_3), \tag{4}$$

stabilită în lucrarea [5].

Formulele (1), (2), (3) şi (4) dau posibilitatea sistematizării alcătuirii lanţurilor cinematice plane articulate de diferite grade de libertate avînd la bază „rangul" elementelor componente.

În lucrările [2] şi [3], K. Hain şi colab. a rezolvat această problemă pentru lanţurile plane cu 8 elemente ($e = 8$) şi 4 grade de libertate ($L_3 = 4$), extinzînd-o, după cum s-a arătat mai sus la § 1.2, şi la lanţurile şi mecanismele cu articulaţii multiple.

Pentru lanţurile cinematice cu 9 elemente ($e = 9$) şi 5 grade de libertate ($L_3 = 5$), această metodă a fost aplicată de F.R.B. Crossley [6] la alcătuirea grupelor de lanţuri bazate pe combinaţiile de n_2, n_3, n_4 şi n_5 [5].

Criteriile de legare între ele ale elementelor de diferite „ranguri" nu au fost indicate decît în lucrarea recentă a lui K. Hain [2], care — considerăm — nu au putut fi cunoscute de Crossley [6] pentru a le fi putut folosi la lanţurile cu $e = 9$ şi $L_3 = 5$.

b) A doua metodă se bazează pe noţiunea de grupă assurică (cu grad de mobilitate zero), care — adăugată, după clasa şi ordinul din clasificarea I. I. Artobolevski, la două elemente simple legate între ele printr-o articulaţie simplă (pentru $L_3 = 4$), la 3 elemente simple legate între ele prin două articulaţii simple (pentru $L_3 = 5$) etc. pînă la completarea numărului de elemente ale lanţului cinematic (respectiv cu e, c_5 şi L_3 date) — se obţine, după eliminarea variantelor care se repetă, toate variantele independente indicate la § 1.4.

Avantajele acestei metode faţă de prima au fost analizate în lucrarea [5].

§ 2. SISTEMATIZAREA ŞI CLASIFICAREA MECANISMELOR PLANE ARTICULATE CU DOUĂ GRADE DE MOBILITATE „TOTALE" ($M_3 = 2$)

2.1. Din lanţurile cinematice deduse cu ajutorul metodei indicate în lucrarea [5], prin fixarea succesivă a unuia din elemente, se obţin variantele distincte de mecanisme din punct de vedere structural. Dacă acestora, la rîndul lor, li se precizează şi elementele conducătoare, rezultă în continuare variantele distincte din punct de vedere cinematic. În limba germană, prima categorie poartă denumirea de *Mechanism*, în timp ce a doua categorie are denumirea de *Getriebe*, cuvînt care s-ar putea traduce cu „motor" sau „mecanism-motor", elementele cinematice căpătînd, în această ultimă situaţie, şi dimensiuni precizate.

În cele ce urmează vom căuta să sistematizăm într-o clasificare tabelară toate mecanismele plane articulate (cu articulaţii simple) cu două grade de mobilitate.

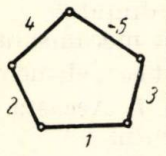
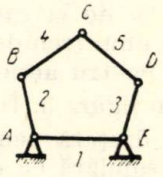
2.2. **Mecanismele plane articulate cu** $e = 5$, $c_5 = 5$, $M_3 = 2$. Din lanţul plan articulat cu $e = 5$, $c_5 = 5$ şi $L_3 = 5$ rezultă un singur mecanism ca variantă distinctă din punct de vedere structural, indiferent care din cele cinci elemente ale lui se consideră fix.

Pentru sistematizare s-a întocmit tabela 1.

În coloana 1 a tabelei s-a trecut numărul de ordine al lanţului: 5/1, în care cifra 5 de la numărător indică numărul de elemente ale lanţului, iar la numitor numărul de ordine al variantei distincte din punct

Tabela 1

Mecanismele plane articulate cu $e = 5$, $c_5 = 5$ şi grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$ provenite din lanţurile cinematice cu grad de libertate „total" $L_3 = 5$

Nr. de ord.	Lanţul cinematic	Mecanismul rezultat		Variantele cinematice posibile				
		Nr.	Schema structurală	Nr. crt.	Baza (elementul fix)	Elementele conducătoare	Clasa şi ordinul (I.I. Artobolevski)	Grupele assurice care determină clasa şi ordinul mecanismului-motor
1	2	3	4	5	6	7	8	9
5/1		1		1.1	1(2,3,4,5)	2,3	II/2	Diada 4,5
				1.2	1(2,3,4,5)	2.4(3,5)	II/2	Diada 3,5 (2,4)

Observaţii: 1) Cifrele din paranteză din coloana 6 arată bazele care pot fi alese şi din care rezultă mecanisme identice;
2) Cifrele din paranteză din coloana 7 arată perechile identice din elemente conducătoare, care dau variante identice din punct de vedere cinematic;
3) Cifra romană din coloana 8 indică clasa mecanismului-motor (după clasificarea I. I. Artobolevski) iar cifra arabă de la numitor ordinul mecanismului (după aceeaşi clasificare);
4) Grupele assurice din coloana 9 rezultă din descompunerea mecanismului-motor corespunzător elementelor conducătoare indicate în coloana 7.

de vedere structural (în lucrarea [5] acest lanț a fost alcătuit cu ajutorul metodei prezentată la § 1.5 *b* prin operația din tabela 5 a acelei lucrări).

Schema structurală a mecanismului rezultat prin fixarea unuia din cele 5 elemente este dată în coloana 4.

În coloana 5 s-a indicat numărul de ordine al variantelor distincte din punct de vedere cinematic.

Astfel, mecanismul-motor $\boxed{5/1-1.1}$ are ca bază elementul 1 (indicat în col. 6, unde s-au trecut în paranteze și celelalte patru elemente care dau aceeași variantă), iar ca elemente conducătoare pe 2 și 3, articulate la bază (col. 7).

El este de clasa a II-a ordinul 2 (după clasificarea lui I. I. Artobolevski), înscrisă în coloana 8, clasă și ordin determinate de grupa assurică din coloana 9 a tabelei.

Mecanismul-motor $\boxed{5/1-1.2}$ cu aceeași bază 1, are ca elemente conducătoare pe 2 și 4 sau pe (3,5) (în paranteze în col. 7).

Din cauza dificultăților tehnice de realizare a unor mecanisme cu $M_3 = 2$ cu elementele conducătoare separate între ele prin alte elemente (în afară de bază), aceste variante nu au fost introduse în clasificarea noastră.

În cazul mecanismului $\boxed{5/1-1}$, această variantă s-ar realiza prin alegerea perechii 2,5 (3,4) ca elemente conducătoare. Nu se iau în considerare nici cazurile a două elemente conducătoare articulate direct, dar fără nici o articulație fixă. În cazul aceluiași mecanism, o asemenea variantă s-ar realiza prin alegerea perechii (4,5) ca elemente conducătoare.

În ambele cazuri se poate ușor vedea că nici clasificarea structurală a lui I. I. Artobolevski nu mai este aplicabilă.

Cinematica mecanismului-motor $\boxed{5/1-1.1}$ a fost studiată complet în toată generalitatea ei în lucrările lui Radu C. Bogdan [7]—[11], prin transformarea unora din cuplele de rotație ale diadei 4,5 în cuple de translație (aspectele 2, respectiv 3), folosind în calculul analitic seriile Fourier complexe.

În lucrarea [10] se arată și cum se poate realiza acționarea elementelor conducătoare (manivele în lucrarea menționată) fie independent, prin motoare separate, fie cu un singur motor, montat pe axa fixă a unuia din elementele conducătoare (de exemplu 2), de la care mișcarea se poate transmite la celălalt (3) prin intermediul unui tren de roți dințate.

Astfel de variantă se poate aplica pentru acționarea mecanismului-motor $\boxed{5/1-1.2}$, conform schemei din figura 3. În acest caz, elementele conducătoare sînt manivela 3 și roata dințată centrală 7. Aceasta din urmă transmite mișcarea roții-satelit 6, solidară cu elementul 5.

Mișcarea elementelor conduse 2 și 4 poate fi studiată considerînd mișcările independente 3 și 5 (prin intermediul mișcării independente a roții 7).

Se știe că ω_5 rezultă din ω_3 și ω_7 din formula

$$\omega_5 = \omega_6 = \omega_3 \left(1 + \frac{Z_7}{Z_6}\right) - \omega_7 \frac{Z_7}{Z_6}, \qquad (5)$$

corespunzătoare mecanismului diferențial cu două grade de mobilitate (6, 3, 7).

Studiul cinematic al unui astfel de mecanism se poate continua fie prin metoda R. C. Bogdan, fie prin ajutorul ecuațiilor vectoriale [12],

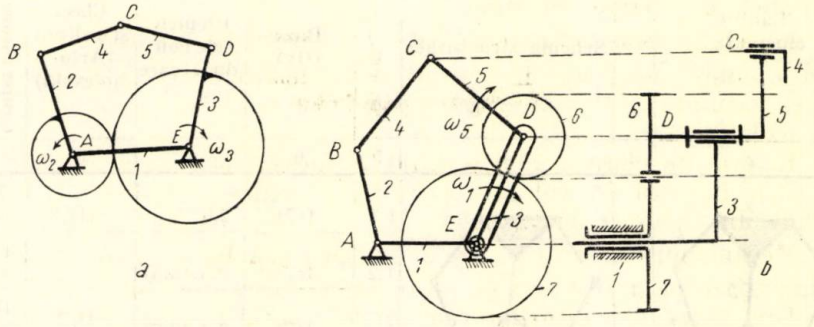


Fig. 3. — Modul de acționare a elementelor conducătoare ale mecanismului-motor 5/1—1.1 (fig. 3*a*) și a mecanismului-motor 5/1—1.2 (fig. 3*b*).

clasa și ordinul în care se încadrează (cl. II, ord. 2) nepunînd probleme speciale.

2.3. **Mecanismele și mecanismele-motor plane articulate cu** $e = 7$; $c_5 = 8$ și $M_3 = 2$. În această categorie se disting trei feluri de mecanisme:

a) mecanisme și mecanisme-motor cu $M_3 = 2$ (total) provenite din lanțuri cinematice cu grad de libertate „total" $L_3 = 5$ (tabela 2);

b) mecanisme și mecanisme-motor cu $M_3 = 2$ (total) provenite din lanțuri cinematice cu grad de libertate „parțial" $L_3^p = 5$ (tabela 3);

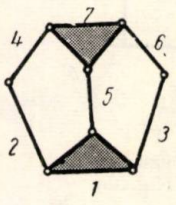
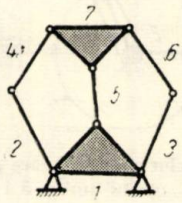
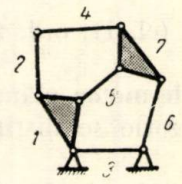
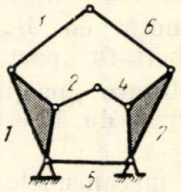
c) mecanisme cu grad de mobilitate „parțial-total" $M_3^{pt} = 2$ provenite din lanțuri cinematice cu grad de libertate $L_3^p = 5$ „parțial" (tabela 3).

a) În tabela 2 s-au alcătuit mecanismele provenite din lanțul cinematic cu $L_3 = 5$ „total" 7/2 (col. 1), a cărui schemă structurală (col. 2) a rezultat fie din amplificarea lanțului cinematic cu grad de libertate total 5/1 (1, 2, 4, 7, 5), cu diada 3,6 legată de elementele 1 și 7, fie prin adăugarea la trei elemente simple (1, 2, 3) — legate între ele prin două articulații — a triadei 4, 5, 6, 7 (grupă assurică de cl. III, ord. 3).

În coloana 4 sînt prezentate schemele structurale ale celor trei variante, independente din punct de vedere structural, care rezultă prin fixarea succesivă a unuia din elemente și eliminarea variantelor care se repetă $\boxed{7/2—1}\ldots\boxed{7/2—3}$. Pentru a se pune în evidență aceste variante, în coloana 6 s-a indicat în paranteză care elemente luate ca bază (element fix) formează variante identice din punct de vedere structural.

Tabela 2

Mecanismele plane articulate cu $e = 7$, $c_5 = 8$ şi grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$, provenite din lanţurile cinematice cu grad de libertate „total" ($L_3 = 5$)

Nr. de ord.	Lanţul cinematic	Mecanismul rezultat: Nr.	Mecanismul rezultat: Schema structurală	Variantele cinematice posibile: Nr. crt.	Baza (fix)	Elementele conducătoare	Clasa şi ordinul (Artobolevski)	Grupa assurică ce determină clasa şi ordinul mecanismului-motor
1	2	3	4	5	6	7	8	9
7/2		1		1.1	1(7)	2,3	III/3	Triada 4,5,6,7
				1.2	1(7)	2,5 (3,5)	II/2	Diadele 4,7 ; 6,3
				1.3	1(7)	2,4 (3,6)		Diadele 3,6 ; 5,7
				1.4	1(7)	5,7		Diadele 2,4 ; 3,6
		2		2.5	3(2,4,6)	1,2	III/3	Triada 4,5,6,7
				2.6	3 „	1,5	II/2	Diadele 2,4 ; 6,7
				2.7	3 „	1,6		Diadele 2,4 ; 5,7
				2.8	3 „	6,7		Diadele 2,4 ; 1,5
		3		3.9	5	1,7	II/2	Diadele 2,4 ; 3,6
				3.10	5	1,2 (1,3 ; 4,7 ; 6,7)		Diadele 3,6 ; 4,7

Observaţii : 1) Cifrele din paranteză din coloana 6 arată bazele care pot fi alese din care rezultă mecanisme identice.
2) Cifrele din paranteză din coloana 7 arată perechile identice de elemente conducătoare.
3) Cifra romană din coloana 8 indică clasa mecanismului (după clasificarea I. I. Artobolevski) iar cifra arabă de la numitor ordinul mecanismului (după aceeaşi clasificare) ;
4) Grupele assurice din coloana 9 rezultă din descompunerea mecanismului corespunzător elementelor conducătoare indicate în coloana 7.

Astfel, de exemplu, mecanismul $|\overline{7/2-2}|$ poate rezulta din lanţul (7/2), atît prin fixarea elementului 3 (trecut în col. 6), cît şi a elementelor 2,4 şi 6 (trecute în paranteză în aceeaşi coloană 6).

Din cele trei mecanisme variante independente din punct de vedere structural, rezultă, prin alegerea perechilor de elemente conducătoare, 10 mecanisme-motor cu grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$.

Elementele conducătoare sînt indicate în coloana 7, unde s-au trecut în paranteză și celelalte perechi de elemente conducătoare *care conduc la variante identice din punct de vedere cinematic.*

Astfel, mecanismul-motor | 7/2—1.2 | poate fi realizat din mecanismul | 7/2—1 | prin alegerea uneia din perechile de elemente conducătoare : 2,5 sau (3,5), trecută în paranteză.

În coloana 8 este indicată clasa și ordinul mecanismului-motor, determinată de grupa assurică de clasa cea mai superioară aflată în structura lui (grupa assurică indicată în col. 9).

Tabela 2 conține deci

— variante distincte structural : 3 mecanisme, | 7/2—1 | ... | 7/2—3

— variante distincte cinematic : 10 mecanisme-motor | 7/2—1.1 | ... ... | 7/2—3.10 |.

b) În tabela 3 s-au alcătuit mecanismele și mecanismele-motor provenite din cele două lanțuri cinematice cu grad de libertate $L_3^2 = 5$ „parțial" (7/1 *p* și 7/3*p*) [4]), ale căror scheme structurale sînt desenate în coloana 2.

Aceste lanțuri au rezultat :

— lanțul (7/1 *p*), fie prin adăugarea la 3 elemente simple (1, 2, 3), legate între ele prin articulații, succesiv a două diade (4,5 și 6,7), fie prin adăugarea la lanțul 5/1, format din elementele (1, 2, 4, 5, 3), a diadei (6,7), legată la două elemente vecine (4,5);

— lanțul 7/3 *p*, fie prin adăugarea la cele 3 elemente simple (1, 2, 3), legate între ele prin două articulații, a triadei 4, 5, 6, 7, fie prin adăugarea la cele 3 elemente simple (1, 3, 6), legate între ele tot prin două articulații, a grupei de clasa a IV-a, ordinul 2 (2, 4, 5, 7).

c) Mecanismele din grupa (*c*) (grad de mobilitate „parțial-total") se vor indica după enunțarea teoremelor din paragraful următor.

2.4. **Teoreme care definesc lanțurile și mecanismele cu grad de libertate și mobilitate „total", „parțial" și „fracționat".** Din analizarea formării lanțurilor cinematice cu grad de libertate „total" rezultă relația care trebuie să existe între clasa cea mai mică a conturului „Φ"$_{z\min}$ aflat în structura lanțului sau mecanismului și gradul de libertate (L_f) sau mobilitate (M_f) a lanțului, respectiv mecanismului, adică

$$\Phi_{z\min} \geqslant L_3, \tag{6}$$

$$\Phi_{z\min} \geqslant M_3 + 3. \tag{7}$$

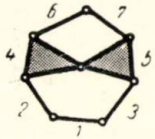
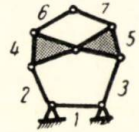
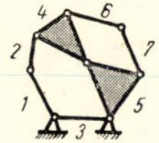
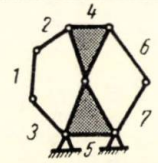
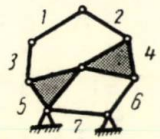
Formula (6) rezultă din însăși modul de alcătuire a lanțului.

Dacă, de exemplu, se alcătuiește lanțul cel mai simplu cu $e = 4$, $c_5 = 4$, și $L_3 = 4$ (patrulaterul) prin adăugarea la două elemente simple — legate între ele printr-o articulație — a unei diade, atunci conturul care rezultă este de clasa $\Phi_{z\min} = L_3 = 4$ (lanțul 4/1 din [5]).

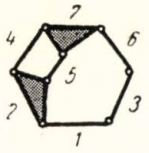
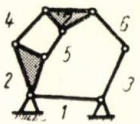
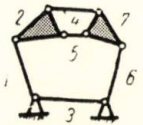
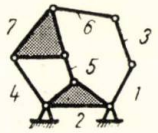
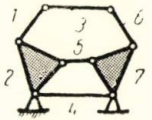
[4]) Lanțurile cu grad de libertate „parțial" vor primi, după numărul de ordine, indicativul „*p*".

Tabela 3

Mecanisme plane articulate cu $e=7$, $c_5=8$ şi grad de mobilitate „total" şi „parţial" provenite din lanţurile cinematice cu grad de libertate „parţial" $L_3=5$.

Nr. de ord.	Lanţul cinematic	Mecanismul rezultat		Variantele cinematice posibile						
		Nr.	Schema structurală	Nr. crt.	Baza (element fix)	Elementele conducătoare	Felul gradului de mobilitate	Clasa şi ordinul	Grupele assurice componente	Elemente cu mişcări parţiale *)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
7/1p		4t		4.11	1	2,3	total	II/2	Diadele 6,7; 4,5	—
				4.12	1	2,4(3,5)	„	„	„ 6,7; 3,5	—
		5t		5.13	3(2)	1,2	total	II/2	„ 6,7; 4,5	—
				5.14	3(2)	1,5	„	„	„ 6,7; 2,4	—
				5.15	3(2)	5,4	„	„	„ 6,7; 1,2	—
				5.16	3(2)	5,7	„	„	„ 1,2; 4,6	—
		6pt		6.17	5(4)	3,1	total	II/2	„ 6,7; 2,4	—
				6.18	5(4)	3,4	parţial	„	„ 1,2; 6,7	6,7(de4)
				6.19	5(4)	3,7	„	„	„ 1,2; 4,6	4,6(de7)
				6.20	5(4)	4,2	„	„	„ 1,3; 3,6	6,7(de4)
		7p		7.21	7(6)	5,3	parţial	II/2	„ 1,2; 4,6	4,6(de5)
					7(6)	6.4(6,5)	Soluţii imposibile			

*) În parantezele din coloana 11 este trecut elementul conducător de care depind mişcările elementelor indicate în coloană.

7/3p		8t		8.22	1(6)	2,3	total	III/3	Triada 4,5,6,7	—
				8.23	1(6)	2,4(2,5)	,,	II/2	Diadele 3,6 ; 5,7	—
				8.24	1(6)	3,6	,,	IV/2	Grupe 2,4 ; 7,5	—
		9t		9.25	3	1,6	total	IV/2	Grupa 2,4,7,5	—
				9.26	3	1,2(6,7)	,,	III/3	Triada 1,5,4,2	—
		10pt		10.27	2(7)	1,3	total	III/3	Triada 4,5,6,7	—
				10.28	2(7)	4(1,5)	parţial	II/2	Diadele 3,6 ;5,7	5,7(de4)
		11p		11.29	4(5)	2,1(7,6)	parţial	II/2	Diadele 3,6 ; 5,7 (1,3 ;2,5)	5,7(de2) 2,5(de7)

Din tabelele 1 şi 2 rezultă că în tehnică există în total următoarele variante cinematice ale mecanismelor plane articulate cu grad de mobilitate $M_3 = 2$ şi $e = 7$; $c_5 = 8$

a) cu grad de mobilitate ,,total'' $M_3 = 2$ rezultate din tabela 2 : 10 mecanisme-motor

,, ,, ,, 3 : 13 ,,

Total 23 mecanisme-motor

b) cu grad de mobilitate ,,parţial'' $M_3^p = 2$ rezultate din tabela 3 : 6 mecanisme-motor

Se constată covîrşitoarea majoritate a mecanismelor-motor cu grad de mobilitate ,,total'' faţă de cele cu grad de mobilitate ,,parţial''.

În mod analog, la alcătuirea lanțului cel mai simplu cu $e = 5$, $c_5 = 5$ și $L_3 = 5$ (lanțul 5/1) rezultă conturul $\Phi_{z\min} = L_3 = 5$.

Dacă la alcătuirea în continuare a lanțurilor, conform metodei indicate la § 2.1, rezultă în structura lui un contur $\Phi_z < L_3$, atunci lanțul are grad de libertate „parțial".

În consecință, la alcătuirea lanțurilor cu grad de libertate „total" trebuie respectate pe lîngă regulile prevăzute în teoremele 1...7 din lucrarea [5] și următoarele teoreme privind identificarea și definitivarea lanțurilor și mecanismelor cu grade de libertate respectiv mobilitate „total", „parțial" și „fracționat".

TEOREMA nr. 8 [5]) *privind definiția lanțului cinematic plan articulat cu grad de libertate „total"* $L_3 = 5$

Dacă în structura unui lanț cinematic articulat cu $L_3 = 5$ există cel puțin un contur închis deformabil a cărui clasă Φ_z este dată de relația

$$\Phi_{z\min} = L_3, \tag{8}$$

iar cel mai mare „rang" j al elementelor este dat de relația

$$j_{\max} \leqslant \frac{1}{2}(e_{\min} + 4 - L_3), \tag{4}$$

atunci gradul de libertate $L_3 = 5$ al lanțului este „total".

Demonstrația acestei teoreme rezultă din justificarea formulelor (6) și (7) de mai sus. În figura 4 sînt redate toate lanțurile cinematice plane articulate cu grad de libertate total $L_3 = 5$ cu $e = 5$ (a); $e = 7$ (b) și $e = 9$ (c... h).

TEOREMA nr. 9 *privind definiția lanțului cinematic plan articulat cu grad de libertate „parțial"* $L_3^4 = 5$

Dacă în structura unui lanț cinematic plan articulat există cel puțin un contur închis deformabil a cărui clasă Φ_z este dată de relația

$$\Phi_{z\min} = L_3 - 1, \tag{9}$$

iar cel mai mare „rang" j al elementelor este dat de relația

$$j_{\max} \leqslant \frac{1}{2}(e_{\min} + 4 - L_3), \tag{4'}$$

atunci gradul de libertate $L_3^p = 5$ al lanțului este „parțial".

În adevăr, lanțurile cinematice $7/1p$; $7/3p$ (tab. 3, col. 2) din figura 5*a* și *b*, precum și lanțurile $9/1p$; $9/2p$ tab. 5, col. 2 din figura 5*c* și *d* etc. (la alcătuirea cărora nu s-au respectat principiile teoremei 3 din lucrarea [5] privind lanțurile cu grad de libertate „total"), au în structura lor contururi de clasa a IV-a ($\Phi_z = 5 - 1 = 4$).

Astfel,

— la lanțul $7/1\,p$, conturul de elemente 4, 5, 7, 6, este de clasa a IV-a (este limitat de 4 articulații);

[5]) Pentru realizarea unei continuități, am considerat necesar ca numărul de ordine al teoremelor să fie în continuarea celor din lucrarea [5].

— la lanțul $7/3p$, conturul elementelor 2, 4, 7, 5 este de clasa a IV-a;

— la lanțul $9/1p$, contururile grupurilor de elemente 2, 4, 9, 8, și 5, 7, 6, 4 sînt de clasa a IV-a;

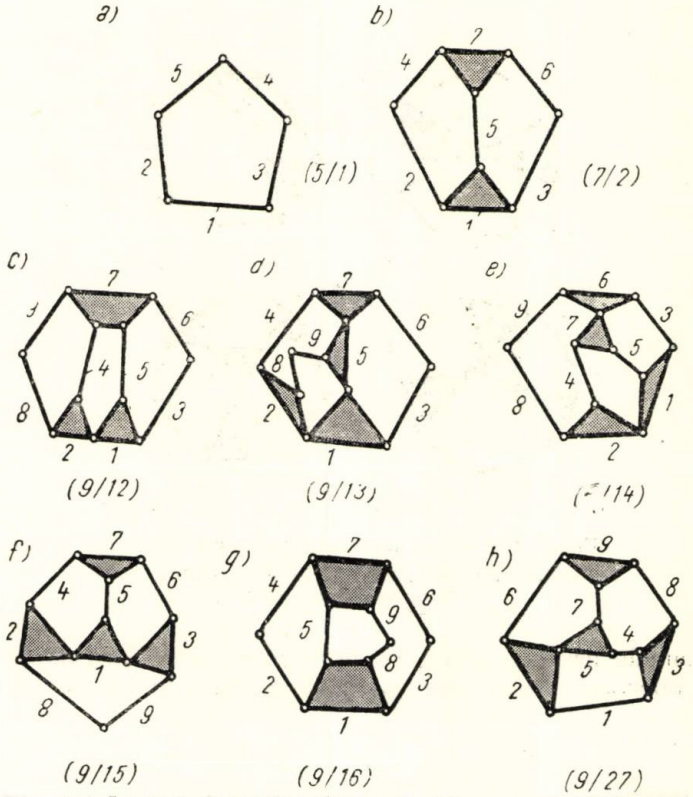


Fig. 4. — Lanțuri cinematice plane articulate cu grad de libertate „total" $L_3 = 5$ definite conform teoremei nr. 8.

— la lanțul $9/2p$, conturul elementelor 4, 5, 7, 6, este de clasa a IV-a etc.

TEOREMA nr. 10 *privind definiția lanțului cinematic plan articulat cu grad de libertate „fracționat"* $L_3^{fr} = 5$

Dacă în structura unui lanț cinematic articulat există cel puțin un contur închis deformabil, a cărui clasă Φ_z este dată de relația

$$\Phi_{z\min} = L_3 - 1,$$

iar cel mai mare „rang" j al elementelor este dat de relația

$$j'_{\max} = j_{\max} + 1 = \frac{1}{2}(e_{\min} + 6 - L_3), \tag{10}$$

sau dacă elementul cu rangul cel mai înalt j_{max} dat de (4) nu face parte din toate contururile închise ale mecanismului, atunci gradul de libertate $L_3^{fr} = 5$ al lanţului este „fracţionat".

În adevăr, lanţul cinematic 7/4 *fr* (fig. 6*a*), alcătuit conform metodei indicate la § 1.4 şi clasificat în tabela 6 din [5], la care însă nu s-au res-

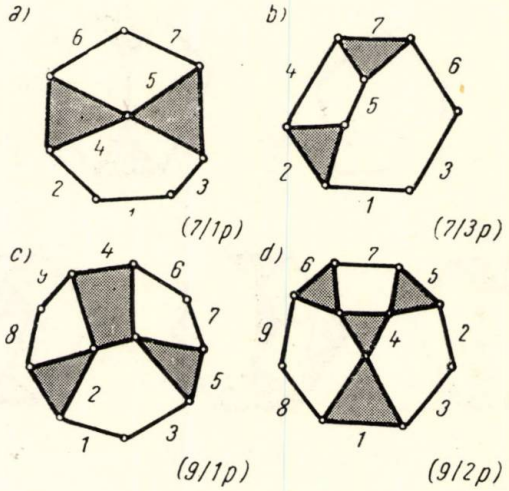


Fig. 5. — Lanţuri cinematice plane articulate cu grad de libertate „parţial" $L_3^p = 5$, definite conform teoremei nr. 9.

pectat teoremele privind alcătuirea lanţurilor cinematice plane articulate cu grad de libertate „total" sau „parţial" stabilite în [5], are două contu-

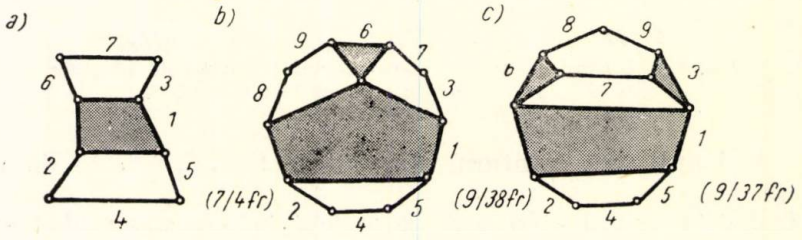


Fig. 6. — Exemple de lanţuri cinematice plane articulate cu grad de libertate „fracţionat" $L_3^{fr} = 5$, definite conform teoremei nr. 10.

ruri închise deformabile : (1, 3, 7,6) şi (1, 2, 4, 5) de clasa a IV-a ($\Phi_{zmin} = L_3 - 1 = 4$), iar rangul cel mai mare j al elementului 1 este :

$$j'_{max} = j_{max} + 1 = \frac{1}{2}(7 + 6 - 5) = 4.$$

Lanțul de mai sus a rezultat din adăugarea la cele 3 elemente simple — legate între ele prin două articulații — a două diade, conform regulei indicate în tabela 6 din [5]. În figura 6*b* lanțul 9/38 *fr* are $j'_{max} = \frac{1}{2}(9 + 6 - 5) = 5$ (elementul 1), iar în figura 6*c* lanțul 9/37 *fr* are $j_{max} = 4$ (elementul 1), însă nu face parte decît din două contururi (fără conturul 6, 7, 3, 9, 8).

TEOREMA nr. 11 *privind definiția mecanismului cu grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$ provenit din lanț cinematic cu grad de libertate „total" $L_3 = 5$*

Dacă în structura unui mecanism plan articulat cu $M_3 = 2$ există cel puțin un contur închis deformabil a cărui clasă Φ_z este dată de relația

$$\Phi_{z\min} = M_3 + 3, \tag{11}$$

iar cel mai mare „rang" j al elementelor este dat de relația

$$j_{max} \leqslant \frac{1}{2}(e_{min} + 1 - M_3),$$

atunci gradul de mobilitate atît al mecanismului, cît și al tuturor mecanismelor-motor care rezultă prin precizarea elementelor conducătoare (motor) $M_3 = 2$ este „total" (fig. 7).

În adevăr, din figura 7 și din tabelele 2 și 4, în care sînt alcătuite mecanismele și mecanismele-motor din lanțurile cinematice cu grad de libertate „total", se constată că teorema nr. 11 nu este decît o consecință a teoremei nr. 8.

TEOREMA nr. 12 *privind definiția mecanismului cu grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$ provenit din lanț cinematic cu grad de libertate „parțial" $L_3^p = 5$*

Dacă lanțului cinematic plan articulat cu grad de libertate „parțial" definit conform teoremei nr. 9 i se fixează unul din elementele simple (de „rang" $j = 2$) care aparține contururilor închise deformabile a căror clasă este dată de relația

$$\Phi_z = M_3 + 3 = L_3, \tag{12}$$

atunci mecanismul are grad de mobilitate „total", deoarece toate mecanismele-motor care rezultă prin precizarea elementelor conducătoare (motoare) au grad de mobilitate ($M_3 = 2$) „total".

Mecanismul va avea de asemenea grad de mobilitate „total" dacă baza (elementul fix) al cărui „rang" $j > 2$ face parte din două sau mai multe contururi închise deformabile a căror clasă Φ_z satisface relația (12) (fig. 8).

În adevăr, mecanismele $\overline{|7/1p-4t|}$, $\overline{|7/1p-5t|}$, $\overline{|7/3p-8t|}$, $\overline{|7/3p-9t|}$ din tabela 3 sau mecanismele $\overline{|9/1p-36t|}$, $\overline{|9/2p-41t|}$, $\overline{|9/2p-43t|}$ etc. din tabela 5 au $M_3 = 2$ „total" pentru că elementul fix corespunzător (1,

respectiv 3 din tabela 3; sau 1, respectiv 2, respectiv 3 din tabela 5) face parte dintr-un contur închis deformabil cu $\Phi_z = 5$ (1, 2, 4, 5, 3, la mecanismele $\boxed{7/1p-4t}$, $\boxed{7/1p-5t}$, $\boxed{9/1p-36t}$ etc.).

De asemenea, mecanismul $\boxed{9/2p-41t}$ are grad de mobilitate „total" (fig. 8*f*), deoarece baza (elementului fix 1 de „rang" $j = 3$) face parte

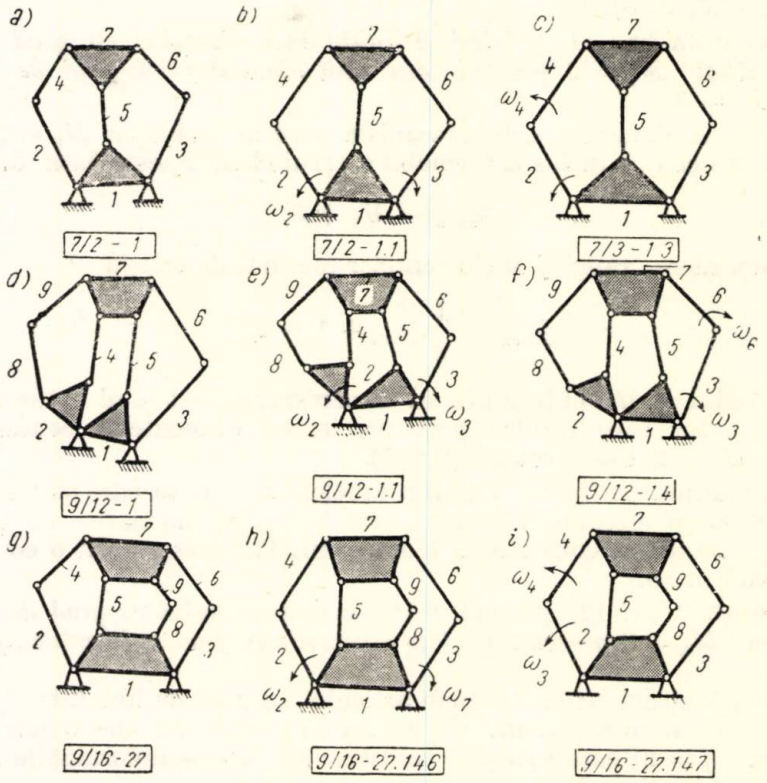


Fig. 7. — Mecanisme și mecanisme-motor plane articulate cu grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$, rezultate din lanțuri cinematice cu grad de libertate „total" $L_3 = 5$, conform teoremei nr. 11.

din contururile 1, 8, 9, 6, 4 și 1, 4, 5, 2, 3, de clasa a V-a, conform formulei (12).

TEOREMA nr. 13 *privind definiția mecanismului cu grad de mobilitate „parțial"* $M_3^p = 2$ *provenit din lanț cinematic cu grad de libertate „parțial"* $L_3^p = 5$

Dacă lanțului cinematic plan articulat cu grad de libertate „parțial" definit conform teoremei nr. 9 i se fixează fie unul din elementele simple (de „rang" $j = 2$) care face parte dintr-un contur închis deformabil a cărui clasă este dată de relația

$$\Phi_{z\min} = M_3 + 2, \tag{13}$$

fie un element complex de rang $j \geqslant 4$ care face parte din unul sau mai multe contururi închise deformabile a căror clasă este dată de relația (13), atunci mecanismul are grad de mobilitate „parțial", deoarece toate *mecanismele-motor* care rezultă prin precizarea elementelor conducătoare (motor) au grad de mobilitate ($M_3^p = 2$) „parțial" (fig. 9).

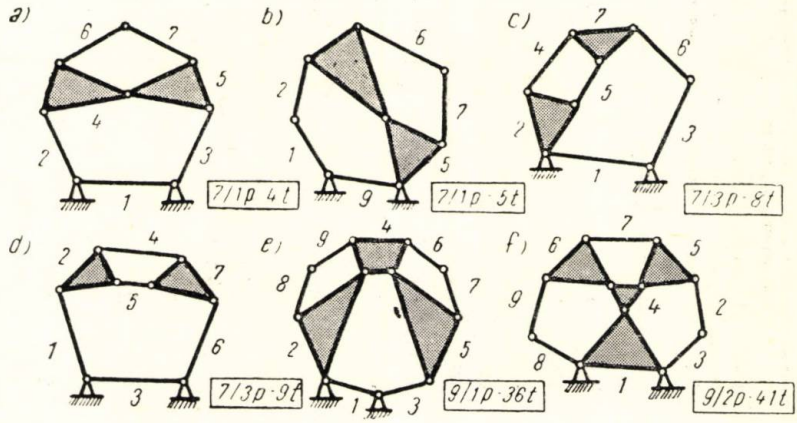


Fig. 8. — Mecanisme plane articulate cu grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$, provenite din lanț cinematic cu grad de libertate „parțial" $L_3^p = 5$, conform teoremei nr. 12.

În adevăr mecanismele $\boxed{7/1p-7p}$, $\boxed{7/3p-11p}$, $\boxed{9/1p-39p}$, $\boxed{9/1p-38p}$, $\boxed{9/2p-46p}$ etc. au grad de mobilitate „parțial", deoarece elementul fix respectiv face parte dintr-un contur al cărui $\Phi_{z\min} = M_3 + 2 = 4$ (7, 5, 4, 6) la mecanismul $\boxed{7/1p-7p}$ (fig. 9*a*); 4,2, 5, 7, la mecanismul $\boxed{7/3p-11p}$ (fig. 9*b*); 6, 7, 5, 4, la mecanismul $\boxed{9/1p-39p}$ (fig. 9*c*) etc. Din tabelele 3 și 5 se vede că toate mecanismele-motor care rezultă din acestea au grad de mobilitate „parțial".

TEOREMA nr. 14 *privind definiția mecanismului cu grad de mobilitate „parțial — total"* $M_3^{pt} = 2$ *provenit din lanț cinematic cu grad de libertate „parțial"* $L_3^p = 5$

Dacă lanțului cinematic plan articulat cu grad de libertate parțial $L_3^p = 5$ i se fixează un element de „rang" $j \geqslant 3$ care face parte din cel puțin două contururi închise deformabile, din care cel puțin unul este de clasa

$$\Phi_{z\min} = M_3 + 2, \tag{14}$$

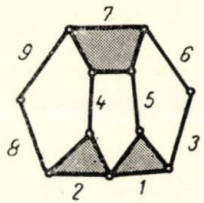
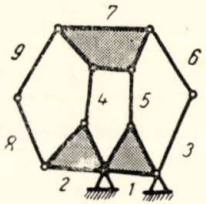
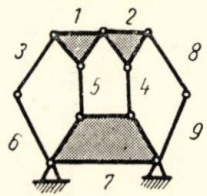
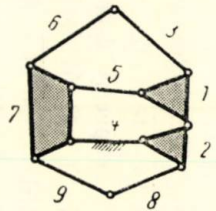
iar celelalte de clasa

$$\Phi_z \geqslant M_3 + 3, \tag{15}$$

atunci mecanismul care rezultă are grad de mobilitate „parțial-total", deoarece printre mecanismele-motor care se obțin prin precizarea

Tabela 4

Mecanismele plane articulate cu $e = 9$, $c_5 = 11$ şi grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$ provenite din lanţurile cinematice cu grad de libertate „total" $L_3 = 5$

Nr. de ord.	Lanţul cinematic	Mecanismul rezultat		Variantele cinematice posibile				
		Nr.	Schema structurală	Nr. crt.	Baza (element fix)	Elemente conducătoare	Clasa şi ordinul (I. I. Artobolevski)	Grupa assurică ce determină clasa mecanismului-motor
1	2	3	4	5	6	7	8	9
9/12		1		1.1	1(2)	2,3	III/3	Triada 4,5,6,7+(D8,9)
				1.2	1(2)	3,5	II/2	Diadele 8,9 ;2,4 ;6,7
				1.3	1(2)	5,2		„ 8,9 ;3,6 ;4,7
				1.4	1(2)	3,6		„ 8,9 ; 2,4 ; 5,7
				1.5	1(2)	5,7		„ 8,9 ; 2,4 ; 3,6
				1.6	1(2)	2,4		„ 3,6 ; 8,9 ; 5,7
				1.7	1(2)	2,8	III/3	Triada 5,4,9,7+(D3,6)
		2		2.8	7	6,9	III/4	Triada dezvoltată 1,2,3,4,5,8
				2.9	7	6,4(9,5)	III/3	Triada 3,5,2,1+(D8,9)
				2.10	7	4,5	II/2	Diadele 3,6 ; 8,9 ; 1,2
				2.11	7	4,9(6,5)		„ 3,6 ; 1,5 ; 2,8
				2.12	7	3,6(8,9)		„ 8,9 ; 2,4 ; 1,5
				2.13	7	4,2(5,1)		„ 3,6 ; 5,1 ; 8,9
		3		3.14	4(5)	2,7	II/2	Diadele 3,6 ; 8,9 ; 1,5
				3.15	4(5)	2,1		„ 3,6 ; 8,9 ; 5,7
				3.16	4(5)	2,8		„ 3,6 ; 1,5 ; 7,9
				3.17	4(5)	7,5		„ 3,6 ; 8,9 ; 1,2
				3.18	4(5)	7,9		„ 3,6 ; 1,5 ; 2,8
				3.19	4(5)	7,6	II /2	Triada 1,2,3,5+(D8,9)

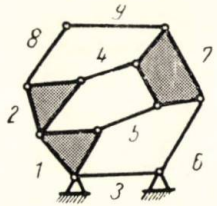
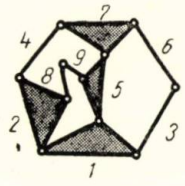
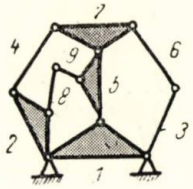
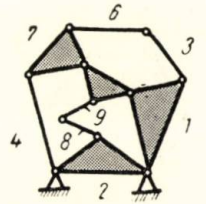
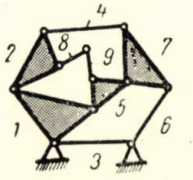
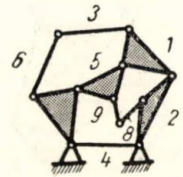
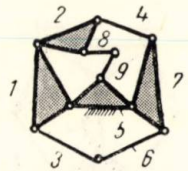
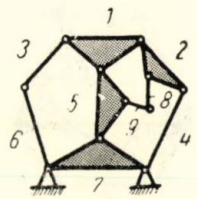
9/12		4		4.20	3(6,8,9)	1,2	III/3	Triada 4,5,6,7+(D8,9)
				4.21	3(6,8,9)	1,5	II/2	Diadele 8,9 ; 2,4 ; 6,7
				4.22	3(6,8,9)	1,6		,, 8,9 ; 2,4 ; 5,7
				4.23	3(6,8,9)	6,7		,, 8,9 ; 2,4 ; 1,5
9/13		5		5.24	1	2,3	III/3	Triada 4,5,6,7+(D8,9)
				5.25	1	2,5	II/2	Diadele 3,6 ; 4,7 ; 8,9
				5.26	1	2,4		,, 3,6 ; 8,9 ; 5,7
				5.27	1	2,8		,, 3,6 ; 4,7 ; 5,9
				5.28	1	3,5		,, 8,9 ; 2,4 ; 6,7
				5.29	1	3,6		,, 8,9 ; 2,4 ; 5,7
				5.30	1	5,7		,, 8,9 ; 2,4 ; 3,6
				5.31	1	5,9		,, 3,6 ; 4,7 ; 2,8
		6		6.32	2	1,3	III/3	Triada 4,5,6,7+(D8,9)
				6.33	2	1,4	II/2	Diadele 8,9 ; 3,6 ; 5,7
				6.34	2	1,5		,, 3,6 ; 8,9 ; 4,7
				6.35	2	1,8		,, 3,6 ; 4,7 ; 5,9
				6.36	2	4,7		,, 8,9 ; 3,6 ; 1,5
				6.37	2	4,8	III/3	Triada 1,5,7,9+(D3,6)
				6.38	2	8,9	II/2	Diadele 3,6 ; 4,7 ; 1,5
		7		7.39	3(6)	1,2	III/3	Triada 4,5,6,7+(D8,9)
				7.40	3(6)	1,5	II/2	Diadele 8,9 ; 2,4 ; 6,7
				7.41	3(6)	1,6		,, 8,9 ; 2,4 ; 5,7
				7.42	3(6)	6,7		,, 8,9 ; 2,4 ; 1,5

Tabela 4 (continuare)

Nr. de ord.	Lanţul cinematic	Mecanismul rezultat		Variantele cinematice posibile				
		Nr.	Schema structurală	Nr. crt.	Baza (element fix)	Elemente conducătoare	Clasa şi ordinul (I. I. Artobolevski)	Grupa assurică ce determină clasa mecanismului-motor
1	2	3	4	5	6	7	8	9
9/13		8		8.43	4	2,1	II/2	Diadele 3,6 ; 8,9 ; 7,5
				8.44	4	2,7		,, 3,6 ; 8,9 ; 1,5
				8.45	4	2,8	III/3	Triada 1,5,7,9+(D3,6)
				8.46	4	7,6		Triada 1,2,3,5+(D8,9)
				8.47	4	7,5	II/2	Diadele 3,6 ; 8,9 ; 1,2
		9		9.48	5	1,2	II/2	Diadele 4,7 ; 8,9 ; 3,6
				9.49	5	1,3		,, 8,9 ; 2,4 ; 6,7
				9.50	5	1,7		,, 8,9 ; 2,4 ; 3,6
				9.51	5	1,9		,, 3,6 ; 4,7 ; 8,9
				9.52	5	7,4		,, 3,6 ; 8,9 ; 1,2
				9.53	5	7,6		,, 8,9 ; 2,4 ; 1,3
				9.54	5	7,9	III/3	Triada 1,2,4,8+(D3,6)
				9.55	5	9,8	II/2	Diadele 3,6 ; 4,7 ; 1,2
		10		10.56	7	6,4	III/3	Triada 1,2,3,5+(D8,9)
				10.57	7	6,3	II/2	Diadele 8,9 ; 2,4 ; 1,5
				10.58	7	6,5		,, 8,9 ; 2,4 ; 1,3
				10.59	7	4,2		,, 8,9 ; 3,6 ; 1,5
				10.60	7	4,5		,, 8,9 ; 3,6 ; 1,2
				10.61	7	5,1		,, 8,9 ; 2,4 ; 3,6
				10.62	7	5,9	III/3	Triada 1,2,4,8+(D3,6)

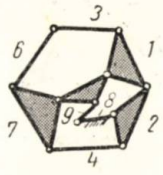
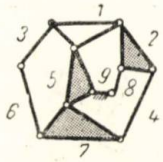
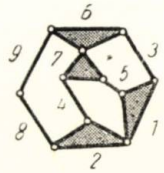
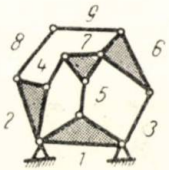
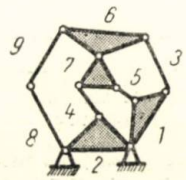
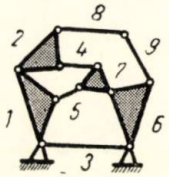
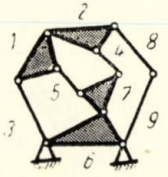
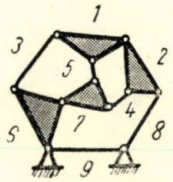
9/13		11		11.63	8	2,4	V/3	Grupa 1,3,6,7,5,9
				11.64	8	2,1	II/2	Diadele 4,7 ; 3,6 ; 5,9
				11.65	8	2,9		,, 4,7 ; 3,6 ; 1,5
				11.66	8	9,5		,, 3,6 ; 4,7 ; 1,2
		12		12.67	9	8,2	V/3	Grupa 1,3,6,7,5,4
				12.68	9	8,5	II/2	Diadele 3,6 ; 1,2 ; 4,7
				12.69	9	5,1		,, 3,6 ; 4,7 ; 2,8
				12.70	9	5,7	III/3	Triada 1,2,4,8+(D3,6)
9/14		13		13.71	1	2,3	III/3	Triada 4,5,6,7+(D8,9)
				13.72	1	2,8	III/4	Grupa 3,4,5,6,7,9
				13.73	1	2,5	II/2	Diadele 8,9 ; 3,6 ; 4,7
				13.74	1	2,4		,, 8,9 ; 3,6 ; 5,7
				13.75	1	5,3		,, 8,9 ; 2,4 ; 7,6
				13.76	1	5,7		,, 8,9 ; 2,4 ; 3,6
				13.77	1	3,6		,, 8,9 ; 2,4 ; 5,7
		14		14.78	2	1,3	III/3	Triada 4,5,6,7+(D8,9)
				14.79	2	1,8	III/4	Grupa 3,4,5,6,7,9
				14.80	2	1,4	II/2	Diadele 8,9 ; 3,6 ; 5,7
				14.81	2	1,5		,, 8,9 ; 3,6 ; 4,7
				14.82	2	4,7	V/3	,, 8,9 ; 3,6 ; 1,5
				14.83	2	4,8		Grupa 1,3,6,9,7,5
				14.84	2	8,9		,, 1,3,6,7,4,5

Tabela nr. 4 (continuare)

Nr. de ord.	Lanţul cinematic	Mecanismul rezultat		Variantele cinematice posibile				
		Nr.	Schema structurală	Nr. crt.	Baza (element fix)	Elemente conducă-toare	Clasa şi ordinul (I. I. Artobolevski)	Grupa assurică ce determină clasa mecanismului-motor
1	2	3	4	5	6	7	8	9
9/14		15		15.85	3	1,2	III/3	Triada 4,5,6,7+(D8,9)
				15.86	3	1,5	II/2	Diadele 8,9 ; 2,4 ; 7,6
				15.87	3	1,6		„ 8,9 ; 2,4 ; 5,7
				15.88	3	6,7		„ 8,9 ; 2,4 ; 1,5
				15.89	3	6,9	V/3	Grupa 1,2,8,4,7,5
		16		16.90	6	3,9	V/3	„ 1,2,8,4,7,5
				16.91	6	3,7	II/2	Diadele 8,9 ; 2,4 ; 1,5
				16.92	6	3,1		„ 8,9 ; 2,4 ; 6,7
				16.93	6	7,9	III/4	Grupa 1,2,3,5,4,8
				16.94	6	7,4	III/3	Triada 1,2,3,5+(D8,9)
				16.95	6	7,5	II/2	Diadele 8,9 ; 2,4 ; 1,3
				16.96	6	9,8	V/3	Grupa 2,4, 7, 5, 1, 3
		17		17.97	9(8)	6,8	V/3	„ 2,4,7,5,1,3
				17.98	9(8)	6,3		„ 1,2,8,4,7,5
				17.99	9(8)	6,7	III/4	„ 1,2,3,5,4,8
				17.100	9(8)	8,2	V/3	„ 1,3,6,7,4,5

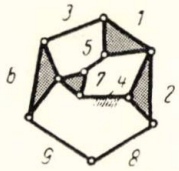
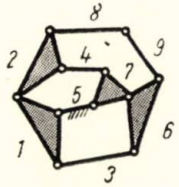
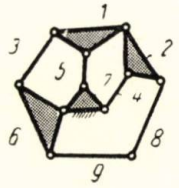
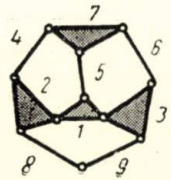
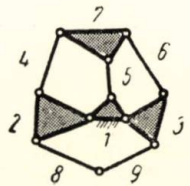
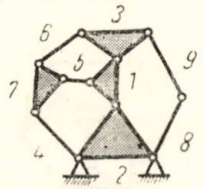
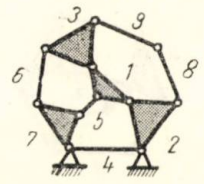
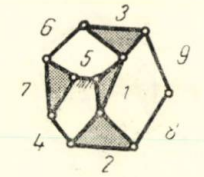
9/14		18		18.101	4	2,1	II/2	Diadele 8,9 ; 3,6 ; 5,7
				18.102	4	2,7		,, 8,9 ; 3,6 ; 1,5
				18.103	4	2,8	V/3	Grupa 1,3,6,9,7,5
				18.104	4	7,5	II/2	Diadele 8,9 ; 3,6 ; 1,2
				18.105	4	7,6	III/3	Triada 1,2,3,5+(D8,9)
		19		19.106	5	1,2	II/2	Diadele 8,9 ; 3,6 ; 4,7
				19.107	5	1,3		,, 8,9 ; 2,4 ; 7,6
				19.108	5	1,7		,, 8,9 ; 2,4 ; 3,6
				19.109	5	7,4		,, 8,9 ; 3,6 ; 1,2
				19.110	5	7,6		,, 8,9 ; 2,4 ; 1,3
		20		20.111	7	4,2	II/2	,, 8,9 ; 3,6 ; 1,5
				20.112	7	4,5		,, 8,9 ; 3,6 ; 1,2
				20.113	7	4,6	III/3	Triada 1,2,3,5+(D8,9)
				20.114	7	5,1	II/2	Diadele 8,9 ; 2,4 ; 3,6
				20.115	7	5,6		,, 8,9 ; 2,4 ; 1,3
				20.116	7	6,3		,, 8,9 ; 2,4 ; 1,5
				20.117	7	6,9	III/4	Grupa 1,2,3,5,4,8
9/15		21		21.118	1	2,3	III/3	Triada 4,5,6,7+(D8,9)
				21.119	1	2,4(3,6)	II/2	Diadele 8,9 ; 3,6 ; 5,7
				21.120	1	2,5(3,5)		,, 8,9 ; 3,6 ; 4,7
				21.121	1	2,8(3,9)	III/3	Triada 4,5,6,7+(D3,9)
				21.122	1	5,7	II/2	Diadele 8,9 ; 3,6 ; 2,4

Tabela nr. 4 (continuare)

Nr. de ord.	Lanţul cinematic	Mecanismul rezultat		Variantele cinematice posibile				
		Nr.	Schema structurală	Nr. crt.	Baza (element fix)	Elemente conducătoare	Clasa şi ordinul (I. I. Artobolevski)	Grupa assurică ce determină clasa mecanismului-motor
1	2	3	4	5	6	7	8	9
9/15		22		22.123	2(3)	1,3	III/3	Triada 4,5,6,7+(D8,9)
				22.124	2(3)	1,4	II/2	Diadele 8,9 ; 3,6 ; 5,7
				22.125	2(3)	1,5		,, 8,9 ; 3,6 ; 4,7
				22.126	2(3)	1,8	III/3	Triada 4,5,6,7+(D3,9)
				22.127	2(3)	8,9		,, 4,5,6,7+(D.1,3)
				22.128	2(3)	4,7	II/2	Diadele 8,9 ; 6,3 ; 1,5
				22.129	2(3)	4,8	V/3	Grupa 1,5,7,6,3,9
		23		23.130	4(6)	2,1	II/2	Diadele 8,9 ; 3,6 ; 5,7
				23.131	4(6)	2,7		,, 8,9 ; 6,3 ; 1,5
				23.132	4(6)	2,8	V/3	Grupa 1,5,7,6,8,9
				23.133	4(6)	7,5		,, 2,8,9,3,1,5
				23.134	4(6)	7,6	II/2	Diadele 8,9 ; 3,6 ; 1,2
		24		24.135	5	1,3(1,2)	II/2	Diadele 8,9 ; 2,4 ; 6,7
				24.136	5	1,7		,, 8,9 ; 2,4 ; 3,6
				24.137	5	7,6(7,4)		,, 8,9 ; 2,4 ; 1,3

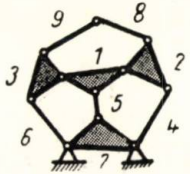
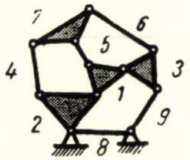
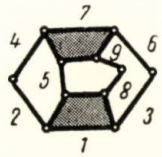
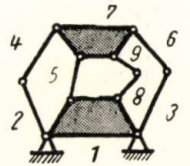
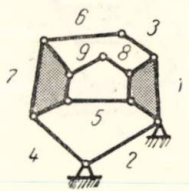
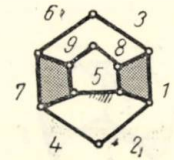
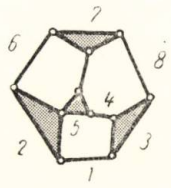
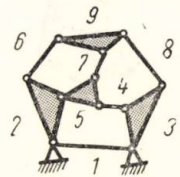
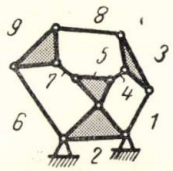
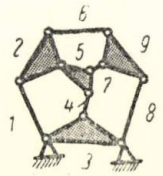
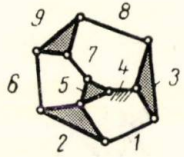
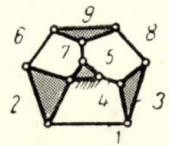
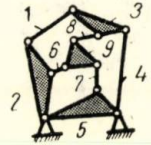
9/15		25		25.138	7	4,2(3,6)	II/2	Diadele 8,9 ; 3,6 ; 1,5
				,, 139	7	4,5(6,5)		,, 8,9 ; 3,6 ; 1,2
				,, 140	7	4,6	V/3	Grupa 3,9,8,2,1,5
				,, 141	7	5,1	II/2	Diadele 8,9 ; 3,6 ; 2,4
		26		26.142	8,(9)	2,1	III/3	Triada 4,5,6,7+(D3,9)
				,, 143	8(9)	2,4	V/3	Grupa 1,5,7,6,3,9
				,, 144	8(9)	2,9	III/3	Triada 4,5,6,7+(D1,3)
				,, 145	8(9)	9,3		,, 4,5,6,7+(D1,2)
9/16		27		27.146	1(7)	2,3	III/3	Triada 4,5,6,7+(D8,9)
				,, 147	1(7)	2,4	II/2	Diadele 8,9 ; 3,6 ; 5,7
				, 148	1(7)	2,5		,, 8,9 ; 3,6 ; 4,7
				,, 149	1(7)	2,8	III/3	Triada 4,5,9,7+(D3,6)
				,, 150	1(7)	3,5	II/2	Diadele 8,9 ; 2,4 ; 6,7
				,, 151	1(7)	3,6		,, 8,9 ; 2,4 ; 5,7
				,, 152	1(7)	3,8	III/3	Triada 5,9,6,7+(D2,4)
				,, 153	1(7)	5,7	II/2	Diadele 8,9 ; 3,6 ; 2,4
				,, 154	1(7)	5,8		,, 3,6 ; 2,4 ; 7,9
				,, 155	1(7)	8,9		,, 3,6 ; 2,4 ; 7,5

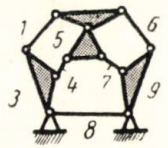
Tabela 4 (continuare)

Nr. de ord.	Lanţul cinematic	Mecanismul rezultat		Variantele cinematice posibile				
		Nr.	Schema structurală	Nr. crt.	Baza (element fix)	Elemente conducătoare	Clasa şi ordinul (I. I. Artobolevski)	Grupa assurică ce determină clasa mecanismului-motor
1	2	3	4	5	6	7	8	9
9/16		28		28.156	2(3,4,6, 8,9)	1,3	III/3	Triada 4,5,6,7+(D8,9)
				,, 157	2(3,4,6, 8,9)	1,4	II/2	Diadele 8,9; 3,6, 5,7
				,, 158	2(3,4,6, 8,9)	1,5		,, 8,9; 3,6; 4,7
				,, 159	2(3,4,6, 8,9)	1,8	III/3	Triada 4,5,9,7+(D3,6)
				,, 160	2(3,4,6, 8,9)	4,7	II/2	Diadele 8,9; 3,6; 1,5
		29		29.161	5	1,7	II/2	Diadele 8,9; 3,6; 2,4
				,, 162	5	1,2(3,8) sau [7,4(6,9)]		,, 8,9; 3,6; 7,4

9/27		30		30.163	1(6)	2,3	III/3	Triada 6,7,8,9+(D4,5)
				,, 164	1(6)	2,5		,, 6,7,8,9+(D3,4)
				,, 165	1(6)	2,6	VI/3	Grupa 3,4,5,7,9,8
				,, 166	1(6)	3,4	V/3	,, 7,5,2,6,9,8
				,, 167	1(6)	3,8		,, 2,6,9,7,5,4
		31		31.168	2	1,3(6,9)	III/3	Triada 6,7,8,9+(D4,5)
				,, 169	2	1,5(6,5)		,, 6,7,8,9+(D4,3)
				,, 170	2	1,6	VI/3	Grupa 3,4,5,7,9,8
				,, 171	2	5,4(5,7)	III/3	Triada 6,7,8,9+(D1,3)
		32		32.172	3(9)	1,2	III/3	Triada 6,7,8,9+(D4,5)
				,, 173	3(9)	1,4		,, 6,7,8,9+(D2,5)
				,, 174	3(9)	1,8	V/3	Grupa 2,6,9,7,5,4
				,, 175	3(9)	4,5	III/3	Triada 6,7,8,9+(D1,2)
				,, 176	3(9)	4,8	V/3	Grupa 5,7,9,6,2,1
				,, 177	3(9)	8,9	III/4	Triada 1,4,6,7,2,5

(Tabela 4 continuare)

Nr. de ord.	Lanţul cinematic	Mecanismul rezultat		Variantele cinematice posibile				
		Nr.	Schema structurală	Nr. crt.	Baza (element fix)	Elemente conducătoare	Clasa şi ordinul (I. I. Artobolevski)	Grupa assurică ce determină clasa mecanismului-motor
1	2	3	4	5	6	7	8	9
9/27		33		33.178	4(7)	3,1	V/3	Grupa 7,5,2,6,9,8
				,, 179	4(7)	3,5	III/3	Triada 6,7,8,9+(D1,2)
				,, 180	4(7)	3,8	V/3	Grupa 5,7,9,6,2,1
				,, 181	4(7)	5,2	III/3	Triada 6,7,8,9+(D1,3)
				,, 182	4(7)	5,7	VI/3	Grupa 1,2,6,9,8,3
		34		34.183	5	2,1(6)	III/3	Triada 6,7,8,9+(D3,4)
				,, 184	5	2,4		,, 6,7,8,9+(D3,1)
				,, 185	5	2,7		,, 1,4,8,3+(D6,9)
				,, 186	5	4,3		,, 6,7,8,9+(D1,2)
				,, 187	5	4,7	VI/3	Grupa 1,2,6,9,8,3
				,, 188	5	7,9	III/3	Triada 1,4,8,3+(D2,6)

9/27		35		35.189	8	3,1(9,6)	V/3	Grupa 2,6,9,7,5,4
				,, 190	8	3,4(9,7)		,, 5,7,9,6,2,1
				,, 191	8	3,9	III/4	Triada 1,4,6,7,2,5

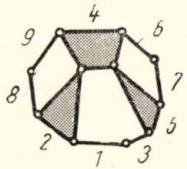
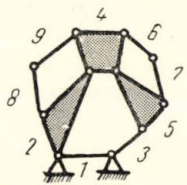
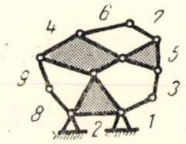
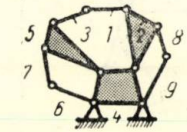
Din 6 lanțuri cinematice plane articulate cu grad de libertate „total'' $L_3 = 5$, $e = 9$ și $c_5 = 11$ rezultă prin schimbarea bazei :

35 mecanisme plane articulate cu $M_3 = 2$ ca variante distincte structural ; (numerotate 1 ... 35)

191 mecanisme-motor plane articulate cu $M_3 = 2$ ca variante distincte cinematic (numerotate 1.1 ... 35.191) toate cu grad de mobilitate „total''.

Tabela 5

Mecanismele plane articulate cu $e = 9$, $c_5 = 11$ şi grad de mobilitate „total", „parţial-total" şi „parţial" provenite din lanţurile cinematice cu grad de libertate parţial $L_3^p = 5$

Nr. de ord.	Lanţul cinematic	Mecanismul rezultat		Variantele cinematice posibile						
		Nr.	Schema structurală	Nr. crt.	Baza (element fix)	Elementele conducătoare	Felul gradului de mobilitate	Clasa şi ordinul	Grupele assurice componente	Elemente cu mişcări parţiale
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
9/1 *p*		36*t*		36.192	1(3)	2,3	Total	II/2	Diadele 4,5 ; 6,7 ; 8,9	—
				36.193	„	2,4	„		Diadele 3,5 ; 6,7 ; 8,9	—
				36.194	„	2,8	„		Diadele 4,9 ; 3,5 ; 6,7	—
				36.195	„	3,5	„		Diadele 2,4 ; 6,7 ; 8,9	—
		37*pt*		37.196	2(5)	1,8	Parţial	II/2	Diadele 4,9 ; 3,5 ; 6,7	4,9 (de 8)
				37.197	„	1,3	Total		Diadele 4,5 ; 6,7 ; 8,9	—
		38*p*		38.198	4	6,9	Parţial	II/2	Diadele 5,7 ; 2,8 ; 1,3	5,7 (de 6) 2,8 (de 9)

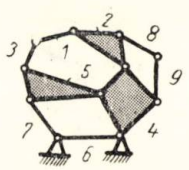
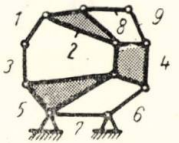
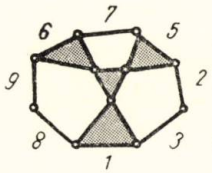
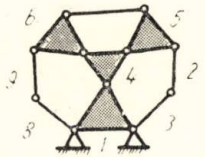
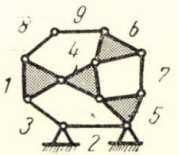
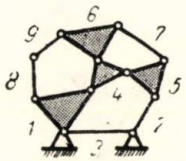
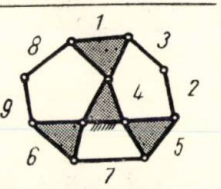
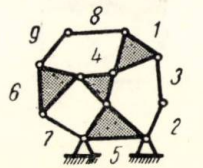
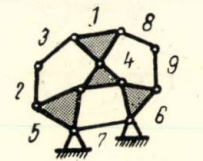
9/1*p*		39*p*		39.199	6(9)	4,2	Parţial	II/2	Diadele 5,7 ; 1,3 ; 8,9	5,7 (de 4)
				39.200	,,	4,9	,,		Diadele 5,7 ; 1,3 ; 8,2	5,7 (de 4)
		40*p*		40.201	7(8)	5,3	Parţial	II/2	Diadele 4,6 ; 1,2 ; 8,9	4,6 (de 5)
9/2*p*		41*t*		41.202	1	3,8	Total	IV/3	Grupa 2,5 ; 4,7 ; 6,9	—
				,, 203	,,	3,2(8,9)	,,	II/2	Diadele 4,5 ; 6,7 ; 8,9	—
				,, 204	,,	3,4(8,4)	,,		Diadele 2,5 ; 6,7 ; 8,9	—
		42*t*		42.205	2(9)	3,5	Total	II/2	Diadele 1,4 ; 6,7 ; 8,9	—
				,, 206	,,	3,1	,,		Diadele 4,5 ; 6,7 ; 8,9	—

Tabela 5 (continuare)

Nr. de ord.	Lanţul cinematic	Mecanismul rezultat		Variantele cinematice posibile						
		Nr.	Schema structurală	Nr. crt.	Baza (element fix)	Elementele conducătoare	Felul gradului de mobilitate	Clasa şi ordinul	Grupele assurice componente	Elemente cu mişcări parţiale
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		43 *t*		43.207	3(8)	1,2	Total	II/2	Diadele 4,5 ; 6,7 ; 8,9	—
				,, 208	,,	1,4	,,		Diadele 2,5 ; 6,7 ; 8,9	—
				,, 209	,,	1,8	,,	IV/3	Grupa 2,4 ; 5,7 ; 6,9	—
				,, 210	,,	2,5	,,	II/2	Diadele 1,4 ; 6,7 ; 8,9	—
		44*pt*		44.211	4	5,2(6,9)	Parţial	II/2	Diadele 6,7 ; 1,3 ; 8,9	6,7 (de 5)
				,, 212	,,	1,5(1,6)	,,		Diadele 3,2 : 6,7 ; 8,9	6,7 (de 5)
				,, 213	,,	1,3(1,8)	Total		Diadele 2,5 ; 6,7 ; 8,9	—
		45*pt*		45.214	5(6)	2,3	Total	II/2	Diadele 1,4 ; 6,7 ; 8,9	—
				,, 215	,,	2,4	Parţial		Diadele 6,7 ; 1,3 ; 8,9	6,7 (de 7)
				,, 216	,,	2,7	,,		Diadele 6,4 ; 1,3 ; 8,9	6,4 (de 7)
				,, 217	,,	4,1	,,		Diadele 6,7 ; 2,3 ; 8,9	6,7 (de 4)
		46*p*		46.218	7	5,2(6,9)	Parţial	II/2	Diadele 4,6 ; 3,1 ; 8,9	4,6 (de 5)

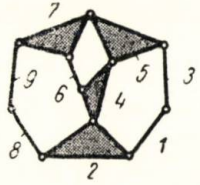
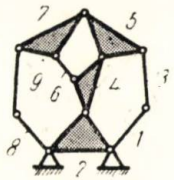
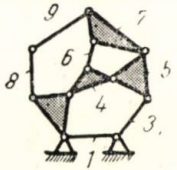
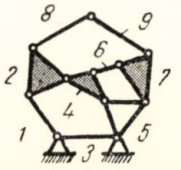
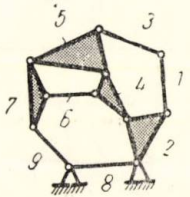
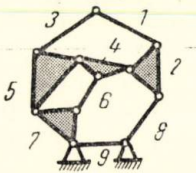
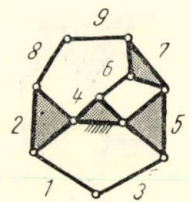
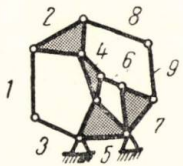
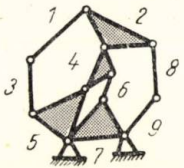
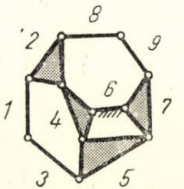
9/3 *p*		47 *t*		47.219	2	1,3	Total	II/2	Diadele 4,5 ; 6,7 ; 8,9	—
				„ 220	„	1,4	„		Diadele 3,5 ; 6,7 ; 8,9	—
				„ 221	„	1,8	„	IV/3	Grupa 3, 5, 4, 6, 9, 7	—
				„ 222	„	4,5	„	II/2	Diadele 1,3 ; 6,7 ; 8,9	—
				„ 223	„	4,6	„		Diadele 5,7 ; 1,3 ; 8,9	—
				„ 224	„	4,8	„	III/3	Tr. 5, 6, 9, 7 + D 1,3	—
				„ 225	„	8,9	„	IV/2	Grupa 4,5,7,6 + D1,3	—
		48 *t*		48.226	—1	2,3	Total	II/2	Diadele 4,5 ; 6,7 ; 8,9	—
				„ 227	„	2,4	„		Diadele 3,5 ; 6,7 ; 8,9	—
				„ 228	„	2,8	„	IV/3	Grupa 3, 5, 4, 7, 9	—
				„ 229	„	3,5	„	II/2	Diadele 2,4 : 6,7 ; 8,9	—
		49 *t*		49.230	3	1,2	Total	II/2	Diadele 4,5 ; 6,7 ; 8,9	—
				„ 231	„	1,5	„		Diadele 2,4 ; 6,7 : 8,9	—
				„ 232	„	5,4	„		Diadele 1,2 ; 6,7 : 8,9	—
				„ 233	„	5,7	„		Diadele 4,6 ; 1,2 ; 8,9	—

Tabela 5 (continuare)

Nr. de ord.	Lanţul cinematic	Mecanismul rezultat		Variantele cinematice posibile						
		Nr.	Schema structurală	Nr. crt.	Baza (element fix)	Elementele conducătoare	Felul gradului de mobilitate	Clasa şi ordinul	Grupele assurice componente	Elemente cu mişcări parţiale
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
9/3*p*		50 *t*		50.234	8	2,1	Total	IV/3	Grupa 3, 4, 6, 9, 7, 5	—
				„ 235	„	2,4	„	III/3	Tr. 5, 6, 9, 7 + D 1, 3	—
				„ 236	„	2,9	„	IV/2	Gr. 4, 5, 7, 6 + D 1, 3	—
				„ 237	„	9,7	„	III/3	Tr. 2, 6, 5, 4 + D 1, 3	—
		51 *t*		51 238	9	7 5	Total	II/2	Diadele 4,6 ; 2 8 ; 1,3	—
				„ 239	„	7,6	„		Diadele 4,5 ; 2,8 ; 1,3	—
				„ 240	„	7,8	„	III/3	Tr. 5, 6, 2, 4 + D 1, 3	—
				„ 241	„	8,2	„	IV/2	Gr. 7, 6, 4, 5 + D 1, 3	—
		52 *pt*		52.242	4	2,1	Total	II/2	Diadele 3,5 ; 6,7 ; 8,9	—
				„ 243	„	2,8	„	III/3	Tr. 5, 6, 9, 7 + D 1, 3	—
				„ 244	„	2,5	Parţial	II/2	Diadele 1,3 ; 6,7 ; 8,9	6,7 (de 5)
				„ 245	„	2,6	„		Diadele 5,7 ; 1.3 ; 8,9	5,7 (de 6)
				„ 246	„	5,3	„		Diadele 1,2 ; 6,7 ; 8,9	6,7 (de 5)

9/3p	53pt		53.247	5	3,1	Total	II/2	Diadele 2,4 ; 6,7 ; 8,9	—
			,, 248	,,	3,4	Parțial		Diadele 1,2 ; 6,7 ; 8,9	6,7 (de 4)
			,, 249	,,	3,7	,,		Diadele 4,6 ; 1,2 ; 8,9	4,6 (de 7)
			,, 250	,,	4,2	,,		Diadele 6,7 ; 8,9 ; 1,3	6,7 (de 4)
			,, 251	,,	1,9	,,		Diadele 4,6 ; 2,8 : 1,3	4,6 (de 7)
	54pt		54.252	7	9,8	Total	III/3	Tr. 5, 6, 2, 4 ; D 1, 3	—
			,, 253	,,	9,5	Parțial	II/2	Diadele 4,6 ; 2,8 : 1,3	4,6 (de 5)
			,, 254	..	9,6	,,		Diadele 5,4 ; 2,8 ; 1,3	4,5 (de 6)
			,, 255	,,	5,3	,,		Diadele 4,6 ; 1,2 ; 8,9	4,6 (de 5)
	55p		55.256	6	4,2	Parțial	II/2	Diadele 1,3 ; 5,7 ; 8,9	5,7 (de 4)
			,, 257	,,	7,9	,,		Diadele 4,5 ; 2,8 ; 1,3	*) 4,5 (de 7)

*) **Tabela** continuă pînă la lanțul 35p, mecanismul [9/35p – 219p] și mecanismul-motor [9/35p – 219p.753].

Tabela recapitulativă a tabelelor 4 şi 5

Mecanismele şi mecanismele-motor cu $e = 9$ şi grad de mobilitate „total" ($M_3 = 2$), „parţial-total" ($M_3^{pt} = 2$) şi „parţial" ($M_3^{p} = 2$) rezultate din lanţurile cinematice cu grad de libertate „total" ($L_3 = 5$) şi „parţial" ($L_3^{p} = 5$)

Lanţul cinematic	Mecanismele rezultate			Mecanismele-motor rezultate					Tabela
				din mecanisme cu grad de mob.				Numărul total	
	$M_3 = 2$ „total"	$M_3^{pt} = 2$ parţial-total	$M_3^{p} = 2$ parţial	„Total"	Parţial-total		Parţial		
					Total	Parţial			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9/12	4	—	—	23	—	—	—	23	Tab. Nr. 4
9/13	8	—	—	47	—	—	—	47	
9/14	8	—	—	47	—	—	—	47	
9/15	6	—	—	28	—	—	—	28	
9/16	3	—	—	17	—	—	—	17	
9/27	6	—	—	29	—	—	—	29	
Total	35	—	—	191	—	—	—	191	—
9/1 *p*	1	1	3	4	1	1	6	10	Tab. Nr. 5
9/2 *p*	3	2	1	9	2	5	1	17	„
9/3 *p*	5	3	1	23	4	10	2	39	„
9/4 *p*	3	2	2	14	4	4	2	24	„
9/5 *p*	3	1	1	14	2	3	1	20	„
9/6 *p*	1	1	1	3	1	2	1	7	„
9/7 *p*	3	2	3	12	2	5	3	22	„
9/8 *p*	3	2	1	12	3	4	1	20	„
9/9 *p*	2	1	1	6	1	2	1	10	„
9/10 *p*	5	2	2	25	4	8	3	40	„
9/11 *p*	2	1	—	5	1	3	—	9	„
9/17 *p*	2	2	4	7	2	2	7	18	„
9/18 *p*	3	2	1	11	3	2	2	18	„
9/19 *p*	3	1	1	12	2	1	1	16	„
9/20 *p*	1	4	3	4	5	6	4	19	„
9/21 *p*	3	2	3	12	2	5	4	23	„
9/22 *p*	2	1	2	6	1	2	2	11	„
9/23 *p*	5	2	1	23	4	3	3	33	„
9/24 *p*	2	1	1	5	1	1	1	8	„
9/25 *p*	5	3	1	24	3	10	2	39	„
9/26 *p*	3	2	2	11	2	5	2	20	„
9/28 *p*	2	1	1	6	3	1	1	11	„
9/29 *p*	2	—	2	4	—	—	4	8	„
9/30 *p*	5	3	1	24	3	10	2	39	„
9/31 *p*	3	2	4	11	2	4	4	21	„
9/32 *p*	2	1	2	6	1	2	2	11	„
9/33 *p*	1	1	2	3	1	1	2	7	„
9/34 *p*	3	2	3	11	2	4	4	21	„
9/35 *p*	4	1	3	14	1	2	4	21	„
	82	49	53	321	63	108	70	562	„
Total	117	49	53	512	63	108	70	753	

Tabela 6

Mecanismele şi mecanismele-motor plane articulate cu grad de mobilitate $M_3=2$ „total", „parţial-total" şi „parţial"

Caracteristicile lanţului cinematic							Mecanismele rezultate						Mecanismele-motor rezultate						Nr. de ord. al tab.
Grupa	e	c_5	Nr. total	Gruparea pe fel de grad de libertate			e	c_5	Nr. total	Gruparea pe fel de grad de mobilitate			e	c_5	Nr. total	Gruparea pe fel de grad de mobilitate			
				L_3	Nr.	Simbol				M_3	Nr.	Simbol				M_3	Nr.	Simbol	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	5	5	1	„total"	1	5/1	5	5	1	„total"	1	|5/1−1|	5	5	2	„total"	2	|5/1−11| ; |5/1−1.2|	1
B	7	8	4	„total"	1	7/2	7	8	3	„total"	3	|7/2−1| 7/2−2 |7/2−3|	7	8	10	„total"	10	|7/2−1.1| ..... |7/2−1.10|	2
				„parţial"	2	7/1*p*	7	8	8	„total"	4	7/1*p*−4,5*t* 7/3*p*−8,9*t*	7	8	11	„total"	11	7/1*p*-4*t*11...7/1*p*-5*t*16 7/3*p*-8*t*22...7/3*p*-9*t*26	3
										„parţial-total"	2	|7/1*p*−6*pt*|	7	8	6	„total"	2	7/1*p*− 6 *pt*. 17 7/3*p*−10 *pt*. 27	
												|7/3*p*−10*pt*|				„parţial"	4	7/1*p*−6*pt* 18, 19, 20 7/3−10*pt* 28	
						7/3*p*				„parţial"	2	|7/1*p*−7*p*| |7/3*p*−11*p*|	7	8	2	„parţial"	2	7/1*p*−7 *p*. 21 7/3*p*−11	
				„fracţionat"	1	7/4 *fr*.	Prin fixarea elementului de rang j_{max} rezultă mecanisme independente cu $M_3 = 1$												4
C	9	11	40	„total"	6	9/12...9/16 9/27	9	11	35	„total"	35	|9/12−1| |9/27−35|	9	11	191	„total"	191	|9/12−1.1| ..... |9/27−35, 191|	
				„parţial"	29	9/1*p*...9/11	9	11	184	„total"	82	Vezi tab. Nr. 5	9	11	321	„total"	321	Vezi tabela Nr. 5	5
						9/17*p*...9/11				„parţial-total"	49	„	9	11	171	„total"	63	„	
						9/28*p*...9/35*p*				„parţial"	53	„	9	11	70	„parţial"	108	„	
																„parţial"	70	„	
				„fracţionat"	5	9/36 *fr*... ...9/40 *fr*	Prin fixarea elementului de rang j_{max} rezultă mecanisme independente cu $M_3 = 1$.												

elementelor conducătoare (motoare) există cel puțin unul care are grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$.

Precizarea elementelor conducătoare care formează mecanisme-motor cu grad de mobilitate „total" sau „parțial" se face pe baza regulei fixate de teorema următoare.

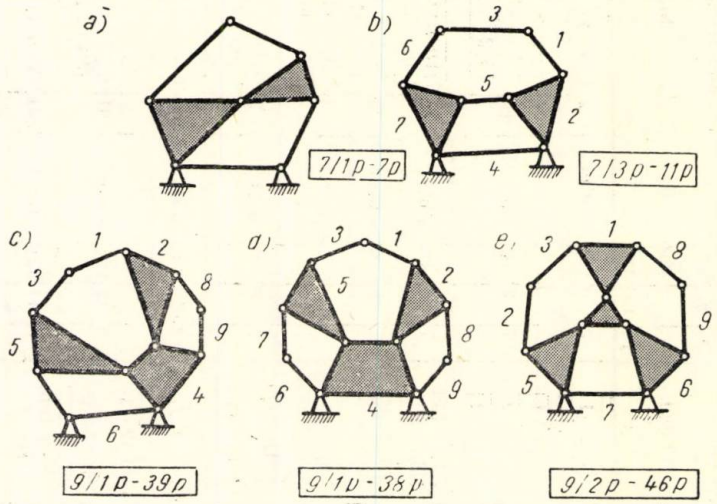


Fig. 9. — Mecanisme plane articulate cu grad de mobilitate „parțial" $M_3^p = 2$, provenite din lanțuri cinematice cu grad de libertate „parțial" $L_3^p = 5$, conform teoremei nr. 13.

TEOREMA *nr.* 15 *privind modul de alegere a elementelor conducătoare ale unui mecanism cu grad de mobilitate „parțial-total" pentru obținerea unui mecanism-motor cu grad de mobilitate „total" sau „parțial"*

Dacă la mecanismul cu grad de mobilitate „parțial-total" definit conform teoremei nr. 14 elementele conducătoare care se aleg fac parte din conturul închis de clasa $\Phi_z \geqslant M_3 + 3$, atunci mecanismul-motor care se obține are grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$; în toate celelalte cazuri de alegere a elementelor conducătoare, mecanismul-motor rezultat va avea grad de mobilitate „parțial" $M_3^p = 2$ (fig. 10).

În adevăr, mecanismele $\boxed{7/1p-6pt}$, $\boxed{7/3p-10pt}$, din tabela 3, $\boxed{9/1p-37pt}$, $\boxed{9/2p-44pt}$, $\boxed{9/2p-45pt}$ etc. din tabela 5 au grad de mobilitate „parțial-total" (indicat cu literele „*pt*" scrise după numărul de ordine al mecanismului-motor), deoarece elementul fix este de rang $j = 3$ și face parte din două contururi închise deformabile a căror clasă $\Phi_{z\min}$, respectiv Φ_z satisfac formulele (14), respectiv (15), conform teoremei nr. 14.

Astfel, la mecanismele $\boxed{7/1p-6pt}$, elementul fix 5 de rang $j = 3$ face parte atît din conturul 5, 4, 6, 7, de clasa $\Phi_{z\min} = 4$, cît și din conturul 5, 3, 1, 2, 4, de clasa $\Phi_z = 5$;

la mecanismul $|\overline{9/2p-44pt}|$, elementul fix 4 de rang $j = 3$ face parte din trei contururi închise deformabile, şi anume conturul 4, 5, 7, 6, de clasa $\Phi_{z\,min} = 4$, şi contururile 4, 1, 3, 2, 5, şi 4, 6, 9, 8, 1, de clasa $\Phi_z = 5$.

Se vede că mecanismele-motor provenite din aceste lanţuri au :

— unele dintre ele grad de *mobilitate* „*total*", ca, de exemplu, mecanismele motor $|\overline{7/1p-6pt\,17}|$, $|\overline{9/1p-37pt\ 197}|$, (fig. 11); $|\overline{9/2p-45pt.214}|$

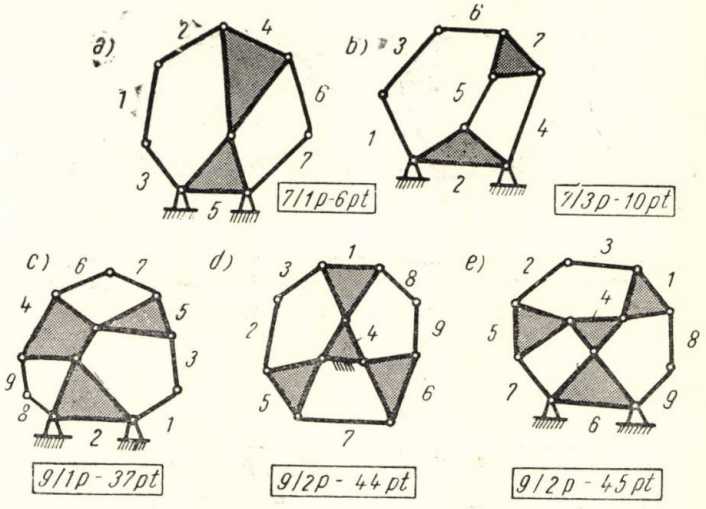


Fig. 10. — Mecanisme plane articulate cu grad de mobilitate „parţial-total" $M_3^{pt} = 2$, provenite din lanţuri cinematice cu grad de libertate „parţial" $L_3^p = 5$, conform teoremei nr. 14.

(fig. 11) etc., ale căror elemente conducătoare 1 şi 3 pentru primele două şi 2,3 pentru cel de-al treilea fac parte din conturul închis deformabil 3, 1, 2, 4, 5 de clasa $\Phi_z = 5 = M_3 + 2$, care conţine şi elementul fix (baza); sau $|\overline{7/3p-10pt.\ 27}|$, la care conturul din care fac parte elementele conducătoare 1 şi 3 este de clasa $\Phi_z = 6 > M_3 + 2$, conform teoremei nr. 15;

— altele au grad de mobilitate „parţial", ca, de exemplu, mecanismele-motor $|\overline{7/1p-6pt.\ 18p}|$ . . . $|\overline{7/3p-10pt.\ 26p}|$ (fig. 12), $|\overline{9/1p-37pt-196p}|$, $|\overline{9/2p-44pt.211p}|$ (fig. 12) etc., deoarece unul din elementele conducătoare face parte dintr-un contur închis deformabil de clasa $\Phi_{z\,min} = 4 = M_3 + 2$, conform teoremei nr. 15 (la primul ($18p$), elementul conducător 4 face parte şi din conturul 5, 4, 6, 7, de clasa $\Phi_{z\,min} = 4$; la al doilea ($26p$), elementul conducător 4 face parte din conturul 2, 4, 7, 5, de clasa $\Phi_{z\,min} = 4$; la al treilea ($196p$), elementul conducător 8 face parte din conturul 2, 4, 9, 8, de clasa $\Phi_{z\,min} = 4$; la al patrulea ($211p$),

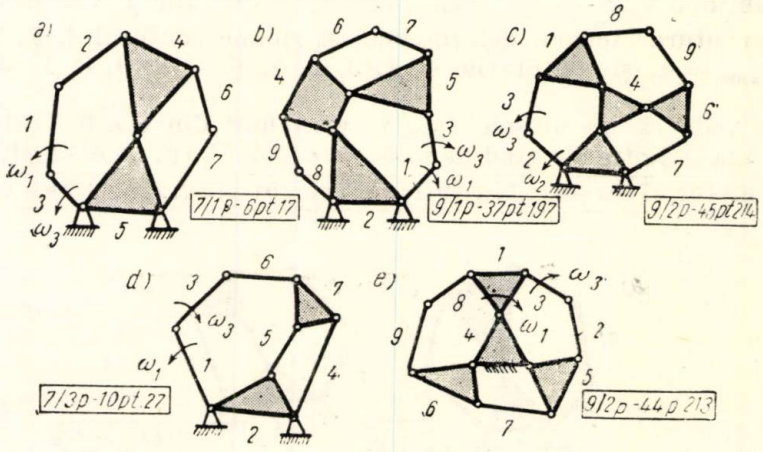


Fig. 11. — Mecanisme-motor plane articulate cu grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$, provenite din mecanisme cu grad de mobilitate „parțial-total" $M_3^{pt} = 2$, alcătuite conform teoremei nr. 15.

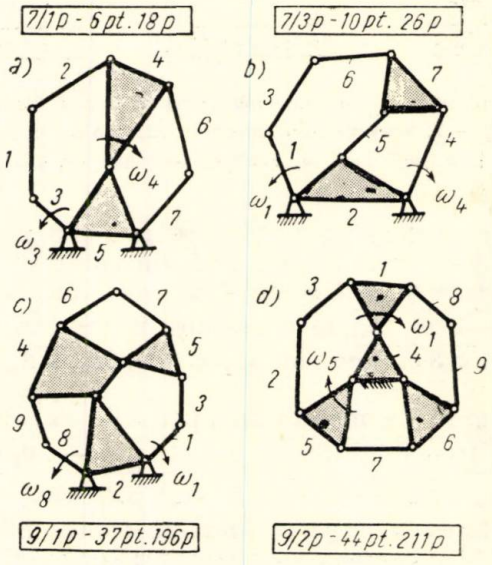


Fig. 12. — Mecanisme-motor plane articulate cu grad de mobilitate „parțial" $M_3^p = 2$, provenite din mecanisme cu grad de mobilitate „parțial-total" $M_3^{pt} = 2$, conform teoremei nr. 15.

elementul conducător 5 face parte şi din conturul 4, 5, 7, 6, de clasa $\Phi_{z\min} = 4$).

TEOREMA *nr.* 16 *privind mecanismele care rezultă din lanţurile cinematice cu grad de libertate „fracţionat"* $L_3^{fr} = 5$

Unui lanţ cinematic plan articulat cu grad de libertate „fracţionat" definit conform teoremei nr. 10 nu i se poate fixa decît elementul de rang j determinat de formula

$$j'_{\max} = j_{\max} + 1 = \frac{1}{2}(e_{\min} + 3 - M_3). \tag{10}$$

Prin fixarea acestuia se obţine un număr „M_3" de mecanisme plane articulate independente, fiecare avînd gradul de mobilitate $M_3 = 1$.

În adevăr, dacă lanţului 7/4 *fr* din figura 6*a* i se fixează elementul 1, atunci rezultă două ($2 = M_3^{fr}$) mecanisme patrulatere independente unul de altul (1, 2, 4, 5, şi 1, 3, 7, 6), fiecare avînd gradul de mobilitate $M_3 = 1$ (fig. 13*a*). Dacă lanţului 9/38 *fr* (fig. 6*b*) i se fixează elementul 1 de rang $j'_{\max} = 5$, atunci rezultă două mecanisme independente, ambele de clasa a II-a, ordinul 2 (fig. 13 *b*), indiferent de elementele conducătoare legate de baza 1.

Aceleaşi mecanisme rezultă şi în cazul cînd se imobilizează elementul 1 din lanţul 9/37 *fr* (fig. 13 *c*).

Precizarea elementelor conducătoare ale mecanismelor plane articulate cu $M_3 = 2$ trebuie făcută însă cu respectarea anumitor reguli, pe care le stabileşte teorema următoare.

TEOREMA *nr.* 17 *privind regulile de precizare a elementelor conducătoare ale mecanismelor pentru obţinerea de mecanisme-motor*

a) Elementele conducătoare ale unui mecanism-motor cu grad de mobilitate „total" trebuie alese în aşa fel, încît sau ambele să facă parte dintr-un singur contur închis deformabil a cărui clasă să fie dată de relaţia

$$\Phi_z \geqslant M_3 + 3 = L_3 \tag{15}$$

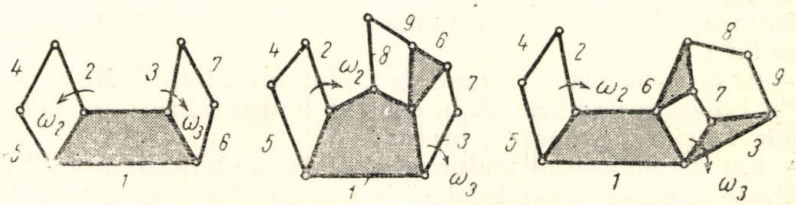


Fig. 13. — Mecanisme-motor cu grad de mobilitate „total" $M_3 = 1$, rezultate din lanţuri cinematice plane articulate cu grad de libertate „fracţionat" $L_3^{fr} = 5$, conform teoremei nr. 16.

şi care nu are nici un element în structura lui de rang $j \geqslant M_3 + 3$ sau fiecare element conducător să facă parte din cîte un contur închis deformabil a căror clasă Φ_z să fie dată de relaţia (15).

b) Elementele conducătoare ale unui mecanism-motor cu grad de mobilitate „parțial" fac întotdeauna parte :

— unul din ele dintr-un contur închis deformabil de clasa $\Phi_z \geqslant M_3 + 3$, iar al doilea dintr-un contur de clasa $\Phi_{z\min} = M_3 + 2$;

— ambele să aparțină la cîte un contur închis deformabil vecine de clasa $\Phi_{z\min} = M_3 + 2$.

c) În nici un caz ambele elemente conducătoare nu pot face parte dintr-un contur închis deformabil a cărui clasă $\Phi_z = M_3 + 2$.

d) În cazul general, relația dintre numărul elementelor conducătoare n_c ale unui mecanism și clasa Φ_z a conturului închis deformabil din care face parte trebuie să satisfacă relația

$$\Phi_z \geqslant n_c + 3. \tag{16}$$

Din exemplele de mai jos se vede că toate mecanismele-motor cu grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$ din figura 7 (*b*, *c*, *e*, *f*, *h*, *i*) satisfac relația (15) din teorema nr. 17*a* ;

În ceea ce privește mecanismele-motor cu grad de mobilitate „parțial" $M_3^p = 2$ din figura 12 (*a*, *b*, *c*, *d*), plasarea elementelor conducătoare satisface condițiile teoremei nr. 17*b*.

2.5 **Mecanismele și mecanisme-motor plane articulate cu** $e = 9$; $c_5 = 11$ **și** $M_3 = 2$. Și în această categorie se disting următoarele mecanisme și mecanisme-motor :

a) Mecanisme și mecanisme-motor cu grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$ provenite din cele 6 lanțuri cu grad de libertate „total" $L_3 = 5$ (9/12 ... 9/16 ; 9/27), redate în tabela 4 (și fig. 8). Au rezultat 35 de mecanisme cu grad de mobilitate „total", cu numărul de ordine [9/12—1] ... ... [9/27—35] centralizate în recapitulația tabelelor 4 și 5 (col. 2), și 191 de mecanisme-motor, cu numărul de ordine [9/12–1.1] ... [9/27–35.191], centralizate în aceeași tabelă recapitulativă în coloanele 5 și 9.

b) Mecanisme și mecanisme-motor cu grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$ provenite din cele 29 de lanțuri cinematice cu grad de libertate „parțial" (9/1*p* ... 9/11*p* ; 9/17*p* ... 9/26*p* ; 9/28*p* ... 9/35*p*).

Din acestea, prin fixarea unuia din elemente conform teoremei 12, au rezultat :

— 82 de mecanisme cu grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$, centralizate în tabela recapitulativă în coloana 2 și totalizate în tabela nr. 6, coloanele 11 și 12, grupa *C* ; precum și

— 321 de mecanisme-motor cu grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$, centralizate în tabela recapitulativă în coloana 5 și totalizate în tabela 6, coloanele 16 și 18, grupa *C*.

c) Mecanisme cu grad de mobilitate „parțial-total" $M_3^{pt} = 2$, provenite tot din cele 29 de lanțuri cinematice cu grad de libertate „parțial" de la (*b*) prin fixarea unuia din elemente conform teoremei nr. 13.

Au rezultat astfel : 49 de mecanisme cu grad de mobilitate „parțial-total", centralizate în tabela recapitulativă în coloana 3 și totalizate în tabela 6, coloanele 11 și 12, grupa *C*.

d) Mecanisme cu grad de mobilitate „parțial" $M_3^p = 2$ provenite tot din cele 29 de lanțuri cinematice cu grad de libertate „parțial" prin fixarea unuia din elemente conform teoremei nr. 14.

Au rezultat din această operație 53 de mecanisme cu grad de mobilitate „parțial", centralizate în tabela recapitulativă în coloana 4 și totalizate în tabela 6, coloanele 11 și 12, grupa *C*.

e) Mecanisme-motor cu grad de mobilitate „total" provenite din mecanismele cu grad de mobilitate „parțial-total" M_3^{pt} prin precizarea elementelor conducătoare conform teoremei nr. 15.

Au rezultat astfel 63 de mecanisme cu grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$, centralizate în tabela recapitulativă în coloana 6 și totalizate în tabela 6, coloanele 17 și 18, grupa *C*.

f) Mecanisme-motor cu grad de mobilitate „parțial" provenite din mecanismele cu grad de mobilitate „parțial-total" $M_3^{pt} = 2$ prin precizarea elementelor conducătoare conform teoremei nr. 15.

Au rezultat astfel 108 mecanisme-motor cu grad de mobilitate „parțial", centralizate în tabela recapitulativă în coloana 7 și totalizate în tabela 6, col. 17/18, grupa *C*.

g) Mecanisme-motor cu grad de mobilitate „parțial" provenite din mecanismele cu grad de mobilitate „parțial" $M_3^p = 2$ prin precizarea elementelor conducătoare conform teoremei nr. 13.

Au rezultat astfel 70 de mecanisme-motor cu grad de mobilitate „parțial", centralizate în tabela recapitulativă în coloana 8 și totalizate în tabela *C*, coloanele 17 și 18, grupa *C*.

În ceea ce privește lanțurile cinematice cu grad de libertate „fracționat", ele nu mai prezintă nici un interes din punctul de vedere al realizării de mecanisme, deoarece, după cum am arătat, ele nu sînt variante distincte structural de cele rezultate din lanțurile cu grad de libertate „total" sau „parțial".

În tabela 6 s-a indicat la grupele *B* și *C* că din aceste lanțuri, prin fixarea elementului de rang j_{max}, rezultă mecanisme independente cu $M_3 = 1$.

Ca și la tabelele 2 și 3, în tabelele 4 și 5 s-au trecut în coloane toate caracteristicile structurale ale mecanismelor-motor pentru a se putea identifica prin acestea clasa și ordinul mecanismului-motor în vederea aplicării fie a metodei de analiză cinematică grafică cea mai eficientă, indicată în lucrarea [12], fie a calculului prin serii Fourier complexe [10], [11], fie prin metoda sistemelor conjugate [13], fie prin metoda ciclurilor independente [15], fie prin a accelerațiilor reduse [16], [17], [18].

Folosirea metodei ecuațiilor vectoriale [12] se va trata în continuare pentru cazul mecanismelor-motor plane articulate cu grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$ sau „parțial" $M_3^p = 2$ și $e = 7$, respectiv $e = 9$.

§ 3. CONCLUZII

În cele de mai sus am căutat să realizăm o sistematizare unitară a mecanismelor cu grad de mobilitate $M_3 > 1$, și în special — în cazul de față — a celor cu grad de mobilitate „total" $M_3 = 2$ și „parțial" $M_3^p = 2$.

Teoremele nr. 8 ... 17 au căutat să precizeze caracteristicile structurale ale lanțurilor și mecanismelor de diferite feluri de grade de libertate și mobilitate, permițîndu-se identificarea imediată a fiecăruia atunci cînd, folosind teoremele nr. 1 ... 7 din lucrarea [5] au fost alcătuite lanțurile cinematice plane articulate cu grad de libertate „total" „parțial" sau „fracționat".

Din lanțurile astfel alcătuite și grupate în tabela de la § 1.4 au rezultat mecanismele și mecanismele-motor centralizate în tabela 6.

Ea reprezintă, în consecință, toată gama de mecanisme-motor posibil de creat în tehnică, ale căror caracteristici structurale sînt date în coloanele 14—20.

Într-un studiu viitor se vor alcătui și mecanismele-motor cu grad de mobilitate $M_3 = 2$ cu articulații multiple, mecanisme care au o utilizare mai răspîndită în tehnică.

Primită la redacție la 5 aprilie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Hain Kurt, *Die Analyse und Synthese der achtgliedrigen Gelenkgetriebe.* V D I-Berichte, **5** 81/93 (1955).
2. Hain Kurt, Zielstorff Augus-Wilhelm, *Systematik der zwangläufigen, achtgliedrigen kinematischen Kette. Maschinenmarkt.* 8700, *37*, 14—20 (1964).
3. — *Die zwangläufigen achtgliedrigen Getriebe mit Einfach — und Mehrfachgelenken.* Maschinenmarkt, Würzburg 70 Jg., *64*, 12—18 (1964).
4. N. I. Manolescu, Ion Erceanu, P. Antonescu, *Die Kinematischen Untersuchungsmethoden ebener Gelenkgetriebe II. Beiträge zur systematischen Untersuchung ebener schs-und achtgliedrigen Gelenkgetriebe.* Revue Roumaine des sciences techniques série de Mécanique appliquée, **9**, *2*, 341—363 (1964).
5. N. I. Manolescu, *Une méthode unitaire pour la formation des chaînes cinématiques et des mécanismes plans articulés avec différents degrés de liberté et mobilité.* Revue Roumaine des sciences technique série de Mécanique appliquée, **9**, *6* (1964).
6. F. R. B. Crossley, *A contribution to Grübler's Theory in the Number Synthesis of Plane Mechanisms.* Journal of Engineering for Industry. February, Transactions of the A S M E series B pages 1—8 (1964).
7. R. C. Bogdan, Chr. Felecudi, *Contribuții la cinematica diadei Cebișev.* St. cerc. mec. apl., **X**, *4* (1959); Rev. méc. appl. Acad. R.P.R., **5**, *2* (1960).
8. R. C. Bogdan, *Utilizarea analizei armonice în studiul grupelor assurice plane de aspectul II și III.* St. cerc. mec. apl., **XIV**, *2* (1963).
9. — *Considerații analitice asupra grupelor cinematice cu două elemente.* St. cerc. mec. apl., **XV**, *1* (1964).
10. — *Studiul general, prin serii armonice complexe asupra mecanismelor cu cinci elemente articulate.* St. cerc. mec. apl., **XV**. *2* (1964); I. R. S. T. Série de Mécanique appliquée, **9**, *4* (1964).
11. — *Cercetarea grupelor assurice în construcția mecanismelor prin serii armonice complexe și metoda-mecanoelectronică.* Lucrarea de dizertație, Institutul politehnic București (21 noiembrie 1964).
12. N. I. Manolescu, I. Erceanu, P. Antonescu, *Domeniul de aplicabilitate a metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate.* St. cerc. mec. apl., **XIII**. 6, p. 1483—1939 (1962).
13. Radu Voinea, M. Atanasiu, *Contribuții la determinarea stării cinematice a unui mecanism prin metoda sistemelor conjugate.* St. cerc. mec. apl., **XIV**, *1* (1963).
14. — *Contribuții la determinarea pe cale analitică a vitezelor și accelerațiilor la un mecanism plan.* St. cerc. mec. apl., **XIV**, *2* (1963).

15. Radu Voinea, M. Atanasiu, *Determinarea vitezelor şi acceleraţiilor la un mecanism prin metoda ciclurilor independente*, St. cerc. mec. apl., **XV**, *1* (1964).
16. D. Mangeron, C. Drăgan, O. Munteanu, *Studiul mecanismelor plane cu cuple cinematice inferioare, bazate pe metoda acceleraţiilor reduse*. Bul. Inst. politehnic Iaşi, **2 (6)**, *3—4*, p. 26—281 (1956).
17. D. Mangeron, C. Drăgan, *Studiul mecanismelor spaţiale prin metoda acceleraţiilor reduse*. St. cerc. mec. apl., **12**, *5* 1025—1046 (1961).
18. A. Zilbermann, *Aplicarea metodei acceleraţiilor reduse la analiza cinematică a mecanismelor plane de cl. a III-a*. St. cerc. st. fiz. şi tehnic Acad. R.P.R. Filiala Iaşi, **9**, *1*, p. 39—56 (1958) ; Trudî Rostovskogo-na-Donu Instituta injinerov jeleznodorojnovo transporta, **29**, *59—67* (1961).

CONTRIBUȚII PRIVIND CALCULUL DIAFRAGMELOR CU GOLURI, AL DIAFRAGMELOR CUPLATE ȘI AL CADRELOR-DIAFRAGME. I

de VIRGILIU FLORIAN
Institutul de petrol, gaze și geologie

539.4

Se propune o metodă generală de calcul, prin aproximații succesive și încercări repetate al diafragmelor cu un singur șir de goluri nesimetric sau cu două șiruri de goluri simetrice, acționate de forțe orizontale oarecare.

În capitolul 1 se indică o metodă aproximativă de calcul prin iterații al forțelor tăietoare din grinzile de cuplare (buiandrugi). În cazul cînd șirul de goluri este simetric dispus, metoda este exactă, în limitele ipotezelor admise.

În capitolul 2 se calculează, tot prin aproximații succesive, momentele încovoietoare suplimentare din elementele verticale, datorite poziției disimetrice a șirului de goluri. În mod aproximativ, pentru rigidități comparabile ale elementelor verticale, calculele pot fi limitate la cele indicate în aceste capitole.

În exemplul tratat se indică totodată modul de organizare a calculelor în tablouri, în general prin sumări finite.

În partea a II-a a lucrării (capitolul 3) se indică o metodă de calcul, prin încercări repetate, de îmbunătățire a valorilor rezultate prin calculul aproximativ de mai sus, pînă la obținerea gradului de exactitate dorit.

A. GENERALITĂȚI

Elementele portante verticale care alcătuiesc structurile de rezistență așa-zise rigide, din beton armat, ale clădirilor cu multe nivele sau din zidărie portantă se pot prezenta nu numai sub formă de diafragme pline sau cu goluri, ci și ca diafragme cuplate (diafragme pline legate în planul lor cu grinzi), cadre-diafragme (diafragme pline legate în planul lor cu grinzi și stîlpi) sau chiar sub formă de cadre.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 20 NR. 6 P. 1401–1431 BUCUREȘTI 1965

Datorită marii rigidităţi în planul lor a planşeelor care leagă între ele toate aceste elemente, dispuse în general după cele două direcţii principale ale construcţiei, se realizează o comportare de ansamblu, spaţială, a întregii structuri la sarcini orizontale (seismice sau din vînt). Rigiditatea la încovoiere şi forţă tăietoare, ca şi raportul dintre ele, variază de la element la element, după modul de alcătuire a acestuia. În consecinţă, planşeele distribuie sarcina orizontală globală, în mod deosebit la fiecare nivel, diferitelor elemente portante verticale în raport cu rigidităţile lor relative la încovoiere şi forfecare de nivel [9].

Sarcina seismică globală pe întreaga structură depinde de rigiditatea de ansamblu a structurii. Legăturile cu o oarecare rigiditate transversală dintre elementele verticale din planul acestora, capabile să transmită nu numai forţe axiale, ci şi forţe tăietoare şi momente încovoietoare, măresc rigiditatea elementelor pe care le leagă şi deci a structurii în ansamblu. Aşadar, prin neluarea în considerare a acestor legături (tendinţă care se manifestă uneori în proiectare datorită complicaţiilor de calcul pe care le implică) nu se realizează neapărat rezerve de rezistenţă ci, din contră, se creează uneori zone slabe în structură, care pot amorsa, prin cedarea lor, distrugeri de proporţii mai mari, avînd în vedere modul dinamic de dezvoltare a solicitărilor.

În consecinţă există necesitatea de a dispune de o metodă de calcul atît al diafragmelor cu goluri, cît şi al diafragmelor cuplate sau al diafragmelor legate cu elemente de cadre (grinzi şi stîlpi), la forţe orizontale concentrate, de intensităţi oarecare.

Există în prezent diferite metode de calcul al diafragmelor cu goluri [2], [3], [5], [8], [11], [12], [15], [16]. încărcate cu forţe distribuite uniform sau triunghiular pe înălţimea acestora. În lucrările [11], [13] se dă o metodă pentru calculul diafragmelor cu goluri, încărcate cu forţe orizontale concentrate de intensităţi oarecare. În toate aceste metode se admite însă ipoteza existenţei unei continuităţi în zona golurilor, ceea ce implică admiterea unor deplasări şi rotiri identice a lamelelor adiacente fiecărui şir de goluri. De asemenea, în majoritatea cazurilor se admite încărcarea acestora proporţională cu momentele lor de inerţie, ceea ce implică reducerea fără precizarea limitelor între care poate fi acceptată (şi deci nejustificată), a gradului de nedeterminare statică a sistemului. În consecinţă, calculul prin aceste metode poate fi acceptat (în lipsa unui calcul comparativ exact) fără rezerve numai în cazul diafragmelor cu un singur şir de goluri, simetric (spaleţi cu aceeaşi rigiditate la încovoiere şi forfecare) cu foarte multe nivele.

În lucrarea [10] se indică procedeul exact de calcul al unei diafragme cu un singur şir de goluri (ca un sistem de $3n$ ori static nedeterminat, unde n este numărul de nivele), bazat pe metoda eforturilor. Procedeul este însă foarte laborios în ceea ce priveşte calculul coeficienţilor sistemului de ecuaţii respectiv, care trebuie rezolvat apoi numai cu ajutorul mijloacelor moderne de calcul.

În cele ce urmează se dă o metodă generală de calcul, prin aproximaţii succesive şi încercări repetate, al unui element portant vertical

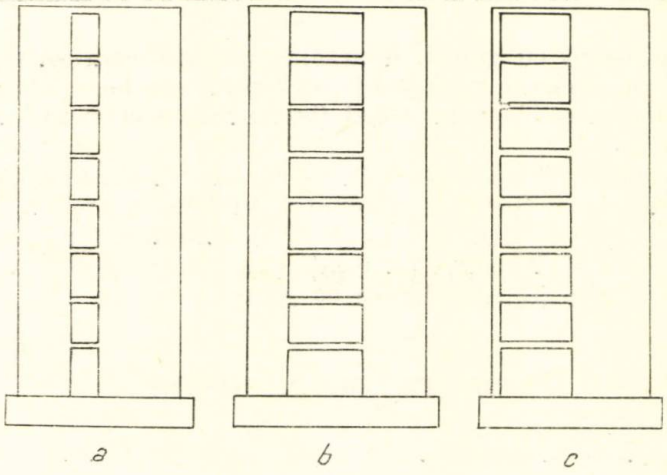


Fig. 1

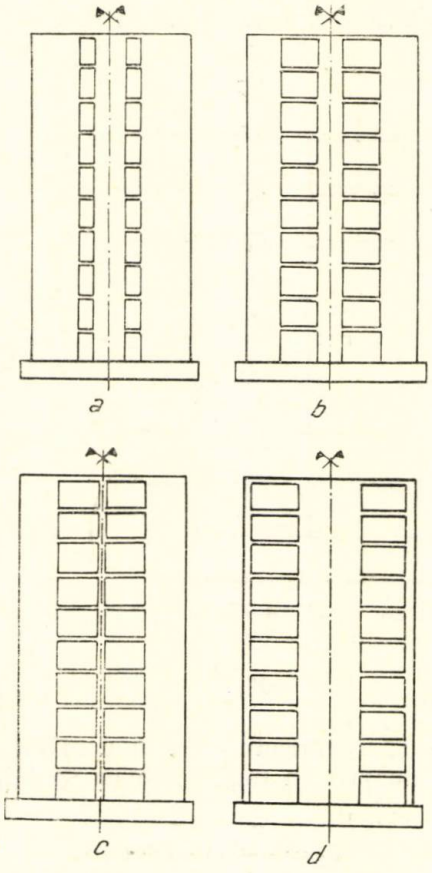


Fig. 2

oarecare (diafragmă cu goluri, diafragme cuplate, cadru-diafragmă) alcătuit din două elemente verticale (lamele pline sau lamelă şi stîlp) nesimetrice, legate între ele prin grinzi (buiandrugi sau grinzi de cuplare) (fig. 1*a*, *b* şi *c*).

Metoda poate fi aplicată şi în cazul unei diafragme simetrice cu două şiruri de goluri (fig. 2*a*), precum şi în cazul a trei diafragme cuplate, dispuse simetric (fig. 2*b*) sau al unui cadru-diafragmă alcătuit dintr-o lamelă plină şi doi stîlpi adiacenţi (fig. 2*d*), respectiv două lamele simetrice şi un stîlp (fig. 2*c*) legate cu grinzi.

B. PRINCIPIILE METODEI PROPUSE

Se consideră un sistem de bază (fig. 3) alcătuit din cei doi spaleţi ai elementului ce urmează a fi calculat, legaţi între ei articulat, la fiecare nivel, prin grinzile de cuplare (buiandrugi) şi încărcaţi cu forţele F_{kr} ($r = 1, 2$) proporţionale cu momentele de inerţie ale spaleţilor, precum

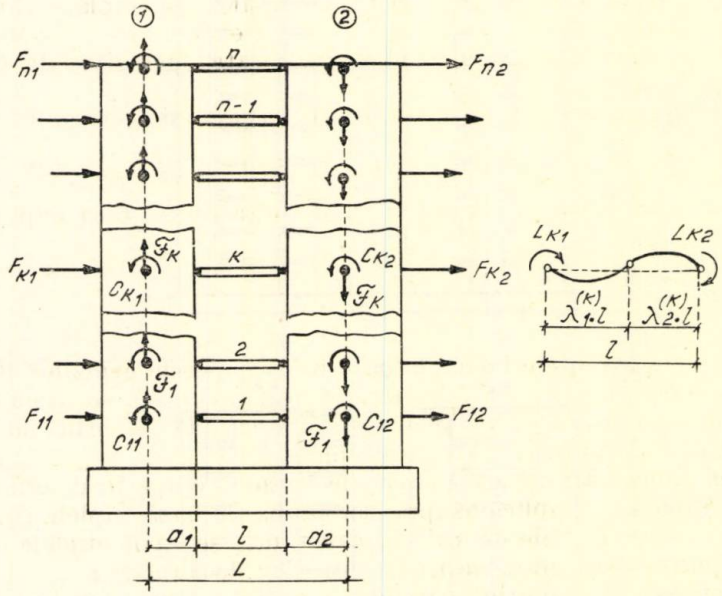


Fig. 3

şi cu cuplele C_{kr} ($r = 1, 2$) introduse în mod arbitrar şi forţele exterioare corespunzătoare dirijate în lungul axelor spaleţilor :

$$\mathfrak{F}_k = \frac{C_{k1} + C_{k2}}{L}. \tag{1}$$

Datorită rigidităţilor diferite ale celor doi spaleţi, în urma aplicării cuplelor exterioare C_{kr}, apar în grinzile de cuplare eforturi axiale care au ca efect o redistribuire a forţelor exterioare globale F_k între spaleţi. Acest fapt poate fi descris, pe baza principiului independenţei acţiunii forţelor, prin suprapunerea, peste diagramele de momente M_{j1}, respectiv M_{j2} (din acţiunea forţelor exterioare F_{kr}) şi $\mathfrak{M}_{j1}$, respectiv $\mathfrak{M}_{j2}$ (din acţiunea cuplelor exterioare C_{kr}), a unei diagrame de momente suplimentare m_j (egale şi de semne contrare pe cei doi spaleţi), rezultate din acţiunea forţelor axiale din grinzile de cuplare asupra celor doi spaleţi.

Sub acţiunea forţelor exterioare F_{kr}, a cuplelor exterioare C_{kr}, a forţelor exterioare longitudinale $\mathfrak{F}_k$, precum şi a forţelor axiale din grinzile de cuplare, cei doi spaleţi se deformează, producîndu-se deplasări (axiale, laterale şi rotiri) ale secţiunilor transversale prin spaleţi.

Deplasările laterale (săgeţile) celor doi spaleţi la nivelul fiecărei grinzi de cuplare trebuie să fie egale (dacă se neglijează lungirile acestora şi deformaţiile locale) :

$$y_{k1} = y_{k2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

În funcţie de toate aceste deplasări se calculeze cuplele exterioare L_{kr}, care trebuie aplicate la capetele grinzilor de cuplare (buiandrugi) pentru ca acestea să preia acţiunea cuplelor exterioare C_{kr} aplicate arbitrar asupra spaleţilor, restabilind continuitatea grinzilor de cuplare în spaleţi.

Pentru ca aceasta să fie posibil este necesar însă ca

$$L_{kr} = \mathfrak{F}_k \cdot \lambda_r \cdot l \qquad (r = 1, 2). \tag{3}$$

Această condiţie nu poate fi îndeplinită decît dacă cuplele exterioare C_{kr}, reduse în raportul (fig. 3)

$$\frac{\lambda_r \cdot l}{a_r + \lambda_r \cdot l},$$

sînt egale cu momentele încovoietoare de la capetele grinzilor de cuplare din situaţia reală. Întrucît însă acestea nu se cunosc, se calculează nişte valori iniţiale aproximative ale acestora, urmînd ca prin încercări repetate să se îmbunătăţească valorile lor.

Aceste încercări urmează să se efectueze în etape în modul următor :

— etapa I : se aplică asupra sistemului de bază cuplele $C_{kr} (r = 1, 2)$, egale cu valorile iniţiale de calcul, calculîndu-se apoi cuplele exterioare L_{kr} corespunzătoare de la capetele grinzilor de cuplare ;

— etapa a II-a (şi următoarele) : se aplică asupra sistemului de bază cuplele C'_{kr}, rezultate dintr-un calcul aproximativ de îmbunătăţire a valorilor iniţiale ale cuplelor C_{kr} pe baza încercărilor din etapa I şi forţele axiale

$$\mathfrak{F}'_k = \frac{C'_{k1} + C'_{k2}}{L}, \tag{4}$$

urmînd să se calculeze apoi, în acelaşi mod, cuplele exterioare $L'_{kr} (r = 1, 2)$, care trebuie aplicate asupra grinzilor de cuplare etc.

Calculele se repetă pînă ce egalitatea (3) este satisfăcută cu aproximația dorită. Calculele succesive se fac organizat în tablouri, în general prin sumări finite. Valorile inițiale de calcul rezultă din rezolvarea unui sistem de n ecuații (cu matrice Jacobi), care poate fi efectuată simplu prin aproximații succesive [1].

În cazul încărcării cu forțe orizontale de intensități a căror variație poate fi pusă sub forma

$$F_k = f(k) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1), \qquad (5)$$

se poate stabili direct formula de calcul al valorilor inițiale ale necunoscutelor în funcție de k (k = numărul de ordine al nivelului respectiv):

$$X_k = \varphi(k). \qquad (6)$$

Astfel, în lucrare se dau formulele respective de calcul în cazul încărcării cu forțe concentrate egale la fiecare nivel ($F_k = F$), precum și în cazul forțelor concentrate cu intensități variind triunghiular pe înălțime ($F_k = F \cdot k$).

În cazul sistemelor simetrice (diafragmă cu un singur șir de goluri simetric, două diafragme egale cuplate între ele sau cadru simetric cu o singură deschidere), valorile inițiale astfel calculate sînt cele reale.

C. IPOTEZE DE CALCUL

Calculul se face în stadiul elastic de deformare, pentru diafragme cu goluri înșiruite pe verticală, avînd aceleași dimensiuni, în următoarele ipoteze:

— materialele din care sînt alcătuite diferitele părți constitutive ale elementului calculat se consideră perfect omogene și elastice, între micile lor deformații și tensiunile ce le însoțesc stabilindu-se o corespondență liniară (legea lui Hooke);

— rigiditățile la încovoiere și forfecare ale grinzilor de cuplare (respectiv ale buiandrugilor) sînt aceleași la diferitele nivele, rigiditatea lor la întindere-compresiune considerîndu-se infinită;

— ipoteza secțiunilor plane, pentru deformațiile de încovoiere;

— secțiunea din încastrare a celor două elemente verticale se consideră că rămîne plană în stare deformată. Realizarea acestei ipoteze este asigurată datorită rigidității rețelei de diafragme pline din subsolul clădirii.

1. DETERMINAREA VALORILOR INIȚIALE DE CALCUL

Se consideră elementul vertical portant oarecare al structurii de rezistență, alcătuit din cele două lamele legate între ele prin n grinzi orizontale la nivelul planșeelor, încastrat la bază și încărcat cu forțele orizontale F_k (fig. 4).

Caracteristicile fizico-geometrice ale diferitelor părţi componente ale acesteia sînt :

E_D, E_g — modulele de elasticitate longitudinală ale materialelor din care sînt alcătuite lamelele verticale, respectiv grinzile orizontale (în cazul diafragmelor din beton armat se poate lua $E_D \simeq E_g$) ;

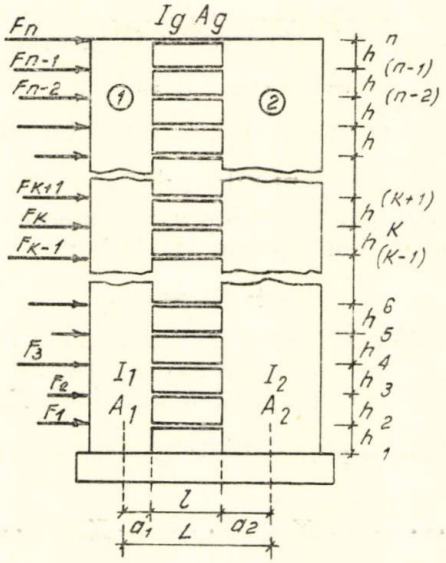


Fig. 4

G_D, G_g — modulele de elasticitate transversale, pentru aceleaşi elemente ;

I_r, I_g — momentele de inerţie proprii ale lamelelor verticale ($r = 1, 2$), respectiv ale grinzilor orizontale ;

A_r, A_g — ariile secţiunilor acelorași elemente ;

i_r, i_g — razele de giraţie respective ;

K_r, K_g — rigidităţile la încovoiere ale acelorași elemente :

$$K_r = \frac{I_r}{h} \; ; \; K_g = \frac{I_g}{l} \qquad (r = 1, 2), \tag{1.1}$$

unde h este distanţa dintre axele a două grinzi consecutive, iar l este deschiderea grinzilor de cuplare (între secţiunile respective de încastrare),

Δ_r, Δ_g — caracteristicile relative la forfecare ale lamelelor verticale, respectiv ale grinzilor orizontale [9]:

$$\Delta_r = 72 \cdot \frac{E_D}{G_D} \cdot \left(\frac{i_r}{h}\right)^2 ; \quad \Delta_g = 72 \cdot \frac{E_g}{G_g} \cdot \left(\frac{i_g}{l}\right)^2 ; \tag{1.2}$$ *)

a_r — distanțele din axul lamelelor verticale pînă la secțiunile de încastrare ale grinzilor orizontale ($r = 1, 2$);

$l_r^{(k)}$ — distanțele pînă la secțiunile de încastrare ale grinzii de cuplare de la nivelul k ale punctului de inflexiune al acesteia (în stare deformată):

$$l_r^{(k)} = \lambda_r^{(k)} \cdot l \qquad (r = 1, 2); \tag{1.3}$$

L — distanța dintre axele celor doi spaleți verticali:

$$L = l + a_1 + a_2.$$

Într-o primă aproximație se presupun cunoscute forțele F_{k1} și F_{k2} cu care se încarcă cele două lamele verticale:

$$F_{k1} + F_{k2} = F_k, \tag{1.4}$$

precum și punctele de inflexiune ale axelor deformate ale grinzilor de cuplare, adică se admite că se cunosc coeficienții $\lambda_r^{(k)}$. Așadar, în această fază de calcul, necunoscute sînt forțele tăietoare X_k din grinzile de cuplare (buiandrugi).

Ecuațiile din care rezultă valorile acestor necunoscute (prin metoda eforturilor) sînt

$$\delta_{k1} \cdot X_1 + \delta_{k2} \cdot X_2 + \cdots + \delta_{ki} \cdot X_i + \cdots + \delta_{kk} \cdot X_k + \cdots + \delta_{kn} \cdot X_n + \Delta_{k0} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.5}$$

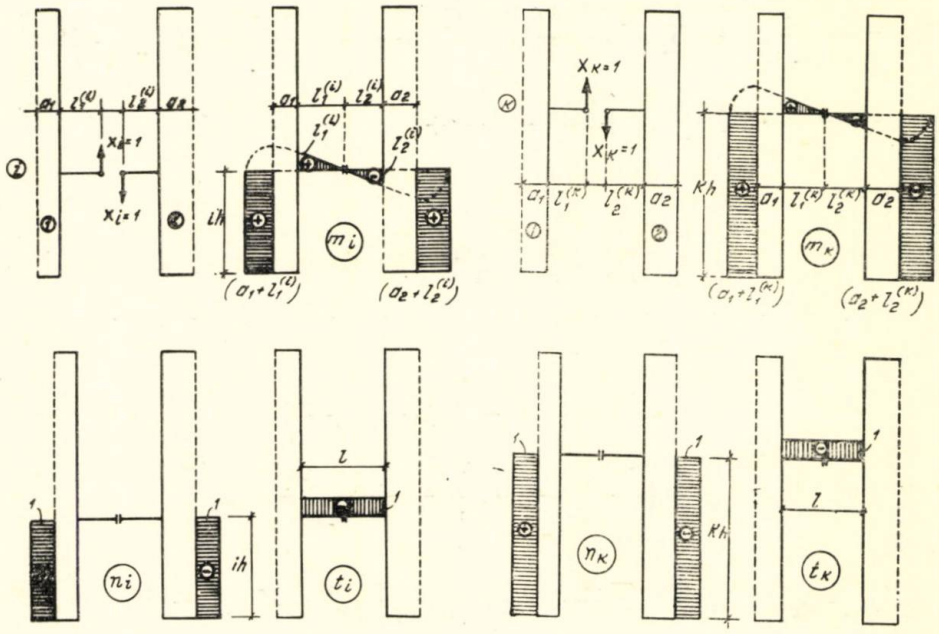
Coeficienții acestor necunoscute sînt (fig. 5)

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \frac{(l_1^{(i)} + a_1) \cdot (l_1^{(k)} + a_1)}{E_D \cdot I_1} \cdot i \cdot h + \frac{i \cdot h}{E_D \cdot A_1} + \frac{(l_2^{(i)} + a_2) \cdot (l_2^{(k)} + a_2)}{E_D \cdot I_2} \cdot i \cdot h + \frac{i \cdot h}{E_D \cdot A_2} = \frac{b_{ki}}{E_D} \cdot i \qquad (i < k) \tag{1.6}$$

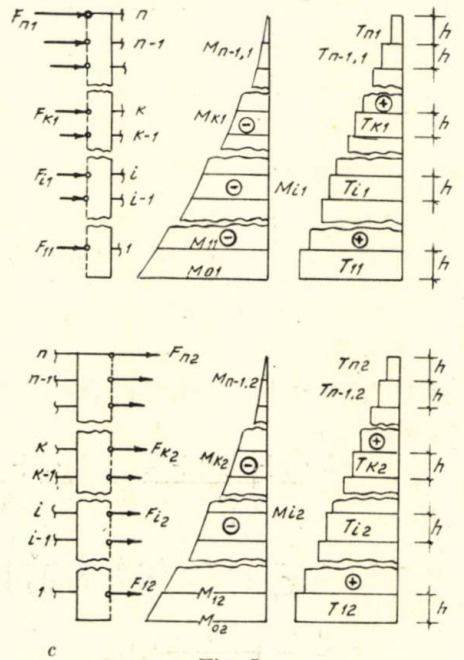
$$\delta_{kk} = \frac{l_1^{(k)3}}{3E_g \cdot I_g} + \frac{1{,}2\, l_1^{(k)}}{G_g \cdot A_g} + \frac{k \cdot h}{E_D \cdot A_1} + \frac{(l_1^{(k)} + a_1)^2}{E_D \cdot I_1} \cdot k \cdot h + \frac{l_2^{(k)3}}{3E_g \cdot I_g} + \frac{1{,}2\, l_2^{(k)}}{G_g \cdot A_g} + \frac{k \cdot h}{E_D \cdot A_2} + \frac{(l_2^{(k)} + a_2)^2}{E_D \cdot I_2} \cdot k \cdot h = \frac{c_k}{E_g} + \frac{b_k}{E_D} \cdot k \tag{1.7}$$

*) Pentru secțiuni dreptunghiulare. În cazul altor secțiuni, într-un calcul mai exact, expresiile se vor multiplica cu

$$\frac{A}{1{,}2\, I^2} \cdot \int_A \frac{S^2}{b^2} \cdot dA$$



a b



c

Fig. 5

$$\Delta_{k0} = \frac{(l_1^{(k)} + a_1)\cdot h}{E_D \cdot I_1}\cdot\left[\sum_1^k M_{i1} + \frac{M_{01} - M_{k1}}{2} + \frac{l_1^{(k)}}{l_1^{(k)} + a_1}\cdot\frac{\Delta_1}{60}\cdot(M_{k-1,1} - M_{k1})\right] +$$

$$+ \frac{(l_2^{(k)} + a_2)\cdot h}{E_D \cdot I_2}\cdot\left[\sum_1^k M_{i2} + \frac{M_{02} - M_{k2}}{2} + \frac{l_2^{(k)}}{l_2^{(k)} + a_2}\cdot\frac{\Delta_2}{60}\cdot(M_{k-1,2} - M_{k2})\right] =$$

$$= -\frac{d_k}{E_D}\cdot \tag{1.8}$$

În expresiile de mai sus s-au notat

$$b_{ki} = \frac{(\lambda_1^{(i)}\cdot l + a_1)\cdot(\lambda_1^{(k)}\cdot l + a_1) + i_1^2}{K_1} + \frac{(\lambda_2^{(i)}\cdot l + a_2)\cdot(\lambda_2^{(k)} + a_2) + i_2^2}{K_2}, \tag{1.9}$$

$$c_k = \frac{l^2}{3K_g}\cdot\left(1 - 3\lambda_1^{(k)}\cdot\lambda_2^{(k)} + \frac{\Delta_g}{20}\right), \tag{1.10}$$

$$d_k = -\left(\frac{\lambda_1^{(k)}\cdot l + a_1}{K_1}\cdot A_{k1} + \frac{\lambda_2^{(k)}\cdot l + a_2}{K_2}\cdot A_{k2}\right), \tag{1.11}$$

unde

$$A_{k1} = \sum_1^k M_{i1} + \frac{M_{01} - M_{k1}}{2} + \frac{\lambda_1^{(k)}\cdot l}{\lambda_1^{(k)}\cdot l + a_1}\cdot\frac{\Delta_1}{60}\cdot(M_{k-1,1} - M_{k1}), \tag{1.12}$$

$$A_{k2} = \sum_1^k M_{i2} + \frac{M_{02} - M_{k2}}{2} + \frac{\lambda_2^{(k)}\cdot l}{\lambda_2^{(k)}\cdot l + a_2}\cdot\frac{\Delta_2}{60}\cdot(M_{k-1,2} - M_{k2}).$$

Cu notaţiile de mai sus, ecuaţiile (1.5) devin

$$\sum_1^k i\cdot X_i + k\cdot\sum_{k+1}^n X_i + \frac{c_k}{b_k}\cdot\frac{E_D}{E_g}\cdot X_k = \frac{d_k}{b_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.13}$$

Dacă se face aproximaţia

$$\lambda_r^{(k)} = \lambda_r, \tag{1.14}$$

adică se admite că punctul de inflexiune se află în aceeaşi poziţie la toate nivelele, şi dacă se consideră că forţele F_k se distribuie, la cele două lamele verticale, proporţional cu momentele de inerţie ale acestora, adică

$$F_{kr} = \frac{I_r}{I}\cdot F_k \qquad (r = 1, 2;\ I = I_1 + I_2), \tag{1.15}$$

rezultă

$$b_{ki} = b_{kk} = b = \frac{(\lambda_1\cdot l + a_1)^2 + i_1^2}{K_1} + \frac{(\lambda_2\cdot l + a_2)^2 + i_2^2}{K_2} \tag{1.9'}$$

$$c_k = c = \frac{l^2}{3K_g}\cdot\left(1 - 3\lambda_1\cdot\lambda_2 + \frac{\Delta_g}{20}\right) \tag{1.10'}$$

$$d_k = -\frac{L}{K_1 + K_2}\cdot A_k, \tag{1.11'}$$

unde

$$A_k = \sum_1^k M_i + \frac{M_0 - M_k}{2} + \frac{\lambda_1 \cdot \Delta_1 + \lambda_2 \cdot \Delta_2}{60} \cdot \frac{l}{L} \cdot (M_{k-1} - M_k). \quad (1.12')$$

Cu aceste aproximații, ecuațiile (1.13), scrise pentru nivelele $k-1$, k și $k+1$, sînt

$$\left.\begin{aligned} k-1 \qquad & \sum_1^{k-1} i \cdot X_i + (k-1) \cdot \sum_k^n X_i + \frac{c}{b} \cdot \frac{E_g}{E_D} \cdot X_{k-1} = \frac{d_{k-1}}{b} \\ k \qquad & \sum_1^{k} i \cdot X_i + k \cdot \sum_{k+1}^n X_i + \frac{c}{b} \cdot \frac{E_g}{E_D} \cdot X_k = \frac{d_k}{b} \\ k+1 \qquad & \sum_1^{k+1} i \cdot X_i + (k+1) \cdot \sum_{k+2}^n X_i + \frac{c}{b} \cdot \frac{E_g}{E_D} \cdot X_{k+1} = \frac{d_{k+1}}{b} \end{aligned}\right\} \quad (1.16)$$

Dacă din grupul de ecuații de mai sus se adună prima cu ultima ecuație și se scade de două ori ecuația a doua, după unele transformări și explicitarea unor termeni se obține

$$X_{k-1} - 2\alpha . X_k + X_{k+1} = -\frac{\beta}{h} \cdot [M_{k+1} - M_{k-1} + \gamma \cdot (M_{k-2} - 3M_{k-1} +$$

$$+ 3M_k - M_{k+1})] = -\beta \cdot [T_{k+1} + T_k + \gamma \cdot (-T_{k-1} + 2T_k - T_{k+1})] =$$

$$= -\beta \cdot \left[2 \sum_k^n F_i - F_k + \gamma \cdot (F_k - F_{k-1}) \right] \quad (1.17)$$

$$(k = 2, 3, \ldots, n-1),$$

în care s-au notat

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 1 + \frac{b}{2c} \cdot \frac{E_g}{E_D}, \\ \beta &= \frac{L}{2c \cdot (K_1 + K_2)} \cdot \frac{E_g}{E_D} \cdot h, \\ \gamma &= \frac{l}{L} \cdot \frac{\lambda_1 \cdot \Delta_1 + \lambda_2 \cdot \Delta_2}{30}. \end{aligned}\right\} \quad (1.18)$$

Dacă se scriu ecuațiile (1.13), cu aproximațiile (1.14) și (1.15), pentru $k = 1$ și $k = 2$

$$\left.\begin{aligned} k = 1 \qquad & X_1 + \sum_2^n X_i + \frac{c}{b} \cdot \frac{E_g}{E_D} \cdot X_1 = \frac{d_1}{b} \\ k = 2 \qquad & \sum_1^2 i \cdot X_i + 2 \sum_3^n X_i + \frac{c}{b} \cdot \frac{E_g}{E_D} \cdot X_2 = \frac{d_2}{b} \end{aligned}\right\} \quad (1.19)$$

și se scade de două ori prima ecuație din a doua, după transformările respective se obține

$$-2\alpha\cdot X_1 + X_2 = -\frac{\beta}{h}\cdot[M_2 - M_0 + \gamma\cdot(-2M_0 + 3M_1 - M_2)] =$$
$$= -\beta\cdot[T_2 + T_1 + \gamma\cdot(2T_1 - T_2)] = \tag{1.20}$$
$$= -\beta\cdot\left[2\sum_1^n F_i - F_1 + \gamma\cdot\left(\sum_1^n F_i + F_1\right)\right].$$

În mod similar, scriind ecuațiile (1.13), cu aceleași aproximații, pentru $k = n$ și $k = (n-1)$

$$\left.\begin{aligned} k = n \qquad & \sum_1^n i\cdot X_i + \frac{c}{b}\cdot\frac{E_g}{E_D}\cdot X_n = \frac{d_n}{b} \\ k = n-1 \qquad & \sum_1^{n-1} i\cdot X_i + (n-1)\cdot X_n + \frac{c}{b}\cdot\frac{E_g}{E_D}\cdot X_{n-1} = \frac{d_{n-1}}{b} \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

și scăzînd prima ecuație din a doua, se obține ecuația

$$X_{n-1} - (2\alpha - 1)\cdot X_n = -\frac{\beta}{h}\cdot[-M_{n-1} + \gamma\cdot(M_{n-2} - 2M_{n-1})] =$$
$$= -\beta\cdot[T_n + \gamma\cdot(-T_{n-1} + T_n)] = -\beta\cdot(F_n - \gamma\cdot F_{n-1}). \tag{1.22}$$

Se observă că atît ecuațiile (1.17), cît și ecuațiile (1.20) și (1.22) pot fi scrise concentrat sub forma

$$X_{k-1} - 2\alpha\cdot X_k + X_{k+1} =$$
$$= -\frac{\beta}{h}\cdot[M_{k+1} - M_{k-1} + \gamma\cdot(\mathfrak{M}_{k-2} - 3\mathfrak{M}_{k-1} + 3\mathfrak{M}_k - \mathfrak{M}_{k+2})] =$$
$$= -\beta\cdot[T_{k+1} + T_k + \gamma\cdot(-\mathfrak{T}_{k-1} + 2\mathfrak{T}_k - \mathfrak{T}_{k+1})] =$$
$$= -\beta\cdot\left[2\sum_k^n F_i - F_k + \gamma\cdot(\mathfrak{F}_k - \mathfrak{F}_{k-1})\right] \tag{1.23}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

unde $\mathfrak{F}_k$, $\mathfrak{T}_k$ și $\mathfrak{M}_k$ sînt respectiv încărcările, forțele tăietoare și momentele încovoietoare ale grinzii fictive din figura A, de lungime $(n+2)h$, încastrată la extremitatea (-1) și liberă la cealaltă extremitate $(n+1)$, și încărcată ca în figură, avînd

$$\mathfrak{F}_k = F_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$\mathfrak{F}_0 = -\sum_1^n F_i,$$
$$\mathfrak{F}_{n+1} = F_n,$$
$$C_{n+1} = F_n\cdot h,$$

rezultînd

$$\mathfrak{T}_k = T_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$
$$\mathfrak{T}_0 = 0,$$
$$\mathfrak{T}_{n+1} = T_n$$

și

$$\mathfrak{M}_k = M_k, \qquad (k = 0,1, \ldots, n)$$
$$\mathfrak{M}_{-1} = M_0,$$
$$\mathfrak{M}_{n+1} = -M_{n-1}.$$

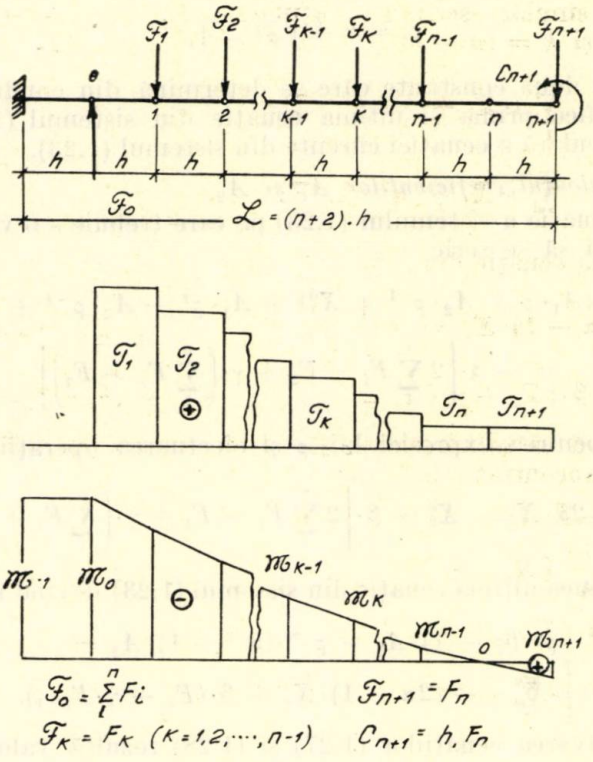


Fig. A

De asemenea, în ecuațiile (1.23) trebuie considerat

$$\boldsymbol{X}_0 = 0 \text{ și } \boldsymbol{X}_{n+1} = \boldsymbol{X}_n.$$

Ecuațiile (1.23) reprezintă un sistem de ecuații cu matrice Jacobi, care poate fi rezolvat prin aproximații succesive (Gauss), pe o schemă de transmiteri (Halasz), cu același coeficient de transmitere pentru toate nodurile :

$$t = \ldots t_{k-1,k} = t_{k+1,k} = \ldots = t_{n,n} = \frac{1}{2\alpha}$$

așa cum se arată în exemplul tratat mai jos (anexă).

1.1. *Cazuri particulare*

Dacă încărcarea este de forma

$$F_k = f(k) \qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1) \tag{1.24}$$

sistemul de ecuații (1.23) poate fi rezolvat prin metoda de rezolvare a ecuațiilor cu diferențe finite [14].

În acest caz, soluția sistemului (1.23) poate fi pusă sub forma

$$X_k = A_1 \cdot \rho^k + A_2 \cdot \rho^{-k} + X_k^0, \tag{1.25}$$

în care

$$\rho = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}, \tag{1.26}$$

A_1 și A_2 fiind două constante care se determină din condiția ca soluția (1.25) să verifice prima și ultima ecuație din sistemul (1.23), iar X_k^0, o soluție particulară a ecuației curente din sistemul (1.23).

1.1.1. *Calculul coeficienților A_1 și A_2*

Prima ecuație a sistemului (1.23) pe care trebuie s-o verifice soluția (1.25) urmează să se scrie

$$-2\alpha \cdot (A_1 \cdot \rho + A_2 \cdot \rho^{-1} + X_1^0) + A_1 \cdot \rho^2 + A_2 \cdot \rho^{-2} + X_2^0 =$$

$$= -\beta \cdot \left[2 \sum_1^n F_i - F_1 + \gamma \cdot \left(\sum_1^n F_i + F_1 \right) \right]$$

sau, după înlocuirea expresiei lui ρ și efectuarea operațiilor respective

$$A_1 + A_2 = -2\alpha \cdot X_1^0 + X_2^0 + \beta \cdot \left[2 \sum_1^n F_i - F_1 + \gamma \cdot \left(\sum_1^n F_i + F_1 \right) \right] \cdot \tag{1.27}$$

De asemenea ultima ecuație din sistemul (1.23) devine în același mod

$$\rho^n \cdot (\rho - 1) \cdot A_1 + \rho^{-n} \cdot (\rho^{-1} - 1) \cdot A_2 =$$

$$= X_{n-1}^0 - (2\alpha - 1) \cdot X_n^0 + \beta \cdot (F_n - \gamma \cdot F_{n-1}). \tag{1.28}$$

Din rezolvarea ecuațiilor (1.27) și (1.28) rezultă valorile coeficienților A_1 și A_2.

1.1.2. *Calculul soluției particulare X_k^0*

Această soluție depinde de forma funcției (1.24). Astfel:

a) În cazul cînd funcția (1.24) este de forma

$$F_k = F \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.24'}$$

soluția particulară a ecuației curente din sistemul (1.23) este

$$X_k^0 = \frac{\beta \cdot F}{2(\alpha - 1)} \cdot (2n + 1 - 2k). \tag{1.29}$$

b) Dacă funcţia (1.24) este de forma

$$F_k = F \cdot k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1.24'')$$

soluţia particulară a ecuaţiei curente din sistemul (1.23) este

$$X_k^0 = \frac{\beta \cdot F}{2(\alpha - 1)} \cdot \left[n \cdot (n+1) + \gamma - \frac{1}{\alpha - 1} - k^2 \right] \cdot \qquad (1.30)$$

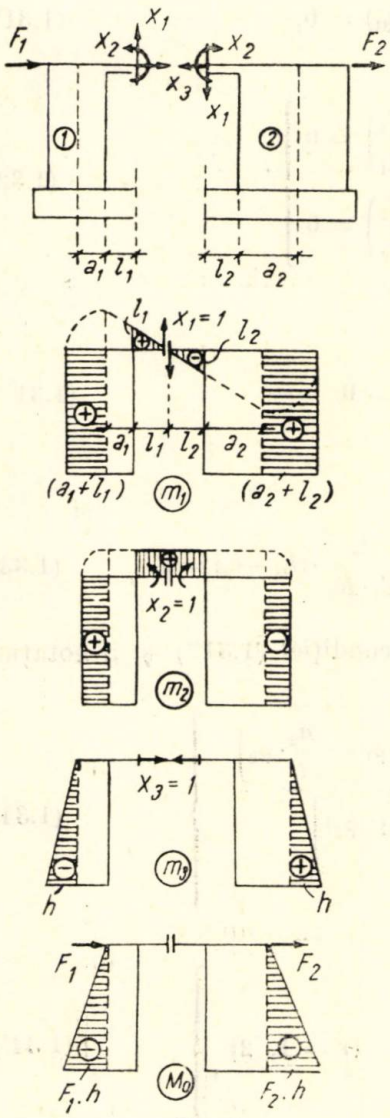


Fig. 6

Observaţie. Din calculul de repartizare a solicitărilor seismice între diferitele elemente portante verticale, după [9] rezultă diagramele de momente pe diafragmele pline echivalente cu acestea. În acest caz, solicitările fiecărui spalet se calculează cu prima formă a sistemului de ecuaţii (1.23), în care momentele respective trebuie introduse cu semnul lor real.

1.2. *Calculul coeficienţilor* λ_1 *şi* λ_2

În baza aproximaţiei (1.14), punctele de inflexiune ale grinzilor de cuplare se consideră egal distanţate de capetele respective ale acestora la toate nivelele.

Întrucît valorile iniţiale ale necunoscutelor X_k urmează a fi îmbunătăţite prin aproximări succesive, coeficienţii λ_1 şi λ_2 se calculează admiţînd următoarele simplificări :

— poziţia punctului de inflexiune nu depinde de numărul de nivele, deci este aceeaşi şi în cazul unui singur nivel (fig. 6) ;

— efectul forţei tăietoare este neglijabil ;

— cei doi spaleţi se încarcă proporţional cu momentele lor de inerţie.

În această situaţie, prin metoda eforturilor avem :

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{10} = 0,$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{20} = 0,$$

$$\delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{30} = 0.$$

Din ecuațiile de mai sus, întrucît efortul X_2 este nul în punctul de inflexiune, rezultă

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \Delta_{10} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \Delta_{20} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \Delta_{30} & \delta_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{1.31}$$

sau

$$\Delta_{10}\cdot(\delta_{21}\cdot\delta_{33} - \delta_{23}\cdot\delta_{31}) = 0, \tag{1.31'}$$

întrucît din figură rezultă

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{20} &= \frac{h^2}{2E_D}\cdot\left(\frac{F_2}{I_2} - \frac{F_1}{I_1}\right) = 0 \\ \Delta_{30} &= \frac{h^3}{3E_D}\cdot\left(\frac{F_1}{I_1} - \frac{F_2}{I_2}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

în baza ultimei ipoteze.

Așadar ecuația (1.31') devine

$$\delta_{21}\cdot\delta_{33} - \delta_{23}\cdot\delta_{31} = 0 \tag{1.31''}$$

întrucît Δ_{10} nu poate fi nul.

După efectuarea calculelor, rezultă

$$\frac{1}{E_D}\cdot\left(\frac{l_1 + a_1}{K_1} - \frac{l_2 + a_2}{K_2}\right) + \frac{2}{E_g\cdot K_g}\cdot(l_1 - l_2) = 0. \tag{1.33}$$

În consecință, din (1.33), în baza condiției (1.31'') și a notației (1.3), rezultă

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1 + \lambda\cdot\frac{E_g}{2E_D}\cdot\left(\rho_2^1 - \frac{a_1}{l}\cdot\rho_1 - \frac{a_2}{l}\cdot\rho_2\right)}{2\left[1 + \frac{E_g}{4E_D}\cdot(\rho_1 + \rho_2)\right]} \\ \lambda_2 &= 1 - \lambda_1 \end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} \rho_r &= \frac{k_g}{k_r} \\ \rho_r' &= \left(2\,\frac{a_r}{l} + 1\right)\cdot\rho_r \end{aligned}\right\} \quad (r = 1,\ 2) \tag{1.34'}$$

1.3. *Valorile inițiale de calcul*

Cunoscînd valorile aproximative ale forțelor tăietoare din grinzile de cuplare, valorile inițiale de calcul ale cuplelor exterioare C_{kr} ($r = 1, 2$) vor fi

$$\left.\begin{aligned} C_{k1} &= (a_1 + \lambda_1 \cdot l) \cdot X_k, \\ C_{k2} &= (a_2 + \lambda_2 \cdot l) \cdot X_k. \end{aligned}\right\} \tag{1.35}$$

De asemenea valorile inițiale ale forțelor axiale $\mathfrak{F}_k$ vor fi

$$\mathfrak{F}_k = X_k. \tag{1.36}$$

2. DETERMINAREA DIAGRAMEI DE MOMENTE

m_k (rezultată din acțiunea forțelor axiale din buiandrugi)

Săgețile celor doi spaleți verticali ai sistemului de bază în dreptul grinzilor de cuplare, sub acțiunea forțelor exterioare F_{kr}, a cuplelor exterioare C_{kr} și a forțelor axiale din buiandrugi (de întindere), sînt [9]

$$y_{kr} = -\frac{h^2}{6\,E_D \cdot I_r} \cdot \left[6 \sum_0^k \sum_0^{i-1} M_{jr} - (M_{0r} - M_{kr}) - 3k \cdot M_{0r} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Delta_r}{10} \cdot (M_{0r} - M_{kr}) \right] - \frac{h^2}{6\,E_D \cdot I_r} \cdot \left(6 \sum_0^k \sum_0^{i-1} \mathfrak{M}_{jr} + 3 \sum_0^k \mathfrak{M}_{jr} \right) - \tag{2.1}$$

$$- \frac{h^2}{6\,E_D \cdot I_r} \cdot \left[6 \sum_0^k \sum_0^{i-1} m_{jr} - (m_{0r} - m_{kr}) - 3k \cdot m_{0r} + \frac{\Delta_r}{10} \cdot (m_{0r} - m_{kr}) \right]$$

$$(r = 1,\ 2),$$

unde (fig. 7)

$$\left.\begin{aligned} M_{jr} &= -\sum_j^n F_{ir} \cdot (i - j) \cdot h \\ \mathfrak{M}_{jr} &= -\sum_j^n C_{ir} \end{aligned}\right\} \qquad (r = 1,\ 2) \tag{2.2}$$

$$\left.\begin{aligned} m_{j1} &= m_j \\ m_{j2} &= -m_j \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

m_j fiind deci momentele încovoietoare pe spaletul 1, date de forțele axiale din grinzile de cuplare, avînd același semn cu momentele M_{j1}.

Pe baza relațiilor (1.15), egalitatea (2) conduce la ecuația

$$6 \sum_0^k \sum_0^{i-1} m_j - (m_0 - m_k) - 3k \cdot m_0 + \Delta_m \cdot (m_0 - m_k) = \delta \cdot (M_0 - M_k) -$$

$$- \frac{3I_2}{I} \cdot \left(2 \sum_0^k \sum_0^{i-1} \mathfrak{M}_{j1} + \sum_0^k \mathfrak{M}_{j1} \right) + \frac{3I_1}{I} \cdot \left(2 \sum_0^k \sum_0^{i-1} \mathfrak{M}_{j2} + \sum_0^k \mathfrak{M}_{j2} \right), \tag{2.4}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

în care s-au notat

$$\left.\begin{aligned} I &= I_1 + I_2, \\ \Delta_m &= \frac{\Delta_1 \cdot I_2 + \Delta_2 \cdot I_1}{I}, \\ \delta &= \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{10} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{I^2}, \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

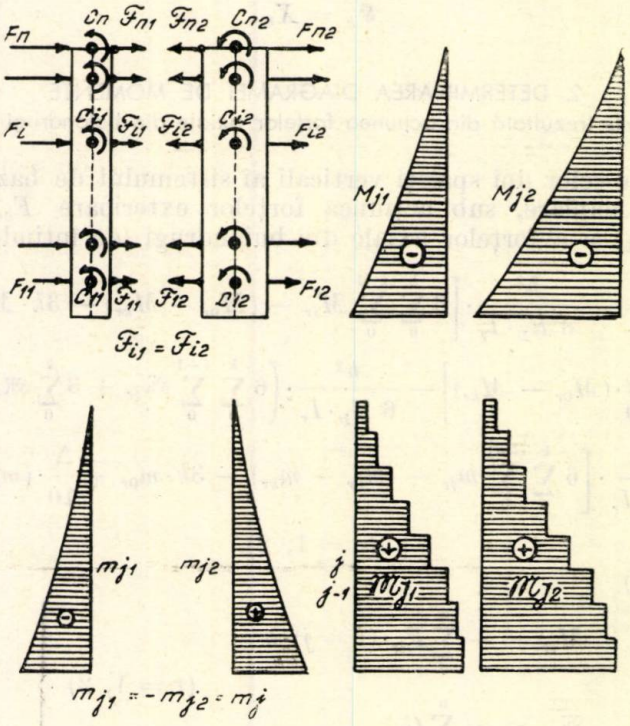


Fig. 7

Dacă se scrie relaţia (2.4) pentru nivelele $(k-1)$, k şi $(k+1)$, se adună prima cu ultima şi se scade de două ori a doua relaţie, după efectuarea operaţiilor se obţine relaţia

$$\alpha_m \cdot m_{k-1} + 2(3 - \alpha_m) \cdot m_k + \alpha_m \cdot m_{k+1} = -\delta \cdot (M_{k-1} - 2M_k + M_{k+1}) - \\ - \frac{3I_2}{I} \cdot (\mathfrak{M}_{k1} + \mathfrak{M}_{k+1,1}) + \frac{3I_1}{I} \cdot (\mathfrak{M}_{k2} + \mathfrak{M}_{k+1,2}), \tag{2.6}$$

valabilă pentru $k = 1, 2, \ldots, n-1$, în care s-a notat

$$\alpha_m = 1 - \frac{\Delta_m}{10} \tag{2.7}$$

Dacă se aplică relaţia (2.4) la nivelul $k = 1$, se obţine relaţia

$$(3 - \alpha_m)\cdot m_0 + \alpha_m \cdot m_1 = -\delta\cdot(M_1 - M_0) - \frac{3I_2}{I}\cdot \mathfrak{M}_{1.1} + \frac{3I_1}{I}\cdot \mathfrak{M}_{1,2}\cdot \quad (2.8)$$

Se observă că această relaţie se poate obţine prin generalizarea relaţiei (2.6) pentru $k = 0$, dacă se consideră

$$\left.\begin{aligned} m_{-1} &= m_1 \\ M_{-1} &= M_1 \\ \mathfrak{M}_{0.1} &= \mathfrak{M}_{1.1} \\ \mathfrak{M}_{0.2} &= \mathfrak{M}_{1.2} \end{aligned}\right\} \quad (2.9)$$

Aşadar, relaţia (2.6), a cărei valabilitate se extinde pentru

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$$

cu convenţiile (2.9), reprezintă un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute

$$m_j \qquad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$

(întrucît $m_n = 0$), cu matrice Jacobi, a cărui rezolvare se poate face destul de simplu, prin aproximaţii succesive (Gauss), pe o schemă de transmiteri (Halasz), cu acelaşi coeficient de transmitere pentru toate nodurile (2.19).

Efectuînd unele operaţii simple în membrul II al ecuaţiilor (2.6), aceste ecuaţii mai pot fi puse şi sub forma

$$\alpha_m\cdot m_{k-1} + 2(3 - \alpha_m)\cdot m_k + \alpha_m\cdot m_{k+1} = \delta\cdot h\cdot (T_k - T_{k+1}) -$$

$$-\frac{3I_2}{I}\cdot\left(2\sum_k^n C_{j1} - C_{k1}\right) + \frac{3I_1}{I}\cdot\left(2\sum_k^n C_{j2} - C_{k2}\right) =$$

$$= \delta\cdot h\cdot F_k - \frac{3I_2}{I}\cdot\left(2\sum_k^n C_{j1} - C_{k1}\right) + \frac{3I_1}{I}\cdot\left(2\sum_k^n C_{j2} - C_{k2}\right) \quad (2.6')$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

cu convenţiile

$$\left.\begin{aligned} T_0 &= -T_1 \\ F_0 &= -2\sum_1^m F_i \end{aligned}\right\} \quad (2.10)$$

Observaţie. Din structura membrului al doilea al ecuaţiilor (2.6) sau (2.6') se vede că momentele suplimentare m_k pot fi puse sub forma

$$m_k = m_k' + m_k'', \quad (2.11)$$

unde m_k' provine din acţiunea forţelor exterioare şi se datoreşte diferenţei de rigiditate la forfecare a celor din spaleţi, iar m_k'' din aplicarea cuplelor exterioare C_{kr} şi se datoreşte diferenţei de rigiditate la încovoiere a celor doi spaleţi.

Valorile acestor momente pot fi calculate separat, cu ecuațiile

$$\alpha_m \cdot m'_{k-1} + 2(3 - \alpha_m) \cdot m'_k + \alpha_m \cdot m'_{k+1} = -\delta \cdot (M_{k-1} - 2M_k + M_{k+1}) = \\ = \delta \cdot h \cdot (T_k - T_{k+1}) = \delta \cdot h \cdot F_k. \qquad (2.12)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

și respectiv

$$\alpha_m \cdot m''_{k-1} + 2(3 - \alpha_m) \cdot m''_k + \alpha_m \cdot m''_{k+1} = -\frac{3I_2}{I} \cdot (\mathfrak{M}_{k1} + \mathfrak{M}_{k+1,1}) + \\ + \frac{3I_1}{I} \cdot (\mathfrak{M}_{k2} + \mathfrak{M}_{k+1.2}) = -\frac{3I_2}{I} \cdot \left(2 \sum_k^n C_{j1} - C_{k1}\right) + \\ + \frac{3I_1}{I} \cdot \left(2 \sum_k^n C_{j2} - C_{k2}\right) \qquad (2.13)$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

cu convențiile (2.9) și (2.10) pentru $k = 0$.

În cazurile particulare (5), ecuațiile (2.12) pot fi rezolvate cu ajutorul ecuațiilor cu diferențe finite.

În acest caz,

$$m'_k = B_1 \cdot \rho_1^k + B_2 \cdot \rho_1^{-k} + m'^0_k, \qquad (2.14)$$

unde

$$\rho_1 = 1 - \frac{3}{\alpha_m} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{3}\alpha_m}\right). \qquad (2.15)$$

Soluția particulară m'^0_k a soluției generale (2.14) este

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) pentru } F_k = F; \quad m'^0_k = \dfrac{\delta \cdot h}{6} \cdot F \\ \text{b) pentru } F_k = F \cdot k; \; m'^0_k = \dfrac{\delta \cdot h}{6} \cdot F \cdot k \end{array}\right\} (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (2.16)$$

iar coeficienții B_1 și B_2 rezultă din condițiile ca soluția (2.14) să verifice ecuația (2.12) pentru $k = 0$, precum și să se anuleze pentru $k = n$.

Aceste condiții conduc la ecuațiile

a) pentru $F_k = F$:

$$\left.\begin{array}{l} B_1 - B_2 = -\dfrac{1 + 2n}{6 \cdot \sqrt{1 - \frac{2}{3}\alpha_m}} \cdot \delta \cdot h \cdot F \\ B_1 \cdot \rho_1^n + B_2 \cdot \rho_1^{-n} = -\dfrac{\delta \cdot h}{6} \cdot F \end{array}\right\} \qquad (2.17')$$

b) pentru $F_k = F \cdot k$:

$$\left.\begin{aligned} B_1 - B_2 &= -\frac{\alpha_m + 3n\cdot(n+1)}{18\cdot\sqrt{1-\frac{2}{3}\alpha_m}}\cdot\delta\cdot h\cdot F \\ B_1\cdot\rho_1^n + B_2\cdot\rho_1^{-n} &= -\frac{\delta\cdot h}{6}\cdot F\cdot n \end{aligned}\right\} \qquad (2.17'')$$

cu ajutorul cărora se determină B_1 și B_2.

Notă. 1. — Din calculul diafragmelor cu goluri, în conlucrare cu alte tipuri de elemente portante verticale, după [9] rezultă diagramele de momente pe diafragmele pline echivalente.

În consecință, pentru calculul momentelor suplimentare m'_k trebuie folosite ecuațiile (2.12) în prima lor formă, care pot fi rezolvate prin aproximații succesive (Gauss), pe o schemă de transmiteri (Halasz), ca și ecuațiile (2.13).

2. — *Într-o rezolvare aproximativă cu un grad de exactitate suficient de ridicat pentru practica curentă de proiectare, calculele pot fi limitate la cele arătate în capitolele 1 și 2 de mai sus, cînd cei doi spaleți au rigidități de același ordin de mărime.*

În acest caz, momentele suplimentare m_k se vor calcula integral (fără a fi defalcate în m'_k și m''_k), prin aproximații succesive, pe o schemă de transmiteri, cu ajutorul ecațuiilor (2.6) sau (2.6′).

În această situație, ecuațiile de mai sus vor putea fi puse și sub forma

$$m_k - t\cdot(m_{k-1} + m_{k+1}) = -p\cdot(M_{k-1} - 2M_k + M_{k+1}) - q\cdot(N_k + N_{k+1}) =$$
$$= p\cdot h\cdot(T_k - T_{k+1}) - q\cdot(N_k + N_{k+1}) = p\cdot h\cdot F_k - q\cdot(N_k + N_{k+1})$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \qquad (2.18)$$

cu convențiile (2.9) și (2.10).

În aceste ecuații,

$$t = t_{k-1,k} = t_{k+1,k} = -\frac{\alpha_m}{2(3-\alpha_m)} \qquad (2.19)$$

este coeficientul de transmitere, iar

$$p = \frac{\delta}{2(3-\alpha_m)}$$
$$q = \frac{3}{2(3-\alpha_m)\cdot I}\cdot[(a_1 + \lambda_1\cdot l)\cdot I_2 - (a_2 + \lambda_2\cdot l)\cdot I_1]. \qquad (2.20)$$

De asemenea

$$N_k = \sum_k^n X_i \qquad (2.21)$$

este forța axială din spaleți sub nivelul k, cu convenția suplimentară

$$N_0 = N_1 \qquad (2.22)$$

EXEMPLU DE CALCUL

Se calculează un element portant vertical al unei structuri de rezistență din beton armat cu 11 nivele echidistante

$$h = 2{,}75 \text{ m},$$

alcătuit din doi spaleți cuplați, avînd secțiunile și celelalte dimensiuni geometrice din figura *B*.

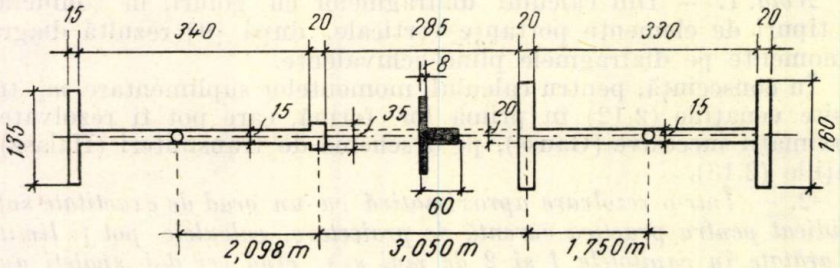


Fig. B

Secțiunea grinzilor de cuplare este de asemenea dată în figură. Încărcarea pentru care urmează să se facă calculul este

$$F_k = k \quad (F = 1)^*)$$

1) *Determinarea elementelor geometrice și a coeficienților necesari în calcule*

Datele fizico-geometrice ale elementului, rezultate din datele problemei, sînt :

Elementul	I_r, I_g m⁴	A_r, A_g m²	K_r, K_g m³	i_r^2, i_g^2 m²	E_D, E_g	Δ_r, Δ_g
1	1,286	0,782	0,468	1,644	E	39,1
2	2,412	1,135	0,877	2,123	E	50,6
Grinda	$5{,}838.10^{-3}$	0,176	$1{,}91.10^{-3}$	$1{,}085.10^{-2}$	E	$\simeq 0$

Celelalte elemente geometrice necesare sînt

$$a_1 = 2{,}098 \text{ m}; \quad l = 3{,}050 \text{ m}$$

$$a_2 = 1{,}750 \text{ m}; \quad L = 6{,}898 \text{ m}$$

*) Rezultatele vor trebui să fie multiplicate cu valoarea reală a lui F.

Rezultă

$$\frac{a_1}{l} = 0{,}688\,; \qquad \frac{a_2}{l} = 0{,}574$$

$$\rho_1 = 4{,}085.10^{-3}\,; \quad \rho_2 + 2{,}178\cdot 10^{-3}$$

$$\rho_1' = 9{,}706.10^{-3}\,; \quad \rho_2' = 4{,}678.10^{-3}$$

$$\rho_1'' = 5{,}320.10^{-3}\,; \quad \rho_2'' = 3{,}674.10^{-3}$$

$$p = 14{,}88.10^{-3}.$$

2) *Calculul valorilor inițiale* C_{kr}

Din formula (1.34) rezultă

$$\lambda_1 = 0{,}498\,; \ \lambda_2 = 0{,}502,$$

iar cu ajutorul formulelor (1.9′) și (1.10′)

$$b = 46{,}13 \text{ m}^{-1},$$

$$c = 406 \text{ m}^{-1}.$$

De asemenea, cu formulele (1.18)

$$\alpha = 1{,}057\,; \ \beta = 0{,}0173\,; \ \gamma = 0{,}661.$$

În consecință, încărcarea fiind de tipul (1.24″), cu formula (1.26) se obține :

$$\rho = 1{,}402.$$

Soluția generală a ecuațiilor (1.23) fiind de forma (1.25), în care soluția particulară este de forma (1.30)

$$X_k^0 = 0{,}1528\cdot(115{,}04 - k^2),$$

se determină coeficienții expresiei (1.25) cu ajutorul ecuațiilor (1.27) și (1.28), obținîndu-se

$$A_1 = 0{,}1973\,; \ A_2 = -17{,}07.$$

Așadar, expresia cu ajutorul căreia se calculează forțele tăietoare din grinzile de cuplare în această etapă este

$$X_k = 0{,}1973\cdot\rho^k - 17{,}07\cdot\rho^{-k} + 0{,}1528\cdot(115{,}04 - k^2). \qquad (1)$$

Pentru determinarea valorilor inițiale de calcul, cu formula (1.35), se mai calculează

$$a_1 + \lambda_1.l = 3{,}617 \text{ m}$$

$$a_2 + \lambda_2.l = 3{,}281 \text{ m}.$$

Astfel, valorile forţelor tăiatoare X_k şi ale cuplelor C_{kr} (iniţiale) sînt calculate în tabloul 1.

Tabloul 1

k	ρ^k	ρ^{-k}	k^2	$115{,}04 - k^2$	$A_1 \cdot \rho^k$	$A_2 \cdot \rho^{-k}$	X_k^0	X_k	C_{k1}	C_{k2}
1	1,40	0,714	1	114,04	0,28	−12,17	17,42	5,53	20,0	18,1
2	1,97	0,509	4	111,04	0,39	− 8,69	16,96	8,67	31,3	28,4
3	2,76	0,363	9	106,04	0,54	− 6,20	16,20	10,55	28,2	34,6
4	3,86	0,259	16	99,04	0,76	− 4,42	15,11	11,45	41,4	37,6
5	5,42	0,185	25	90,04	1,07	− 3,15	13,74	11,66	42,2	38,3
6	7,61	0,132	36	79,04	1,50	− 2,24	12,07	11,34	41,0	37,2
7	10,66	0,094	49	66,04	2,10	− 1,60	10,09	10,59	38,3	34,7
8	14,94	0,067	64	51,04	2,95	− 1,14	7,80	9,61	34,7	31,5
9	20,96	0,048	81	34,04	4,14	− 0,82	5,20	8,52	30,8	28,0
10	29,40	0,034	100	15,04	5,80	− 0,58	2,30	7,52	27,2	24,7
11	41,20	0,024	121	−6,96	8,13	− 0,42	−1,06	6,65	24,1	21,8

3. *Calculul momentelor*

În prealabil, cu ajutorul formulelor (2.5) se calculează

$$I = 3{,}698 \text{ m}^4,$$

$$\Delta_m = 43,$$

$$\delta = 0{,}261,$$

iar cu ajutorul formulei (2.7)

$$\alpha_m = -3{,}3.$$

Ceilalţi coeficienţi ai ecuaţiilor (2.6') sînt

$$2 \cdot (3 - \alpha_m) = 12{,}6,$$

$$\frac{3I_2}{I} = 1{,}958,$$

$$\frac{3I_1}{I} = 1.043.$$

a) *Calculul momentelor* m_k' *)

Încărcarea fiind de forma (1.24''), momentele m_k' se calculează din ecuaţiile (2.12), care în cazul de faţă sînt

$$m_{k-1}' - 2.1{,}908\ m_k' + m_{k+1}' = -0{,}2174\ k. \qquad (2)$$

*) Calculele urmînd a fi continuate cu încercările indicate în cap. 3 (vezi partea a II-a a lucrării), se calculează separat m_k' şi m_k''.

Cu ajutorul formulei (2.15) se obține

$$\rho_1 = 0{,}283.$$

Soluția generală a ecuațiilor (2) este de forma (2.14), iar soluția particulară de forma (2.16 pt. b), adică cu datele din problemă

$$m_k'^0 = 0{,}1196\ k.$$

Coeficienții soluției generale rezultați din rezolvarea ecuațiilor (2.17'') sînt

$$B_2 = -\ 12{,}2\ ;\ B_1 = -\ 1{,}241.10^{-6}.$$

Așadar,

$$m_k' = -\ 1{,}241.10^{-6}\rho_1^k - 12{,}2\ \rho_1^{-k} + 0{,}1196\ k. \qquad (3)$$

Valorile momentelor m_k' rezultă din tabloul 2.

Tabloul 2

k	ρ_1^k	ρ_2^{-k}	$0{,}1196\,k$	$B_1 \cdot \rho_1^k$	$B_2 \cdot \rho_1^{-k}$	m_k'
0	1	1	0	0	−12,20	−12,20
1	0,283	3,53	0,12	0	− 3,45	− 3,33
2	0,080	12,45	0,24	0	− 0,98	− 0,74
3	0,023	44,00	0,36	0	− 0,28	0,08
4	$6{,}43.10^{-3}$	155,2	0,48	0	− 0,08	0,40
5	$1{,}82.10^{-3}$	548,5	0,60	0	− 0,02	0,58
6	$5{,}16.10^{-4}$	$1{,}93.10^{3}$	0,72	0	− 0,01	0,71
7	$1{,}46.10^{-4}$	$6{,}83.10^{3}$	0,84	−0,01	0	0,83
8	$4{,}14.10^{-5}$	$2{,}41.10^{4}$	0,96	−0,03	0	0,93
9	$1{,}17.10^{-5}$	$8{,}51.10^{4}$	1,08	−0,11	0	0,97
10	$3{,}31.10^{-6}$	$3,\ 0.10^{5}$	1,20	−0,37	0	0,83
11	$9{,}39.10^{-7}$	$1{,}06.10^{6}$	1,32	−1,32	0	0

b) *Calculul momentelor* m_k''

Momentele m_k'' se calculează cu ecuațiile (2,13), care, după împărțirea cu coeficientul lui m_k'' sînt

$$-\ 0{,}262\ m_{k-1}'' + m_k'' - 0{,}262\ m_{k+1}'' =$$

$$= -\ 0{,}1533\ (\mathfrak{M}_{k1} + \mathfrak{M}_{k+1,1}) + 0{,}0829.\ (\mathfrak{M}_{k2} + \mathfrak{M}_{k+1,2}). \qquad (4)$$

Calculul membrului al doilea al acestor ecuații se face prin sumări finite, cu convențiile (2.9), în tabloul următor (3).

În acest tablou, săgețile indică ordinea sumărilor.

Tabloul 3

k	C_{k1}	$\mathfrak{M}_{k1}$	$\mathfrak{M}_{k1}+$ $+\mathfrak{M}_{k+1,1}$	C_{k2}	$\mathfrak{M}_{k2}$	$\mathfrak{M}_{k2}+$ $+\mathfrak{M}_{k+1,2}$	$-0{,}1553$ $(\mathfrak{M}_{k1}+..)$	$0{,}0829$ $(\mathfrak{M}_{k2}+..)$	Σ
0	0	369,2	738,4	0	334,9	669,8	−114,66	55,52	−59,14
1	20,0	369,2	718,4	18,1	334,9	651,6	−111,56	54,02	−57,54
2	31,3	349,2	667,1	28,4	316,7	605,0	−103,59	50,16	−53,43
3	38,2	317,9	597,6	34,6	288,3	542,0	−92,80	44,94	−47,86
4	41,4	279,7	518,0	37,6	253,7	469,8	−80,44	38,95	−41,49
5	42,2	238,3	434,4	38,3	216,1	394,0	−67,46	32,66	−34,80
6	41,0	196,1	351,2	37,2	177,9	318,6	−54,54	26,41	−28,13
7	38,3	155,1	271,9	34,7	140,7	246,7	−42,23	20,45	−21,78
8	34,7	116,8	198,9	31,5	106,0	180,4	−30,89	14,96	−15,93
9	30,8	82,1	133,4	28,0	74,4	120,9	−20,71	10,03	−10,68
10	27,2	51,3	75,4	24,7	46,5	68,3	−11,70	5,66	− 6,04
11	24,1	24,1	0	21,8	21,8	0	0	0	0

Coeficientul de transmitere fiind

$$t_{k-1,k} = t_{k+1,k} = 0{,}262,$$

calculele prin aproximaţii succesive se fac pe schema (Halasz) din tabloul 4.

Tabloul 4

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
59,14	57,54	53,43	47,86	41,49	34,80	28,13	21,78	15,93	10,68	6,04
19,14	15,50									
19,13	73,04	19,14								
38,27	19,01	72,57	19,01							
7,61	10,03	17,52	66,87	17,52						
7,61	29,04	7,61	15,46	59,01	15,46					
15,22	6,58	25,13	6,58	13,16	50,26	13,16				
2,77	3,99	5,78	22,04	5,78	10,82	14,29	10,82			
2,77	10,57	2,77	4,96	18,94	4,96	8,54	32,60	8,54		
5,54	2,24	8,55	2,24	4,13	15,78	4,13	6,41	24,47	6,41	
0,97	1,45	1,89	7,20	1,89	3,32	12,67	3,32	4,48	17,09	4,48
0,97	3,69	0,97	1,58	6,02	1,58	2,55	9,73	2,55	2,75	10,52
1,94	0,75	2,86	0,75	1,28	4,90	1,28	1,84	7,03	1,84	
0,33	0,51	0,61	2,33	0,61	1,00	3,83	1,00	1,20	4,59	1,20
0,33	1,26	0,33	0,50	1,89	0,50	0,75	2,84	0,75	0,32	1,20
0,66	0,25	0,94	0,25	0,39	1,50	0,39	0,51	1,95	0,51	
0,11	0,17	0,19	0,75	0,19	0,30	1,14	0,30	0,22	0,83	0,22
0,11	0,42	0,11	0,15	0,58	0,15	0,21	0,81	0,21	0,06	0,22
0,22	0,08	0,30	0,08	0,12	0,45	0,12	0,11	0,43	0,11	
0,03	0,06	0,06	0,23	0,06	0,09	0,33	0,09	0,04	0,17	0,04
0,04	0,14	0,04	0,05	0,18	0,05	0,05	0,20	0,05	0,01	0,04
0,07	0,03	0,10	0,03	0,04	0,14	0,04	0,03	0,09	0,03	
0,01	0,02	0,02	0,08	0,02	0,02	0,09	0,02	0,01	0,04	0,01
0,01	0,05	0,01	0,01	0,06	0,01	0,01	0,05	0,01	—	0,01
0,02	0,01	0,03	0,01	0,01	0,03	0,01	0,01	0,02	0,01	
—	—	0,01	0,02	0,01	0,01	0,02	0,01	—	0,01	—
—	0,01	—	—	0,02	—	0,01	0,02	0,01		
—	—	0,01	—	—	0,01	—		0,01		
						0,01				
	−118,22		−99,52		−73,07		−46,25		−22,73	
−121,08		−110,49		−86,70		−59,38		−34,00		−11,99

ANEXĂ

SISTEMATIZAREA CALCULELOR PRIN APROXIMAȚII SUCCESIVE (GAUSS) A NECUNOSCUTELOR INIȚIALE X_k

Presupunînd că se cunosc momentele pe diafragma plină echivalentă [9], se calculează mai întîi coeficienții ecuațiilor (1.24), păstrînd în membrul întîi numai necunoscuta principală (X_k) cu coeficientul egal cu unu.

Din datele problemei,

$$\alpha = 1{,}057;\ \beta = 0{,}0173;\ \gamma = 0{,}661;$$
$$h = 2{,}75 \text{ m}.$$

Așadar, coeficienții necunoscutelor X_{k-1} și X_{k+1} (coeficienții de transmitere) sînt

$$t_{k-1,k} = t_{k+1,k} = \frac{1}{2\alpha} = 0{,}473,$$

iar coeficientul termenilor liberi

$$a = \frac{\beta}{2\alpha \cdot h} = 2{,}976 \cdot 10^{-3}.$$

Termenii liberi (conform fig. A) se calculează în tablourile *a* și *b*:

Tabloul a

k	$\mathfrak{M}_k$	A_k	B_k	C_k	a_k	b_k	c_k
−1	−1 391,50	—	—	—	—	—	—
0	−1 391,50	—	0	—	—	—	—
1	−1 210,00	0	−181,50	−178,75	181,50	− 2,75	184,25
2	−1 031,25	−181,50	−178,75	−173,25	− 2,75	− 5,50	2,75
3	− 858,00	−178,75	−173,25	−165,00	− 5,50	− 8,25	2,75
4	− 693,00	−173,25	−165,00	−154,00	− 8,25	−11,00	2,75
5	− 539,00	−165,00	−154,00	−140,25	−11,00	−13,75	2,75
6	− 398,75	−154,00	−140,25	−123,75	−13,75	−16,50	2,75
7	− 275,00	−140,25	−123,75	−104,50	−16,50	−19,25	2,75
8	− 170,50	−123,75	−104,50	− 82,50	−19,25	−22,00	2,75
9	− 88,00	−104,50	− 82,50	− 57,75	−22,00	−24,75	2,75
10	− 30,25	− 82,50	− 57,75	− 30,25	−24,75	−27,50	2,75
11	0	− 57,75	− 30,25	− 30,25	−27,50	0	−27,50
12	+ 30,25	—	− 30,25	—	—	—	—

Notă. a) Se completează mai întîi coloana B_k:

$$B_k = \mathfrak{M}_{k-1} - \mathfrak{M}_k$$

(în sensul săgeților din coloana $\mathfrak{M}_k$).

Apoi se completează coloanele A_k și C_k, în sensul săgeților, numai în zona încadrată. Mai departe:

$$a_k = A_k - B_k,$$

$$b_k = B_k - C_k,$$

$$c_k = a_k - b_k.$$

b) Dacă se cunosc forțele exterioare, se completează direct coloana c_k (conform fig. *A*):

Tabloul b

k	M_k		$M_{k+1}-M_{k-1}$	$\gamma . c_k$	Σ	$a . \Sigma$
0	−1 391,50	—	—	—	—	—
1		−1 210,00	360,25	121,79	482,04	1,43
2	−1 031,25		352,00	1,83	353,83	1,05
3		− 858,00	338,25	1,83	340,08	1,01
4	− 693,00		319,00	1,83	320,83	0,95
5		− 539,00	294,25	1,83	296,03	0,88
6	− 398,75		264,00	1,83	265,83	0,79
7		− 275,00	228,25	1,83	230,08	0,68
8	− 170,50		187,00	1,83	188,83	0,56
9		− 88,00	140,25	1,83	142,08	0,43
10	− 30,25		88,00	1,83	89,83	0,27
11		0	30,25	−18,31	11,94	0,04

Notă. a) Pentru ușurarea operațiilor

$$M_{k+1} - M_{k-1}$$

(care se efectuează în sensul săgeților), valorile M_k se scriu pe două coloane.

b) Cifrele din ultima coloană reprezintă valorile cu care se încep operațiile de pe schema de transmiteri alăturată (tabloul c):

Tabloul c

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,43	1,05	1,01	0,95	0,88	0,79	0,68	0,56	0,43	0,27	0,04
	0,68									
	1,73	0,82								
0,82	0,87	1,83	0,87							
	0,39	0,86	1,82	0,86						
	1,26	0,60	0,82	1,74	0,82					
0,60	0,69	1,46	0,69	0,76	1,61	0,76				
	0,28	0,71	1,51	0,71	0,68	1,44	0,68			
	0,97	0,46	0,70	1,47	0,70	0,59	1,24	0,59		
0,46	0,55	1,17	0,55	0,65	1,38	0,65	0,48	1,02	0,48	
	0,22	0,59	1,25	0,59	0,59	1,24	0,59	0,35	0,75	0,35
	0,77	0,36	0,59	1,24	0,59	0,51	1,07	0,51	0,18	0,39
0,36	0,45	0,95	0,45	0,56	1,18	0,56	0,41	0,86	0,41	0,18
	0,17	0,49	1,04	0,49	0,51	1,07	0,51	0,28	0,59	0,28
	0,62	0,29	0,50	1,05	0,50	0,44	0,92	0,44	0,22	0,46
0,29	0,37	0,78	0,37	0,48	1,01	0,48	0,34	0,72	0,34	0,22
	0,14	0,41	0,87	0,41	0,44	0,92	0,44	0,26	0,56	0,26
. . . . .										
. . . . .										
0,02	0,02	0,05	0,02	0,03	0,07			0,09		
	0,01	0,02	0,05	0,02		0,07			0,09	
	0,03	0,01	0,02	0,05			0,07			0,09
0,01	0,01	0,03	0,01		0,05			0,07		
		0,01	0,03			0,05			0,07	
			0,01	0,03			0,05			0,07
				0,01	0,03			0,05		
					0,01	0,03			0,05	
						0,01	0,03			0,05
							0,01	0,03		
								0,01	0,03	
									0,01	0,03
										0,01
5,40	8,41	10,20	11,09	11,23	10,90	10,11	9,11	8,00	6,99	6,26

Notă. a) Coeficienții de transmitere fiind toți egali între ei (chiar pentru X_{11}), calculele sînt simple și se efectuează mecanic și destul de rapid, deși seria termenilor iterației, în cazul de față, este slab convergentă (fapt pentru care calculele nu au fost integral reproduse).

b) Transmiterea de la nodul 11 (n) se face și la acest nod (se autoîncarcă).

c) Spre sfîrșitul iterației, așa cum se vede din tabloul c. nu mai este necesară echilibrarea și transmiterea de la ultimele noduri, aceasta făcîndu-se direct (termenii fiind egali).

d) Valorile obținute diferă de cele calculate exact (în tabloul 1), fiind mai mici cu $2{,}5 \div 7\%$.

Primită la redacție la 16 mai 1965

BIBLIOGRAFIE

1. Agent R., *Metoda aproximațiilor succesive*, vol. I, E.S.A.C., București, 1955.
2. Albigés N., Goulet J., *Contreventement de bâtiments*, Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, mai 1960.
3. Arcan M., *O metodă de calcul al diafragmelor de rigidizare cu un șir de goluri*, St. cerc. mec. apl., *2* (1962).
4. Beck H., *Ein neues Berechnungsverfahren für gegliederte Scheiben, dargestellt am Beispiel des Vierendelsträgers*, Der Bauingenieur, *12* (1956).
5. — *Ein Beitrag zur Berechnung regelmässig gegliederte Scheiben*, Ingenieur Archiv, *5* (1958).
6. — *Ein Beitrag zur Berücksichtigung der Dehnungsverformungen bei Rahmen mit Schlenken und gedrungenen Konstruktionsgliedern*, Die Bautechnik, *5* (1959).
7. Beles A., Ifrim M., *Eemente de seismologie inginerească*, Edit. tehnică, București, 1962.
8. Decauchy M. A., *Contreventements des bâtiments*, Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, ianuarie 1964.
9. Florian V., *Contribuții privind calculul la forțe orizontale al structurilor alcătuite din diafragme*, St. cerc. mec. apl., *6* (1964).
10. Frischman W. W., Probhu S. S., Toppler J. F., *Multi-storey Frames and interconnected Scheer-walls subjected to lateral Loads*, Concrete and Constructional Enginering, *6* (1963); *7* (1963).
11. Гуселников В. М., *Расчет вертикальных диафрагм с проемами крупнопанельных зданий повышенной этажности*, Бетон и железобетон, *10* (1964).
12. Mann W., *Die Berechnung regelmässiger Windrahmen, in geschlossener Form mit Hilfe von Differenzengleichungen*, Der Bauingenieur, *3* (1961).
13. Mateescu D., Anastasescu D., Godeanu L., *Calculul timpanelor rigide cu un șir de goluri*, Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, *2* (1962).
14. Mazilu P., *Statica construcțiilor*, vol. II, Edit. tehnică, București, 1959.
15. Mîrsu O., Vuc L., *Metodă de calcul al diafragmelor la acțiuni seismice*, Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, *6* (1963).
16. Rosman R., *Beitrag zur statischen Berechnung waagrechtbelasteter Querwände bei Hochbauten*, Der Bauingenieur, *4* (1960); 1 (1962); 8 (1962).
17. — *Spannungsoptische Untersuchung einer waagrechtbelasteten Querwand eines Hochbaues*, Der Bauingenieur, *12* (1962).

FLUTTERUL NELINIAR AL PANOURILOR ELASTICE, SUBȚIRI, ETEROGENE, ORTOTROPE[1)]

de LIVIU LIBRESCU

Institutul de mecanica fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

I. PANOUL SIMPLU REZEMAT

În această lucrare se abordează problema stabilității aeroelastice a panourilor elastice, subțiri, eterogene, ortotrope în vecinătatea frontierei critice de flutter. Această analiză, bazată pe luarea în considerare a diverselor neliniarități ce pot interveni (în studiul de față s-au luat în considerare neliniaritățile geometrice și aerodinamice), dă posibilitatea determinării caracterului „periculos" sau „nepericulos" al frontierei critice de flutter și, în legătură cu aceasta, a caracterului influenței pe care o au în acest sens diversele neliniarități considerate.

Presiunea aerodinamică este determinată pe baza „teoriei pistonului".

1. INTRODUCERE

Problema stabilității panourilor elastice subțiri (cilindrice sau plane) plasate într-un curent de gaz a constituit în ultimul timp subiectul a numeroase cercetări. În acest cadru se distinge, pe de o parte, preocuparea de a studia problema stabilității aeroelastice în formulare liniară, formulare care permite găsirea valorii minime a vitezei (viteza critică de flutter sau divergentă) pentru care forma neperturbată a structurii considerate încetează a mai fi stabilă[2)]. Pe de altă parte, se distinge preocuparea, și aceasta în ultimul timp, de a lua în considerare în abordarea acestei probleme și

[1)] Se bazează pe lucrarea *Aeroelastic stability of otrhotropic heterogeneous thin panels in the vicinity of the flutter critical boundary* „Journal de Mécanique", vol. 4, nr. 1, Mars 1965.

[2)] O amplă bibliografie în legătură cu această problemă se dă în [1].

neliniarităţile de natură geometrică, aerodinamică, fizică etc. Abordarea în formulare neliniară a problemei stabilităţii aeroplastice face posibilă determinarea condiţiilor cînd, datorită caracterului influenţei anumitor neliniarităţi este posibilă depăşirea vitezei critice de flutter fără ca să apară ruperea imediată a panoului (în acest caz ruperea are un caracter de oboseală) şi, pe de altă parte a condiţiilor în care pot apărea vibraţii neamortizate la viteze mai mici decît viteza critică de flutter dacă sistemului i se dă o anumită perturbaţie, perturbaţie oricît de mică dacă sistemul este suficient de apropiat de frontiera critică de flutter. Apare deci necesitatea de a studia comportarea sistemului dinamic în apropierea frontierei critice de flutter, adică de a determina dacă sistemul considerat este sau nu stabil în sens „practic".

Din cercetările datorite lui N. N. Bautin [2] (vezi şi monografiile [3], [4]) rezultă că mişcarea neperturbată a sistemului cînd acesta se află în vecinătatea frontierei domeniului de stabilitate este din punct de vedere practic stabilă sau instabilă după cum această mişcare este stabilă sau instabilă în sens Liapunov pe însăşi frontiera. Frontiera sau părţile frontierei domeniului de stabilitate pe care mişcarea neperturbată este stabilă se numesc „nepericuloase", iar cele pe care ea este instabilă, „periculoase" Scopul acestei lucrări constă în determinarea condiţiilor care definesc caracterul „periculos" sau „nepericulos" al frontierei critice şi, implicit, în determinarea caracterului influenţei pe care o au în acest sens neliniarităţile de natură geometrice şi, respectiv, aerodinamică.

Pentru aceasta este necesar a deduce în prealabil ecuaţiile flutterului neliniar, ecuaţii pe care le vom deduce în cadrul ipotezelor şi consideraţiilor expuse în cele ce urmează.

Menţionăm că problemei flutterului neliniar i-au fost consacrate lucrări datorate lui Y. C. Fung [5], V. V. Bolotin [6]—[10], [31] R. D. Stepanov [11], S. A. Ambartsumian şi E. I. Bagdasarian [13], [14], B. P. Makarov [15], P. M. Ogibalov [12], [16], E. F. E. Zeidjel [17], Iu. N. Novicikov [18], A. S. Volmir [19] etc.

2. IPOTEZE, CONSIDERAŢII GEOMETRICE, ECUAŢIILE DE BAZĂ

În cele ce urmează vom deduce ecuaţiile flutterului neliniar al panourilor subţiri, eterogene, ortotrope, avînd conturul în plan dreptunghiular ($a \times b$).

Fie panoul construit din $2l + 1$ ($l = 1, 2, 3, \ldots$) straturi elastic-ortotrope, simetric dispuse pe grosime în raport cu stratul median, straturile simetrice posedînd respectiv aceeaşi grosime şi aceleaşi proprietăţi fizice (fig. 1). Curentul fluid de mare viteză supersonică se scurge fie pe ambele feţe ale panoului cu viteza $V_\infty^+ = V_\infty^-$, fie pe o singură faţă cu viteza V_∞^+, cealaltă faţă a panoului fiind plasată în aer liniştit ($V_\infty^- = 0$), vectorul vitezei curentului neperturbat fiind paralel cu axa $O\alpha$.

Se consideră, de asemenea, existenţa unui cîmp de temperatură neuniform $T(\alpha, \beta, z, t)$.

Se iau în considerare următoarele ipoteze :

a) straturile alcătuind structura sînt împreunate rigid, astfel încît structura se deformează ca un tot ;

b) se adoptă pentru structura în ansamblu ipoteze Love-Kirchhoff ;

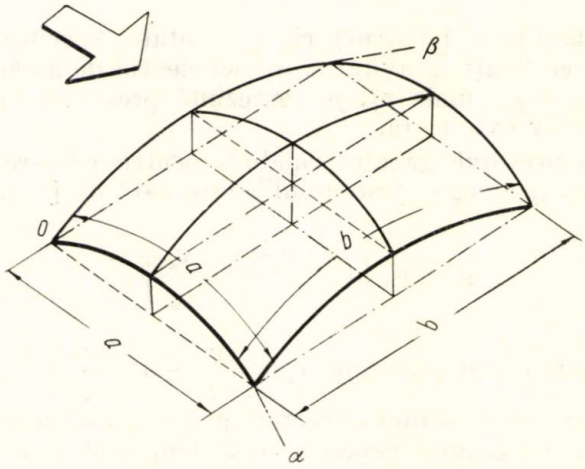


Fig. 1

c) ecuațiile de mișcare, ecuațiile geometrice și de compatibilitate vor fi considerate în conformitate cu aproximația Donell-Mustari-Vlasov [20], [21]. ;

d) Panoul și reazemele nu prezintă deformații inițiale.

În ceea ce privește suprafața de referință a eforturilor și momentelor (suprafața ce coincide cu suprafața mediană a stratului median), aceasta se consideră că are curburile constante și pozitive $k_1 = \frac{1}{R_1}$, $k_2 = \frac{1}{R_2}$ și că este referită la sistemul de coordonate α, β care coincide cu liniile de curbură principale ale suprafeței de referință.

În baza ipotezelor enunțate anterior dispunem de următoarele ecuații :

a) *Ecuațiile de mișcare* scrise în absența forțelor exterioare tangențiale, a forțelor de inerție tangențiale și a forțelor de inerție rotatorii sînt date de

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \beta} = 0 , \quad \frac{\partial T_{\beta\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_\beta}{\partial \beta} = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 M_\beta}{\partial \beta^2} + T_\alpha\left(k_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right) + \tag{1}$$

$$+ T_\beta\left(k_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right) + 2\, T_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + Z = 0 .$$

În aceste ecuații, T_α, T_β, $T_{\alpha\beta}$ reprezintă eforturile tangențiale, M_α, M_β, $M_{\alpha\beta}$ momentele și w deplasarea normală a suprafeței de referință :

$$Z = -m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m\varepsilon\frac{\partial w}{\partial t} + \Delta p, \left(m = \frac{2}{g}\sum_{j=1}^{l+1}\gamma_i\,(\xi_j - \xi_{j-1})\right), \tag{2}$$

unde m este masa redusă a structurii, γ_j greutatea specifică a materialului stratului j, g accelerația gravitației, ε coeficientul de amortizare a structurii, $\Delta p = p_i - p_e$, unde p_i, p_e reprezintă presiunea aerodinamică interioară, respectiv exterioară.

Expresia presiunii gazului valabilă pentru numere MACH $M \geqslant 2$, dedusă pe baza „analogiei pistonului", este dată de [22], [23][3] :

$$p = p_\infty\left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2}\frac{v_z}{c_\infty}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}} \tag{3}$$

unde $\varkappa$ este coeficientul politropic, $v_z \simeq \frac{\partial w}{\partial t} + V\frac{\partial w}{\partial \alpha}$ și c_∞ viteza sunetului corespunzînd curentului neperturbat (peste tot subscriptul ∞ identifică proprietățile gazului neperturbat). Menținînd în dezvoltarea binomului dat de relația (3) primii trei termeni, iar din termenii exprimînd amortizarea aerodinamică reținînd doar termenul liniar, expresia lui Δp în cazul considerării scurgerii curentului numai pe fața superioară a panoului este dată de [7], [9]

$$\Delta p = -\varkappa p_\infty\left[\frac{1}{c_\infty}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + V_\infty\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) + \frac{\varkappa+1}{4}M^2\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\varkappa+1}{12}M^3\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^3\right], \tag{4}$$
$$\left(M = \frac{V_\infty^+}{c_\infty}\right)$$

iar în cazul scurgerii pe ambele fețe ale panoului cu viteza $V_\infty^+ = V_\infty^- = V_\infty$

$$\Delta p = -2\varkappa p_\infty\left[\frac{1}{c_\infty}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + V_\infty\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) + \frac{\varkappa+1}{12}M^3\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^3\right]. \tag{5}$$
$$\left(M = \frac{V_\infty^+}{c_\infty} = \frac{V_\infty^-}{c_\infty}\right)$$

În cazul dat de relația (4), s-a presupus că $p_i = p_\infty$.

[3]) Vezi și lucrarea [24].

b) *Relațiile geometrice deformații-deplasări*

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha} - k_1 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^2, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \beta} - k_2 w + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)^2, \tag{6}$$

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \beta},$$

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}, \quad \varkappa_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \quad \tau = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta},$$

unde u și v reprezintă componentele tangențiale ale vectorului deplasare a suprafeței de referință iar ε_1, ε_2, ω, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ respectiv τ, componentele deformațiilor tangențiale și de încovoiere a suprafeței de referință a structurii :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} + k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2 = 0. \tag{7}$$

c) *Ecuații fizice*

Considerînd materialul fiecărui strat elastic, omogen și ortotrop și considerînd că sistemul de coordonate ales coincide cu direcțiile principale de ortotropie în virtutea ipotezelor enunțate, legea generalizată a lui Hooke, scrisă pentru un strat oarecare j, este dată de

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha^j &= B_{11}^j \varepsilon_1 + B_{12}^j \varepsilon_2 - z(B_{11}^j \varkappa_1 + B_{12}^j \varkappa_2) - B_{11}^j(\beta_\alpha^j + \mu_\beta^j \beta_\beta^j) T \\
\sigma_\beta^j &= B_{22}^j \varepsilon_2 + B_{12}^j \varepsilon_1 - z(B_{22}^j \varkappa_2 + B_{12}^j \varkappa_1) - B_{22}^j(\beta_\beta^j + \mu_\alpha^j \beta_\alpha^j) T \\
\tau_{\alpha\beta}^j &= G_{12}^j(\omega - 2z\tau),
\end{aligned} \tag{8}$$

unde σ_α, σ_β, $\tau_{\alpha\beta}$ sînt tensiunile tangențiale din mediul tridimensional al structurii :

$$B_{11}^j = \frac{E_\alpha^j}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}, \quad B_{12}^j = \frac{E_\alpha^j \mu_\beta^j}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} = \frac{E_\beta^j \mu_\alpha^j}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}$$

$$B_{22}^j = \frac{E_\beta^j}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}, \quad G_{12}^j = K^j \frac{\sqrt{E_\alpha^j E_\beta^j}}{2(1 + \sqrt{\mu_\alpha^j \mu_\beta^j})},$$

G_{12} fiind modulul de forfecare, K o constantă adimensională ($K = 1$ în cazul izotrop), E_α, E_β, μ_α, μ_β modulele de elasticitate, respectiv constantele Poisson, β_α, β_β coeficienții de dilatare termică, iar $T = T(\alpha, \beta, z, t)$ excesul de temperatură față de temperatura de referință T_r. Cîmpul de temperatură îl vom considera variind liniar pe grosime, adică

$$T(\alpha, \beta, z, t) = T_0(\alpha, \beta, t) + \frac{z}{h} T_1(\alpha, \beta, t), \tag{9}$$

unde

$$T_0 = \frac{1}{2}(T' + T''), \quad T_1 = T' - T'',$$

iar

$$T' = T\left(\alpha, \beta, \frac{h}{2}, t\right), \quad T'' = T\left(\alpha, \beta, -\frac{h}{2}, t\right),$$

h fiind grosimea structurii.

Admițînd independența în raport cu temperatura a constantelor elastice și termice ale materialului pe baza formulelor binecunoscute (vezi de exemplu, monografia [25]), se obțin următoarele relații pentru eforturi și momente [26], [27]:

$$\begin{gathered}
T_\alpha = \overset{1}{F}_\alpha(\varepsilon_1 + \overset{1}{\mu}_\beta \varepsilon_2) - F_{\alpha t}\, T_0, \quad T_\beta = \overset{1}{F}_\beta(\varepsilon_2 + \overset{1}{\mu}_\alpha \varepsilon_1) - F_{\beta t}\, T_0, \\
T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha} = \frac{\overset{2}{F}_\alpha}{2}(1 - \overset{2}{\mu}_\beta)\,\omega, \\
M_\alpha = -\overset{1}{G}_\alpha(\varkappa_1 + \overset{3}{\mu}_\beta \varkappa_2) + G_{\alpha t}\frac{T_1}{h}, \quad M_\beta = -\overset{1}{G}_\beta(\varkappa_2 + \overset{3}{\mu}_\alpha \varkappa_1) + G_{\beta t}\frac{T_1}{h}, \\
M_{\alpha\beta} = -\overset{2}{G}_\alpha(1 - \overset{4}{\mu}_\beta)\,\tau.
\end{gathered} \tag{10}$$

Expresiile parametrilor mecanici și ai coeficienților Poisson reduși care intervin în ecuațiile fizice (10) sînt date de [27]:

$$\begin{aligned}
\overset{1}{F}_\alpha &= 2\sum_{j=1}^{l+1}\frac{E_\alpha^j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \qquad (\alpha \rightleftharpoons \beta), \\
\overset{2}{F}_\alpha &= 2\sum_{j=1}^{l+1}\frac{K^j E_\alpha^j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}\sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}}, \\
\overset{1}{G}_\alpha &= \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{l+1}\frac{E_\alpha^j(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \qquad (\alpha \rightleftharpoons \beta), \\
\overset{2}{G}_\alpha &= \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{l+1}\frac{K^j E_\alpha^j(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}\sqrt{\frac{E_\beta^j}{E_\alpha^j}}\,; \\
F_{\alpha t} &= 2\sum_{j=1}^{l+1}\frac{E_\alpha^j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}(\beta_\alpha^j + \mu_\beta^j \beta_\beta^j) \qquad (\alpha \rightleftharpoons \beta), \\
G_{\alpha t} &= \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{l+1}\frac{E_\alpha^j(\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}(\beta_\alpha^j + \mu_\beta^j \beta_\beta^j) \qquad (\alpha \rightleftharpoons \beta)\,; \\
\overset{1}{\mu}_\alpha &= \frac{\sum_{j=1}^{l+1}\frac{E_\beta^j \mu_\alpha^j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum_{j=1}^{l+1}\frac{E_\beta^j(\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}} \qquad (\alpha \rightleftharpoons \beta),
\end{aligned} \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
\overset{2}{\mu}_\alpha &= \frac{\sum_{j=1}^{l+1} \frac{E_\beta^j \mu_\alpha^j K^j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum_{j=1}^{l+1} \frac{E_\beta^j K^j (\xi_j - \xi_{j-1})}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}}}, \\
\overset{3}{\mu}_\alpha &= \frac{\sum_{j=1}^{l+1} \frac{E_\beta^j \mu_\alpha^j (\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum_{j=1}^{l+1} \frac{E_\beta^j (\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}} \qquad (\alpha \rightleftarrows \beta); \qquad (11) \\
\overset{4}{\mu}_\alpha &= \frac{\sum_{j=1}^{l+1} \frac{E_\beta^j \mu_\alpha^j K^j (\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j}}{\sum_{j=1}^{l+1} \frac{E_\beta^j K_j (\xi_j^3 - \xi_{j-1}^3)}{1 - \mu_\alpha^j \mu_\beta^j} \sqrt{\frac{E_\alpha^j}{E_\beta^j}}}.
\end{aligned}
$$

Simbolul ($\alpha \rightleftarrows \beta$) pus în dreptul anumitor relații arată că restul de relații care nu au fost explicit scrise se obține prin înlocuirea indicelui α prin β și reciproc.

Ecuațiile prezentate anterior sînt reduse prin metoda binecunoscută [25] la următorul sistem rezolvent în funcția potențială $c(\alpha, \beta, t)$ și deplasarea normală $w(\alpha, \beta, t)$:

$$
\begin{aligned}
&\overset{1}{N}_\beta \frac{\partial^4 c}{\partial \alpha^4} - 2\left[\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \frac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}_\beta)}\right] \frac{\partial^4 c}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \overset{1}{N}_\alpha \frac{\partial^4 c}{\partial \beta^4} = \\
&\quad = -k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - k_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2 - \\
&\quad - \overset{1}{N}_\alpha (F_{\alpha t} - \overset{1}{\mu}_\alpha F_{\beta t}) \frac{\partial^2 T_0}{\partial \beta^2} - \overset{1}{N}_\beta (F_{\beta t} - \overset{1}{\mu}_\beta F_{\alpha t}) \frac{\partial^2 T_0}{\partial \alpha^2}, \qquad (12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{1}{G}_\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + 2[\overset{1}{G}_\alpha \overset{3}{\mu}_\beta + \overset{2}{G}_\alpha (1 - \overset{4}{\mu}_\beta)] \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \overset{1}{G}_\beta \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} = \\
&\quad = \frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2} \left(k_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right) + \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2} \left(k_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right) - 2 \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \\
&\quad + \frac{1}{h} \left(G_{\alpha t} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \alpha^2} + G_{\beta t} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \beta^2}\right) - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - m \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta p. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

În aceste ecuații, funcția $c(\alpha, \beta, t)$, definită de relațiile

$$
T_\alpha = \frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2}, \quad T_\beta = \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2}, \quad T_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2 c}{\partial \alpha \partial \beta}, \qquad (14)
$$

reprezintă potenţialul eforturilor tangenţiale, iar relaţiile

$$\overset{1}{N}_\alpha = \frac{1}{\overset{1}{F}_\alpha(1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)}, \qquad \overset{1}{N}_\beta = \frac{1}{\overset{1}{F}_\beta(1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta)} \tag{15}$$

s-au introdus pentru simplificarea scrisului.

3. DEDUCEREA ECUAŢIILOR FLUTTERULUI NELINIAR ŞI FORMULAREA CONDIŢIILOR LA LIMITĂ

Complexitatea sistemului de ecuaţii (12), (13) impune adoptarea unei metode de rezolvare aproximativă. Vom adopta o asemenea metodă care să permită în particular satisfacerea condiţiilor neliniare pe contur pentru deformaţiile tangenţiale.

În acest scop vom exprima $w(\alpha, \beta, t)$ sub forma

$$w(\alpha, \beta, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn}(t) f_{mn}(\alpha, \beta), \tag{16}$$

unde funcţiile $f_{mn}(\alpha, \beta)$ satisfac toate condiţiile la limită în ceea ce priveşte deplasarea normală, $w_{mn}(t)$ fiind funcţii de timp ce trebuie să fie determinate. Presupunînd funcţiile $f_{mn}(\alpha, \beta)$ construite şi substituind expresia (16) în ecuaţia (12), se obţine o ecuaţie liniară în raport cu funcţia de efort $c(\alpha, \beta, t)$.

Pe de altă parte, complexitatea condiţiilor de conlucrare între structură şi elementele de rigidizare face ca formularea exactă a condiţiilor la limită pentru funcţia $c(\alpha, \beta, t)$ să fie lipsită de sens. De aceea aceste condiţii le vom formula în medie [6]—[10].

Funcţia de efort va fi exprimată aproximativ sub forma

$$c(\alpha, \beta, t) = c_1(\alpha, \beta, t) + \frac{1}{2}(T^0_\alpha \beta^2 + T^0_\beta \alpha^2 - 2T^0_{\alpha\beta} \alpha\beta), \tag{17}$$

unde $c_1(\alpha, \beta, t)$ este o soluţie particulară a ecuaţiei (12), iar T^0_α, T^0_β, $T^0_{\alpha\beta}$ sînt parametri ce se determină astfel ca să fie determinate „în medie" condiţiile la limită relative la funcţia $c(\alpha, \beta, t)$.

Impunînd ca funcţia $c_1(\alpha, \beta, t)$ să satisfacă la condiţiile

$$\begin{aligned}
\int_0^b \frac{\partial^2 c_1}{\partial \beta^2}\bigg|_{\alpha=0} d\beta &= \int_0^b \frac{\partial^2 c_1}{\partial \beta^2}\bigg|_{\alpha=a} d\beta = 0, \\
\int_0^a \frac{\partial^2 c_1}{\partial \alpha^2}\bigg|_{\beta=0} d\alpha &= \int_0^a \frac{\partial^2 c_1}{\partial \alpha^2}\bigg|_{\beta=b} d\alpha = 0, \\
\int_0^b \frac{\partial^2 c_1}{\partial \alpha \partial \beta}\bigg|_{\alpha=0} d\beta &= \int_0^b \frac{\partial^2 c_1}{\partial \alpha \partial \beta}\bigg|_{\alpha=a} d\beta = 0, \\
\int_0^a \frac{\partial^2 c_1}{\partial \alpha \partial \beta}\bigg|_{\beta=0} d\alpha &= \int_0^a \frac{\partial^2 c_1}{\partial \alpha \partial \beta}\bigg|_{\beta=b} d\alpha = 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

parametri T_α^0, T_β^0, $T_{\alpha\beta}^0$ capătă sensul de „eforturi medii" în lungul reazemelor [4])

$$T_\alpha^0 = \frac{1}{b}\int_0^b \frac{\partial^2 c}{\partial \beta^2}\bigg|_{\alpha=0} \mathrm{d}\beta, \quad T_\beta^0 = \frac{1}{a}\int_0^a \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha^2}\bigg|_{\beta=0} \mathrm{d}\alpha,$$
$$T_{\alpha\beta}^0 = -\frac{1}{a}\int_0^a \frac{\partial^2 c}{\partial \alpha \partial \beta}\bigg|_{\beta=0} \mathrm{d}\alpha. \tag{19}$$

În afară de „eforturi medii" se definesc de asemenea „apropierile medii" relative ale suporţilor :

$$\Delta_\alpha = -\frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b \frac{\partial u}{\partial \alpha}\,\mathrm{d}\alpha\,\partial\beta, \quad \Delta_\beta = -\frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b \frac{\partial v}{\partial \beta}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta,$$
$$\Delta_{\alpha\beta} = -\frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}\right)\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta. \tag{20}$$

Condiţiile la limită pentru funcţia $c(\alpha, \beta, t)$ pot fi exprimate acum sub forma

$$T_\alpha^0 = c_\alpha \Delta_\alpha, \quad T_\beta^0 = c_\beta \Delta_\beta, \quad T_{\alpha\beta}^0 = c_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\beta}, \tag{21}$$

unde c_α, c_β, $c_{\alpha\beta}$ sînt constante caracterizînd „rigiditatea medie" a suporţilor. Aceste condiţii sînt suficiente pentru determinarea celor trei parametri T_α^0, T_β^0, $T_{\alpha\beta}^0$. Expresia potenţialului $c(\alpha, \beta, t)$ este astfel complet determinată. Ţinînd seama de expresia lui $w(\alpha, \beta, t)$ (16) şi de a lui $c(\alpha, \beta, t)$ (17), în ecuaţia (13) aceasta, scrisă sub forma prescurtată $L(w) = 0$, trebuie să satisfacă aproximativ în sensul metodei Galerkin la relaţia

$$\int_0^a\int_0^b L(w) f_{\bar{r}n}(\alpha, \beta)\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta = 0 \quad \begin{pmatrix} \bar{r} = 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, \dots \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Se deduce un sistem de ecuaţii diferenţiale neliniare în raport cu coeficienţii seriei (16) :

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_{\bar{r}n}}{\mathrm{d}t^2} + g\frac{\mathrm{d}w_{\bar{r}n}}{\mathrm{d}t} + \Omega_{\bar{r}n}^2 w_{\bar{r}n} + F_{\bar{r}n}(w_{mn}, M) = 0, \tag{23}$$

sistem ce se pretează mai bine la o analiză calitativă decît sistemul ecuaţiilor (15), (16). În ceea ce priveşte funcţiile $f_{mn}(\alpha, \beta)$, acestea se aleg astfel încît să fie satisfăcute toate condiţiile la limită în ceea ce priveşte deplasarea normală $w(\alpha, \beta, t)$.

În cazul încastrării marginii $\alpha = 0$, trebuie satisfăcute condiţiile

$$w|_{\alpha=0} = \frac{\partial w}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0} = 0, \tag{24}$$

[4]) Se presupune că reazemele sînt distribuite în lungul liniilor coordonate.

iar în cazul cînd marginea $\alpha = 0$ se sprijină liber absolut rigid în direcţia normală la contur, e necesar ca

$$w|_{\alpha=0} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \overset{3}{\mu}_{\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \frac{G_{\alpha t}}{\overset{1}{G}_{\alpha}} \frac{T_1}{h} \right)\Bigg|_{\alpha=0} = 0. \tag{25}$$

Pentru a simplifica alegerea funcţiilor $f_{mn}(\alpha, \beta)$, în acest ultim caz vom considera $T_1 = 0$ pentru a nu avea condiţii neomogene pe contur.

În cazul cînd toate marginile panoului sînt încastrate, vom considera pentru $f_{rn}(\alpha, \beta)$:

$$f_{rn}(\alpha, \beta) =$$
$$= \left(\cos \frac{(n-1)\pi\beta}{b} - \cos \frac{(n-1)\pi\beta}{b} \right) \left(\cos \frac{(r-1)\pi\alpha}{a} - \cos \frac{(r+1)\pi\alpha}{a} \right). \tag{26}$$

În cazul cînd marginile $\alpha = 0$, $\alpha = a$ sînt simplu rezemate, iar marginile $\beta = 0$, $\beta = b$ încastrate :

$$f_{rn}(\alpha, \beta) = \left(\cos \frac{(n-1)\pi\beta}{b} - \cos \frac{(n-1)\pi\beta}{b} \right) \sin \frac{r\pi\alpha}{a}, \tag{27}$$

iar în cazul cînd marginile $\beta = 0$ şi $\beta = b$ sînt simplu rezemate, iar marginile $\alpha = 0$, $\alpha = a$ încastrate :

$$f_{rn}(\alpha, \beta) = \sin \frac{n\pi\beta}{b} \left(\cos \frac{(n-1)\pi\alpha}{a} - \cos \frac{(n-1)\pi\alpha}{a} \right). \tag{28}$$

În cazul cînd toate marginile sînt simplu rezemate,

$$f_{rn}(\alpha, \beta) = \sin \frac{r\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b}. \tag{29}$$

Pe de altă parte, consideraţii legate de faptul că în termenii aerodinamici ce determină în ultimă instanţă apariţia flutterului şi că cuplarea apare numai în modurile din direcţia α sugerează că cuplarea modurilor în direcţia β nu prezintă o importanţă esenţială pentru flutterul neliniar, fapt care ne permite să exprimăm pe $w(\alpha, \beta, t)$ în cazurile de sprijinire enunţate mai sus, respectiv sub forma [6]—[19] :

$$w(\alpha, \beta, t) = \sum_{r=1}^{8} w_{rn}(t) \left(\cos \frac{(r-1)\pi\alpha}{a} - \cos \frac{(r+1)\pi\alpha}{a} \right) \times$$
$$\times \left(\cos \frac{(n-1)\pi\beta}{b} - \cos \left(\frac{(n+1)\pi\beta}{b} \right) \right) \tag{30 a}$$

$$w(\alpha, \beta, t) = \sum_{r=1}^{\infty} w_{rn}(t) \sin \frac{r\pi\alpha}{a} \left(\cos \frac{(n-1)\pi\beta}{b} - \cos \frac{(n+1)\pi\beta}{b} \right) \tag{30 b}$$

$$w(\alpha, \beta, t) = \sum_{r=1}^{\infty} w_{rn}(t) \left(\cos \frac{(r-1)\pi\alpha}{a} - \cos \left(\frac{(r+1)\pi\alpha}{a} \right) \sin \frac{n\pi\beta}{b} \right. \tag{30 c}$$

$$w(\alpha, \beta, t) = \sum_{r=1}^{\infty} w_{rn}(t) \sin \frac{r\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b} \tag{30 d}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

4. CAZUL PANOULUI SIMPLU REZMAT PE ÎNTREGUL CONTUR

În cazul panoului simplu rezemat pe întregul contur vom considera pentru $w(\alpha, \beta, t)$ dezvoltarea dată de relația (30 d). Ținînd seama de (30 d) în ecuația (13), precum și de relațiile [17]

$$\sum_{q=1}^{r-1} w_{q,n}\, w_{r-q,n} = \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{r-q}{|r-q|} w_{q,n}\, w_{|r-q|,n} + w_{q,n}\, w_{r+q,n} \right),$$

$$\sum_{q=1}^{r-1} (r-2q)^2\, w_{q,n}\, w_{r-q,n} = \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \frac{r-q}{|r-q|} (r-2q)^2\, w_{q,n}\, w_{|r-q|,n} + \right.$$

$$\left. + (r+2q)^2\, w_{q,n}\, w_{r+q,n} \right\} \text{ cînd } w_{0,n} = 0 \tag{31}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_r\, b_q\, c_{r-q} = c_0 \sum_{q=1}^{\infty} a_q\, b_q + \sum_{r=1}^{\infty} c_r \sum_{q=1}^{\infty} a_{r+q}\, b_q + \sum_{r=1}^{\infty} c_r \sum_{q=1}^{\infty} a_q\, b_{r+q}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_r\, b_q\, c_{r+q} = \frac{1}{2} \sum_{r=2}^{\infty} c_r \sum_{q=1}^{r-1} (a_q\, b_{r-q} + a_{r-q}\, b_q) +$$

$$+ \sum_{q=1}^{r-1} (r-2q)^2\, w_{qn}\, w_{r-q,n},$$

și considerînd $T_0 = T_0(t)$, se deduce următoarea expresie pentru $c_1(\alpha, \beta, t)$:

$$c_1(\alpha, \beta, t) = \sum_{r=1}^{\infty} A_{rn} \sin \frac{r\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b} + B_n \cos \frac{2n\pi b}{b}$$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} C_{rn} \cos \frac{r\pi\alpha}{a} + \sum_{r=1}^{\infty} D_{rn} \cos \frac{r\pi\alpha}{a} \cos \frac{2n\pi\beta}{b},$$

unde

$$A_{rn} = \frac{a^2 k_2 (r^2 + \gamma n^2 \varphi^2)}{\pi^2 \left[r^4 \overset{1}{N}\beta - 2 r^2 n^2 \varphi^2 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \frac{\mathrm{I}}{\overset{2}{F}_\alpha (\mathrm{I} - \overset{2}{\mu}_\beta)} \right) + \varphi^4 n^4 \overset{\dot{1}}{N}_\alpha \right]} w_{rn},$$

$$B_n = \frac{\mathrm{I}}{32 \overset{1}{N}_\alpha n^2 \varphi^2} \sum_{q=1}^{\infty} q^2 w_{qn}^2, \tag{32}$$

$$C_{rn} = \frac{n^2 \varphi^2}{8 \overset{1}{N}_\beta r^2} \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{r - q}{|r - q|} w_{qn} \, w_{|r-q|,\, n} - w_{qn} \, w_{r+q,\, n} \right),$$

$$D_{rn} = \frac{\varphi^2 n^2}{8} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(r + 2q)^2 w_{qn} \, w_{r+c,\, n} - (r - 2q)^2 \dfrac{r - q}{|r - q|} w_{qn} \, w_{|r-q|,\, n}}{\overset{\dot{1}}{N}_\beta r^4 - 8 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \dfrac{\mathrm{I}}{\overset{2}{F}_\alpha (\mathrm{I} - \mu\, \overset{2}{\beta})} \right) r^2 n^2 \varphi^2 + 16 \overset{1}{N}_\alpha n^4 \varphi^4}.$$

În aceste relaţii,

$$\varphi = \frac{a}{b}, \quad \gamma = \frac{k_1}{k_2}. \tag{33}$$

Se poate verifica uşor că expresia (31) a lui $c_1(\alpha, \beta, t)$ satisface identic la condiţiile exprimate prin relaţiile (18). Pentru a satisface la condiţiile date de relaţiile (21), va trebui să se exprime $\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}$ şi $\dfrac{\partial v}{\partial \beta}$ în relaţiile (20) prin intermediul funcţiilor c şi w. De aceea vom porni de la relaţiile geometrice

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \overset{1}{N}_\alpha (T_\alpha - \overset{1}{\mu}_\alpha T_\beta) + \overset{1}{N}_\alpha (F_{\alpha t} - \overset{1}{\mu}_\alpha F_{\beta t}) T_0 + k_1 w - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2$$
$$\frac{\partial v}{\partial \beta} = \overset{1}{N}_\beta (T_\beta - \overset{1}{\mu}_\beta T_\alpha) + \overset{1}{N}_\beta (F_{\beta t} - \overset{1}{\mu}_\beta F_{\alpha t}) T_0 + k_2 w - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2, \tag{34}$$

în care vom ţine seama de relaţiile (30d), (31), precum şi de

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 = \frac{1}{8} \frac{\pi^2}{a^2} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} w_{mn} \, w_{qn} \, mq \left\{ \cos (m + q) \frac{\pi \alpha}{a} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \cos (m - q) \frac{\pi \alpha}{a} \right\} \right] \left(1 - \cos \frac{2n \pi \beta}{b} \right) =$$
$$= \frac{1}{8} \frac{\pi^2}{a^2} \left[\sum_{q=1}^{\infty} q^2 w_{qn}^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{m \pi \alpha}{a} \sum_{q=1}^{\infty} \left\{ \frac{m - q}{|m - q|} q \, |m - q| \, w_{qn} \, w_{|m-q|,\, n} + \right. \right.$$
$$\left. \left. + q (m + q) \, w_{qn} \, w_{m+q,\, n} \right\} \right] \left(1 - \cos \frac{2n \pi \beta}{b} \right),$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)^2 = \frac{1}{8}\frac{\pi^2 n^2 \varphi^2}{a^2}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} w_{mn} w_{qn}\left\{\cos(m-q)\frac{\pi\alpha}{a} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \cos(m+q)\frac{\pi\alpha}{a}\right\}\right]\left(1+\cos\frac{2n\pi\beta}{b}\right) = \frac{1}{8}\frac{\pi^2 n^2 \varphi^2}{a^2}\left[\sum_{q=1}^{\infty} w_{qn}^2 + \right.$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{m\pi\alpha}{a}\sum_{q=1}^{\infty}\left\{-\frac{m-q}{|m-q|} w_{qn} w_{|m-q|,\,n} + \right. \tag{35}$$

$$\left.\left. + w_{qn} w_{m+q,\,n}\right\}\right]\left(1+\cos\frac{2n\pi\beta}{b}\right),$$

de unde, în baza relaţiilor (20), se deduce

$$\Delta_\alpha = -\overset{1}{N}_\alpha\left[T_\alpha^0 - \overset{1}{\mu}_\alpha T_\beta^0 + (F_{\alpha t} - \overset{1}{\mu}_\alpha F_{\beta t})\, T_0 - \right.$$

$$- \frac{4n\,\delta_n}{b^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{m,n}}{m} + \frac{4\overset{1}{\mu}_\alpha \delta_n}{na^2}\sum_{m=1}^{\infty} m A_{m,n}\Big] -$$

$$- \frac{4k_1\,\delta_n}{n\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w_{m,n}}{m} + \frac{1}{8a^2}\pi^2\sum_{q=1}^{\infty} q^2 w_{q,n}^2,$$

$$\Delta_\beta = -\overset{1}{N}_\beta\left[T_\beta^0 - \overset{1}{\mu}_\beta T_\alpha^0 - \frac{4\,\delta_n}{a^2 n}\sum_{m=1}^{\infty} m A_{mn} + \right. \tag{36}^{5}$$

$$+ \frac{4n\overset{1}{\mu}_\beta \delta_n}{b^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{A_{mn}}{m} + (F_{\beta t} - \overset{1}{\mu}_\beta F_{\alpha t})\, T_0\Big] -$$

$$- \frac{4k_2\,\delta_n}{\pi^2 n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w_{mn}}{m} + \frac{n^2\pi^2\varphi^2}{8a^2}\sum_{q=1}^{\infty} w_{qn}^2.$$

Folosind condiţiile la limită tangenţiale (21), se obţin următoarele expresii pentru parametrii T_α^0 şi T_β^0:

$$T_\alpha^0 = \frac{\pi^2\lambda_\alpha}{8a^2\overset{1}{N}_\alpha(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta\lambda_\alpha\lambda_\beta)} \times\left[\sum_{q=1}^{\infty} q^2 w_{qn}^2 + \lambda_\beta\overset{1}{\mu}_\beta n^2\varphi^2\sum_{q=1}^{\infty} w_{qn}^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{8a^2\overset{1}{N}_\alpha}{\pi^2}(F_{\alpha t} + \overset{1}{\mu}_\alpha\lambda_\beta F_{\beta t} - \overset{1}{\mu}_\alpha(F_{\beta t} + \overset{1}{\mu}_\beta\lambda_\beta F_{\alpha t}))\, T_0\right] -$$

$$- \frac{k_2\lambda_\alpha\delta_n}{\pi^2(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta\lambda_\alpha\lambda_\beta)}\sum_{r=1,3,5\ldots}^{\infty}(A_\alpha^{(r,n)} + \overset{1}{\mu}_\alpha\lambda_\beta A_\beta^{(r,n)})\, w_{rn},$$

[5]) Nu vom calcula expresia lui $\Delta_{\alpha\beta}$, deoarece în cele ce urmează vom considera $c_{\alpha\beta} = 0$.

$$T_\beta^0 = \frac{\pi^2 \lambda_\beta}{8\, a^2 \overset{\text{İ}}{N}_\beta\, (\text{İ} - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta)} \times \left[n^2 \varphi^2 \sum_{q=1}^{\infty} w_{qn}^2 + \lambda_\alpha \overset{1}{\mu}_\alpha \sum_{q=1}^{\infty} q^2 w_{qn}^2 - \right. \tag{37}$$

$$\left. - \frac{8\, a^2 \overset{1}{N}_\beta}{\pi^2} (F_{\beta t} + \overset{1}{\mu}_\beta \lambda_\alpha F_{\alpha t} - \overset{1}{\mu}_\beta (F_{\alpha t} + \overset{1}{\mu}_\alpha \lambda_\alpha F_{\beta t}))\, T_0 \right] -$$

$$- \frac{k_2 \lambda_\beta \delta_n}{\pi^2 (\text{İ} - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta)} \sum_{r=1,3,5,\ldots}^{\infty} (A_\beta^{(r,n)} + \overset{1}{\mu}_\beta \lambda_\alpha A_\alpha^{(r,n)})\, w_{rn},$$

unde

$$A_\alpha^{(r,n)} = 4 \left\{ \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \frac{r}{n} - \frac{n}{r} \varphi^2 \right) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{r^2}{r^4 \overset{1}{N}_\beta - 2\, r^2 n^2 \varphi^2 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \dfrac{\text{İ}}{\overset{2}{F}_\alpha (\text{İ} - \overset{2}{\mu}_\beta)} \right) + \varphi^4 n^4 \overset{1}{N}_\alpha} + \frac{\gamma}{rn \overset{1}{N}_\alpha} \right\},$$

$$A_\beta^{(r,n)} = \left\{ \left(\overset{1}{\mu}_\beta \varphi^2 \frac{n}{r} - \frac{r}{n} \right) \times \right. \tag{38}$$

$$\left. \times \frac{r^2}{r^4 \overset{1}{N}_\beta - 2\, r^2 n^2 \varphi^2 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \dfrac{\text{İ}}{\overset{2}{F}_\alpha (\text{İ} - \overset{2}{\mu}_\beta)} \right) + \varphi^4 n^4 \overset{1}{N}_\alpha} + \frac{\text{İ}}{nr \overset{1}{N}_\beta} \right\},$$

$$\delta_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \text{İ} & n \text{ impar} \end{cases}$$

iar

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{c_\alpha \overset{1}{N}_\alpha}}, \quad \lambda_\beta = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{c_\beta \overset{1}{N}_\beta}}.$$

Din aceste ultime relații se vede ușor că, în cazul în care suporții permit libera deplasare în direcție tangențială (margini absolut libere) ($c_\alpha = c_\beta = 0$), $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = 0$ și, în cazul suporților absolut rigizi (margini fixe)[6] ($c_\alpha \to \infty$, $c_\beta \to \infty$), $\lambda_\alpha = \lambda_\beta = 1$. Deoarece s-a considerat $c_{\alpha\beta} = 0$, $T_{\alpha\beta}^0$ nu s-a mai luat în considerație în relația (17). Pe baza relațiilor (14), (17), (37) se pot obține ușor expresiile eforturilor tangențiale date de

$$T_\alpha = T_\alpha^0 - \frac{\pi^2}{a^2} \left[n^2 \varphi^2 \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi\alpha}{a} \sin \frac{n\pi\beta}{b} + 4\, n^2 \varphi^2 B_n \cos \frac{2n\,\pi\beta}{b} + \right.$$

$$\left. + 4\, n^2 \varphi^2 \sum_{m=1}^{\infty} D_{mn} \cos \frac{m\pi\alpha}{a} \cos \frac{2\, n\pi\beta}{b} \right],$$

[6]) Aceste observații se referă numai la rigiditatea suporților în direcția tangențială; rigiditatea în direcție normală se consideră tot timpul suficient de mare astfel încît panoul să poată fi considerat că se sprijină pe suporții rigizi.

$$T_\beta = T_\beta^0 - \frac{\pi^2}{a^2}\left[\sum_{m=1}^{\infty} m^2 A_{mn} \sin\frac{m\pi\alpha}{a} \sin\frac{n\pi\beta}{b} + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 C_{mn} \cos\frac{m\pi\alpha}{a} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 D_{mn} \cos\frac{m\pi\alpha}{a} \cos\frac{2n\pi\beta}{b}\right], \tag{39}$$

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{n\varphi\pi^2}{a^2}\left[\sum_{m=1}^{\infty} m A_{mn} \cos\frac{m\pi\alpha}{a} \cos\frac{n\pi\beta}{b} + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{m=1}^{\infty} m D_{mn} \sin\frac{m\pi\alpha}{a} \sin\frac{2n\pi\beta}{b}\right].$$

În cele ce urmează vom limita analiza la cazul panourilor cilindrice circulare. În acest caz, $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{1}{R}$, R fiind raza de curbură constantă a suprafeței de referință. În continuare vom folosi metoda Galerkin. În acest scop, avînd în vedere relațiile

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)^2 = -\frac{\pi^2 n^2}{4a^2b^2}\left[\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{m\pi\alpha}{a}\sum_{q=1}^{\infty}\left(m^2\frac{m-q}{|m-q|}w_{qn}\,w_{|m-q|,\,n} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - m^2 w_{qn}\,w_{m+q,\,n}\right) + 2\sum_{q=1}^{\infty} q^2 w_{q,n}^2 \cos\frac{2n\pi\beta}{b} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{m\pi\alpha}{a}\cos\frac{2n\pi\beta}{b}\sum_{q=1}^{\infty}\left\{-(m-2q)^2\frac{m-q}{|m-q|}w_{qn}\,w_{|m-q|,\,n} + \right.\right. \tag{40}$$

$$\left.\left. + (m+2q)^2\,w_{qn}\,w_{m+q,\,n}\right\}\right],$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)^3 = \frac{\pi^3}{8a^3}\left[3\sin\frac{n\pi\beta}{b} - \sin\frac{3\pi\beta}{b}\right]\left\{\sum_{t=1}^{\infty}\cos\frac{t\pi\alpha}{a}\sum_{q=1}^{\infty} q^2 t\, w_{qn}^2\, w_{tn} + \right.$$

$$+ \frac{3}{2}\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(m+q)\,qt\,w_{qn}\,w_{m+q,\,n}\,w_{tn}\left[\cos\frac{(m+t)\pi\alpha}{a} + \cos\frac{(m-t)\pi\alpha}{a}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(m-q)\,qt\,w_{qn}\,w_{|m-q|,\,n}\,w_{tn}\left[\cos\frac{(m+t)\pi\alpha}{a} + \right.$$

$$\left.\left. + \cos\frac{(m-t)\pi\alpha}{a}\right]\right\},$$

și ținînd seama de (29), (17), (31), (35) în ecuația (13), pe care o vom înmulți cu $\sin\frac{\bar{r}\pi\alpha}{a}\sin\frac{n\pi\beta}{b}$ ($\bar{r} = 1, 2, 3 \ldots$) și vom efectua integrarea pe

toată aria panoului, ţinînd seama şi de relaţiile prezentate în anexa I, se obţine în cazul scurgerii pe o singură faţă a panoului sistemul de ecuaţii

$$\frac{\mathrm{d}^2 \zeta_{\bar{r}n}}{\mathrm{d}t^2} + g \frac{\mathrm{d}\zeta_{\bar{r}n}}{\mathrm{d}t} + F_{\bar{r}n}(\zeta_{ts}, \nu, \theta) = 0, \tag{41}$$

unde $\bar{r}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Funcţiile $F_{\bar{r}n}(\zeta_{ts}, \nu, \theta)$ vor fi scrise sub forma

$$F_{\bar{r}n}(\zeta_{ts}, \nu, \theta) = F^{(\mathrm{I})}_{\bar{r}n} + F^{(\mathrm{II})}_{\bar{r}n} + F^{(\mathrm{III})}_{\bar{r}n},$$

unde $F^{(\mathrm{I})}_{\bar{r}n}$ sînt funcţii liniare care includ şi temperatura, $F^{(\mathrm{II})}_{\bar{r}n}$ funcţii care includ neliniarităţile aerodinamice, iar $F^{(\mathrm{III})}_{\bar{r}n}$ funcţii care includ neliniarităţile geometrice.

Datorită complexităţii lor, aceste funcţii, care depind de parametrii panoului, sînt date în anexa II.

Ecuaţiile corespund scurgerii pe ambele feţe ale panoului cu viteze $V^{+}_{\infty} = V^{-}_{\infty} = V$ se obţin din ecuaţiile (41) prin îndepărtarea termenilor pătratici care exprimă neliniaritatea aerodinamică (vezi anexa II).

În sistemul de ecuaţii (41) au fost introduse variabilele adimensionale

$$\zeta_{rn} = \frac{w_{rn}}{h}, \quad \tau = \Omega t, \tag{42}$$

precum şi următorii parametri adimensionali.

În cazul scurgerii pe o singură faţă a panoului,

$$g = \frac{1}{\Omega}\left(\varepsilon + \frac{\varkappa p_\infty}{m c_\infty}\right), \quad P = \frac{4\varkappa p_\infty}{m h \Omega^2}; \tag{43}$$

şi în cazul scurgerii pe ambele feţe ale panoului cu viteza $V^{+}_{\infty} = V^{-}_{\infty} = V$,

$$g = \frac{1}{\Omega}\left(\varepsilon + \frac{2\varkappa p_\infty}{m c_\infty}\right), \quad P = \frac{8\varkappa p_\infty}{m h \Omega^2}. \tag{44}$$

Celelalte expresii ale parametrilor sînt identice în cazul scurgerii pe una sau pe ambele feţe ale panoului şi sînt date de :

$$\omega^2_{\bar{r}n} = \frac{\Omega^2_{\bar{r}n}}{\Omega^2_1} = \bar{r}^4 + 2\left(\overset{3}{\mu}\beta + \frac{\overset{2}{G}_\alpha}{\overset{1}{G}_\alpha}(1 - \overset{4}{\mu}_\beta)\right)\bar{r}^2 n^2 \varphi^2 + \frac{\overset{1}{G}_\beta}{\overset{1}{G}_\alpha} n^4 \varphi^4,$$

$$\Omega^2 = \frac{\pi^4 \overset{1}{G}_\alpha}{m a^4}, \qquad \nu = M\frac{h}{a}, \qquad 0 = \frac{a^2 F_{\alpha t}}{\pi^2 \overset{1}{G}_\alpha} T_0,$$

$$S_1 = \frac{\pi^4 h^2}{16\, m\, \Omega^2 a^4 \overset{1}{N}_\alpha}, \qquad S_2 = \frac{\pi^4 h^2}{16\, m\, \Omega^2 a^4 \overset{1}{N}_\beta}, \tag{45}$$

$$T_{rn} = \frac{\pi^4 h^2}{16 m a^4 \Omega^2 \left[r^4 \overset{1}{N}_\beta - 2 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \frac{\mathrm{I}}{\overset{2}{F}_\alpha (\mathrm{I} - \overset{2}{\mu}\beta)} \right) r^2 n^2 \varphi^2 + \varphi^4 n^4 \overset{1}{N}_\alpha \right]},$$

$$L_{rn} = \frac{\pi^4 h^2}{16 m a^4 \Omega^2 \left[r^4 \overset{1}{N}_\beta - 8 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \frac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}\beta)} \right) r^2 n^2 \varphi^2 + 16 \varphi^4 n^4 \overset{1}{N}_\alpha \right]},$$

$$s_{rn} = \frac{1}{1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta} \left\{ r^2 \lambda_\alpha \left[1 + \overset{1}{\mu}_\alpha \lambda_\beta \frac{F_{\beta t}}{F_{\alpha t}} - \overset{1}{\mu}_\alpha \left(\frac{F_{\beta t}}{F_{\alpha t}} + \overset{1}{\mu}_\beta \lambda_\beta \right) \right] \right.$$
$$\left. + n^2 \varphi^2 \lambda\beta \left[\frac{F_{\beta t}}{F_{\alpha t}} + \overset{1}{\mu}\beta \lambda_\alpha - \overset{1}{\mu}_\beta \left(1 + \overset{1}{\mu}_\alpha \lambda_\alpha \frac{F_{\beta t}}{F_{\alpha t}} \right) \right] \right\}. \tag{46}$$

Se observă că, în sistemul infinit de ecuații, atît neliniaritatea de natură geometrică, cît și cea aerodinamică se manifestă prin termeni pătratici și cubici.

În cadrul neliniarității geometrice, influența curburii se resimte numai prin termenii pătratici.

Complexitatea sistemului de ecuații (41) impune în scopul analizei propuse de noi o simplificare. În acest sens, din rezultatele obținute pe baza teoriei liniare [28] — [30] se deduce [6] — [17] că condițiile cele mai critice pentru flutter corespund lui $n = 1$, pe de o parte, și, pe de altă parte, considerînd drept mari numai două coordonate succesive: ζ_p și ζ_{p+1} ($p = 1, 2, 3 \ldots$). În ceea ce privește valoarea lui p, în lucrările [6] — [16] s-a considerat $p = 1$, adică se consideră mari numai primele două coordonate succesive. În lipsa însă a unor informații mai exacte este necesar a considera toate perechile succesive posibile ale coordonatelor.

Deoarece am convenit ca $n = 1$, al doilea subscript ce afectează anumite mărimi (ω_{rn}^2, Ω_{rn}^2, T_{rn}, s_{rn}, L_{rn}, ζ_{rn}) va fi suprimat, astfel încît acestea se vor scrie în cele ce urmează sub forma ω_r^2, Ω_r^2, T_r, L_r, s_r, ζ_r.

Cu aceasta expresiile eforturilor tangențiale deduse în cazul considerării drept mari a coordonatelor succesive ζ_p, ζ_{p+1}, vor deveni:

$$T_\alpha = T_\alpha^0 - \frac{\pi^2}{8a^2} \left\{ \frac{h^2}{\overset{1}{N}_\alpha} p^2 \zeta_p^2 \cos \frac{2\pi\beta}{b} + \frac{h^2}{\overset{1}{N}_\alpha} (p+1)^2 \zeta_{p+1}^2 \cos \frac{2\pi\beta}{b} + \right.$$
$$+ 8 h^2 \zeta_p \zeta_{p+1} \varphi^4 \left[\frac{(1+2p)^2}{\overset{1}{N}_\beta - 8 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \frac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (\alpha - \overset{2}{\mu}\beta)} \right) \varphi^2 + 16 \overset{1}{N}_\alpha \varphi^4} \cos \frac{\pi\alpha}{a} \cos \frac{2\pi\beta}{b} - \right.$$
$$\left. \left. - \frac{1}{\overset{1}{N}_\beta (2p+1)^4 - 8 \left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \frac{1}{\overset{2}{F}_\alpha (1 - \overset{2}{\mu}\beta)} \right) (2p+1)^2 \varphi^2 + 16 \overset{1}{N}_\alpha \varphi^4} \cos \frac{(2p+1)\pi\alpha}{a} \cos \frac{2\pi\beta}{b} \right] \right\}$$

$$T_\beta = T_\beta^0 - \frac{\pi^2}{8a^2}\left\{\frac{\varphi^2 h^2}{\overset{1}{N}_\beta}\zeta_p^2 \cos\frac{2p\pi\alpha}{a} + \frac{\varphi^2 h^2}{\overset{1}{N}_\beta}\zeta_{p+1}^2 \cos\frac{2(p+1)\pi\alpha}{a} + \right. \tag{47}$$

$$+ 2h^2 \zeta_p \zeta_{p+1} \varphi^2 \left[\frac{1}{\overset{1}{N}_\beta}\cos\frac{(2p+1)\pi\alpha}{a} - \frac{1}{\overset{1}{N}_\beta}\cos\frac{\pi\alpha}{a} + \right.$$

$$+ \frac{(1+2p)^2}{\overset{1}{N}_\beta - 8\left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \frac{1}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}\beta)}\right) + 16\overset{1}{N}_\alpha \varphi^4}\cos\frac{\pi\alpha}{a}\cos\frac{2\pi\beta}{b} -$$

$$\left.\left. - \frac{(1+2p)^2\cos\frac{(2p+1)\pi\alpha}{a}\cos\frac{2\pi\beta}{b}}{\overset{1}{N}_\beta(1+2p)^4 - 8\left(\overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{N}_\alpha - \frac{1}{\overset{2}{F}_\alpha(1-\overset{2}{\mu}\beta)}\right)(1+2p)^2\varphi^2 + 16\overset{1}{N}_\alpha\varphi^4}\right]\right\},$$

care împreună cu expresiile

$$\sigma_\alpha^j = (B_{11}^j - B_{12}^j \overset{1}{\mu}_\alpha)\overset{1}{N}_\alpha T_\alpha + (B_{12}^j - \overset{1}{\mu}_\beta B_{11}^j)\overset{1}{N}_\beta T_\beta +$$

$$+ \frac{zh\pi^2}{a^2}\left[(B_{11}^j p^2 + B_{12}^j \varphi^2)\zeta_p \sin\frac{p\pi\alpha}{a} + \right.$$

$$\left. + (B_{11}^j (p+1)^2 + B_{12}^j \varphi^2)\zeta_{p+1}\sin\frac{(p+1)\pi\alpha}{a}\right]\sin\frac{\pi\beta}{b}, \tag{48}$$

$$\sigma_\beta^j = (B_{12}^j - \overset{1}{\mu}_\alpha B_{22}^j)\overset{1}{N}_\alpha T_\alpha + (B_{22}^j - \overset{1}{\mu}_\beta B_{12}^j)\overset{1}{N}_\beta T_\beta +$$

$$+ \frac{zh\pi^2}{a^2}\left[(B_{12}^j p^2 + B_{22}^j \varphi^2)\zeta_p \sin\frac{p\pi\alpha}{a} + \right.$$

$$\left. + (B_{12}^j (p+1)^2 + B_{22}^j \varphi^2)\zeta_{p+1}\sin\frac{(p+1)\pi\alpha}{a}\right]\sin\frac{\pi\beta}{b},$$

pot folosi la determinarea tensiunilor maxime din mediul tridimensional al structurii panoului după depăşirea vitezei critice de flutter.

5. STABILITATEA ÎN VECINĂTATEA FRONTIEREI CRITICE DE FLUTTER

Aşa cum s-a menţionat în paragraful 1, mişcarea neperturbată a sistemului cînd acesta se află în vecinătatea frontierei domeniului de stabilitate este din punct de vedere practic stabilă sau instabilă, după cum această mişcare, este stabilă sau instabilă în sens Liapunov pe însăşi frontiera. Astfel, cînd pe frontiera domeniului de stabilitate mişcarea neperturbată este instabilă, dacă sistemul se găseşte în apropierea frontierei, indiferent dacă se află în domeniul de instabilitate sau în domeniul de stabilitate, există întotdeauna perturbaţii foarte mici (oricît de mici

dacă sistemul este suficient de apropiat de frontieră), care vor crește cu timpul, astfel încît mișcarea perturbată corespunzătoare va diferi de cea neperturbată.

În cazul cînd sistemul este asimptotic stabil pe frontiera domeniului de stabilitate, atunci în vecinătatea acestei frontiere, chiar dacă sistemul se găsește în domeniul de instabilitate, putem totuși considera că mișcarea neperturbată este practic stabilă, iar dacă sistemul se găsește în domeniul de stabilitate mișcarea neperturbată este asimptotic stabilă.

Caracterul frontierei critice „periculoase" sau „nepericuloase" a fost studiat în [2], determinarea caracterului acestei frontiere reducîndu-se la determinarea semnului primei mărimi liapunoviene $L(\nu_*)$, aceasta pentru frontiera care corespunde rădăcinilor pur imaginare ale ecuației caracteristice (așa cum se va vedea, acesta este cazul de față). Astfel, frontiera sau porțiuni ale frontierei critice sînt „periculoase" dacă avem corespunzător $L(\nu_*) > 0$ și „nepericuloase" dacă este îndeplinită inegalitatea inversă.

În monografia [2], expresia mărimii liapunoviene este dată sub forma închisă[7]).

În scopul stabilirii caracterului frontierei critice vom porni de la sistemul de ecuații (41), în care, pentru a nu complica calculele, vom face o restrîngere a generalității lor. În acest scop ne vom limita la cazul structurilor plane $\left(\frac{1}{R} = 0\right)$ în condițiile scurgerii pe ambele fețe. Aceasta revine la a ignora în expresiile cuprinse în anexa II neliniaritățile pătratice de natură geometrică și aerodinamică [8]). De asemenea vom considera $\theta = 0$. Cu aceasta sistemul de ecuații (41) pentru $\bar{r} = p,\ p+1$ și în condițiile expuse mai sus poate fi scris sub forma

$$\frac{d\zeta_p}{d\tau} = \zeta_{p+2}, \qquad \frac{d\zeta_{p+1}}{d\tau} = \zeta_{p+3},$$

$$\frac{d\zeta_{p+2}}{d\tau} = -g\zeta_{p+2} - \omega_p^2 \zeta_p - a^{(3)}_{p,p,p}\zeta_p^3 - a^{(3)}_{p,p+1,p+1}\zeta_p\zeta_{p+1}^2 +$$

$$+ P\left(\nu \frac{p(p+1)}{1+2p}\zeta_{p+1} - \nu^3 b^{(3)}_{p+1,p+1,p+1}\zeta_{p+1}^3 - \nu^3 b^{(3)}_{p,p,p+1}\zeta_p^2\zeta_{p+1}\right), \qquad (49)$$

$$\frac{d\zeta_{p+3}}{d\tau} = -g\zeta_{p+3} - \omega_{p+1}^2\zeta_{p+1} - a^{(4)}_{p+1,p+1,p+1}\zeta_{p+1}^3 - a^{(4)}_{p,p,p+1}\zeta_p^2\zeta_{p+1}$$

$$- P\left(\nu \frac{p(1+p)}{1+2p}\zeta_p + \nu^2 b^{(4)}_{p,p,p}\zeta_p^3 + \nu^3 b^{(4)}_{p,p+1,p+1}\zeta_p\zeta_{p+1}^2\right),$$

---

[7]) Noțiunea de „periculos" și „nepericulos" legată de frontiera critică de flutter a fost introdusă pentru prima dată de V. V. Bolotin în [31] (vezi de asemenea [9], p. 283).

[8]) Se poate arăta că neliniaritățile patratice de natură aerodinamică sînt neglijabile în raport cu cele cubice, astfel încît ecuațiile (49) pot fi considerate ca ecuațiile aproximative ale flutterului neliniar pentru cazul scurgerii pe o singură față cu $V_\infty^+ = V_\infty$ ($V_{\infty=0}^-$).

unde coeficienții sînt dați de :

$$a^{(3)}_{p,p,p} = S_1 p^2\left(p^2 + 2\lambda_\alpha \frac{p^2 + \lambda_\beta \overset{1}{\underset{1}{\mu_\beta}} \varphi^2}{1 - \mu_\alpha \mu_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta}\right) +$$

$$+ S_2\varphi^2\left(\varphi^2 + 2\lambda_\beta \frac{\varphi^2 + p^2\lambda_\alpha \overset{1}{\underset{1}{\mu_\alpha}}}{1 - \mu_\alpha \mu_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta}\right),$$

$$a^{(3)}_{p,p+1,p+1} = 2S_2\varphi^2\left(2\varphi^2 + \lambda_\beta \frac{\varphi^2 + (p+1)^2 \lambda_\alpha \overset{1}{\underset{1}{\mu_\alpha}}}{1 - \mu_\alpha \mu_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta}\right) +$$

$$+ S_1 p^2\left((p+1)^2 + 2\lambda_\alpha \frac{(p+1)^2 + \lambda_\beta \overset{1}{\underset{1}{\mu_\beta}} \varphi^2}{1 - \mu_\alpha \mu_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta}\right) +$$

$$+ \varphi^4 (L_{2p+1} + L_1(1+2p)^4),$$

$$a^{(4)}_{p+1,p+1,p+1} = S_1(1+p)^2\left((1+p)^2 + 2\lambda_\alpha \frac{(1+p)^2 + \lambda_\beta \overset{1}{\underset{1}{\mu_\beta}} \varphi^2}{1 - \mu_\alpha \mu_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta}\right) +$$

$$+ S_2\varphi^2\left(\varphi^2 + 2\lambda_\beta \frac{\varphi^2 + (p+1)^2 \lambda_\alpha \overset{1}{\underset{1}{\mu_\alpha}}}{1 - \mu_\alpha \mu_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta}\right), \tag{50}$$

$$a^{(4)}_{p,p,p+1} = S_1(1+p)^2\left(p^2 + 2\lambda_\alpha \frac{p^2 + \lambda_\beta \overset{1}{\underset{1}{\mu_\beta}} \varphi^2}{1 - \mu_\alpha \mu_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta}\right) +$$

$$+ 2S_2\varphi^2\left(2\varphi^2 + \lambda_\beta \frac{\varphi^2 + p^2 \lambda_\alpha \overset{1}{\underset{1}{\mu_\alpha}}}{1 - \mu_\alpha \mu_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta}\right) +$$

$$+ \varphi^4 (L_{2p+1} + (1+2p)^4 L_1),$$

$$b^{(3)}_{p+1,p+1,p+1} = -\frac{\pi^2(\varkappa+1)\, p(p+1)^3\, (6p^2+14p+7)}{16\,(2p+1)\,(2p+3)\,(4p+3)},$$

$$b^{(3)}_{p,p+1,p+1} = -\frac{3\pi^2(\varkappa+1)\, p^3(1+p)\,(1+2p-2p^2)}{16\,(1+4p)\,(1-4p^2)},$$

$$b^{(4)}_{p,p,p} = \frac{\pi^2}{16}(\varkappa+1)\frac{p^2(1+p)\,(6p^2-2p-1)}{(4p^2-1)\,(4p+1)},$$

$$b^{(4)}_{p,p+1,p+1} = \frac{\pi^2}{16}(\varkappa+1)\frac{3p(1+p)^3\,(2p^2+6p+3)}{(2p+1)\,(4p+3)\,(2p+3)}.$$

Corespunzînd ecuațiilor primei aproximații, ecuația caracteristică este dată de

$$\rho^4 + a_1\rho^3 + a_2\rho^2 + a_3\rho + a_4 = 0, \tag{51}$$

unde

$$a_1 = 2g,\ a_2 = \omega_p^2 + \omega_{p+1}^2 + g^2,\ a_3 = g(\omega_p^2 + \omega_{p+1}^2),$$
$$a_4 = \omega_p^2\omega_{p+1}^2 + \frac{p^2(1+p^2)\,\nu^2P^2}{(1+2p)^2}. \tag{52}$$

Pentru valorile lui ν suficient de mici, toate rădăcinile ecuației caracteristice se găsesc în semiplanul stîng al variabilei complexe, iar soluția banală a sistemului este asimptotic stabilă.

Valoarea parametrului $\nu = \nu_*$ pentru care două rădăcini ale ecuației caracteristice sînt pur imaginare, iar celelalte două complex conjugate și rămîn de asemenea în semiplanul stîng al variabilei complexe este critică și corespunde vitezei critice de flutter. Pornind de la condițiile Routh-Hurwitz

$$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ a_4 > 0,\ a_1a_2a_3 - a_4a_1^2 - a_3^2 > 0,$$

se deduce valoarea critică a lui ν:

$$\nu_*^2 = \frac{(1+2p)^2}{4P^2(1+p)^2}\left[(\omega_{p+1}^2 - \omega_p^2)^2 + 2g^2(\omega_p^2 + \omega_{p+1}^2)\right], \tag{53}$$

iar expresiile rădăcinilor ecuației caracteristice pe frontiera critică de flutter sînt date de

$$\rho_{1,2} = \pm if, \quad \rho_{3,4} = -g \pm if, \tag{54}$$

unde

$$f^2 = \frac{1}{2}(\omega_p^2 + \omega_{p+1}^2), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Sîntem deci în cazul cînd caracterul „periculos" sau „nepericulos" al frontierei critice poate fi dedus prin determinarea semnului primei mărimi liapunoviene $L(\nu_*)$. Expresia lui $L(\nu_*)$ este dată de [2]:

$$L(\nu_*) = \frac{3\pi}{4f}\left(A^{(1)}_{p,p,p} + A^{(1)}_{p,p+1,p+1} + A^{(2)}_{p+1,p+1,p+1} + A^{(2)}_{p,p,p+2}\right), \tag{55}$$

unde coeficienții $A^{(j)}$ corespund coeficienților sistemului (44), redus la forma canonică. Exprimînd acești coeficienți prin coeficienții sistemului inițial [2] și considerînd

$$g^2 \ll \omega_{p+1}^2 - \omega_p^d, \tag{56}$$

se obține următoarea expresie pentru prima mărime liapunoviană

$$L(\nu_*) = \frac{3\pi g}{256\,f\Delta}(\omega_{p+1}^2 - \omega_p^2)^5(\omega_{p+1}^2 + \omega_p^2)^2$$
$$\times\left[a^{(4)}_{p+1,p+1,p+1} + a^{(4)}_{p,p,p+1} - a^{(3)}_{p,p,p} - a^{(3)}_{p,p+1,p+1}\right. \tag{57}$$
$$\left. - \nu_*^3 P(b^{(4)}_{p,p,p} + b^{(4)}_{p,p+1,p+1} - b^{(3)}_{p+1,p+1,p+1} - b^{(3)}_{p,p,p+1})\right],$$

unde

$$\Delta = -\frac{g^2}{8}(\omega_{p+1}^4 - \omega_p^4)^2\omega_{p+1}^2 < 0. \tag{58}$$

Conform celor arătate anterior, frontiera critică de flutter este „nepericuloasă" dacă este satisfăcută inegalitatea

$$a^{(4)}_{p+1,\,p+1,\,p+1} + a^{(4)}_{p,\,p,\,p+1} - a^{(3)}_{p,\,p,\,p} - a^{(3)}_{p,\,p+1,\,p+1}$$
$$- \nu_*^3 P\,(b^{(4)}_{p,\,p,\,p} + b^{(4)}_{p\,p+1,\,p+1} - b^{(3)}_{p+1,\,p+1,\,p+1} - b^{(3)}_{p,\,p,\,p+1}) > 0 \tag{59}$$

și „periculoasă" dacă

$$a^{(4)}_{p+1,\,p+1,\,p+1} + a^{(4)}_{p,\,p,\,p+1} - a^{(3)}_{p,\,p,\,p} - a^{(3)}_{p,\,p+1,\,p+1}$$
$$- \nu_*^3 P(b^{(4)}_{p,\,p,\,p} + b^{(4)}_{p,\,p+1,\,p+1} - b^{(3)}_{p+1,\,p+1,\,p+1} - b^{(3)}_{p,\,p,\,p+1}) < 0. \tag{60}$$

Ținînd seama de expresiile (45), se obține explicit condiția de a avea frontiera „nepericuloasă";

$$S_1(2p+1)\left[p^2 + (p+1)^2 + 2\lambda_\alpha \frac{p^2 + (p+1)^2 + 2\lambda_\beta \overset{1}{\mu}_\beta \varphi^2}{1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta}\right] -$$
$$- \frac{1}{4}\nu_*^3 P\pi^2(\varkappa+1)\,p(p+1)\left(\frac{p^2(3p^2-2p-1)}{(4p+1)(4p^2-1)} + \right.$$
$$\left. + \frac{(1+p)^2(3p^2+8p+4)}{(2p+1)(4p+3)(2p+3)}\right) > 0, \tag{61}$$

inegalitatea în sens invers avînd loc în cazul cînd frontiera este „periculoasă". Relația (61) permite să se exprime condițiile de „periculozitate" sau de „nepericulozitate" ale frontierei critice respectiv sub o formă mai concisă, și anume

$$\nu_* < \nu_r, \quad \nu_* > \nu_r, \tag{62}$$

unde

$$\nu_r^3 = \frac{4(1+2p)S_1\left[p^2 + (1+p)^2 + 2\lambda_\alpha \dfrac{p^2 + (1+p)^2 + 2\lambda_\beta \overset{1}{\mu}_\beta \varphi^2}{1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta}\right]}{P\pi^2(1+\varkappa)\,p(1+p)\left[\dfrac{p^2(3p^2-2p-1)}{(4p+1)(4p^2-1)} + \dfrac{(1+p)^2\,3(3p^2+8p+4)}{(1+2p)(4p+3)(2p+3)}\right]}. \tag{63}$$

6, EXEMPLU NUMERIC

În scopul determinării pe un exemplu concret a porțiunilor „periculoase" și „nepericuloase" ale frontierei critice de flutter și pentru a putea estima influența diverșilor parametri, se consideră cazul unui panou plan construit simetric din trei straturi. Fluidul se scurge pe ambele fețe ale panoului cu viteza $V_\infty^+ = V_\infty^- = V$. Vom considera panoul pătrat $\left(\varphi = \dfrac{a}{b} = 1\right)$, avînd grosimea totală h și construit în patru variante.

Varianta I. În această variantă, straturile exterioare se consideră că au grosimea $h_1 = h_3 = \delta$, iar stratul median grosimea $h_2 = 4\delta$ (grosimea totală $6\delta = h$). Straturile exterioare sînt confecționate dintr-un material avînd ortotropia de tipul 1, iar stratul median dintr-un material cu ortotropia de tipul 2 (vezi tabela I).

Varianta II. Straturile au respectiv aceeași grosime ca în varianta precedentă. Straturile exterioare sînt confecționate dintr-un material cu ortotropia de tipul 2, iar stratul median dintr-un material cu ortotropia de tipul 1.

Varianta III. În această variantă, $h_1 = h_2 = h_3 = 2\delta$. Straturile sînt confecționate respectiv dintr-un material corespunzînd variantei I.

Varianta IV. Straturile au respectiv aceeași grosime ca în cazul variantei III și sînt confecționate din același material ca în cazul variantei II.

Tabela 1

Tipul	E_α (kg/cm²)	E_β (kg/cm²)	G_{12} (kg/cm²)	K	μ_α	μ_β
Ortotropia 1	1×10^5	$0{,}05 \times 10^5$	$0{,}05 \times 10^5$	0,4665	0,2	0,01
Ortotropia 2	$0{,}05 \times 10^5$	1×10^5	„	„	0,01	0,2

Ținînd seama de relațiile (11), se obțin următoarele valori pentru rigidități și coeficienții Poisson reduși, corespunzînd celor patru variante indicate anterior.

Tabela II a

Varianta	I	II	III	IV
$\overset{1}{F}_\alpha$ kg/cm	$0{,}367 \times 10^5 h$	$0{,}684 \times 10^5 h$	$0{,}684 \times 10^5 h$	$0{,}367 \times 10^5 h$
$\overset{1}{F}_\beta$ „	0,684 „	0,367 „	0,367 „	0,684 „
$\overset{1}{G}_\alpha$ kg/cm	$0{,}0598 \times 10^5 h^3$	$0{,}0276 \times 10^5 h^3$	$0{,}08 \times 10^5 h^3$	$0{,}0071 \times 10^5 h^3$
$\overset{1}{G}_\beta$ „	0,0276 „	0,0589 „	0,0071 „	0,08 „
$\overset{2}{F}_\alpha$ kg cm	$1{,}044 \times 10^4 h$	$1{,}044 \times 10^4 h$	$1{,}044 \times 10^4 h$	$1{,}044 \times 10^4 h$
$\overset{2}{G}_\alpha$ kg/cm	0,087 „ h^3	0,087 „ h^3	0,087 „ h^3	0,087 „ h^3

Tabela II b

Varianta	I	II	III	IV
$\overset{1}{\mu}_\alpha$	0,01464	0,0273	0,0273	0,01464
$\overset{1}{\mu}_\beta$	0,0273	0,01464	0,01464	0,0273
$\overset{3}{\mu}_\alpha$	0,0301	0,0139	0,1175	0,01035
$\overset{3}{\mu}_\beta$	0,0139	0,0301	0,01035	0,1175
$\overset{2}{\mu}_\alpha = \overset{4}{\mu}_\alpha = \overset{2}{\mu}_\beta = \overset{4}{\mu}_\beta$	0,0447	0,0447	0,0447	0,0447

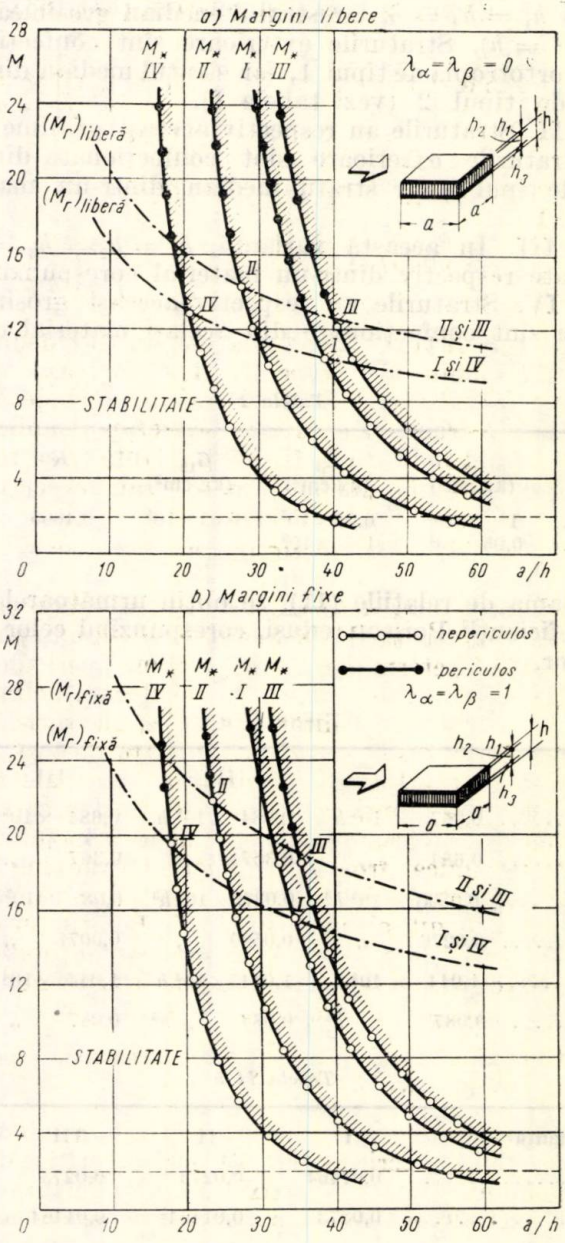


Fig. 2a,b. — Determinarea porţiunilor „periculoase" şi „nepericuloase" ale frontierei critice de flutter în cele patru variante.

Luînd în considerare numai primele două moduri succesive ($p = 1$), considerînd $p_\infty = 1\ \mathrm{kg/cm^2}$, $\varkappa = 1, 4$ şi relaţiile (53), (63), se obţine

$$M_* = 6{,}5\,\overset{1}{G}_\alpha \left[15 + 6 \left(\overset{3}{\mu}_\beta + \frac{\overset{2}{G}_\alpha}{\overset{1}{G}_\alpha} (1 - \overset{4}{\mu}_\beta) \right) \right] \times \frac{1}{a^3},$$

$$(M_r)_{\text{mob.}} = \left(\frac{1{,}203}{\overset{1}{N}_\alpha} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{a} \right)^{1/3}, \tag{64}$$

$$(M_r)_{\text{fix.}} = \left(0{,}2407\ (15 + 4\,\overset{1}{\mu}_\beta) \times \frac{1}{\overset{1}{N}_\alpha} \right)^{1/3} \left(\frac{1}{a} \right)^{1/3}.$$

Subscriptul în relaţiile (64) indică că relaţiile au fost deduse considerînd marginile panoului mobile sau respectiv fixe. Pe baza expresiilor (64) şi a valorilor date în tabela II au fost trasate curbele din figurile 2 *a*, *b*, în care este trasată frontiera critică de flutter, porţiunile „periculoase" şi „nepericuloase" fiind indicate în fiecare variantă. Aceste curbe au fost trasate considerînd marginile panoului mobile sau respectiv fixe.

7. CONCLUZII

Inegalităţile (59), (60), determinate pentru cazul panoului simplu rezemat, arată că neliniarităţile geometrice şi aerodinamice contribuie într-un mod diferit de determinarea caracterului „periculos" sau „nepericulos" al frontierei critice de flutter. În cazul unei neliniarităţi geometrice puternice astfel încît inegalitatea (59) să fie satisfăcută, excitarea flutterului pe frontiera domeniului de instabilitate face ca o mică depăşire a vitezei critice să corespundă la amplitudini mici ale flutterului permanent, ceea ce conferă frontierei critice de flutter caracterul de „nepericulos". O dată cu creşterea numărului Mach, în cazul cînd prevalează neliniaritatea aerodinamică, frontiera domeniului devine „periculoasă".

În legătură cu aceasta este demn de menţionat că, folosind metoda parametrului mic, concluziile obţinute de V. V. Bolotin în cazul panoului plan omogen şi izotrop vin în concordanţă cu cele obţinute de noi.

În afară de aceasta, exemplul numeric considerat şi curbele rezultate permit să se tragă următoarele concluzii :

a) creşterea rigidităţii $\overset{1}{F}_\alpha$ conduce la o creştere a porţiunii „nepericuloase" a frontierei critice de flutter ;

b) pentru aceeaşi rigiditate $\overset{1}{F}_\alpha$, descreşterea rigidităţii $\overset{1}{G}_\alpha$ conduce la o creştere a porţiunii „nepericuloase" a frontierei critice de flutter ;

c) cazul panoului cu marginile fixe relevă , comparat cu cazul marginilor mobile, o sensibilă creştere a porţiunii „nepericuloase" a frontierei critice de flutter.

În încheiere ţin să mulţumesc prof. A. Halanay de la Institutul de matematică Bucureşti pentru sugestiile date în elaborarea acestei lucrări.

ANEXA I

$$\int_0^a \cos\frac{r\pi\alpha}{a}\sin\frac{n\pi\alpha}{a}\sin\frac{\overline{n}\pi\alpha}{a}\,d\alpha = \frac{a}{4} \quad \text{dacă } n = \overline{n} + r,$$

$$= \frac{a}{4}\frac{\overline{n} - r}{|\overline{n} - r|} \quad \text{dacă } n = |\overline{n} - r|,$$

$$= 0 \quad \text{dacă } \begin{cases} n \neq \overline{n} + r, \\ n \neq |\overline{n} - r|; \end{cases}$$

$$\int_0^a \sin\frac{r\pi\alpha}{a}\sin\frac{\overline{n}\pi\alpha}{a}\cos\frac{n\pi\alpha}{a}\,d\alpha = -\frac{a}{4} \quad \text{dacă } n = \overline{n} + r,$$

$$= \frac{a}{4} \quad \text{dacă } n = |\overline{n} - r|,$$

$$= 0 \quad \text{dacă } \begin{cases} n \neq \overline{n} + r, \\ n \neq |\overline{n} - r|; \end{cases}$$

$$\int_0^a \sin\frac{n\pi\alpha}{a}\sin\frac{r\pi\alpha}{a}\sin\frac{\overline{n}\pi\alpha}{a}\,d\alpha = -\frac{a}{2\pi}\left(\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+1-2\overline{n}-2r}\right)$$

$$\text{dacă } n = 2p + 1 - \overline{n} - r,$$

$$= \frac{a}{2\pi}\left(\frac{1}{2p-1} + \frac{1}{2p-1-2\overline{n}+2r}\right)$$

$$\text{dacă } n = 2p - 1 - \overline{n} + r,$$

$$= 0 \quad \text{dacă } \begin{cases} n \neq 2p + 1 - \overline{n} - r, \\ n \neq 2p - 1 - \overline{n} + r \end{cases}$$

$$(p = 1, 2, 3, \ldots);$$

$$\int_0^a \cos\frac{r\pi\alpha}{a}\cos\frac{n\pi\alpha}{a}\sin\frac{\overline{n}\pi\alpha}{a}\,d\alpha = \frac{a}{2\pi}\left(\frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+1-2\overline{n}-2r}\right)$$

$$\text{dacă } n = 2p + 1 - \overline{n} - r,$$

$$= \frac{a}{2\pi}\left(\frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p-1-2\overline{n}+2r}\right)$$

$$\text{dacă } n = 2p - 1 - \overline{n} + r,$$

$$= 0 \quad \text{dacă } \begin{cases} n \neq 2p + 1 - \overline{n} - r, \\ n \neq 2p - 1 - \overline{n} + r \end{cases}$$

$$(p = 1, 2, 3, \ldots).$$

ANEXA II

$$F^{(\mathrm{I})}_{\bar r n} = \frac{2^4\,\lambda_\beta\,a^2}{R\,\pi^4\,h\,(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta\,\lambda_\alpha\,\lambda_\beta)}\,\frac{\delta_{\bar r n}}{\bar r n}\left[\frac{F_{\beta t}}{F_{\alpha t}}+\overset{1}{\mu}_\beta\,\lambda_\alpha-\overset{1}{\mu}_\beta\left(1+\overset{1}{\mu}_\alpha\,\lambda_\alpha\,\frac{F_{\beta t}}{F_{\alpha t}}\right)\right]\theta$$

$$+\left[\omega^2_{\bar r n}+\frac{2^4\,\bar r^2\,a^4}{\pi^4\,h^2\,R^2}\,T_{\bar r n}-s_{\bar r n}\,\theta\right]\zeta_{\bar r n}$$

$$+\,S_1\,\frac{2^6\,a^4\,\lambda_\beta\,\overset{1}{N}_\alpha}{\pi^8\,h^2\,R^2\,(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta\,\lambda_\alpha\,\lambda_\beta)}\,\frac{\delta_{\bar r n}}{\bar r n}\sum_{r=1,3,5,\ldots}^{\infty}(A^{(r,n)}_\alpha+\overset{1}{\mu}_\beta\,\lambda_\alpha\,A^{(r,n)}_\alpha)\,\zeta_{rn},$$

$$F^{(\mathrm{II})}_{\bar r n} = -\,P\,\nu\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\bar r\,(2t+1-\bar r)}{(2t+1)\,(2t+1-2\bar r)}\,\zeta_{2t+1-\bar r,\,n}$$

$$+\frac{P}{3}\,\nu^2\,(\varkappa+1)\,\frac{\delta_n}{n}\left\{\frac{\delta_{\bar r}}{\bar r}\sum_{q=1}^{\infty}q^2\,\zeta^2_{qn}-\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{\bar r}{(2t+1)\,(2t+1-2\bar r)}\right.$$

$$\times\,[3q\,(2t+1+q-\bar r)\,\zeta_{qn}\,\zeta_{2t+1+q-\bar r,\,n}$$

$$\left.+\,q\,(2t+1-q-\bar r)\,\zeta_{qn}\,\zeta_{|2t+1-q-\bar r|,\,n}]\right\}$$

$$-\frac{P\pi^2}{2^6}\,\nu^3\,(\varkappa+1)$$

$$\times\left\{\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{2\,\bar r\,(2t+1-\bar r)}{(2t+1)\,(2t+1-2\bar r)}\,q^2\,\zeta^2_{qn}\,\zeta_{2t+1-\bar r,\,n}\right.$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{\bar r}{(2s+1)\,(2s+1-2\bar r)}\right.$$

$$\times\,[(2s+1-t-\bar r-q)\,qt\,\zeta_{qn}\,\zeta_{tn}\,\zeta_{|2s+1-t-\bar r-q|,\,n}$$

$$+\,3\,(2s+1-t-\bar r+q)\,qt\,\zeta_{qn}\,\zeta_{tn}\,\zeta_{2s+1-t-\bar r+q,\,n}]$$

$$+\frac{\bar r}{(2s-1)\,(2s-1-2\bar r)}$$

$$\times\,[(2s-1+t-\bar r-q)\,qt\,\zeta_{qn}\,\zeta_{tn}\,\zeta_{|2s-1+t-\bar r-q|,\,n}$$

$$\left.\left.+\,3\,(2s-1+t-\bar r+q)\,qt\,\zeta_{qn}\,\zeta_{tn}\,\zeta_{2s-1+t-\bar r+q,\,n}]\right)\right\},$$

$$F^{(\mathrm{III})}_{\bar r n} = -\,S_1\,\frac{2^6\,a^2\,\overset{1}{N}_\alpha\,\delta_n}{R\,\pi^4\,h\,(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta\,\lambda_\alpha\,\lambda_\beta)}\left[\bar r^2\,\lambda_\alpha\sum_{r=1,3,5,\ldots}^{\infty}(A^{(r,n)}_\alpha+\overset{1}{\mu}_\alpha\,\lambda_\beta\,A^{(r,n)}_\beta)\right.$$

$$\left.+\,n^2\varphi^2\,\lambda_\beta\sum_{r=1,3,5,\ldots}^{\infty}(A^{(r,n)}_\beta+\overset{1}{\mu}_\beta\,\lambda_\alpha\,A^{(r,n)}_\alpha)\right]\zeta_{rn}\,\zeta_{\bar r n}$$

$$-\,S_2\,\frac{2^5\,a^2\,\lambda_\beta}{R\,\pi^4\,h\,(1-\overset{1}{\mu}_\alpha\overset{1}{\mu}_\beta\,\lambda_\alpha\,\lambda_\beta)}\,\frac{\delta_{\bar r n}}{\bar r n}\left(n^2\,\varphi^2\sum_{q=1}^{\infty}\zeta^2_{qn}+\lambda_\alpha\overset{1}{\mu}_\alpha\sum_{q=1}^{\infty}q^2\,\zeta^2_{qn}\right)$$

$$+\frac{2^5\,\varphi^2\,a^2}{3R\,\pi^4\,h}\,n\,\delta_n\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\bar r}{(2t+1)\,(2t+1-2\bar r)}$$

$$\times \Big\{ [(2t+1-\bar r)^2 (2t+1-\bar r+2p)^2 L_{2t+1-\bar r,\, n} + 3S_2]\, \zeta_{pn}\, \zeta_{2t+1-\bar r+p,\, n}$$

$$- \frac{2t+1-\bar r-p}{|2t+1-\bar r-p|} [(2t+1-\bar r)^2 (2t+1-\bar r-2p)^2$$

$$\times L_{2t+1-\bar r,\, n} + 3S_2 |\, \zeta_{np}\, \zeta_{|\,2t+1-\bar r-p|,\, n} \Big\}$$

$$+ 16 \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} p^2 \delta_n\, T_{pn}$$

$$\times \Big\{ \Big(\frac{2t-1-\bar r+p}{(2t-1)(2t-1-2\bar r+2p)} (p^2 + (2t-1-r+p)^2)$$

$$+ \frac{p(\bar r-p)(2t-1-\bar r+p)}{(2t-1)(2t-1-2\bar r+2p)} \Big) \zeta_{pn}\, \zeta_{2t-1-p-\bar r,\, n}$$

$$- \Big(\frac{2t+1-\bar r-p}{(2t+1)(2t+1-2\bar r-2p)} (p^2 + (2t+1-\bar r-p)^2)$$

$$- \frac{p(\bar r+p)(2t+1-p-\bar r)}{(2t+1)(2t+1-2\bar r-2p)} \Big) \zeta_{pn}\, \zeta_{2t+1-p-\bar r,\, n} \Big\}$$

$$\times \Big\{ \Big[S_1 \bar r^2 \Big(1 + \frac{2\lambda_\alpha}{1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta} \Big) + S_2 \frac{2n^2 \varphi^2 \overset{1}{\mu}_\alpha \lambda_\alpha \lambda_\beta}{1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta} \Big] \sum_{q=1}^{\infty} q^2\, \zeta_{qn}^2$$

$$+ \Big[S_1 \frac{2\lambda_\alpha \lambda_\beta \bar r^2 n^2 \overset{1}{\mu}_\beta \varphi^2}{1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta} + S_2 \frac{2n^4 \varphi^4 \lambda_\beta}{1 - \overset{1}{\mu}_\alpha \overset{1}{\mu}_\beta \lambda_\alpha \lambda_\beta} \Big] \sum_{q=1}^{\infty} \zeta_{qn}^2 \Big\}\, \zeta_{\bar r n}$$

$$+ \varphi^4 n^4 \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \zeta_{qn} \Big\{ \Big[S_2 + \frac{1}{2} (2r+p)^2 (2q+p)^2 L_{pn} \Big] \zeta_{\bar r+p,\, n}\, \zeta_{p+q,\, n}$$

$$- \Big[S_2 + \frac{1}{2} (2\bar r+p)^2 (2q-p)^2 L_{pn} \Big]$$

$$\times \frac{p-q}{|p-q|}\, \zeta_{\bar r+p,\, n}\, \zeta_{|p-q|,\, n}$$

$$+ \Big[S_2 + \frac{1}{2} (2r-p)^2 (2q+p)^2 L_{pn} \Big]$$

$$\times \frac{r-p}{|r-p|}\, \zeta_{|\,\bar r-q\,|,\, n}\, \zeta_{p+q,\, n}$$

$$- \Big[S_2 + \frac{1}{2} (2r-p)^2 (2q-p)^2 L_{pn} \Big]$$

$$\times \frac{\bar r-p}{|r-p|} \frac{p-q}{|p-q|}\, \zeta_{|\bar r-p|,\, n}\, \zeta_{|p-q|,\, n} \Big\} =$$

$$\delta_n = \begin{cases} 0 & n \text{ par}, \\ 1 & n \text{ impar}, \end{cases} \qquad \delta_{rn} = \begin{cases} 0 & r \text{ sau } n \text{ par}, \\ 1 & r \text{ şi } n \text{ impar}. \end{cases}$$

Primită la redacție la 19 iunie 1965.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. E. Goodman, T. V. Rattaya, *Review of panel flutter.* Applied Mech. Reviews, **13**, *1* (1960).
2. Н. Н. Баутин, *Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости*, Гостехиздат, 1949.
3. И. Г. Малкин, *Теория устойчивости движения*, Гостехиздат, 1959, p. 176—183.
4. A. Halanay, *Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*, București, Edit. Acad. R.P.R., 1963, p. 89—93.
5. Y. C. Fung, *On two dimensional panel flutter.* J. Aero. Sci., **25**, *3*, 145—160 (1958).
6. В. В. Болотин, Ю. В. Гаврилов, Б. П. Макаров, Ю. Ю. Швейко, *Нелинейные задачи устойчивости плоских панелей при больших сверхзвуковых скоростях.* Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машин. *3*, 59—64 (1959).
7. В. В. Болотин, *Нелинейный флаттер пластин и оболочек.* Инж. сборн. *28*, 55—75 (1960).
8. — *Температурные выпучивания пластин и пологих оболочек в сверхзвуковом потоке газа.* Расчеты на прочность, *6*, Машгиз, 190—215 (1960).
9. — *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Физматгиз, 1961, p. 280—330.
10. В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков, *Выпучивание и установившийся флаттер термических сжатых панелей, находящихся в сверхзвуковом потоке.* Инж. журнал, **1**, *2*, 82—96 (1961).
11. Р. Д. Степанов, *К вопросу о флаттере пластинок в нелинейной постановке.* НДВШ. Машин. и прибостр., **2**, 46—54 (1960).
12. П. М. Огибалов, *Вопросы динамики и устойчивости оболочек.*, Издат. Моск. Унив., 1963, p. 164—174.
13. С. А. Амбарцумян, Ж. Е. Багдасарян, *К устойчивости ортотропных пластинок обтекаемых сверхзвуковым потоком газа.* Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машин., *4*, 92—96 (1961).
14. Ж. Е. Багдасарян, *Об устойчивости трехслойной ортотропной пластинки в сверхзвуковом потоке газа.* Изв. АН Арм. ССР физ. мат. наук, **14**, *5*, 21—30 (1961).
15. Б. П. Макаров, *Об амплитудах установившегося флаттера защемленных панелей.* Изв. высшей школы, Машиност,. *5*, 11—25 (1961).
16. П. М. Огибалов, *К постановке задачи о флаттере оболочек и панелей.* Вестник Моск. Ун-та, Матем. механ., *5*, 60—66 (1961).,
17. E. F. E. Zeidjel, *Large deflection panel flutter*, Delft, Doctorial Thesis 1962.
18. Ю. Н. Новичков, *Устойчивости и автоколебания плоских и криволинейных панелей в потоке газа. Теория пластин и оболочек*, Киев, 1962, p. 237—243.
19. А. С. Вольмир, *Устойчивость упругих систем*, Физматгиз, 1963, p. 735—763.
20. Х. М. Муштари, К. З. Галимов, *Нелинейная теория упругих оболочек*, Таткнигоиздат, 1957.
21. J. Lyeli Sanders Jr., *Non linear Theories for thin Shells Quart.* Appl. Math., **21**, *1*, 21—36 (1963).
22. H. Ashley, C. Zartarian, *Piston theory — a New aerodynamic tool for the aeroelastician.* J. Aero Sci., **23**, *6*, 1 109—1 118 (1956).
23. А. А. Ильюшин, *Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях.* Приклад. матем. и механ., **20**, *6*, 733—755 (1956).
24. Y. C. Fung, *A Summary of the theories and experiments on panel flutter.* Air Force Sci. Research TN, *60—224* (1960).
25. А. Л. Гольденвейзер, *Теория упругих тонких оболочек*, Гостехиздат, 1953.
26. С. А. Амбарцумян, *Температурные напряжения в слойствых анизотропных оболочках.* Изв. АН Арм. ССР, Физ. мат. наук, **5**, *6* (1952).

27. Л. Либреску, *К теории тонкостенных конструкций симметрично построенных из ортотропных слоев*. Rev. Mech. Appl. *5*, 401—415 (1960).

28. А. А. Мовчан, *Об устойчивости панелей движущихся в газе*. Приклад. матем. и механ., **21**, *2*, 211—243 (1957).

29. L. Luke, A. John, *Supersonic panel flutter* WADCTR, *57*, 252, July (1957).

30. H. Nelson, H. J. Cunningham, *Theoretical investigation of flutter of two dimensional plat panels with on surface exposed to supersonic potential flow*. N.A.C.A. T.N., 3 465, July (1955).

31. В. В. Болотин, *О критических скоростях в нелинейных задачах теорий аэроупругости*. Научн. докл. высш. школы машин. и приб., *3* (1958).

ASPECTE PRIVIND PLASTICIZAREA PARȚIALĂ A ELEMENTELOR ÎNCOVOIATE DIN BETON ȘI MICROBETON

539.4

de C. AVRAM, I. FILIMON și R. MARINOV

Centrul de cercetări tehnice al Academiei Republicii Socialiste România, Timișoara

Se prezintă cercetările și încercările efectuate de autori în problema privitoare la plasticizarea parțială a zonei întinse a elementelor încovoiate din beton de ciment și microbeton cu rășini epoxidice.

Plasticizarea zonei întinse a elementelor încovoiate din beton, respectiv capacitatea portantă relativă, este funcție de calitatea betonului și de înălțimea secțiunii transversale a elementului. S-au propus formule practice de calcul.

Modelarea betonului de ciment cu microbeton cu rășini epoxidice, la scară redusă, a pus în evidență un fenomen general valabil pentru toate materialele fragile (beton, roci naturale, fontă etc).

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Se știe că sub sarcini statice de scurtă durată betonul se deformează elastic pînă la o anumită treaptă de încărcare, după care apar și deformații plastice, datorite în cea mai mare măsură microfisurării pietrei de ciment.

Treapta de încărcare la care începe microfisurarea pietrei de ciment este funcție de calitatea betonului. Betoanele de calitate inferioară au proprietăți plastice pronunțate și microfisurarea începe la trepte mici de încărcare, în timp ce betoanele de calitate foarte ridicată se comportă elastic aproape pînă la rupere.

Rezultatele experimentale obținute de O. I. Berg [3], H. Rüsch [12], laboratorul de Beton armat din Timișoara [2], [4] etc., privitoare la proprietățile elastoplastice ale betonului, corespund ideilor actuale referitoare la începutul microfisurării pietrei de ciment, concretizate de R. L'Hermite [6].

Prin extrapolarea rezultatelor experimentale, C. Avram [1], [2] admite că betonul ideal plastic are rezistenţa la compresiune pe cuburi de 20 cm latură $R_b = R_{b\,\min} = 100$ kgf/cm². Tot prin extrapolarea rezultatelor experimentale rezultă pentru betonul ideal elastic $R_b = R_{b\,\max} = 1\,200$ kgf/cm² după H. Rüsch [12], 1 650 kgf/cm² după C. Avram [1], [2] şi 2 250 kgf/cm² după O. I. Berg [3]. Diferenţele dintre valorile obţinute sînt destul de mari, datorită numărului redus de încercări analizate, dar fenomenul comportării elastoplastice a betonului se manifestă în mod evident la lucrările experimentale. Vom admite mai departe $R_{b\,\max} = 1\,650$ kgf/cm².

Elementele de beton simplu supuse la încovoiere prin sarcini statice de scurtă durată se rup prin fisurarea betonului întins, care în faza premergătoare ruperii se deformează elastoplastic; betonul comprimat se comportă elastic pînă la ruperea elementului, fiind supus la eforturi unitare mici.

Curbele caracteristice $\sigma - \varepsilon$ ale betonului întins se pot admite ca în figura 1[2]. Pentru betonul ideal plastic, coeficientul de plasticitate se ia ca valoarea $\lambda = \varepsilon_p / \varepsilon_t = 0{,}5$ [8] (fig. 1*a*), pentru betonul ideal elastic cu valoarea $\lambda = 0$ (fig. 1*c*), iar pentru o calitate intermediară de beton cu valoarea $0{,}5 > \lambda > 0$ (fig. 1*b*).

Ca urmare, plasticizarea zonei întinse de beton va depinde de calitatea R_b a betonului; experienţele confirmă acest lucru [2], [5], [12].

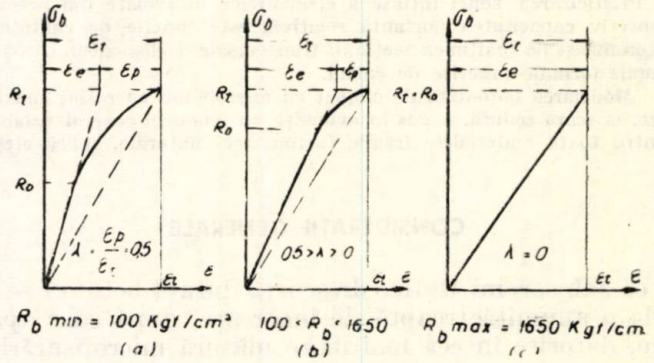


Fig. 1

Diagrama eforturilor unitare din zona întinsă se admite de formă dreptunghiulară (plasticizare totală) pentru betonul ideal plastic (fig. 2*b*) şi de formă triunghiulară pentru betonul ideal elastic (fig. 2*e*); pe măsură ce calitatea betonului creşte, plasticizarea betonului întins se produce din ce în ce mai puţin, trecîndu-se treptat de la diagrama dreptunghiulară, printr-o diagramă curbilinie, la diagrama triunghiulară.

Admiţînd ipoteza lui Bernoulli (fig. 2*a*) şi valorile

$$E_b = \frac{R_t}{\varepsilon_e}; \quad E_b' = \frac{R_t}{\varepsilon_t} = (1 - \lambda) E_b, \qquad \text{(la, b)}$$

pentru modulii de elasticitate și elastoplasticitate momentul încovoietor de fisurare (rupere) are valoarea [2]

$$M_f = 0{,}292\, bh^2 R_t \cong \frac{bh^2}{3{,}5} R_t \tag{2}$$

pentru betonul ideal plastic (fig. 2*b*), respectiv

$$M_f = 0{,}167\, bh^2 R_t = \frac{bh^2}{6} R_t = \frac{bh^2}{6} R_{ti} \tag{3}$$

pentru betonul ideal elastic (fig. 2*e*).

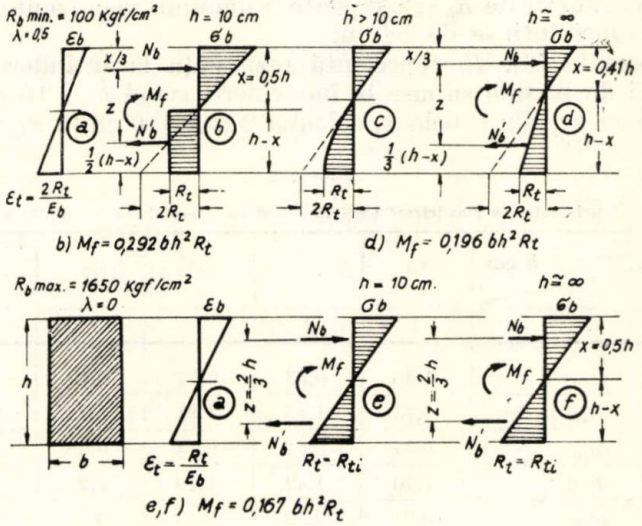


Fig. 2

Pentru un beton de calitate oarecare rezultă o valoare M_f intermediară între valorile date de formulele (2) și (3); se poate admite că între aceste limite M_f variază liniar în funcție de R_b [5].

Plasticizarea zonei întinse de beton este funcție și de înălțimea h a secțiunii elementului; numeroase experiențe confirmă acest lucru [2], [4], [6], [11], [13].

Pentru betonul ideal plastic, formula (2) este valabilă pentru înălțimi mici ($h = 10$ cm). Pentru înălțimi h mai mari, momentul M_f determinat experimental este cu atît mai mic, cu cît h este mai mare, din cauza plasticizării din ce în ce mai reduse a zonei întinse (fig. 2 *c*, *d*). I. Filimon a propus formula, verificată experimental [4],

$$M_f = 0{,}292\, Kbh^2 R_t, \tag{4}$$

unde R_t se determină cu formula (2) pe prisme cu $h = 10$ cm, iar

$$K = 1 - 0{,}34\,[1 - e^{-(0{,}07h - 0{,}7)}], \tag{5}$$

care duce la (cu h în cm):

$h = 10;\quad 15;\quad 20;\quad 30;\quad 40;\quad 50;\quad \infty$

$K = 1{,}00,\quad 0{,}90;\quad 0{,}83;\quad 0{,}75;\quad 0{,}70;\quad 0{,}68;\quad 0{,}67$

Pentru betonul ideal elastic, formula (3) este valabilă pentru orice înălţime a secţiunii (fig. 2 *e*, *f*).

În concluzie, valoarea momentului încovoietor de fisurare (rupere) M_f este funcţie atît de calitatea R_b a betonului, cît şi de înălţimea h a secţiunii elementului; se poate folosi formula generală ([2], [5])

$$M_f = 0{,}292\ w_{fp}\ bh^2 R_t, \qquad (6)$$

unde w_{fp} este funcţie de R_b şi h şi poate fi denumit coeficient de plasticizare parţială a zonei întinse de beton.

În formula (6), R_t reprezintă rezistenţa la întindere a betonului determinată de prisme supuse la încovoiere avînd $h = 10$ cm şi folosind formula (6) cu w_{fp} din tabela 1, coloana 2 ($h = 10$ cm); w_{fp} variază liniar

Tabela 1

Valorile coeficientului de plasticizare parţială w_{fp} şi ale raportului $m = R_{ti}/R_t$ pentru beton

R_b kgf/cm² \ h cm		10	20	30	40	50	
1		2	3	4	5	6	7
100	w_{fp}	1,00	0,83	0,75	0,70	0,68	0,67
	R_{ti}/R_t	1,75	1,45	1,31	1,23	1,19	1,17
200	w_{fp}	0,97	0,81	0,74	0,69	0,67	0,66
	R_{ti}/R_t	1,70	1,42	1,29	1,21	1,17	1,15
300	w_{fp}	0,94	0,80	0,73	0,68	0,67	0,66
	R_{ti}/R_t	1,64	1,40	1,28	1,19	1,17	1,15
400	w_{fp}	0,92	0,78	0,72	0,68	0,66	0,65
	R_{ti}/R_t	1,61	1,36	1,26	1,19	1,15	1,14
500	w_{fp}	0,89	0,76	0,70	0,67	0,65	0,64
	R_{ti}/R_t	1,56	1,33	1,23	1,17	1,14	1,12
600	w_{fp}	0,86	0,75	0,69	0,66	0,65	0,64
	R_{ti}/R_t	1,50	1,31	1,21	1,15	1,14	1,12
700	w_{fp}	0,83	0,73	0,68	0,65	0,64	0,63
	R_{ti}/R_t	1,45	1,28	1,19	1,14	1,12	1,10
1650	w_{fp}	0,57	0,57	0,57	0,57	0,57	0,57
	R_{ti}/R_t	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

în funcţie de R_b între limitele 1,00 şi 0,57. Valoarea R_t se poate determina suficient de exact şi prin despicarea unor probe cilindrice supuse la compresiune în lungul a două generatoare diametral opuse (încercarea braziliană [1]).

Pentru betonul ideal plastic ($R_{b\,min} = 100$ kgf/cm²) avem $w_{fp} = K$ = variabil (formula 5), iar pentru betonul ideal elastic ($R_{b\,max} = 1\,650$ kgf/cm²) $w_{fp} = 0{,}167/0{,}292 = 0{,}57$ = const. Pentru calități intermediare R_b de beton și o înălțime h dată ($h = 10 \ldots \infty$ cm), valoarea w_{fp} se poate obține interpolînd liniar între valorile K și 0,57, așa cum rezultă din graficul dat în figura 3.

Valorile coeficientului de plasticizare parțială w_{fp} a zonei întinse de beton, calculate conform figurii 3 pentru calități de beton folosite în practică, sînt date în tabela 1. Valorile w_{fp} din tabela 1 au fost verificate parțial atît pe betoane de calitate obișnuită [2], cît și pe betoane de calitate superioară [5]. Compararea valorilor teoretice cu cele experimentale arată o concordanță satisfăcătoare și un calcul acoperitor (tabela 2);

Tabela 2

Valori teoretice și experimentale W_{fg}

R_b kgf/cm² \ h cm		10	20	35	50
170	w_{fp} teor.	0,98	0,82	0,71	0,67
	w_{fp} exp.	0,98	0,87	0,74	0,68
420	w_{fp} teor.	0,91	0,78	0,69	0,66
	w_{fp} exp.	0,91	0,82	0,76	0,68
780	w_{fp} teor.	0,81	0,71	0,65	0,63
	w_{fp} exp.	—	0,72	—	0,63

rămîne ca prin încercări sistematice să se verifice valorile întregului cîmp acoperit de graficul din figura 3 și tabela 1.

Multă vreme rezistența la întindere a betonului s-a determinat pe probe încovoiate folosind formula lui Navier (3), independent de calitatea betonului; această rezistență, notată cu R_{ti}, este o mărime pur convențională, întrucît sub sarcini de scurtă durată betonul se comportă ca un material elastoplastic. Rezistența R_{ti} este totdeauna mai mare decît rezistența la întindere R_t.

Pentru betonul ideal plastic, referindu-ne și la formulele (2) și (3), raportul R_{ti}/R_t are valoarea (pentru $h = 10$ cm, fig. 2*b*, *e*)

$$m = \frac{R_{ti}}{R_t} = \frac{0{,}292}{0{,}167} = 1{,}75, \tag{7}$$

admisă de majoritatea cercetătorilor.

Pentru betonul ideal elastic avem în mod evident (fig. 2*e*)

$$m = R_{ti}/R_t = 1{,}00. \tag{8}$$

Pentru un beton de calitate R_b oarecare și un element încovoiat de înălțime h oarecare a secțiunii transversale, valoarea raportului R_{ti}/R_t se obține egalînd momentele încovoietoare M_f din formulele (3) și (6):

$$m = \frac{R_{ti}}{R_t} = \frac{0{,}292}{0{,}167} w_{fp} = 1{,}75\, w_{fp}. \tag{9}$$

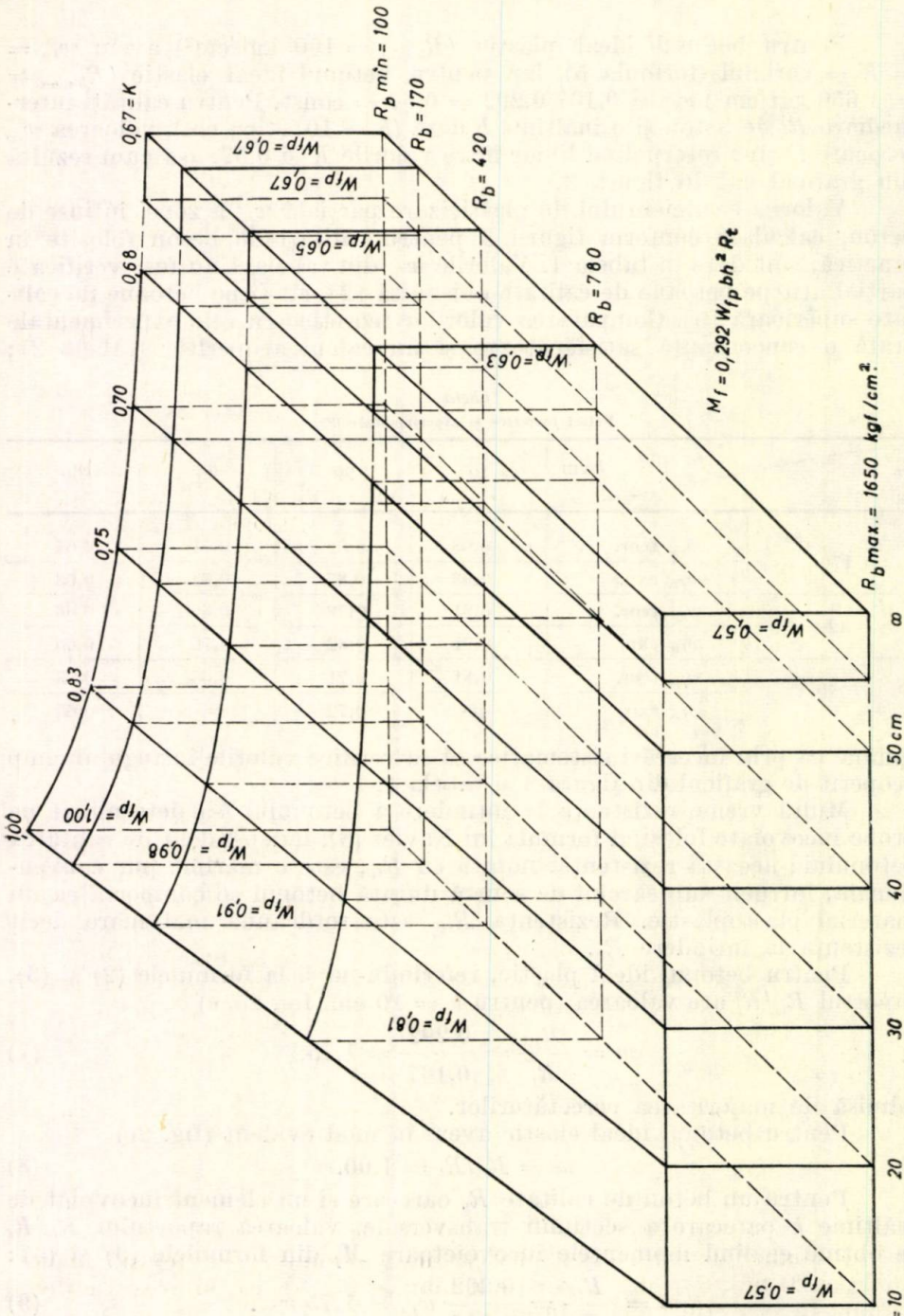

0,67=K
0,68
0,70
0,75
0,83
1,00
R_b min = 100
R_b = 170
R_b = 420
R_b = 780
R_b max. = 1650 kgf/cm²
$M_f = 0,292\, W_{fp}\, bh^2 R_t$
W_{fp} = 0,67
W_{fp} = 0,67
W_{fp} = 0,65
W_{fp} = 0,63
W_{fp} = 0,57
W_{fp} = 1,00
W_{fp} = 0,98
W_{fp} = 0,91
W_{fp} = 0,81
W_{fp} = 0,57
h = 10
20
30
40
50 cm
∞

Fig. 3

Valorile raportului R_{ti}/R_t sînt date în tabela 1; pentru betoanele folosite în practică, ele variază între 1,75 și 1,45 (epruvete standard cu $h = 10$ cm).

Raportul R_{ti}/R_t poate caracteriza, ca și w_{1p}, plasticizarea parțială a zonei întinse de beton a elementelor încovoiate.

Plasticizarea parțială a zonei întinse a elementelor încovoiate a fost constatată și la alte materiale fragile, cum ar fi rocile naturale, fonta [9], [2] etc.; fenomenul are deci caracter general pentru această categorie de materiale.

2. ELEMENTE DIN MICROBETON CU RĂȘINI EPOXIDICE

În vederea studierii fenomenului de plasticizare parțială a zonei întinse a elementelor încovoiate confecționate din materiale fragile, s-a ajuns la ideea folosirii microbetonului cu rășini epoxidice [10] pentru modelarea la scară redusă a elementelor încovoiate experimentale. În acest scop, epruvetele confecționate din microbeton au avut dimensiunile reduse la scara 1 : 10 față de cele ale epruvetelor analoge din beton încercate în lucrarea [2].

Încercările pe elemente din microbeton au avut drept scop să stabilească în ce măsură similitudinea mecanică și fizică poate fi aplicată în acest caz.

Încercările pe elemente de microbeton sînt mult mai ușor de realizat și mai puțin costisitoare.

2.1. MATERIALE FOLOSITE

Ca agregate, ținînd seama de reducerea la scara 1 : 10 a elementelor de microbeton față de cele de beton, s-a folosit nisip de Ghioroc cu granule maxime de 3 mm. Agregatele au fost spălate, uscate și sortate. Fracțiunea sub 0,09 mm a fost înlăturată și înlocuită cu filer de calcar, din cauza conținutului prea mare de argilă.

Granulozitatea agregatelor, dată în tabela 3, este asemănătoare cu cea a agregatelor pentru betoane în domeniul bun (0/30 mm). Volumul golurilor amestecului de agregate a rezultat de 27,5%.

Tabela 3

Granulozitatea agregatelor

Sita	0,09	0,2	0,8	1,6	3	Observații
Procent de trecere	7	15	40	55	100	Nisip de Ghioroc

Ca liant pentru confecționarea microbetonului s-a folosit rășina epoxidică Dinox 040 de fabricație românească, iar ca întăritor etilendiamina în raportul rășină : întăritor = 10 : 1.

Cu porozitatea agregatului de 27,5% şi greutăţile specifice aparente $\gamma_{dinox} = 1{,}16$ g/cm³ şi $\gamma_{agr} = 1{,}91$ g/cm³, a rezultat pentru un microbeton de compactitate maximă (porozitate nulă) dozajul în greutate dinox : agregate = 1 : 4,35.

Pentru a se respecta asemănarea de structură dintre beton şi microbeton, epruvetele din microbeton s-au realizat cu patru dozaje diferite, respectiv cu compactităţi diferite :
dinox : agregate = 1 : 4 ; 1 : 5 ; 1 : 7 ; 1 : 9.

Epruvetele s-au turnat în tipare de plexiglas, la care microbetonul nu aderă.

2.2. LUCRĂRI EXPERIMENTALE

Pentru studierea plasticizării zonei întinse a elementelor încovoiate din microbeton în corelaţie cu cei doi parametri studiaţi şi la beton (calitatea materialului şi înălţimea secţiunii elementului), s-au turnat patru serii de grinzi, corespunzătoare celor 4 dozaje diferite, a cîte şase tipuri pentru fiecare serie, cu dimensiunile reduse la scara 1 : 10 faţă de grinzile analoge de beton [2], conform tabelei 4.

Tabela 4

Caracteristicile geometrice ale grinzilor din microbeton

Tip	Lăţimea mm	Înălţimea mm	Lungimea mm	Deschiderea mm
I	10	10	55	30
II	10	15	85	45
III	10	20	110	60
IV	10	30	165	90
V	10	40	200	120
VI	10	50	245	150

Din fiecare serie şi tip de grindă s-au confecţionat şi încercat la încovoiere cîte patru epruvete, realizîndu-se cîte două ruperi la fiecare epruvetă (fig. 4) ; momentul încovoietor experimental M_f reprezintă deci pentru fiecare serie şi tip de grindă media a opt rezultate.

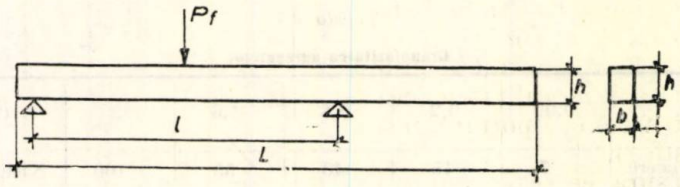


Fig. 4

Pentru fiecare serie de grinzi s-au confecţionat şi încercat 16 cuburi cu latura $a = 2$ cm pentru determinarea rezistenţei la compresiune R_c,

16 cilindri cu diametrul $d = 1{,}5$ cm și lungimea $l = 3$ cm pentru determinarea rezistenței la întindere prin despicare R_{tc} și 4 prisme de $2 \times 2 \times 8$ cm pentru determinarea rezistenței la întindere centrică R_t, a modulului de elasticitate E_m și a coeficientului lui Poisson μ.

Rezistențele R_c și R_{tc} au fost determinate la vîrstele de 3, 7, 14 și 28 de zile. Rezultatele medii ale rezultatelor individuale sînt date în tabela 5; rezistențele R_c și R_{tc} s-au calculat cu formulele

$$R_c = \frac{N_r}{a^2}\ ; \quad R_{tc} = \frac{2N_f}{\pi dl} \qquad (10\ a, b)$$

Tabela 5

Rezistențele mecanice ale microbetonului

Dozaj	Rezistența la compresiune R_c în kgf/cm²				Rezistența la întindere R_{tc} în kgf/cm²				$\frac{R_{tc}}{R_c}$
	3	7	14	28	3	7	14	28	
1 : 4	452	580	630	670	40	47	56	64	1 : 10,5
1 : 5	460	545	615	640	37	45	52	62	1 : 10,3
1 : 7	300	315	376	440	33	36	44	47	1 : 9,4
1 : 9	250	285	300	350	30	34	42	45	1 : 7,8

Rezistența R_t nu s-a putut determina, datorită faptului că prinderea epruvetelor prismatice de bacurile metalice prin lipire cu rășină epoxidică nu a reușit, epruvetele dezlipindu-se înainte de rupere.

Modulul de elasticitate E_m și coeficientul lui Poisson μ s-au determinat prin măsurători electrotensiometrice, folosind două timbre tensiometrice active și două timbre compensatoare. Pentru microbetonul cu dozajul 1 : 4 ($R_{c28} = 670$ kgf/cm²) s-au găsit valorile $E_m = 324 \cdot 000$ kgf/cm² și $\mu = 0{,}24$.

Diagrama caracteristică $\sigma - \varepsilon$ a aceluiași microbeton determinată pe prisme supuse la compresiune este dată în figura 5. Din această diagramă rezultă un coeficient de plasticitate $\lambda = \varepsilon_p/\varepsilon_t = 0{,}061$ (microbetonul 1 : 4 de calitatea cea mai ridicată are o comportare pronunțat elastică).

Pe măsură ce scade dozajul de rășină epoxidică a microbetonului, scade și modulul de elasticitate E_m și crește coeficientul de plasticitate λ.

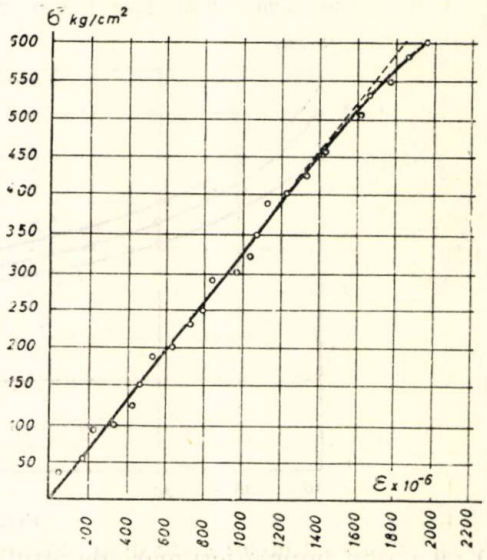


Fig. 5

Din datele de mai sus rezultă că microbetonul cu liant epoxidic poate modela betonul, deoarece :

— rezistenţele cresc o dată cu creşterea dozajului de liant epoxidic ;

— rezistenţele cresc cu timpul ;

— raportul rezistenţelor la întindere şi la compresiune pentru dozajele studiate variază între 1/7, 8 şi 1/10, 5, scăzînd o dată cu creşterea calităţii microbetonului ;

— curba caracteristică $\sigma - \varepsilon$ este afină cu cea a betonului etc.

2.3. INTERPRETAREA REZULTATELOR EXPERIMENTALE

Prin încercarea elementelor încovoiate conform schemei din figura 4, s-a determinat rezistenţa convenţională la întindere din încovoiere R_{ti} ca pentru un corp omogen şi elastic cu formula (3) :

$$R_{ti} = \frac{6M_f}{bh^2} \quad \text{cu} \quad M_f = \frac{lP_f}{4}. \qquad (11\ a, b)$$

Cu valorile medii R_{ti} s-au calculat rapoartele $m = R_{ti}/R_t = R_{ti}/R_{tc}$ pentru toate grinzile încercate (cu R_{tc} din tabela 5) ; valorile acestor rapoarte sînt date în tabela 6 şi în figura 6 (seria de elemente cu dozajul

Tabela 6

Valorile raportului R_{ti}/R_t pentru elemente din microbeton

Dozaj	$m = R_{ti}/R_t$ pentru grinzile cu înălţimile :					
	10	15	20	30	40	50
1 : 4	2,75	2,47	2,50	2,05	1,90	1,81
1 : 5	3,00	2,65	2,40	2,12	1,98	1,90
1 : 7	3,12	2,75	2,50	2,22	2,10	2,02
1 : 9	3,10—3,20	2,30—2,80	2,20—2,60	2,50—2,70	2,30—2,60	2,70

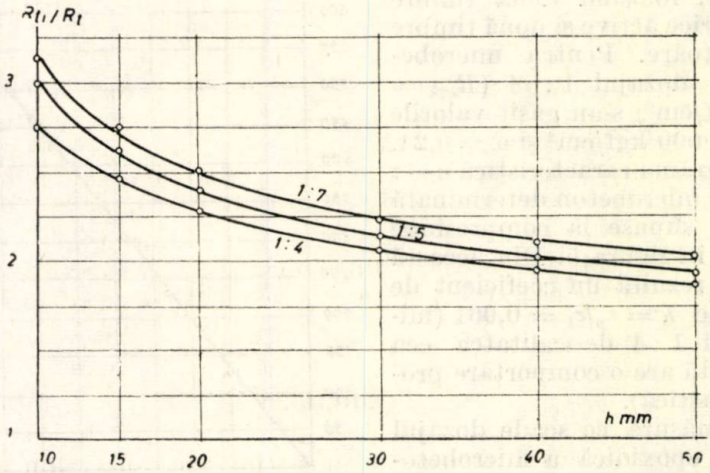


Fig. 6

1 : 9 a avut împrăştieri mari ale rezultatelor şi de aceea nu s-a putut trasa curba medie).

Paralel s-au calculat și valorile coeficientului $K = m/m_{10}$, unde m_{10} caracterizează plasticizarea parțială a zonei întinse pentru grinda de înălțime minimă ($h = 10$ mm); aceste valori sînt redate în tabela 7.

Tabela 7

Valorile coeficientului $K = m/m_{10}$ pentru elemente din microbeton

Dozaj	$K = m/m_{10}$ pentru înălțimile :					
	10	15	20	30	40	50
1 : 4	1,00	0,900	0,835	0,746	0,691	0,668
1 : 5	1,00	0,884	0,800	0,711	0,672	0,646
1 : 7	1,00	0,880	0,800	0,707	0,660	0,634

Din examinarea curbelor date în figura 6 și a valorilor m și K din tabele 6 și 7 rezultă următoarele :

a) Gradul de plasticizare a zonei întinse este funcție de calitatea microbetonului, m scade pe măsură ce crește calitatea materialului.

b) Gradul de plasticizare a zonei întinse este funcție de înălțimea secțiunii transversale a elementului încovoiat : m scade pe măsură ce înălțimea secțiunii crește, curbele $m(h)$ tinzînd spre o asimptotă orizontală pentru $h = 50$ mm (fig. 6).

c) Curbele $m(h)$ sînt practic paralele, cu excepția zonei înălțimilor h mici, unde panta curbelor este mai mare pentru dozajele mai sărace.

d) În ceea ce privește alura curbelor $m(h)$, se constată o analogie foarte strînsă cu cea a curbelor obținute pentru beton [2]. Aceasta se poate observa foarte bine comparînd valorile K pentru microbetonul cu dozajul 1 : 4 cu valorile K calculate cu formula (5) :

h mm (cm) :	10	15	20	30	40	50	∞
K (microbeton) :	1,00	0,900	0,835	0,746	0,691	0,668	—
K (formula 5) :	1,00	0,900	0,830	0,750	0,700	0,680	0,670

Deosebirea constă în faptul că formula (5) a fost stabilită pentru betoane de mărci inferioare ($R_b = 100$ kgf/cm²), iar microbetonul cu dozajul 1 : 4 corespunde unor mărci superioare ($R_c = 670$ kgf/cm²). Pe măsura scăderii dozajului, valorile K scad, ajungînd pentru dozajul 1 : 7 și $h = 50$ mm la valoarea 0,634, mai mică decît valoarea 0,670 pentru beton cu $h = \infty$.

e) Se constată că pentru microbetoanele studiate raportul $m = R_{ti}/R_t$ variază între 3,20 și 1,81 față de valorile extreme 1,75 și 1,00 găsite pentru beton.

3. CONCLUZII

Plasticizarea zonei întinse a elementelor încovoiate din microbeton se produce, din punct de vedere calitativ, în mod analog, ca la elementele din beton obișnuit, evidențiind prin aceasta existența unei legi generale valabile pentru toate materialele fragile.

A rezultat clar din analiza rezultatelor experimentale că plasticizarea zonei întinse este funcţie de calitatea materialului folosit şi de înălţimea secţiunii elementului încovoiat.

Din punct de vedere cantitativ apar însă diferenţe între comportarea microbetonului cu răşini epoxidice şi cea a betonului obişnuit. Deşi valoarea coeficientului $\lambda = \varepsilon_p / \varepsilon_t$ este mai mică la microbeton decît la beton, totuşi valorile coeficientului $m = R_{ti}/R_t$ rezultă mai mari; mai mult chiar, pentru înălţimi mici, valorile lui m ajung pînă la 3. Această contradicţie pentru $m = 3$ nu poate fi explicată numai pe baza ipotezei plasticizării secţiunii încovoiate (ar rezulta $\lambda = 1$, diagrama eforturilor unitare de întindere fiind întinsă pe toată înălţimea secţiunii şi zona comprimată reducîndu-se la o forţă concentrată în fibra extremă). De aceea rezultă necesitatea abordării problemei variaţiei lui m (R_c, h) în baza teoriei lui K. A. Malţev [7] privind efectul concentrării eforturilor unitare la capătul fisurii din zona întinsă; autorii au început un studiu pe modele fotoelastice în această problemă.

Diferenţa dintre valorile coeficientului lui Poisson pentru microbeton ($\mu = 0{,}2-0{,}3$ [10]) şi beton ($\mu = 0{,}1-0{,}3$ [6]) nu permite decît o modelare aproximativă în domeniul elastic, legile similitudinii nefiind strict respectate. Totuşi, modelarea betonului obişnuit cu microbeton cu liant epoxidic este avantajoasă, pentru motivele arătate în cadrul acestui studiu.

Primită la redacţie la 3 mai 1965

BIBLIOGRAFIE

1. C. Avram, C. Stoian, A. Negru, *Determinarea rezistenţelor mecanice ale betonului pe probe cilindrice.* Bul. şt. şi tehn. Inst. polit. Timişoara, **5 (19)**, *1—2*, (1960).
2. C. Avram, I. Filimon, *Influenţa dimensiunilor probelor şi a calităţii betonului asupra plasticizării parţiale a zonei întinse la elementele încovoiate din beton simplu.* Bul. şt. şi tehn. Inst. polit. Timişoara, **7 (22)**, *2* (1962).
3. О. И. Берг, *Физические основы теории прочности бетона и железобетона*, Москва, Госстройиздат, 1961.
4. I. Filimon, *Unele probleme ale betonului slab armat.* Autoreferat disertaţie, Litografia Inst. polit. Timişoara, 1959.
5. — *Quelques aspects concernant le calcul à la fissuration des éléments fléchis en béton précontraint.* Gand, Revue C — Tijdschrift, **III**, *7* (1964).
6. R. L'Hermite, *Idées actuelles sur la technologie du béton.* La Documentation Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, Paris, 1955.
7. K. A. Malţev, *Le sens physique de la résistance conventionnelle de rupture en traction du béton mesurée par flexion.* Béton armé, Paris, *21* (1960).
8. В. И. Мурашев, *Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона*, Москва, Стройиздат, 1950.
9. Şt. Nădăşan, E. Loviţiu, *Beitrag zur Klärung des Einflusses der Stützweite beim Biegeversuch von Gusseisen.* Freiberger Forschungshefte, **45**, August (1960).
10. E. Nicolau, *Microbeton cu liant epoxidic pentru modele ale construcţiilor.* St. cerc. mec. apl., *4* (1963).
11. V. Nicolau şi alţii, *Introducere în teoria betonului*, vol. II. Bucureşti, Edit. tehnică, 1957.
12. H. Rüsch, G. Vigerust, *Discussion of a paper by Sven Thaulow: Tensile Splitting Test and High Strenght Concrete Test Cylinders.* JACI, **29**, *6*, December (1957).
13. Г. Д. Цискрели, *Сопротивление растяжению неармированных и армированных бетонов.* Москва, Госстройиздат, 1954.

CALCULUL PLASTIC AL PLĂCILOR DREPTUNGHIULARE DE BETON ARMAT REZEMATE PE TOT CONTURUL, SOLICITATE DE ÎNCĂRCĂRI DE TIP HIDROSTATIC

de VALERIU PETCU

Institutul de cercetări în construcții
și economia construcțiilor (INCERC), București

539.4

În lucrare se stabilesc momentele plastice ale plăcilor de beton armat de formă dreptunghiulară rezemate pe tot conturul, solicitate de încărcări temporare de tip hidrostatic acționînd pe toată suprafața plăcilor. Sînt luate în considerație opt tipuri de plăci, în funcție de modul de rezemare a celor patru laturi (simplă rezemare sau încastrare perfectă). Baza teoretică a studiului este constituită de principiile metodei de calcul la starea-limită de rezistență aplicate teoriei liniilor de rupere și de concepția coeficientului de redistribuție. Pentru rezolvarea ecuației de echilibru plastic a acestor elemente de construcție se folosește criteriul redistribuției minime.

1. NOTAȚII

l_1, l_2 — deschiderile plăcilor, l_2 fiind deschiderea pe direcția pe care are loc variația încărcării temporare;

L_M — lucrul mecanic virtual al momentelor plastice în stadiul de mecanism al plăcilor;

L_P — lucrul mecanic al încărcării temporare de calcul în stadiul de mecanism al plăcilor;

M_{p1} — momentul plastic pozitiv pe unitatea de lungime, acționînd pe direcția deschiderii l_1;

M_{p2} — momentul plastic pozitiv pe unitatea de lungime, acționînd pe direcția deschiderii l_2;

M'_{p1} — valoarea absolută a momentului plastic negativ, acționînd pe unitatea de lungime a laturilor încastrate de lungime l_2;

M'_{p2} — valoarea absolută a momentului plastic negativ, acționînd pe unitatea de lungime a laturii încastrate de lungime l_1, de-a lungul căreia ordonata diagramei încărcării temporare este nulă;

M''_{p2} — valoarea absolută a momentului plastic negativ, acționînd pe unitatea de lungime a laturii încastrate de lungime l_1, de-a lungul căreia ordonata diagramei încărcării temporare este maximă;

p_n — încărcare uniform distribuită pe unitatea de suprafață, reprezentînd ordonata maximă a diagramei încărcării temporare normate;

p_u — încărcare uniform distribuită pe unitatea de suprafață, reprezentînd ordonata maximă a diagramei încărcării temporare de calcul;

p_1 — încărcare uniform distribuită pe unitatea de suprafață, reprezentînd ordonata maximă a diagramei încărcării temporare corespunzătoare atingerii limitei de curgere de calcul simultan în punctele cele mai solicitate ale plăcilor;

$r = \frac{p_u}{p_1}$ — coeficientul de redistribuție, determinat în ipoteza transformării plăcilor de mecanisme sub acțiunea încărcării temporare de calcul;

$r_a = \frac{p_u}{p_n}$ — valoarea-limită a coeficientului de redistribuție, rezultată din condiția privind comportarea elastică a armăturii plăcilor sub acțiunea încărcării temporare normate;

x_1, x_2 — distanțe care caracterizează schema de rupere I;

x_3 — distanță care caracterizează schema de rupere II;

x_4, x_5 — distanțe care caracterizează schema de rupere III;

α_1, α'_1, α_2, α'_2, α''_2 — coeficienți de influență ai momentelor elastice maxime (în valoare absolută) din punctele cele mai solicitate ale plăcilor;

m_1, m'_1, m_2, m'_2, m''_2 — coeficienții de influență ai momentelor plastice ale plăcilor;

$$\lambda = \frac{l_2}{l_1}; \quad \xi_1 = \frac{x_1}{l_1}; \quad \xi_2 = \frac{x_2}{l_2};$$

$$\xi_3 = \frac{x_3}{l_2}; \quad \xi_4 = \frac{x_4}{l_2}; \quad \xi_5 = \frac{x_5}{l_2}.$$

II. SCHEME DE RUPERE

Schemele posibile de rupere ale plăcilor dreptunghiulare de beton armat rezemate pe tot conturul, solicitate de încărcări temporare de tip hidrostatic, sînt reprezentate în figura 1.

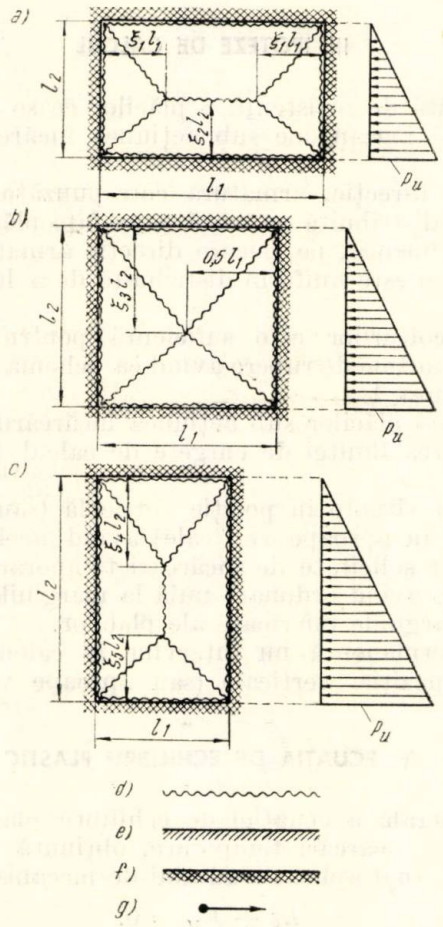


Fig. 1. — Scheme de rupere şi reprezentări convenţionale:

a — schema de rupere I; *b* — schema de rupere II; *c* — schema de rupere III; *d* — linie de rupere; *e* — latură simplu rezemată; *f* — latură încastrată perfect; *g* — direcţie de acţiune a momentelor plastice.

Ruperea plăcilor după una dintre cele trei scheme cuprinse în figura 1 depinde de raportul laturilor, de modul de rezemare pe contur şi de modul de distribuire a armăturii pe cele două direcţii.

Observație. Din punct de vedere fizic, schema de rupere II reprezintă limita dintre schemele de rupere I și III. Din punct de vedere mecanic însă, schema de rupere II este independentă de celelalte două scheme, întrucît expresia condiției de maximum a momentelor plastice corespunzătoare schemei de rupere II nu reprezintă o particularizare a expresiilor condiției menționate, corespunzătoare schemelor de rupere I și III.

Figura 1 cuprinde, de asemenea, reprezentarea convențională a liniilor de rupere, a laturilor simplu rezemate și încastrate perfect și a direcției de acțiune a momentelor plastice.

III. IPOTEZE DE CALCUL

1. Starea-limită de rezistență a plăcilor ce se studiază corespunde transformării lor în mecanisme sub acțiunea încărcărilor temporare de calcul.

2. Pe fiecare direcție, armătura corespunzătoare momentelor pozitive este uniform distribuită pe toată suprafața plăcilor, fără a se ridica pe reazeme. De asemenea, pe fiecare direcție armătura corespunzătoare momentelor negative este uniform distribuită de-a lungul laturilor încastrate ale plăcilor.

3. Armarea colțurilor este suficientă pentru a asigura plăcilor formarea unor mecanisme de rupere avînd ca schemă una dintre schemele reprezentate în figura 1.

4. Comportarea plăcilor sub acțiunea încărcărilor este perfect elastică pînă la atingerea limitei de curgere de calcul într-un singur punct al armăturii.

5. Plăcile sînt situate în poziție verticală (sau aproape verticală), laturile verticale (sau aproape verticale) avînd același tip de rezemare.

6. Plăcile sînt solicitate de încărcări temporare de tip hidrostatic, diagramele acestora avînd ordonată nulă la marginile superioare și ordonată maximă la marginile inferioare ale plăcilor.

Încărcarea permanentă nu intervine în calculul la încovoiere al plăcilor, datorită poziției verticale (sau aproape verticale) a acestora.

IV. ECUAȚIA DE ECHILIBRU PLASTIC

Expresia generală a ecuației de echilibru plastic a unei structuri solicitate numai de încărcări temporare, obținută pe baza principiului lucrului mecanic virtual aplicat stadiului de mecanism al structurii, este

$$L_P + L_M = 0. \tag{1}$$

Pentru cele trei scheme de rupere ale plăcilor ce se studiază, această ecuație devine :

Schema de rupere I (fig. 1 a)

$$\frac{2\lambda}{\xi_1} M_{p1} + \frac{1}{\lambda\xi_2(1-\xi_2)} M_{p2} + \frac{2\lambda}{\xi_1} M'_{p1} + \frac{1}{\lambda(1-\xi_2)} M'_{p2} + \frac{1}{\lambda\xi_2} M''_{p2} = \frac{\lambda}{12}(4 - 3\xi_1 - 2\xi_2 + 2\xi_1\xi_2)\, p_u\, l_1^2 . \tag{2}$$

Schema de rupere II (fig. 1 b)

$$4\lambda M_{p1} + \frac{1}{\lambda\xi_3(1-\xi_3)} M_{p2} + 4\lambda M'_{p1} + \frac{1}{\lambda\xi_3} M'_{p2} + \frac{1}{\lambda(1-\xi_3)} M''_{p2} = \\ = \frac{\lambda}{24}(3 + 2\xi_3) p_u l_1^2 . \tag{3}$$

Schema de rupere III (fig. 1 c)

$$4\lambda M_{p1} + \frac{\xi_4 + \xi_5}{\lambda\xi_4\xi_5} M_{p2} + 4\lambda M'_{p1} + \frac{1}{\lambda\xi_4} M'_{p2} + \frac{1}{\lambda\xi_5} M''_{p2} = \\ = \frac{\lambda}{24}(6 - 4\xi_5 + \xi_5^2 - \xi_4^2) p_u l_1^2 . \tag{4}$$

V. EXPRESIILE MOMENTELOR PLASTICE

Momentele plastice ale plăcilor ce se studiază au următoarele expresii generale :

$$\left.\begin{aligned} M_{p1} &= m_1 p_u l_1^2 ; \quad M'_{p1} = m'_1 p_u l_1^2 \\ M_{p2} &= m_2 p_u l_1^2 ; \quad M'_{p2} = m'_2 p_u l_1^2 \\ M''_{p2} &= m''_2 p_u l_1^2 . \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Pentru determinarea coeficienților m_1, m'_1, m_2, m'_2 și m''_2 corespunzători celor trei scheme de rupere, pe lîngă ecuația de echilibru plastic corespunzătoare fiecăreia dintre aceste scheme sînt necesare ecuații suplimentare. Stabilirea acestor ecuații se face pe baza criteriului redistribuției minime [1], [2], a cărui aplicare asigură unei plăci armate pe două direcții cele mai favorabile condiții de rupere și de exploatare, precum și un volum de armătură minimum sau aproape minimum [3].

Potrivit acestui criteriu, valorile momentelor plastice ale unei plăci se stabilesc astfel încît limita de curgere de calcul să fie atinsă simultan în punctele cele mai solicitate ale plăcii.

Pe de altă parte, momentul plastic al unei secțiuni de beton armat este egal cu momentul încovoietor corespunzător atingerii limitei de curgere de calcul în armătura întinsă a secțiunii.

De aici rezultă următoarele egalități :

$$\left.\begin{aligned} M_{p1} &= \alpha_1 p_1 l_1^2 ; \quad M'_{p1} = \alpha'_1 p_1 l_1^2 \\ M_{p2} &= \alpha_2 p_1 l_1^2 ; \quad M'_{p2} = \alpha'_2 p_1 l_1^2 \\ M''_{p2} &= \alpha''_2 p_1 l_1^2 . \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Prin identificarea momentelor plastice date de relaţiile (5) şi (6) şi eliminarea încărcării p_1 se obţin următoarele ecuaţii suplimentare :

$$\left.\begin{aligned} m_1' &= \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} m_1 ; \quad m_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} m_1 \\ m_2' &= \frac{\alpha_2'}{\alpha_1} m_1 ; \quad m_2'' = \frac{\alpha_2''}{\alpha_1} m_1 . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Relaţiile (7) arată că momentele plastice ale unei plăci, stabilite pe baza criteriului redistribuţiei minime, pot fi exprimate în funcţie de unul dintre aceste momente, considerat ca moment plastic de referinţă. În cadrul acestui studiu, momentul plastic de referinţă este M_{p1}.

Expresia coeficientului m_1, obţinută din ecuaţia de echilibru plastic corespunzătoare fiecărei scheme de rupere, este :

Schema de rupere I

$$m_1 = \frac{\alpha_1 \lambda^2}{12} \cdot \frac{\xi_1 \xi_2 (1 - \xi_2)(4 - 3\xi_1 - 2\xi_2 + 2\xi_1\xi_2)}{(\alpha_2 + \alpha_2'')\xi_1 + 2\lambda^2(\alpha_1 + \alpha_1')\xi_2 + (\alpha_2' - \alpha_2'')\xi_1\xi_2 - 2\lambda^2(\alpha_1 + \alpha_1')\xi_2^2} , \tag{8}$$

Schema de rupere II

$$m_1 = \frac{\alpha_1 \lambda^2}{24} \cdot \frac{\xi_3 (1 - \xi_3)(3 + 2\xi_3)}{(\alpha_2 + \alpha_2') + [4\lambda^2(\alpha_1 + \alpha_1') - (\alpha_2' - \alpha_2'')]\xi_3 - 4\lambda^2(\alpha_1 + \alpha_1')\xi_3^2} , \tag{9}$$

Schema de rupere III

$$m_1 = \frac{\alpha_1 \lambda^2}{24} \cdot \frac{\xi_4 \xi_5 (6 - 4\xi_5 + \xi_5^2 - \xi_4^2)}{(\alpha_2 + \alpha_2'')\xi_4 + (\alpha_2 + \alpha_2')\xi_5 + 4\lambda^2(\alpha_1 + \alpha_1')\xi_4\xi_5} , \tag{10}$$

Încărcarea p_1 şi coeficientul de redistribuţie r au expresiile

$$p_1 = \frac{m_1}{\alpha_1} \cdot p_u , \tag{11}$$

respectiv

$$r = \frac{\alpha_1}{m_1} , \tag{12}$$

în care coeficientul m_1 are valoarea dată de relaţia (8) pentru schema de rupere I, de relaţia (9) pentru schema de rupere II şi de relaţia (10) pentru schema de rupere III.

Relaţiile (8) — (10) conţin necunoscutele ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 şi ξ_5, care definesc cele trei scheme de rupere. Valorile acestor parametri se determină pe baza reciprocei teoremei cinematice a teoriei plastice a structurilor static nedeterminate.

Pentru plăcile ce se studiază, enunţul acestei reciproce este următorul. Fiind date caracteristicile statice — geometrice şi valoarea încărcării temporare de calcul ale unei plăci, ale cărei momente plastice pot fi

exprimate în funcţie de un singur moment plastic de referinţă, mărimea parametrilor (sau parametrului) care caracterizează schema reală de rupere corespunde valorii maxime a momentului plastic de referinţă.

De aici rezultă că valorile parametrilor ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 şi ξ_5 se obţin din condiţia de maximum a expresiilor (8), (9) şi (10) ale coeficientului de influenţă al momentului plastic de referinţă M_{p1}.

VI. CONDIŢIA DE MAXIMUM A MOMENTULUI PLASTIC DE REFERINŢĂ

Pentru cele trei scheme de rupere reprezentate în figura 1, condiţia de maximum a momentului plastic de referinţă M_{p1} se exprimă prin următoarele ecuaţii :

Schema de rupere I

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial m_1}{\partial \xi_1} &= 0, \\ \frac{\partial m_1}{\partial \xi_2} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

unde m_1 este dat de relaţia (8).

Schema de rupere II

$$\frac{\partial m_1}{\partial \xi_3} = 0, \tag{14}$$

unde m_1 este dat de relaţia (9).

Schema de rupere III

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial m_1}{\partial \xi_4} &= 0, \\ \frac{\partial m_1}{\partial \xi_5} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

unde m_1 este dat de relaţia (10).

Din examinarea expresiilor dezvoltate ale ecuaţiilor (13) — (15) rezultă următoarele concluzii :

— pentru schema de rupere I, valorile parametrilor ξ_1 şi ξ_2 se obţin dintr-un sistem format din două ecuaţii de gradul 5 ;

— pentru schema de rupere II, valoarea parametrului ξ_3 se obţine dintr-o ecuaţie de gradul 4 ;

— pentru schema de rupere III, valorile parametrilor ξ_4 şi ξ_5 se obţin dintr-un sistem format din două ecuaţii de gradul 4.

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii (13) şi (15) s-a făcut printr-un procedeu grafoanalitic, folosindu-se în acest scop calculatorul electronic CIFA 4 al Institutului de fizică atomică din Bucureşti.

De asemenea, rezolvarea ecuaţiei (14) s-a efectuat cu ajutorul aceluiaşi calculator electronic.

VII. COEFICIENȚI DE CALCUL

În cele ce urmează se prezintă coeficienții necesari pentru calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat solicitate de încărcări temporare de tip hidrostatic, obținuți în urma unui studiu efectuat pentru următoarele opt tipuri de rezemare a plăcilor pe contur:

tipul 1: placa simplu rezemată pe tot conturul (fig. 2 *a*);
tipul 2: placa încastrată perfect pe latura orizontală inferioară și simplu rezemată pe celelalte laturi (fig. 2 *b*);
tipul 3: placa încastrată perfect pe latura orizontală superioară și simplu rezemată pe celelalte laturi (fig. 2 *c*);
tipul 4: placa încastrată perfect pe laturile orizontale superioară și inferioară și simplu rezemată pe celelalte laturi (fig. 2 *d*);
tipul 5: placa încastrată perfect pe cele două laturi verticale (sau aproape verticale) și simplu rezemată pe celelalte două laturi (fig. 2 *e*);
tipul 6: placa simplu rezemată pe latura orizontală superioară și încastrată perfect pe celelalte laturi (fig. 2 *f*);
tipul 7: placa simplu rezemată pe latura orizontală inferioară și încastrată perfect pe celelalte laturi (fig. 2 *g*);
tipul 8: placa încastrată perfect pe tot conturul (fig. 2 *h*).

În tabelele 1—8 sînt date valorile coeficienților de influență ai momentelor elastice din punctele cele mai solicitate ale plăcilor, pentru o valoare a coeficientului lui Poisson egală cu $\frac{1}{6}$ [4].

Valorile coeficienților de influență ai momentelor plastice și ale coeficientului de redistribuție, precum și schemele de rupere și valorile parametrilor care le definesc, sînt date în tabelele 9—16.

Tabela 1

Placa 1. Caracteristici elastice

λ	α_1	α_2
0,50	0,0045	0,0129
0,60	0,0068	0,0164
0,70	0,0101	0,0192
0,80	0,0138	0,0216
0,90	0,0177	0,0234
1,00	0,0215	0,0244
1,11	0,0259	0,0258
1,25	0,0313	0,0270
1,43	0,0378	0,0281
1,67	0,0454	0,0286
2,00	0,0538	0,0285

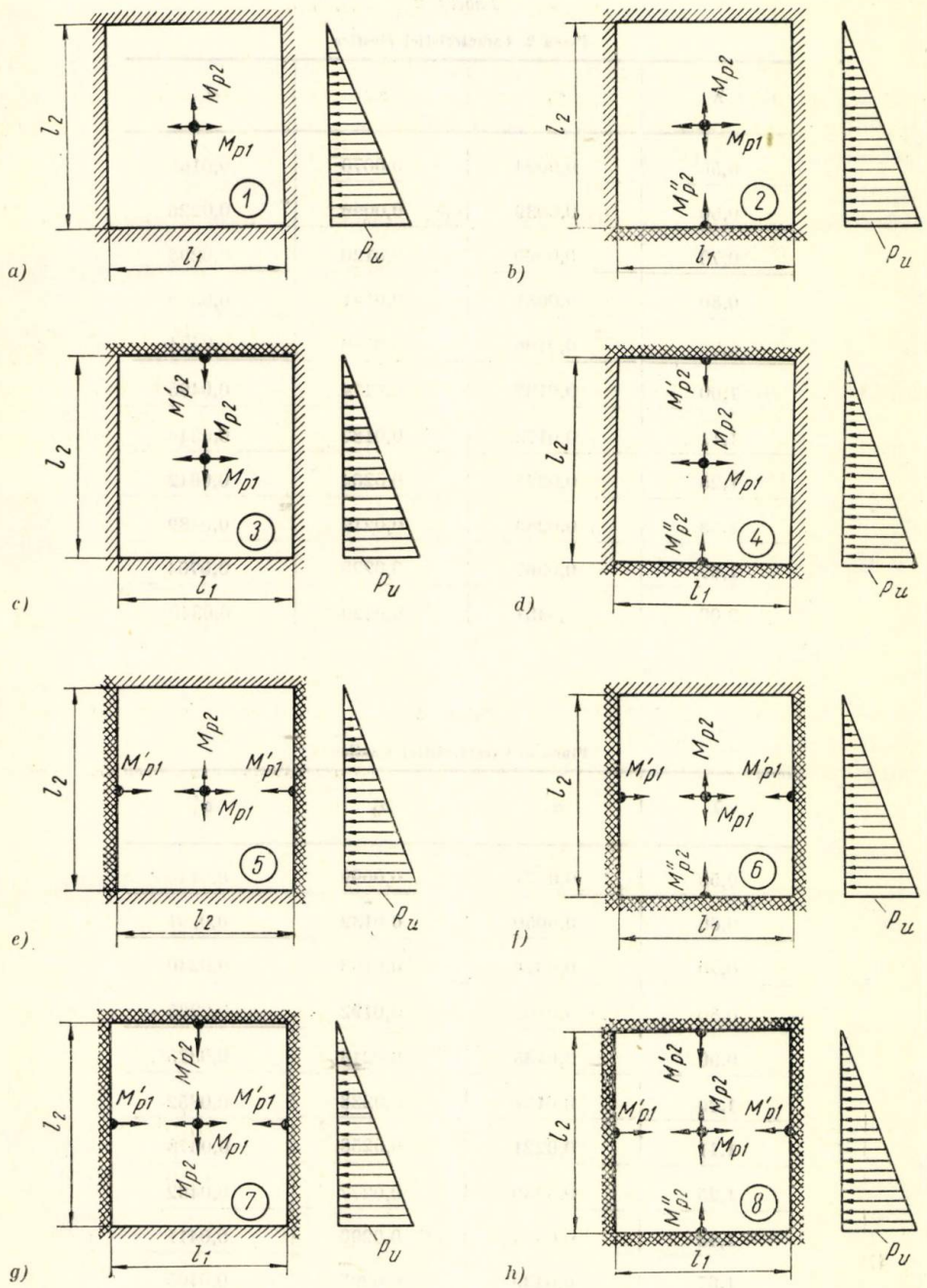


Fig. 2. — Tipuri de plăci funcție de modul de rezemare pe contur.

Tabela 2

Placa 2. Caracteristici elastice

λ	α_1	α_2	α_2''
0,50	0,0024	0,0070	0,0163
0,60	0,0039	0,0096	0,0226
0,70	0,0060	0,0120	0,0293
0,80	0,0081	0,0141	0,0359
0,90	0,0106	0,0159	0,0424
1,00	0,0137	0,0174	0,0495
1,11	0,0175	0,0187	0,0549
1,25	0,0225	0,0204	0,0612
1,43	0,0288	0,0219	0,0689
1,67	0,0367	0,0228	0,0764
2,00	0,0451	0,0229	0,0840

Tabela 3

Placa 3. Caracteristici elastice

λ	α_1	α_2	α_2'
0,50	0,0034	0,0099	0,0140
0,60	0,0050	0,0132	0,0191
0,70	0,0074	0,0163	0,0240
0,80	0,0102	0,0192	0,0285
0,90	0,0135	0,0218	0,0325
1,00	0,0174	0,0238	0,0352
1,11	0,0221	0,0258	0,0378
1,25	0,0280	0,0277	0,0402
1,43	0,0353	0,0290	0,0411
1,67	0,0439	0,0298	0,0405
2,00	0,0535	0,0295	0,0377

Tabela 4

Placa 4. Caracteristici elastice

λ	α_1	α_2	α_2'	α_2''
0,50	0,0018	0,0054	0,0084	0,0128
0,60	0,0029	0,0075	0,0120	0,0182
0,70	0,0045	0,0098	0,0159	0,0242
0,80	0,0063	0,0120	0,0198	0,0302
0,90	0,0083	0,0142	0,0235	0,0369
1,00	0,0104	0,0161	0,0267	0,0432
1,11	0,0139	0,0183	0,0298	0,0504
1,25	0,0187	0,0203	0,0323	0,0575
1,43	0,0253	0,0221	0,0342	0,0676
1,67	0,0330	0,0225	0,0360	0,0748
2,00	0,0427	0,0234	0,0374	0,0840

Tabela 5

Placa 5. Caracteristici elastice

λ	α_1	α_2	α_1'
0,50	0,0047	0,0111	0,0153
0,60	0,0072	0,0128	0,0201
0,70	0,0099	0,0138	0,0255
0,80	0,0124	0,0146	0,0304
0,90	0,0146	0,0152	0,0344
1,00	0,0165	0,0154	0,0375
1,11	0,0185	0,0158	0,0405
1,25	0,0206	0,0156	0,0433
1,43	0,0229	0,0150	0,0473
1,67	0,0247	0,0138	0,0521
2,00	0,0260	0,0117	0,0572

Tabela 6

Placa 6. Caracteristici elastice

λ	α_1	α_2	α_1'	α_2''
0,50	0,0022	0,0065	0,0091	0,0154
0,60	0,0038	0,0082	0,0129	0,0203
0,70	0,0058	0,0095	0,0170	0,0247
0,80	0,0079	0,0102	0,0210	0,0285
0,90	0,0101	0,0109	0,0248	0,0315
1,00	0,0121	0,0112	0,0285	0,0340
1,11	0,0142	0,0117	0,0324	0,0362
1,25	0,0163	0,0118	0,0366	0,0384
1,43	0,0183	0,0121	0,0413	0,0406
1,67	0,0212	0,0125	0,0459	0,0428
2,00	0,0244	0,0130	0,0498	0,0448

Tabela 7

Placa 7. Caracteristici elastice

λ	α_1	α_2	α_1'	α_2'
0,50	0,0031	0,0091	0,0116	0,0128
0,60	0,0049	0,0113	0,0165	0,0164
0,70	0,0075	0,0132	0,0219	0,0187
0,80	0,0102	0,0147	0,0269	0,0200
0,90	0,0128	0,0155	0,0312	0,0207
1,00	0,0156	0,0157	0,0361	0,0205
1,11	0,0176	0,0162	0,0392	0,0192
1,25	0,0201	0,0160	0,0432	0,0179
1,43	0,0225	0,0156	0,0483	0,0158
1,67	0,0249	0,0147	0,0532	0,0134
2,00	0,0264	0,0139	0,0591	0,0111

Tabela 8

Placa 8. Caracteristici elastice

λ	α_1	α_2	α_1'	α_2'	α_2''
0,50	0,0021	0,0052	0,0074	0,0081	0,0124
0,60	0,0030	0,0069	0,0107	0,0111	0,0171
0,70	0,0042	0,0084	0,0146	0,0136	0,0217
0,80	0,0061	0,0099	0,0186	0,0157	0,0261
0,90	0,0084	0,0110	0,0231	0,0171	0,0300
1,00	0,0105	0,0116	0,0270	0,0176	0,0330
1,11	0,0128	0,0122	0,0313	0,0174	0,0359
1,25	0,0153	0,0124	0,0359	0,0169	0,0383
1,43	0,0179	0,0124	0,0414	0,0155	0,0406
1,67	0,0211	0,0125	0,0461	0,0135	0,0428
2,00	0,0238	0,0129	0,0500	0,0110	0,0448

Tabela 9

Placa 1. Caracteristici plastice

λ	m_1	m_2	r	Schema de rupere	ξ_1	ξ_2	ξ_4	ξ_5
0,50	0,0039	0,0113	1,14	I	0,21	0,41	—	—
0,60	0,0061	0,0147	1,11	I	0,26	0,41	—	—
0,70	0,0093	0,0177	1,09	I	0,32	0,41	—	—
0,80	0,0127	0,0199	1,08	I	0,37	0,40	—	—
0,90	0,0164	0,0217	1,08	I	0,42	0,40	—	—
1,00	0,0200	0,0227	1,08	I	0,46	0,39	—	—
1,11	0,0238	0,0235	1,09	III	—	—	0,61	0,38
1,25	0,0280	0,0242	1,12	III	—	—	0,57	0,33
1,43	0,0327	0,0243	1,16	III	—	—	0,52	0,29
1,67	0,0375	0,0237	1,21	III	—	—	0,47	0,24
2,00	0,0423	0,0224	1,27	III	—	—	0,41	0,19

Tabela 10

Placa 2. Caracteristici plastice

$\lambda = \frac{l_2}{l_1}$	m_1	m_2	m_2''	r	Schema de rupere	ξ_1	ξ_2	ξ_4	ξ_5
0,50	0,0020	0,0058	0,0136	1,20	I	0,15	0,52	—	—
0,60	0,0031	0,0076	0,0180	1,23	I	0,19	0,52	—	—
0,70	0,0047	0,0094	0,0229	1,28	I	0,24	0,52	—	—
0,80	0,0064	0,0112	0,0284	1,28	I	0,28	0,52	—	—
0,90	0,0084	0,0126	0,0336	1,27	I	0,32	0,52	—	—
1,00	0,0107	0,0136	0,0387	1,28	I	0,36	0,52	—	—
1,11	0,0135	0,0144	0,0423	1,30	I	0,41	0,52	—	—
1,25	0,0171	0,0155	0,0465	1,32	I	0,46	0,53	—	—
1,43	0,0213	0,0162	0,0510	1,35	III	—	—	0,46	0,51
1,67	0,0263	0,0163	0,0547	1,40	III	—	—	0,41	0,44
2,00	0,0317	0,0162	0,0592	1,42	III	—	—	0,37	0,37

Tabela 11

Placa 3. Caracteristici plastice

$\lambda = \frac{l_2}{l_1}$	m_1	m_2	m_2'	r	Schema de rupere	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
0,50	0,0028	0,0082	0,0115	1,22	I	0,16	0,30	—	—	—
0,60	0,0041	0,0108	0,0157	1,22	I	0,20	0,30	—	—	—
0,70	0,0060	0,0132	0,0195	1,23	I	0,24	0,30	—	—	—
0,80	0,0083	0,0156	0,0232	1,23	I	0,29	0,30	—	—	—
0,90	0,0110	0,0178	0,0265	1,23	I	0,33	0,30	—	—	—
1,00	0,0141	0,0193	0,0285	1,23	I	0,38	0,30	—	—	—
1,11	0,0180	0,0210	0,0308	1,23	I	0,42	0,30	—	—	—
1,25	0,0221	0,0219	0,0318	1,26	I	0,47	0,30	—	—	—
1,43	0,0273	0,0225	0,0318	1,29	II	—	—	0,69	—	—
1,67	0,0330	0,0224	0,0305	1,33	III	—	—	—	0,61	0,22
2,00	0,0391	0,0216	0,0276	1,37	III	—	—	—	0,53	0,19

Tabela 12

Placa 4. Caracteristici plastice

$\lambda = \frac{l_2}{l_1}$	m_1	m_2	m_2'	m_2''	r	Schema de rupere	ξ_1	ξ_2	ξ_4	ξ_5
0,50	0,0015	0,0045	0,0070	0,0107	1,20	I	0,13	0,42	—	—
0,60	0,0023	0,0060	0,0096	0,0145	1,26	I	0,16	0,42	—	—
0,70	0,0034	0,0074	0,0120	0,0183	1,32	I	0,19	0,42	—	—
0,80	0,0047	0,0090	0,0148	0,0225	1,34	I	0,23	0,42	—	—
0,90	0,0061	0,0105	0,0173	0,0271	1,36	I	0,26	0,42	—	—
1,00	0,0075	0,0116	0,0192	0,0311	1,39	I	0,29	0,42	—	—
1,11	0,0099	0,0130	0,0212	0,0359	1,40	I	0,33	0,42	—	—
1,25	0,0132	0,0143	0,0228	0,0406	1,42	I	0,38	0,42	—	—
1,43	0,0175	0,0153	0,0236	0,0467	1,45	I	0,44	0,42	—	—
1,67	0,0226	0,0155	0,0247	0,0512	1,46	III	—	—	0,56	0,43
2,00	0,0287	0,0158	0,0252	0,0563	1,49	III	—	—	0,50	0,36

Tabela 13

Placa 5. Caracteristici plastice

$\lambda = \frac{l_2}{l_1}$	m_1	m_2	m_1'	r	Schema de rupere	ξ_1	ξ_2	ξ_4	ξ_5
0,50	0,0032	0,0076	0,0104	1,47	I	0,39	0,41	—	—
0,60	0,0049	0,0087	0,0137	1,47	I	0,45	0,40	—	—
0,70	0,0067	0,0094	0,0173	1,48	III	—	—	0,61	0,37
0,80	0,0082	0,0097	0,0201	1,51	III	—	—	0,57	0,33
0,90	0,0096	0,0100	0,0226	1,52	III	—	—	0,53	0,29
1,00	0,0108	0,0101	0,0245	1,53	III	—	—	0,49	0,26
1,11	0,0119	0,0102	0,0261	1,55	III	—	—	0,46	0,24
1,25	0,0132	0,0100	0,0277	1,56	III	—	—	0,43	0,21
1,43	0,0145	0,0095	0,0299	1,58	III	—	—	0,38	0,17
1,67	0,0154	0,0086	0,0324	1,61	III	—	—	0,33	0,14
2,00	0,0161	0,0073	0,0354	1,62	III	—	—	0,28	0,11

Tabela 14

Placa 6. Caracteristici plastice

$\lambda = \frac{l_2}{l_1}$	m_1	m_2	m_1'	m_2''	r	Schema de rupere	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
0,50	0,0015	0,0044	0,0062	0,0105	1,47	I	0,30	0,55	—	—	—
0,60	0,0025	0,0054	0,0085	0,0134	1,52	I	0,36	0,55	—	—	—
0,70	0,0037	0,0061	0,0109	0,0158	1,57	I	0,42	0,54	—	—	—
0,80	0,0049	0,0063	0,0130	0,0176	1,62	II	—	—	0,49	—	—
0,90	0,0062	0,0067	0,0152	0,0193	1,63	III	—	—	—	0,46	0,50
1,00	0,0074	0,0069	0,0174	0,0207	1,64	III	—	—	—	0,43	0,46
1,11	0,0086	0,0071	0,0197	0,0219	1,65	III	—	—	—	0,40	0,42
1,25	0,0097	0,0071	0,0218	0,0229	1,68	III	—	—	—	0,38	0,37
1,43	0,0107	0,0071	0,0241	0,0243	1,71	III	—	—	—	0,35	0,33
1,67	0,0122	0,0072	0,0265	0,0247	1,74	III	—	—	—	0,31	0,28
2,00	0,0139	0,0074	0,0284	0,0255	1,76	III	—	—	—	0,28	0,23

Tabela 15

Placa 7. Caracteristici plastice

$\lambda = \frac{l_2}{l_1}$	m_1	m_2	m_1'	m_2'	r	Schema de rupere	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
0,50	0,0020	0,0059	0,0075	0,0083	1,55	I	0,31	0,32	—	—	—
0,60	0,0031	0,0072	0,0104	0,0104	1,58	I	0,37	0,31	—	—	—
0,70	0,0046	0,0081	0,0135	0,0115	1,64	I	0,42	0,30	—	—	—
0,80	0,0062	0,0090	0,0164	0,0122	1,65	II	—	—	0,71	—	—
0,90	0,0077	0,0093	0,0188	0,0125	1,67	III	—	—	—	0,69	0,29
1,00	0,0093	0,0094	0,0215	0,0122	1,68	III	—	—	—	0,64	0,25
1,11	0,0105	0,0097	0,0233	0,0115	1,68	III	—	—	—	0,59	0,23
1,25	0,0120	0,0096	0,0258	0,0107	1,68	III	—	—	—	0,53	0,20
1,43	0,0134	0,0093	0,0287	0,0094	1,68	III	—	—	—	0,48	0,17
1,67	0,0147	0,0087	0,0314	0,0079	1,70	III	—	—	—	0,42	0,14
2,00	0,0153	0,0081	0,0342	0,0065	1,73	III	—	—	—	0,35	0,11

Tabela 16

Placa 8. Caracteristici plastice

$\lambda = \frac{l_2}{l_1}$	m_1	m_2	m'_1	m'_2	m''_2	r	Schema de rupere	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
0,50	0,0014	0,0035	0,0049	0,0054	0,0083	1,50	I	0,26	0,44	—	—	—
0,60	0,0019	0,0044	0,0068	0,0070	0,0108	1,58	I	0,31	0,44	—	—	—
0,70	0,0025	0,0050	0,0087	0,0081	0,0129	1,68	I	0,36	0,44	—	—	—
0,80	0,0036	0,0059	0,0110	0,0093	0,0154	1,70	I	0,41	0,44	—	—	—
0,90	0,0048	0,0063	0,0132	0,0098	0,0172	1,75	I	0,45	0,44	—	—	—
1,00	0,0060	0,0067	0,0154	0,0101	0,0189	1,75	II	—	—	0,57	—	—
1,11	0,0072	0,0069	0,0177	0,0098	0,0205	1,77	III	—	—	—	0,54	0,40
1,25	0,0086	0,0070	0,0202	0,0095	0,0215	1,78	III	—	—	—	0,50	0,36
1,43	0,0100	0,0070	0,0231	0,0087	0,0227	1,79	III	—	—	—	0,45	0,32
1,67	0,0117	0,0070	0,0257	0,0075	0,0238	1,80	III	—	—	—	0,39	0,27
2,00	0,0132	0,0072	0,0277	0,0061	0,0248	1,81	III	—	—	—	0,34	0,23

VIII. MOMENTE DE CALCUL

Momentele plastice determinate pe baza criteriului redistribuției minime în ipoteza transformării plăcilor în mecanisme sub acțiunea încărcărilor temporaré de calcul sînt momente plastice de calcul atîta timp cît este îndeplinită condiția $r \leqslant r_a$, respectiv $p_1 \geqslant p_n$ [1], [2].

În cazurile în care $r > r_a$, respectiv $p_1 < p_n$, momentele plastice de calcul sînt date de relațiile [1], [2]

$$\left.\begin{aligned} M_{p1} &= \alpha_1 p_n l_1^2; \quad M'_{p1} = \alpha'_1 p_n l_1^2 \\ M_{p2} &= \alpha_2 p_n l_1^2; \quad M'_{p2} = \alpha'_2 p_n l_1^2 \\ M''_{p2} &= \alpha''_2 p_n l_1^2. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Pentru aceste valori ale momentelor plastice de calcul, încărcarea p_1, corespunzătoare atingerii limitei de curgere de calcul simultan în punctele cele mai solicitate ale armăturii, este egală cu încărcarea temporară normată p_n. De asemenea, pentru $r > r_a$ momentelor plastice de calcul date de relațiile (16) le corespunde o redistribuție parțială a eforturilor, caracterizată prin coeficientul de redistribuție r_a.

În calculul plastic al plăcilor de beton armat bazat pe criteriul redistribuției minime, momentele plastice de calcul reprezintă în același timp momente de rupere de calcul în ceea ce privește dimensionarea armăturii [5]. Această dimensionare se face pe baza prescripțiilor pentru calculul secțiunilor de beton armat la starea limită de rezistență [6], [7].

IX. ÎNCASTRĂRI ELASTICE

În numeroase cazuri practice, încastrările plăcilor nu sînt perfecte, ci elastice. Prin definiție, se denumește grad de încastrare elastică al unei laturi raportul dintre momentul elastic efectiv și momentul elastic de încastrare perfectă, determinate pentru aceeași valoare a încărcării care solicită placa.

Determinarea momentelor plastice în funcție de mărimea gradului de încastrare al laturilor încastrate elastic ale plăcilor reprezintă însă o operație laborioasă. De aceea în astfel de cazuri elaborarea unor procedee aproximative de calcul prezintă un interes deosebit. Dacă laturile încastrate elastic au același grad de încastrare, un astfel de procedeu aproximativ de calcul constă în determinarea momentelor plastice prin efectuarea unei interpolări liniare.

Pentru aceasta se consideră două cazuri-limită ale plăcii cu laturi încastrate elastic, și anume :

cazul-limită I, în care gradul de încastrare a laturilor încastrate elastic este egal cu zero (laturi simplu rezemate) ;

cazul-limită II, în care gradul de încastrare a laturilor încastrate elastic este egal cu unitatea (laturi încastrate perfect).

Se fac următoarele notații :

M_p^s — momentul plastic într-o secțiune de calcul corespunzător cazului limită I ;

M_p^i — momentul plastic într-o secțiune de calcul corespunzător cazului limită II ;

M_p — momentul plastic într-o secțiune de calcul a plăcii reale ;

ρ — gradul de încastrare elastică a laturilor plăcii pe care aceasta apare încastrată în schema ei de calcul ($0 \leqslant \rho \leqslant 1$).

Expresia generală a momentelor plastice ale plăcii cu laturi încastrate elastic, reprezentînd o interpolare liniară între cele două cazuri-limită menționate mai sus, este

$$M_p = (1 - \rho)\, M_p^s + \rho M_p^i \,. \tag{17}$$

Observație. Momentele de calcul ale plăcilor cu laturi încastrate elastic se obțin prin introducerea în relația (17) a valorilor de calcul ale momentelor plastice M_p^s și M_p^i.

X. INFLUENȚA DIFERITELOR SISTEME DE ARMARE

Momentele plastice și coeficienții de redistribuție de mai sus au fost obținuți în ipoteza că pe fiecare direcție armătura din cîmp este uniform distribuită pe unitatea de lungime și are aceeași intensitate pe toată suprafața plăcilor (sistemul de armare I, fig. 3).

În practică, armătura din cîmp poate fi așezată, de asemenea, după alte trei sisteme de armare, și anume :

1. Pe fiecare direcție, armătura se distribuie uniform pe suprafața plăcilor, cu excepția zonelor din vecinătatea laturilor perpendiculare pe

direcţia armăturii, unde o parte din această armătură se ridică pe reazeme (sistemul de armare II, fig. 4).

2. Pe fiecare direcţie, plăcile se împart în trei fîşii : una centrală şi două marginale. Armătura se distribuie uniform pe întreaga suprafaţă

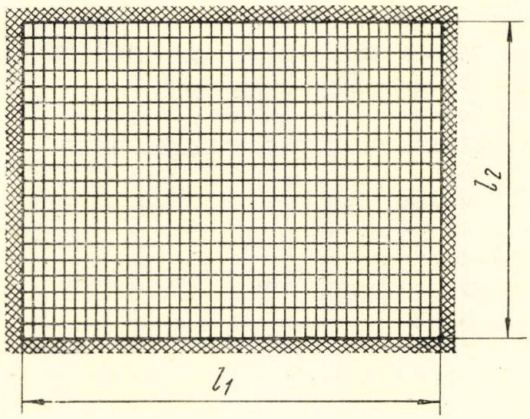


Fig. 3. — Sistemul de armare I, $l_2 < l_1$.

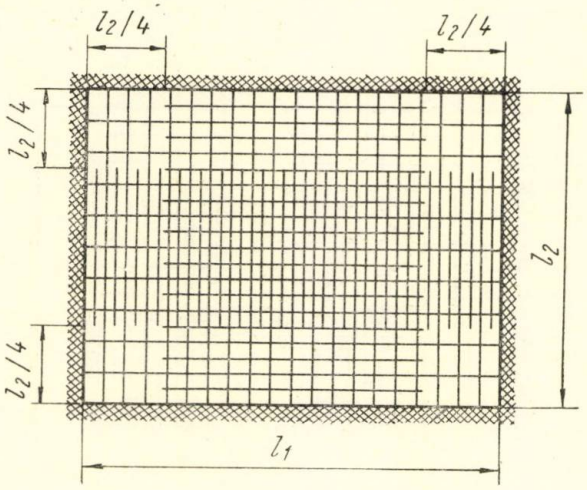


Fig. 4. — Sistemul de armare II, $l_2 < l_1$.

a fiecărei fîşii, intensitatea ei fiind însă mai mare pe suprafaţa fîşiei centrale decît cea corespunzătoare fîşiilor marginale (sistemul de armare III, fig. 5).

3. Pe fiecare direcţie, plăcile se împarte în trei fîşii : una centrală şi două marginale. Armătura se distribuie uniform pe suprafaţa fîşiei centrale, cu excepţia zonelor din vecinătatea laturilor perpendiculare pe

direcția armăturii, unde o parte din această armătură se ridică pe reazeme. Armătura de pe fîșiile marginale este de asemenea uniform distribuită pe întreaga suprafață a fiecărei fîșii, intensitatea ei fiind însă mai mică decît cea corespunzătoare fîșiei centrale (sistemul de armare IV, fig. 6).

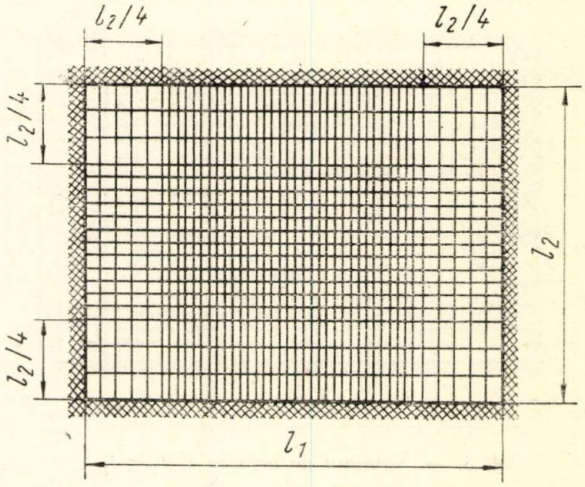


Fig. 5. — Sistemul de armare III, $l_2 < l_1$.

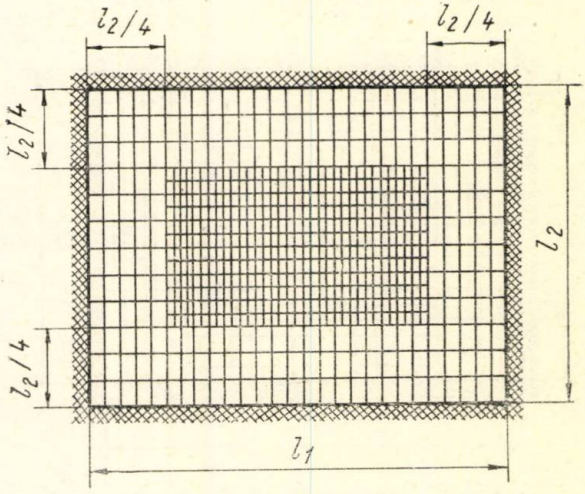


Fig. 6. — Sistemul de armare IV, $l_2 < l_1$.

În cele ce urmează se prezintă o metodă practică de determinare a momentelor plastice pentru sistemele de armare II, III și IV.

Pentru aceasta se fac următoarele ipoteze suplimentare :

1. La sistemele de armare II și IV, armătura se ridică pe fiecare direcție la o distanță de reazemele respective egală cu $\frac{l_{min}}{5}$. Se presupune

că armătura ridicată intră complet în lucru pentru preluarea momentelor pozitive la o distanță de reazeme egală cu $\frac{l_{min}}{4}$. În cele de mai sus, l_{min} reprezintă deschiderea cea mai mică a plăcii.

2. Pe ambele direcții, fișiile marginale au o lățime egală cu $\frac{l_{min}}{4}$, unde l_{min} are semnificația dată la punctul precedent.

Pentru sistemele de armare II, III și IV, momentele plastice de calcul se determină după cum urmează :

1. Dacă $r.v \leqslant r_a$, momentele plastice de calcul sînt date de relațiile

$$\left.\begin{aligned} M_{p1} &= \frac{m_1}{v} p_u l_1^2 ; \quad M'_{p1} = \frac{m'_1}{v} p_u l_1^2 \\ M_{p2} &= \frac{m_2}{v} p_u l_1^2 ; \quad M'_{p2} = \frac{m'_2}{v} p_u l_1^2 \\ M''_{p2} &= \frac{m''_2}{v} p_u l_1^2 . \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

2. Dacă $r.v > r_a$, momentele plastice de calcul sînt date de relațiile (16).

În cele de mai sus, coeficientul v este dat de relația

$$v = 1 - a.s , \tag{19}$$

unde factorul s reprezintă :

— valoarea maximă a raportului dintre secțiunea armăturii ce se ridică pe fiecare reazem și secțiunea totală a armăturii corespunzătoare din cîmp, pentru sistemul de armare II ;

— valoarea maximă a raportului dintre secțiunea armăturii suprimate pe unitatea de lățime a fiecărei fîșii marginale și secțiunea totală a armăturii pe unitatea de lățime a fîșiei centrale paralele cu fîșia marginală considerată, pentru sistemul de armare III ;

— cea mai mare valoare a rapoartelor calculate în cele două cazuri precedente, pentru sistemul de armare IV.

Valorile factorului a, depinzînd de tipul plăcii și de raportul $\lambda = \frac{l_2}{l_1}$, sînt date în tabela 17. Aceste valori au fost obținute pentru $s = 1$, considerîndu-se că parametrii schemelor de rupere corespunzătoare celor trei sisteme de armare considerate mai sus sînt egali cu cei obținuți în cazul primului sistem de armare (tabelele 9—16).

Tabela 17

Valorile coeficientului α

$\lambda = \frac{l_2}{l_1}$	Tipul plăcilor							
	1	2	3	4	5	6	7	8
0,50	0,31	0,20	0,27	0,17	0,29	0,13	0,23	0,10
0,60	0,37	0,24	0,32	0,20	0,30	0,14	0,27	0,11
0,70	0,43	0,27	0,37	0,24	0,34	0,15	0,30	0,12
0,80	0,48	0,30	0,42	0,27	0,34	0,18	0,32	0,14
0,90	0,53	0,34	0,47	0,30	0,34	0,18	0,32	0,15
1,00	0,57	0,37	0,52	0,32	0,35	0,18	0,34	0,16
1,11	0,55	0,36	0,52	0,33	0,31	0,17	0,32	0,15
1,25	0,52	0,35	0,49	0,33	0,28	0,15	0,27	0,14
1,43	0,48	0,34	0,46	0,33	0,25	0,13	0,25	0,13
1,67	0,44	0,33	0,44	0,32	0,21	0,12	0,21	0,12
2,00	0,39	0,31	0,41	0,32	0,17	0,11	0,17	0,11

XI. EXEMPLU DE CALCUL

Placă de tipul 4 solicitată de o încărcare temporară de tip hidrostatic (fig. 7) :

$$l_1 = 5{,}00 \text{ m} ; \; l_2 = 3{,}50 \text{ m} ; \; p_n = 2 \text{ t/m}^2 ; \; p_u = 3 \text{ t/m}^2 ;$$

$$\lambda = \frac{l_2}{l_1} = 0{,}7 ; \quad r_a = \frac{p_u}{p_n} = 1{,}5 .$$

Din tabela 12 rezultă

$$m_1 = 0{,}0034 ; \; m_2 = 0{,}0074 ; \; m_2' = 0{,}0120 ; \; m_2'' = 0{,}0183 ;$$

$$r = 1{,}32 .$$

Întrucît $r < r_a$, momentele plastice de calcul, care reprezintă în același timp momente de rupere de calcul în ce privește dimensionarea armăturii, sînt date de relațiile

$$M_{p1} = 0{,}0034 \, p_u \, l_1^2 ; \; M_{p2}' = 0{,}0120 \, p_u \, l_1^2 ,$$

$$M_{p2} = 0{,}0074 \, p_u \, l_1^2 ; \; M_2'' = 0{,}0183 \, p_u \, l_1^2 .$$

Pentru aprecierea eficienței economice a calculului plastic în raport cu calculul elastic, este suficientă compararea momentelor plastice de mai sus cu momentele elastice produse de încărcarea de calcul p_u.

Din tabela 4 rezultă

$$\alpha_1 = 0{,}0045 ; \; \alpha_2 = 0{,}0098 ; \; \alpha_2' = 0{,}0159 ; \; \alpha_2'' = 0{,}0242.$$

Momentele elastice în punctele cele mai solicitate ale plăcii sînt date de relaţiile

$$M_{e1} = 0{,}0045\, p_u\, l_1^2;\quad M'_{e2} = 0{,}0159\, p_u\, l_1^2,$$
$$M_{e2} = 0{,}0098\, p_u\, l_1^2;\quad M''_{e2} = 0{,}0242\, p_u\, l_1^2.$$

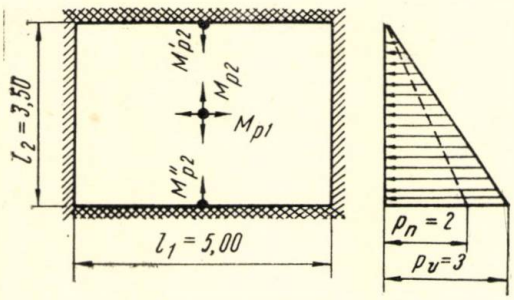


Fig. 7. — Placă de tipul 4. Elemente de calcul.

Rapoartele dintre momentele plastice de calcul şi momentele elastice corespunzătoare produse de încărcarea de calcul p_u sînt

$$\frac{M_{p1}}{M_{e1}} = \frac{M_{p2}}{M_{e2}} = \frac{M'_{p2}}{M'_{e2}} = \frac{M''_{p2}}{M''_{e2}} = 0{,}76.$$

Rezultatul de mai sus arată că pentru placa considerată momentele plastice sînt mai mici decît cele elastice cu 24%. În general, dacă $r \leqslant r_a$, rapoartele dintre momentele plastice de calcul şi momentele elastice corespunzătoare sînt egale cu $\frac{1}{r}$, iar dacă $r > r_a$, aceste rapoarte sînt egale cu $\frac{1}{r_a}$.

★

Autorul mulţumeşte tov. Vasile Mierlea, matematician la INCERC, pentru stabilirea şi aplicarea practică a algoritmului de rezolvare a ecuaţiilor corespunzătoare condiţiei de maximum a momentului plastic de referinţă.

Primită la redacţie la 17 februarie 1965.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Petcu, *Calculul plastic al plăcilor armate cruciş*, Standardizarea, **14**, *4*, 174—182 (1962).
2. — *Plastic design of reinforced concrete rectangular slabs under uniformly distributed loads*, Indian Concrete Journal, **37**, *7*, 247—253 (1963).
3. — *Criterii de soluţionare a ecuaţiei de echilibru plastic a plăcilor dreptunghiulare de beton armat*, St. cerc. mec. apl., **16**, *2*, 429—454 (1965).

4. Д. В. ВАЙНБЕРГ, Е. Д. ВАЙНБЕРГ, *Пластины, диски, балки-стенки*, Госстройиздат, УССР, Киев, 1959 г.

5. V. PETCU, *Calculul plastic al plăcilor circulare de beton armat solicitate de încărcări simetrice*, St. cerc. mec. apl., **15**, *1*, 159—188 (1964).

6. * * * *Normativ condiţionat pentru calculul construcţiilor la stări limită*, vol. I. Edit. tehnică, Bucureşti, 1962.

7. * * * *Recommandations pratiques unifiées pour le calcul et l'execution des ouvrages en béton armé*, Comité Européen du Béton, Paris, 1964.

NOTE

POSIBILITATEA LUĂRII ÎN CONSIDERARE A DEBITULUI VARIABIL LA CERCETAREA SONDELOR PRIN SCHIMBAREA DEBITULUI ÎN TREPTE

de I. CREȚU

532

Lucrarea prezintă un procedeu de luare în considerare a debitului variabil la prelucrarea datelor furnizate de cercetarea sondelor prin schimbarea debitului la trecerea sondei pe o altă duză.

Metodele [1], [2], [3], [8] de prelucrare a datelor furnizate de cercetarea sondelor prin schimbarea debitului au la bază supoziția potrivit căreia micșorarea sau mărimea debitului s-a efectuat în trepte (fig. 1*a* și *b*).

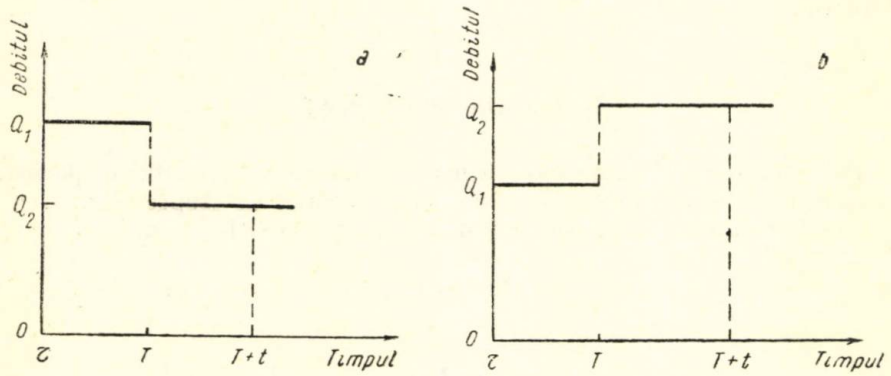


Fig. 1

Modificarea debitului sondei pentru cercetare realizîndu-se prin trecerea sondei pe o duză de diametru mai mic, respectiv mai mare, micșorarea, respectiv mărirea debitului sondei nu are loc instantaneu, ci într-o întreagă perioadă de tranziție (fig. 2).

ST. CERC. MEC. APL. TOM 20 NR. 6 P. 1499–1507 BUCUREȘTI 1965

Folosirea duzei reglabile pentru realizarea treptei de schimbare a debitului ar permite înlăturarea perioadei de tranziție prin corelarea gradului de închidere sau deschidere a duzei cu valorile debitului măsurat continuu. Practic această corelare s-ar putea efectua prin automatizarea

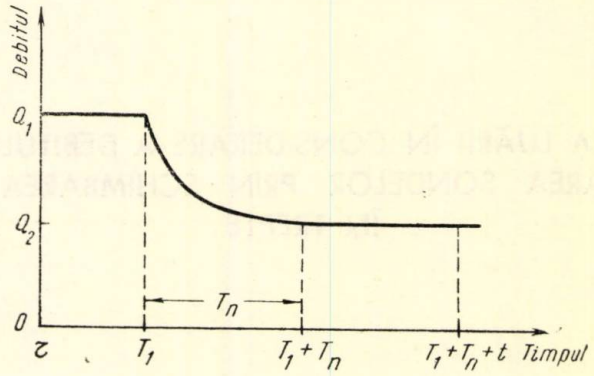


Fig. 2

manevrării duzei în perioada de tranziție de către un motor electric sau pe cale pneumatică, potrivit menținerii constante a vitezei de ridicare a nivelului lichidului în rezervorul de etalonare.

În lucrarea de față se prezintă un mod de luare în considerare a debitului variabil în cadrul prelucrării datelor de măsurători de presiune prin metoda [3], [8].

PROCEDEUL PRECONIZAT

Presupunîndu-se cunoscută legea de variație a debitului în perioada de tranziție, se aproximează aceasta cu o variație în trepte (fig. 3) și se aplică pentru căderea de presiune principiul superpoziției, rezultînd

$$p_0 - p_s = \frac{\eta}{4\pi kh}\left[Q_1 \ln \frac{2{,}25\, a\,(T_1 + T_2 + \ldots + T_n + t)}{r_s^2} + \right.$$

$$+ (Q_{01} - Q_1) \ln \frac{2{,}25\, a\,(T_2 + \ldots + T_n + t)}{r_s^2} +$$

$$+ \ldots + (Q_{0(n-1)} - Q_{0(n-2)}) \ln \frac{2{,}25\, a\,(T_n + t)}{r_s^2} +$$

$$\left. + (Q_2 - Q_{0(n-1)}) \ln \frac{2{,}25\, a}{r_s^2}\right]. \qquad (1)$$

Relaţia (1) scrisă sub forma

$$p_s = \frac{2{,}3 \cdot \eta Q_1}{4\pi kh} \log \left[\left(\frac{T_3 + \ldots + T_n + t}{T_2 + T_3 + \ldots + T_n + t} \right)^{\frac{Q_{01}}{Q_1}} \left(\frac{T_4 + \ldots + T_n + t}{T_3 + \ldots + T_n + t} \right)^{\frac{Q_{02}}{Q_1}} \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \left(\frac{t}{T_n + t} \right)^{\frac{Q_{0(n-1)}}{Q_1}} \left(\frac{T_2 + T_3 + \ldots + T_n + t}{T_1 + T_2 + \ldots + T_n + t} \right) \left(\frac{1}{t} \right)^{\frac{Q_2}{Q_1}} \right] +$$

$$+ p_0 - \frac{2{,}3\ \eta\ Q_2}{4\pi\ kh} \log \frac{2{,}25\ a}{r_s^2} \qquad (2)$$

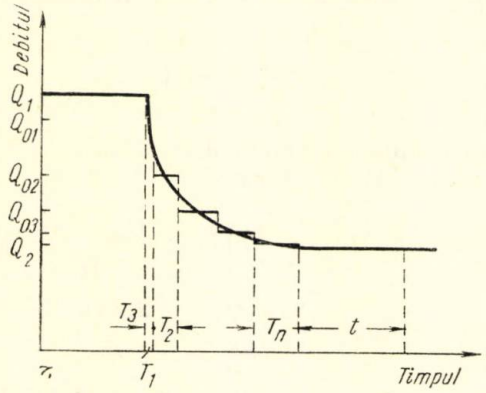


Fig. 3

arată că, prin reprezentarea grafică a valorilor presiunii de fund p_s faţă de valorile

$$\log \left(\frac{T_3 + \ldots + T_n + t}{T_2 + \ldots + T_n + t} \right)^{\frac{Q_{01}}{Q_1}} \left(\frac{T_4 + \ldots + T_n + t}{T_3 + \ldots + T_n + t} \right)^{\frac{Q_{02}}{Q_1}} \ldots \left(\frac{t}{T_n + t} \right)^{\frac{Q_{0(n-1)}}{Q_1}}$$

$$\left(\frac{T_2 + \ldots + T_n + t}{T_1 + \ldots + T_n + t} \right) \left(\frac{1}{t} \right)^{\frac{Q_2}{Q_1}},$$

se va obţine o dreaptă din a cărei pantă se poate calcula permeabilitatea, iar din ordonata punctului de intersecţie a dreptei cu verticala de abscisă 0 se poate estima presiunea statică [3].

Relaţia (2) permite reprezentarea grafică doar a valorilor presiunii de fund măsurate în perioada de cercetare corespunzătoare debitului stabilizat (Q_2).

Referindu-se la prima treaptă a debitului variabil, se poate scrie

$$p_0 - p_s = \frac{\eta}{4\pi kh} \left[Q_1 \ln \frac{2{,}25\ a\,(T_1 + T_2)}{r_s^2} + (Q_{01} - Q_1) \ln \frac{2{,}25\ aT_2}{r_s^2} \right] \qquad (3)$$

sau

$$p_s = \frac{2{,}3\,\eta Q_1}{4\pi kh}\left[\log\frac{T_2}{T_1+T_2}\left(\frac{1}{T_2}\right)^{\frac{Q_{01}}{Q_1}}\right] + p_0 - \frac{2{,}3\,\eta\,Q_{01}}{4\pi kh}\log\frac{2{,}25\,a}{r_s^2}. \quad (4)$$

Potrivit relației (4), valoarea presiunii de fund măsurate la timpul T_2, reprezentată față de

$$\log\frac{T_2^{\left(1-\frac{Q_{01}}{Q_1}\right)}}{T_1+T_2},$$

va conduce la un punct care se va situa pe o dreaptă de aceeași pantă ca în cazul ecuației (2), și anume

$$i = \frac{2{,}3\eta\,Q_1}{4\pi kh}, \quad (5)$$

însă între cele două drepte va exista un decalaj.

Scriindu-se relația (4) sub forma

$$p_s = \frac{2{,}3\,\eta Q_1}{4\pi kh}\left[\log\frac{T_2}{T_1+T_2}\left(\frac{1}{T_2}\right)^{\frac{Q_{01}}{Q_1}} - \frac{Q_{01}-Q_2}{Q_1}\log\frac{2{,}25\,a}{r_s^2}\right] + p_0 - \frac{2{,}3\,\eta Q_2}{4\pi kh}\log\frac{2{,}25\,a}{r_s^2} \quad (6)$$

și reprezentîndu-se valoarea presiunii p_s măsurate la timpul T_2 față de

$$\left[\log\frac{T_2}{T_1+T_2}\left(\frac{1}{T_2}\right)^{\frac{Q_{01}}{Q_1}} - \frac{Q_{01}-Q_2}{Q_1}\log\frac{2{,}25\,a}{r_s^2}\right],$$

punctul obținut se va situa pe dreapta corespunzătoare relației (2).

Efectuîndu-se în mod similar fiecărui punct translația corespunzătoare, se va întregi graficul, cu porțiunea aferentă perioadei debitului variabil.

Ca urmare a efectelor de sondă, graficul astfel construit cu date de șantier va prezenta de obicei o porțiune inițială curbă. Prin luarea în considerare a debitului variabil la construirea graficului, efectul predominant în deformarea inițială a acestuia va fi datorat modificării permeabilității zonei din jurul sondei, putîndu-se pune în evidență gradul de blocare a acestei zone prin compararea pantei medii a curbei cu panta porțiunii drepte.

OBȚINEREA CURBEI DE VARIAȚIE A DEBITULUI

Curba de variație a debitului se poate obține efectuîndu-se măsurători de debit la intervale scurte de timp sau adoptîndu-se dispozitivul [5] de înregistrare în timp a creșterii nivelului de lichid în rezervorul de etalonare (fig. 4).

Flotorul *1*, realizat din plută și avînd dimensiunile $250 \times 80 \times 40$ mm, urmărind nivelul lichidului din rezervor, rotește — prin intermediul firului *2* și cu concursul contragreutății *3* — rola *4*, care, la rîndul ei, transmite mișcarea demultiplicată rolei *5* prin intermediul firului *6*. De celălalt capăt al firului *6* este prins portstiloul *7*, permițînd stiloului să înscrie pe hîrtie albă, rotită o dată cu cilindrul *8* de către un mecanism de orologerie, variația nivelului în timp. La debit constant, diagrama obținută pentru creșterea nivelului în timp va fi caracterizată printr-o viteză constantă de variație

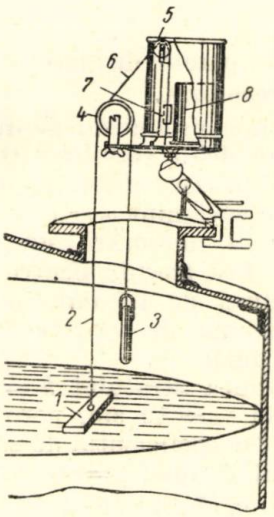


Fig. 4

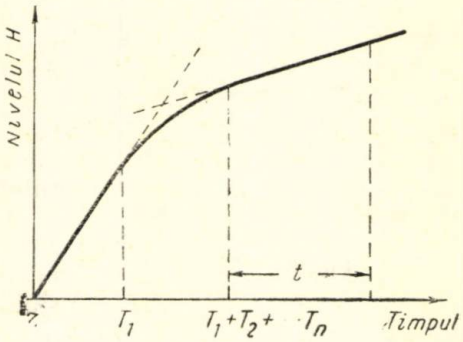


Fig. 5

a nivelului, adică printr-o pantă a curbei constantă, ceea ce corespunde unei drepte. Prin trecerea sondei pe o duză de diametru mai mic, diagrama variației nivelului în timp va indica o porțiune curbă, corespunzătoare perioadei de tranziție, după care graficul devine o dreaptă de pantă mai mică decît a dreptei inițiale (fig. 5).

Derivarea grafică a curbei nivelului din perioada de tranziție oferă curba vitezei de variație a nivelului (redusă la scară de C ori), ale cărei ordonate, multiplicate cu secțiunea rezervorului $\frac{\pi D^2}{4}$ și cu coeficientul de scară C al aparatului, permit să se obțină curba de variație a debitului. De fapt, curba vitezei reduse de variație a nivelului este identică cu cea a debitului, cu deosebire că scara ordonatelor este de $C \cdot \frac{\pi D^2}{4}$ ori mai mică.

Pe axul rolei *4* sînt fixate încă cinci role, de care se leagă firul *6* și se obțin demultiplicări în raporturile 1 : 1, 1 : 2, 1 : 5, 1 : 10, respectiv 1 : 20, coeficientul de scară C al aparatului putînd avea, după rola de cuplare a firului, valorile 1, 2, 5, 10, respectiv 20.

Obținerea curbei vitezei de variație a nivelului și deci a curbei debitului variabil se mai poate realiza prin divizarea curbei de creștere a nivelului cu verticale dispuse sau nu la distanțe egale, prin împărțirea

diferenței ordonatelor a două puncte consecutive la diferența absciselor acestor puncte și prin reprezentarea grafică a valorilor rezultate față de abscisele medii aritmetice a absciselor punctelor consecutive.

APLICAREA PRACTICĂ

În cele ce urmează se prezintă un exemplu ipotetic de luare în considerare a debitului variabil prin procedeul preconizat.

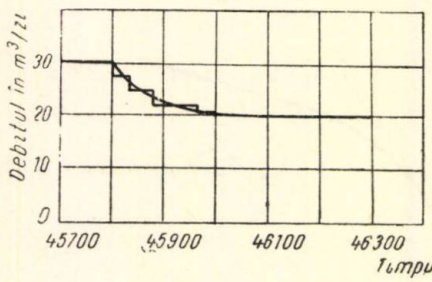


Fig. 6

O sondă producînd pe duza de 5,5 mm un debit stabilizat $Q_1 = 30$ m³/zi țiței de viscozitate dinamică în condiții de zăcămînt $\eta = 1{,}5$ cP și cu un factor al micșorării de volum $b_t = 1{,}1$ a fost trecută pentru cercetare pe duza de 4,5 mm, obținîndu-se diagrama de variație a debitului din figura 6.

Grosimea stratului $h = 10$ m, raza sondei $r_s = 10$ cm, porozitatea $m = 0{,}20$, iar coeficientul de compresibilitate al țițeiului $\beta = 50 \cdot 10^{-6}$ 1/at.

Volumul de țiței produs de sondă pînă la data cercetării a fost $V = 954{,}01$ m³, corespunzînd $T_1 = \dfrac{V}{Q_1} = \dfrac{954{,}01}{30} = 45\,800$ min.

Aproximîndu-se curba debitului variabil cu o variație în cinci trepte (fig. 6), din diagrama înregistrată de manometrul diferențial de fund de mare sensibilitate tip TP s-au citit valorile presiunii de fund corespunzătoare treptelor și a șase puncte (din oră în oră) din domeniul debitului stabilizat Q_2.

Aceste valori sînt prezentate în tabela 1, împreună cu valorile $-\log B$.

Tabela 1

Timpul în minute	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	t					
	45 800	30	45	85	40	60	120	180	240	300	360
Debitul în m³/zi	30	28	25	22	20,5	20	20	20	20	20	20
Presiunea p_s în at	136,45	137,46	138,96	139,78	141,79	142	142,42	142,57	142,69	142,78	142,88
$-\log B$	5,170	4,969	4,626	4,443	4,021	3,957	3,866	3,833	3,808	3,787	3,768

Prin $\log B$ s-a notat expresia cuprinsă între parantezele mari din relațiile presiunii scrise prin aplicarea superpoziției, sub forma

$$p_s = i\left[\log\frac{1}{T_1} - \frac{Q_1-Q_2}{Q_1}\log\frac{2{,}25\,a}{r_s^2}\right] + p_0 - i\,\frac{Q_2}{Q_1}\log\frac{2{,}25\,a}{r_s^2}, \tag{7}$$

$$p_s = i\left[\log\frac{T_2}{T_1+T_2}\left(\frac{1}{T_2}\right)^{\frac{Q_{01}}{Q_1}} - \frac{Q_{01}-Q_2}{Q_1}\log\frac{2{,}25\,a}{r_s^2}\right] + p_0 - i\,\frac{Q_2}{Q_1}\log\frac{2{,}25\,a}{r_s^2}, \tag{8}$$

$$p_s = i\left[\log\frac{T_2+T_3}{T_1+T_2+T_3}\left(\frac{T_3}{T_2+T_3}\right)^{\frac{Q_{01}}{Q_1}}\left(\frac{1}{T_3}\right)^{\frac{Q_{02}}{Q_1}} - \frac{Q_{02}-Q_2}{Q_1}\log\frac{2{,}25\,a}{r_s^2}\right] + p_0 - i\,\frac{Q_2}{Q_1}\log\frac{2{,}25\,a}{r_s^2}, \tag{9}$$

$$p_s = i\left[\log\frac{T_2+T_3+T_4}{T_1+T_2+T_3+T_4}\left(\frac{T_3+T_4}{T_2+T_3+T_4}\right)^{\frac{Q_{01}}{Q_1}}\left(\frac{T_3}{T_3+T_4}\right)^{\frac{Q_{02}}{Q_1}}\left(\frac{1}{T_4}\right)^{\frac{Q_{03}}{Q_1}} - \frac{Q_{03}-Q_2}{Q_1}\log\frac{2{,}25\,a}{r_s^2}\right] + p_0 - i\,\frac{Q_2}{Q_1}\log\frac{2{,}25\,a}{r_s^2}, \tag{10}$$

$$p_s = i\left[\log\frac{T_2+T_3+T_4+T_5}{T_1+T_2+T_3+T_4+T_5}\left(\frac{T_3+T_4+T_5}{T_2+T_3+T_4+T_5}\right)^{\frac{Q_{01}}{Q_1}}\left(\frac{T_4+T_5}{T_3+T_4+T_5}\right)^{\frac{Q_{02}}{Q_1}}\left(\frac{T_5}{T_4+T_5}\right)^{\frac{Q_{03}}{Q_1}}\left(\frac{1}{T_5}\right)^{\frac{Q_{04}}{Q_1}} - \frac{Q_{04}-Q_2}{Q_1}\log\frac{2{,}25\,a}{r_s^2}\right] + p_0 - i\,\frac{Q_2}{Q_1}\log\frac{2{,}25\,a}{r_s^2}, \tag{11}$$

$$p_s = i\left[\log\frac{T_2+T_3+T_4+T_5+t}{T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+t}\left(\frac{T_3+T_4+T_5+t}{T_2+T_3+T_4+T_5+t}\right)^{\frac{Q_{01}}{Q_1}}\left(\frac{T_4+T_5+t}{T_3+T_4+T_5+t}\right)^{\frac{Q_{02}}{Q_1}}\left(\frac{T_5+t}{T_4+T_5+t}\right)^{\frac{Q_{03}}{Q_1}}\left(\frac{t}{T_5+t}\right)^{\frac{Q_{04}}{Q_1}}\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{Q_2}{Q_1}}\right] + p_0 - i\,\frac{Q_2}{Q_1}\log\frac{2{,}25\,a}{r_s^2}. \tag{12}$$

Pentru calculul valorii lui $-\log B$ corespunzător relațiilor (7)—(11), intervenind coeficientul de piezoconductibilitate a, s-a determinat mai întîi permeabilitatea din panta dreptei, obținute din cele șase puncte din domeniul debitului stabilizat conform relației (12), în figura 7.

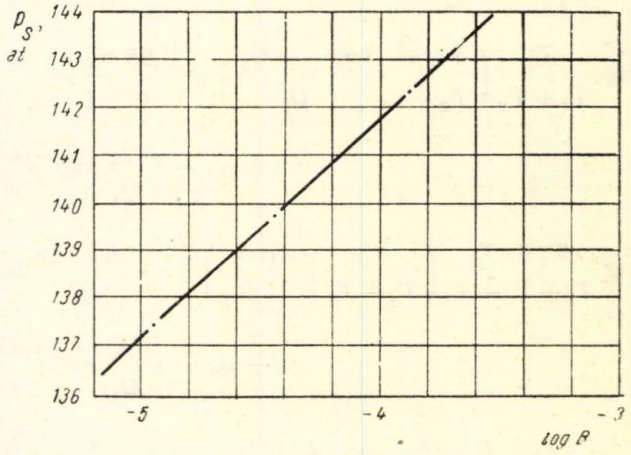


Fig. 7

Panta dreptei fiind

$$i = \frac{142{,}88 - 142}{3{,}957 - 3{,}768} = 4{,}66 \text{ at/ciclu},$$

au rezultat

$$k = \frac{2{,}3.1{,}5\,\dfrac{30.10^6}{86.400}\cdot 1{,}1}{4.3{,}14.4{,}66.10.10^2} = 22{,}5.10^{-3}\,\text{D}$$

și

$$a = \frac{k}{m\beta\eta} = \frac{22{,}5.10^{-3}}{0{,}2.50.10^{-6}.1{,}5} = 3380 \text{ cm}^2/\text{s}.$$

Pe baza acestor valori s-a putut completa graficul din figura 7 în zona debitului variabil, de unde se poate observa (punctele înscriindu-se pe dreaptă) absența „efectelor de sondă".

CONCLUZII

Posibilitatea prelucrării datelor furnizate de cercetarea sondelor prin schimbarea debitului, cu luarea în considerare a debitului variabil, permite atît extinderea cercetării în perioada ce prezintă cea mai mare viteză de variație a presiunii, cît și separarea efectului afluxului variabil asupra porțiunii inițiale a graficului de celelalte „efecte de sondă", și în principal de efectul de blocaj al zonei din jurul găurii de sondă.

Obţinerea curbei de variaţie a debitului fiind posibilă, procedeul preconizat se prezintă ca lipsit de dificultăţi de ordin practic.

Primită la redacţie la 14 aprilie 1965

BIBLIOGRAFIE

1. С. Б. Чернов, *Исследования фонтаной или нагнетательной скважины без остановки и получения кривых восстановления давления для определения параметров пласта.* Труды ВНИИ, **17**, 162—184.
2. D. Codreanu, *Determinarea unor caracteristici ale stratului şi sondei din date de măsurători de presiune fără închiderea sondei.* Petrol şi gaze, *4*, 140—148 (1959).
3. I. Creţu, *Determinarea permeabilităţii stratului şi a presiunii statice de fund pe baza măsurării variaţiei presiunii într-o sondă după schimbarea debitului.* Petrol şi gaze, *9*, 493—497 (1964).
4. N. Cristea, *Analiza curbelor de variaţie a presiunii cu timpul, obţinute în urma închiderii sondelor, Hidraulică subterană*, vol. II, 1958, 215—253.
5. В. П. Яковлев, *Оператор по исследованию нефтяных скважин*, 1952, 153.
6. P. Chaumet, *Application de la transformation de Laplace a l'étude des courbes de pression en régime transitoire.* Revue de l'Institut Français du Petrole, *12*, 1 444—1 453 (1962).
7. H. Pascal, *Sur l'étude des données de pression et de débit fournies par l'écoulement transitoire des gaz dans un gisement sand interruption de l'exploitation du puits.* Rev. Roum. Sci. Techn. méc. appl., **IX**, *1* (1964).
8. D. G. Russell, *Determination of Formation characteristics From Two-Rate Tests.* Journ. of Petr. Techn., Decemb. (1963).

RECENZII

V. KOLOUŠEK, J. HOŘEJŠÍ, *Uvod do téorie kmitání* (Introducere în Teoria vibraţiilor), Nakladat. dopravy a spojů, Praga, 1965, 76 p.

În literatura de specialitate se găsesc multe lucrări introductive în teoria vibraţiilor. Unele dintre acestea pun accentul în special pe fenomenul fizic; alte lucrări scot în evidenţă caracterul matematic al problemei. Cartea cunoscuţilor profesori cehi Koloušek şi Hořejší, bazată pe o bogată experienţă didactică, se ocupă de sistemele cu un singur grad de libertate; tratarea problemei este riguroasă din punct de vedere matematic, fenomenul fizic fiind de asemenea scos permanent în evidenţă.

Lucrarea este împărţită în patru capitole. Primul capitol este consacrat vibraţiilor libere şi forţate neamortizate, diferite fenomene care intervin fiind puse în evidenţă (interferenţă, bătăi etc.). Următoarele două capitole cuprind problema vibraţiilor amortizate. Menţionăm mai ales cazul vibraţiilor forţate, calculul amplitudinii, studiul zonei fenomenului de rezonanţă. În ultimul capitol se consideră unele probleme de natură energetică.

Cartea, foarte sistematic prezentată, se caracterizează printr-o deosebită claritate; ea este destinată în primul rînd studenţilor din învăţămîntul tehnic, dar poate fi folosită cu succes şi în activitatea de proiectare.

P. P. Teodorescu

R. DAVIES, *Cavitation in Real Liquids* (Cavitaţia în lichide reale), Elsevier Publ. Co., Amsterdam, Londra — New York, 1964, 180 p.

Lucrarea pe care o recenzăm cuprinde 11 comunicări prezentate la Simpozionul asupra cavitaţiei, ţinut în septembrie 1962 la Laboratorul de cercetări Warren (General Motors).

Cele 11 lucrări pot fi grupate în trei clase. Prima categorie (patru lucrări) se referă la dinamica bulelor de gaz într-un curent de lichid. A doua categorie (cinci lucrări) cuprinde rezultatele obţinute de unii cercetători americani în studiul mişcărilor în regim de supercavitaţie şi aplicaţiile practice ale acestora. A treia grupă cuprinde ultimele două comunicări din lucrare, care se referă la teoria tensiunii superficiale şi la efectele de suprafaţă în mişcarea bulelor nesferice.

O caracteristică a tuturor comunicărilor o reprezintă îmbinarea studiului analitic cu cel experimental.

O succintă analiză a fiecărei comunicări va da posibilitate să se pună în evidenţă pentru viitorul cititor al lucrării aspectele problemei cavitaţiei abordate de fiecare autor.

M. S. Plesset, în dinamica bulelor (p. 1—18, 12 ref. bibl.), studiază condiţiile termodinamice de existenţă a unor bule de gaz într-un mediu lichid, mişcarea de oscilaţie a acestora, stabilitatea bulelor şi în special difuziunea vaporilor prin peliculă şi în spaţiul ocupat de bule. Ipotezele în care s-a efectuat studiul sînt cele clasice (datorite lui Besant şi Rayleigh), la care s-au adăugat unele noi, referitoare la variaţia armonică a amplitudinii presiunii şi la difuziunea vaporilor între cele două faze ale mediului fluid considerat.

Comunicarea intitulată *Dezvoltarea şi absorbţia bulelor de gaz în lichide* (J. B. Keller, p. 19—29, 8 ref. bibl.) cercetează comportarea unor bule de gaz situate într-un curent de lichid în care concentraţia gazelor dizolvate este diferită de cea de saturaţie. Sînt stabilite condiţiile de formare a bulelor într-un mediu lichid de dimensiuni finite.

P. R. Garabedian face cîteva observaţii asupra *Scurgerii în jurul unei bule ce se ridică într-un tub* (p. 30—33, 3 ref. bibl.), punînd în evidenţă importanţa numărului Froude pentru studiul acestei mişcări. Bibliografia este foarte sumară, autorul omiţînd unele lucrări remarcabile asupra problemei studiate.

Importanţa pe care o are evoluţia bulelor de gaz care apar în procesul de cavitaţie este subliniată şi ilustrată cu date experimentale în lucrarea lui J. W. Westwater intitulată *Măsurători ale creşterii bulelor în timpul transferului de masă* (p. 34—54, 28 ref. bibl.). Cercetarea experimentală întreprinsă pune în evidenţă influenţa asupra evoluţiei bulelor de gaz a pereţilor solizi ce limitează curentul de lichid în care apare cavitaţia, fenomenul de electroliză, viscozitatea, tensiunea superficială şi inerţia.

A doua grupă de comunicări începe cu cea a lui M. P. Tulin, intitulată *Curgeri supracavitate şi aplicaţiile lor practice* (p. 55—79, 29 ref. bibl.). Autorul întreprinde o clasificare a mişcării corpurilor în lichide în regim de supracavitaţie. De asemenea se prezintă numeroase fotografii ale spectrului hidrodinamic al mişcării supracavitate în jurul a numeroase corpuri, ca, de exemplu, disc, suprafeţe portante, corpuri de revoluţie cu vîrf ascuţit şi sub diferite unghiuri de incidenţă, elici.

G. I. Taylor prezintă comunicarea despre cavitaţia în ungerea hidrodinamică (p. 80—101, 9 ref. bibl.), în care arată importanţa problemei şi studiază analitic şi experimental evoluţia cavitaţiei în cazul particular al lagărelor cu alunecare.

Problema este reluată în lucrarea lui G. Birkhoff intitulată *Probleme ale mişcării cu suprafeţe libere a fluidelor viscoase în interstiţii* (p. 102—121, 44 ref. bibl.), în care se întreprinde un interesant studiu matematic al curgerilor cu suprafaţă liberă în domenii limitate.

O cercetare experimentală detaliată însoţită de considerente teoretice asupra unui caz particular sînt cuprinse în lucrarea *Cavitaţii între plăci paralele în mişcare*, datorită lui D. F. Hays şi J. B. Feiten (p. 122—137, 1 ref. bibl.).

Observaţii interesante sînt cuprinse şi în comunicarea lui L. Floberg *Cavitaţia în filme lubrifiante de ulei* (p. 138—140, 4 ref. bibl.).

Unul dintre factorii importanţi care intervin în curgerile în regim de cavitaţie este studiat în detaliu şi cu metode noi în lucrarea lui I. Prigogine *Teoria moleculară a tensiunii superficiale* (p. 147—163, 22 ref. bibl.).

Ultima comunicare este datorită lui T. Brooke Benjamin şi se referă la *Efectele de suprafaţă în mişcările nesferice ale micilor cavităţi* (p. 164—180, 18 ref. bibl.). Se studiază „excitaţia parametrică" a oscilaţiilor nesferice a micilor cavităţi, precum şi oscilaţiile presupunînd suprafaţa cavităţilor ca fiind cvasiincompresibilă. De asemenea autorul expune o teorie a suprafeţelor ce delimitează cavităţile.

Prin aprofundarea studiului teoretic şi experimental al cavitaţiei, lucrările din culegerea recenzată prezintă un real interes pentru hidrodinamicieni.

Şt. Zarea

LUCRĂRI PRIMITE PRIN SCHIMB LA REDACȚIE

* * * *Elsevier's Dictionary of Aeronautics*, 1964.

* * * *Dictionary of Engineering Mechanics*, 1965.

J. THOMAS, *Transmissions Hydrostatiques*, 218 p., 1965.

Thieming-Taschenbücher, 1965

— Band II W. Hanle und Mitarbeiter, *Isotopentechnik*.

— Band 15 W. Pupp, *Vakuumtechnik*, Teil II.

— Band 21 Th. Ginsburg, *Die friedliche Anwendung von nuklearen Explosionen*.

— *Technical Reports of the Engineering Research Institute Kyoto University*, 1965.

Disertații de la Universitatea tehnică din Berlin

— G. CZERWENKA, *Querkraftanleitung in zylindrische oder abschnittweise Konische veränderliche dünne Schalen*, 1962.

W. HERBST, *Experimentelle Untersuchung über den Austritt eines Luftstrahls hoher Unterschallgeschwindigkeit aus Kreisförmigen und Tragflügelförmigen Flächen senkrecht gegen eine Wand*, 1963.

— H. SCHADE, *Einführung in die nicht-lineare hydrodynamische Stabilitäts Theorie*, 1964.

— G. BETTERMAN, *Beitrag zur Ermittlung des Messfehlers bei der Temperaturmessung mit Thermoelementen in strömenden heissen Gasen unter besonderer Berücksichtigung der Gasstrahlung*, 1964.

— H. PFÜTZNER, *Das dynamische Verhalten von rotierenden Wellen unter Berücksichtigung der Schmierfilmelastizität in den Lagern*, 1964.

— K. H. BAUMANN, *Dimensionslose Darstellung sowie Messmethoden des Wärmeüberganges in gasdurchströmten Drahtgewebepackungen*, 1963.

— J. MYSZKOWSKI, *Verfahren zur Berechnung der elastischen Grenzlast dünner Platten*, 1963.

* * *

— Institute of Sound and Vibration Research, *Annual Report for the year ending*, June 1965.

— Ministry of Aviation-Aeronautical *Research Council Reports and Memoranda*, 3365, 3387, 3390, 3393, 3394, 3396, 3400, 3401, 3391, 3403, 3404, 3407, 3408, 3409, 3412, 1965.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 20 NR. 6 P. 1511 BUCUREȘTI 1965

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

1965

INDEX ALFABETIC

STUDII	Tomul	Nr.	Pag.
ANASTASESCU DECEBAL, MUNTEANU ION, Efectul variaţiei de temperatură şi al deplasării reazemelor în calculul cadrelor spaţiale	18	1	59
APPELTAUER I., CUTEANU E., Contribuţie la problema rezemării intermediare a barelor cu pereţi subţiri	18	1	77
AVRAM C., FILIMON I., MARINOV R., Aspecte privind plasticizarea parţială a elementelor încovoiate din beton şi microbeton	20	6	1463
BIŢĂ OLGA, DINCĂ I., Aspecte ale frecării şi uzurii în cazul lubrifierii cu bisulfură de molibden	18	2	247
BUZDUGAN GHEORGHE, FETCU LUCIA, Grinda continuă pe reazeme elastice de lungime dată	19	4	849
CARAFOLI ELIE, MATEESCU DAN, Asupra unei clase de aripi delta avînd incidenţa sau panta variabilă după funcţii omogene în regim supersonic	18	2	299
CARAFOLI E., ATANASIU FR., Asupra unei clase de aripi „în săgeată" şi „în coadă de rîndunică"	19	3	543
CARAFOLI E., Extinderea mişcărilor conice la mişcări cvasiconice	19	4	981
CARAFOLI E., RĂDULESCU S., Scurgerea supersonică în jurul aripii delta subţiri în derivă	19	4	991
CONSTANTINESCU V. N., Asupra studiului condiţiilor de stabilitate a lagărelor circulare cu gaze	19	3	489
CONSTANTINESCU V. N., MARIN GH., Unele studii de laborator privind lubrificaţia cu gaze	20	6	1323
DROBOTĂ VICTOR, Flambajul lateral al grinzilor pendulare continue sub sarcini transversale concentrate şi uniform distribuite	19	3	701
DROBOTĂ VICTOR, Flambajul lateral al grinzilor pendulare continue sub sarcini mobile	19	4	919
DUDIŢĂ FL., Existenţa manivelei la mecanismele patrulatere sferice	18	2	355
DUDIŢĂ FL., Contribuţii la cinetostatica mecanismelor cardanice	20	5	1235
EGRI I., Contribuţii la calculul randamentului scripeţilor de cablu	19	3	763
ENE I. HORIA, Generalizarea unei probleme din mişcarea apelor arteziene	19	4	1043
FLORIAN VIRGILIU, Contribuţii privind calculul diafragmelor cu goluri, al diafragmelor cuplate şi al cadrelor-diafragme. I	20	6	1401
FÖRSTE J., Mişcarea staţionară a jetului laminar al unui lichid vîscos incompresibil dintr-un orificiu circular într-un semispaţiu la numere Reynolds mici	18	1	193
GIONCU VICTOR, Paraboloidul de rotaţie pleoştit, pe contur dreptunghiular, cu diferite rezemări pe contur. Aplicaţie pentru margini încastrate	18	2	407
HACKER T., Progrese recente în dinamica zborului. II. Unele probleme actuale ale teoriei stabilităţii şi maniabilităţii avioanelor	19	4	1009

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 20 NR. 6 P. 1513–1515 BUCUREŞTI 1965

	Tomul	Nr.	Pag.
KEINTZEL EINAR, Determinarea aproximativă a forţelor seismice şi a altor acţiuni dinamice la cadre multietajate	19	3	715
LIBRESCU L., Asupra teoriei învelitorilor şi plăcilor elastice anizotrope	18	1	117
LIBRESCU L., Flutterul neliniar al panourilor elastice subţiri, eterogene, ortotrope	20	6	1433
LIVOVSCHI LEON, Automate finite cu elemente mecanice	18	1	147
MANEA V., Asupra ecuaţiilor plăcilor plane subţiri elastice în aproximaţia neliniară în teoria fără ipoteza Love-Kirchhoff	18	2	377
MANGERON D., KRIVOŞEIN L. E., Noi metode de calcul numeric al soluţiilor diferitelor sisteme integrodiferenţiale interesînd mecanica aplicată. II. Sisteme integro-diferenţiale ordinare polilocale	18	1	3
MANGERON D., CHALEAT R., Aproximaţii de ordin superior în studiul mişcării perturbate a oscilaţiilor	19	4	801
MANGERON D., CHALÉAT R., DRĂGAN C., Teoria generală a aproximaţiilor succesive în studiul mecanismelor şi maşinilor prin noua metodă matricialo-tensorială în vederea folosirii maşinilor electronice de calcul	20	5	1157
MANOLESCU G., Asupra stabilităţii meniscurilor separînd două faze imiscibile în tuburi cilindrice verticale în condiţii „statice"	18	1	201
MANOLESCU N. I., Sistematizarea şi clasificarea mecanismelor-motor plane articulate cu două grade de mobilitate „total" ($M_3 = 2$) şi „parţial" ($M_3^p = 2$)	20	6	1355
MATEESCU CRISTEA, Contribuţie la studiul aglomerării de zăpadă pe construcţii sub acţiunea viscolului	18	3	587
MIŞICU M., O extindere a ecuaţiilor lui Cosserat relative la mişcarea mediilor deformabile structural neomogene	19	4	839
NICA AL., Asupra calculului sistemelor de ungere cu lubrifianţi fluizi	18	2	235
NICA AL., Contribuţii la determinarea jocului real în lagărele cu alunecare	20	5	1149
T. OROVEANU, Cîteva consideraţii asupra deplasării suprafeţei de contact între două fluide într-un mediu poros neomogen	20	5	1065
T. OROVEANU, Cîteva consideraţii asupra dezlocuirii fluidelor miscibile în medii poroase	20	6	1269
PANĂ TOMA, Calculul pulsaţiilor proprii ale vibraţiilor de încovoiere-răsucire la barele cu pereţi subţiri avînd profilul închis	18	2	455
PASCAL H., Asupra curgerii tranzitorii a gazelor prin conducte magistrale	18	2	261
PASCAL H., MUNTEANU F., Rezolvarea numerică a ecuaţiilor curgerii nestaţionare a gazelor prin conducte magistrale	18	3	517
PASCAL H., MUNTEANU F., Curgerea tranzitorie a gazelor printr-un mediu poros în regim turbulent	20	6	1283
PATRAULEA N. N., POSTELNICU NICOLAE, MĂLAIU ELEONORA, GAVRILĂ MARIA, Pernă de aer cu cameră plină cu recirculaţie	19	4	1031
PAVELESCU DAN, Aspecte ale dependenţei perioadei iniţiale a uzurii de factorii mecanici şi chimici în cazul frecării de alunecare mixte sau limită	19	3	555
PAVELESCU DAN, Aspecte ale evoluţiei uzurii legate de caracterul statistic al metodei de măsură cu izotopi radioactivi	20	6	1305
PELECUDI CHR., Metoda acceleraţiilor compuse în lanţurile cinematice plane	18	2	315
PELECUDI CHR., Metoda acceleraţiilor superioare compuse în lanţurile cinematice plane	19	3	739
PELECUDI CHR., Punctele caracteristice ale acceleraţiilor compuse superioare	19	4	933
PELECUDI CHR., Metoda solidarizării pentru lanţurile cinematice închise. I	20	5	1203
PELECUDI CHR., Metoda solidarizării pentru lanţurile cinematice închise. II	20	6	1335
PETCU VALERIU, Calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat rezemate pe trei laturi, solicitate de încărcări uniform distribuite	18	1	91
PETCU VALERIU, Criterii de soluţionare a ecuaţiei de echilibru plastic a plăcilor dreptunghiulare de beton armat	18	2	429
PETCU VALERIU, Calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat rezemate pe trei laturi, solicitate de încărcări de tip hidrostatic	20	5	1099
PETCU VALERIU, Calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat rezemate pe tot conturul, solicitate de încărcări de tip hidrostatic	20	6	1475

	Tomul	Nr.	Pag.
PETRE A., BOGDAN V., Discuri neomogene în mişcare de rotaţie	20	5	1133
POPOV M. P., GOGONEA S., MITRICĂ I., Contribuţii la calculul pierderilor volumice prin jocul frontal al pompelor cu roţi dinţate	19	3	575
PRIŞCU RADU, Solicitări termice exterioare la barajele arcuite	18	1	35
PRIŞCU RADU, CONSTANTINESCU MIHAI, Calculul elastic al arcelor circulare solicitate de presiuni variabile	19	4	863
PRIŞCU R., POPOVICI A., O soluţie generală pentru dimensionarea barajelor de greutate triunghiulare	20	5	1117
SANDU IOAN, Alegerea reţelei structurale optime la elaborarea cinematicii cutiilor de viteze cu mai mult de două axe	20	4	961
SĂVULESCU ST. N., Influenţa vîrtejurilor longitudinale nestaţionare asupra profilului Blasius în stratul-limită tranziţional al plăcii plane	20	5	1083
SCHMIDT GÜNTER, Interacţiunea vibraţiilor forţate şi parametrice la plăci curbe subţiri pleoştite	19	3	641
SOARE MIRCEA, Contribuţii la calculul numeric al hiparilor în teoria încovoierii	19	3	675
SOARE MIRCEA, Calculul numeric al paraboloidului de rotaţie pleoştit pe contur rombic	19	4	881
SOÓS EUGEN, Despre determinarea stării de tensiune şi de deformaţie în problema plană a elastodinamicii corpurilor anizotrope	18	2	395
SZABLEWSKI W., Scurgerile turbulente în dîra surselor termice şi de difuziune	18	1	173
SZÉKELY I., Angrenaj cilindro-conic cu contact liniar	18	1	135
SZÉKELY I., MUREŞAN T., LELUŢIU AL., Mecanisme de comandă logică rigide şi elastice	19	4	949
TIPEI I., Asupra mecanicii mediilor continue ne-newtoniene	18	2	221
VASILCA GH., BIŢĂ OLGA, DINCĂ I., Aspecte de uzură şi rodaj la unele structuri eutectice de aluminiu	18	1	159
WOLFERSDORF L. V., Scurgerea magnetohidrodinamică printr-un canal în cazul comportării electrice neomogene a pereţilor săi	18	2	285
ZAHARESCU A., Micşorarea prin corecţie electrică, a timpului de răspuns al unor traductoare de mărimi mecanice	19	3	783

NOTE

CREŢU I., Posibilitatea luării în considerare a debitului variabil la cercetarea sondelor prin schimbarea debitului în trepte	20	6	

MANIFESTĂRI ŞTIINŢIFICE

PELECUDI CHR., Conferinţa de tehnica mecanismelor, Karl-Marx-Stadt, 1964, privind problemele dinamice şi rezultatele experimentale în domeniul tehnicii mecanismelor, 1—3 octombrie 1964	18	2	473
PELECUDI CHR., A VII-a sesiune ştiinţifică a Institutului politehnic Iaşi, Secţia a III-a, Mecanică teoretică şi fizică	19	4	1051
POPA OCTAVIAN, Conferinţa de maşini hidraulice, Timişoara, 23—26 septembrie 1964	18	2	467

MOSTAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale *de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.*

● Note (*lucrări mai scurte*) *cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.*

● Referate ştiinţifice şi tehnice *în care se expune: stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.*

● Recenzii *asupra cărţilor şi studiilor române sau străine.*

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

● *Astromecanică (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, reintrarea în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).*

● *Aerodinamică (mecanica fluidelor, aerodinamică, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).*

● *Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).*

● *Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).*

● *Mecanică generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).*

● *Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).*

● *Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).*

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc.

Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va înscrie la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru revistă se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar două rezumate, dintre care unul de cca. 12 rînduri, iar altul de circa 5 rînduri.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie Bucureşti, str. C. Mille nr. 15 raionul „16 Februarie".

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

V. N. CONSTANTINESCU, **Teoria lubrificației în regim turbulent**, 1965, 343 p., 29 lei.

И. ТИПЕЙ, В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, А. НИКА, О. БИЦЭ, **Подшипники скольжения**, 1964, 459 p., 30 lei.

AUREL BELEȘ și MIRCEA SOARE, **Paraboloidul eliptic și hiperbolic în construcții**, 1964, 623 p. + 2 pl., 33 lei.

D. DAMSKER, **Principii și mijloace noi de automatizare a acționărilor electrice**, 1964, 439 p., 24,50 lei.

V. PIMSNER, C. A. VASILESCU, și GH. RĂDULESCU, **Energetica turbomotoarelor cu ardere internă**, 1964, 756 p., 45 lei.

V. N. CONSTANTINESCU, **Lubrificația cu gaze**, 1963, 635 p., 39 lei.

SUZANA GÎDEA, M. PROTOPOPESCU și D. DRIMER, **Metalurgia fizică a semiconductorilor, I**, 1963, 501 p. + 4 pl., 31 lei.

T. OROVEANU, **Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene**, 1963, 329 p., 16,30 lei.

N. N. PATRULEA, **Studii de aerodinamica hipersustentației, Zborul cu decolare și aterizare scurtă sau la verticală**, 1962, 627 p. + 3 pl., 32,70 lei.

* * * **Sesiunea științifică jubiliară a Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia" al Academiei R.P.R.**, 1963, 444 p. + 1 pl., 23,30 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
STUDII ȘI CERCETĂRI DE ENERGETICĂ ȘI ELECTROTEHNICĂ
STUDII ȘI CERCETĂRII DE METALURGIE
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGÉTIQUE
— SÉRIE DE MÉTALLURGIE

St. cerc. mec. apl. Tom. 20 Nr. 6 p. 1267—1516 București 1965

I.P.I. — c. 4235

43 832 Lei 25.—